

Содержание

0.0.1	Как вносить изменения в файл	1
1	A_∞-структуры, Δ_{BV}-оператор, поливекторные поля	2
1.1	Наша задача — понять, что вместо вопроса	2
1.2	Задача матричной факторизации	2
2	Новый взгляд на геометрию	3
2.1	Собственно взгляд	3
2.2	Напоминание о том, что такое конформная теория поля	3

А.С. нам рассказывает вещи, которые не должны быть потеряны. Каждый раз он рассказывает, каковой (по-видимому) на самом деле должна быть парадигма. Здесь будет записываться «передний фронт разработки», как в программировании. (Таким образом, это не конспект нашего семинара.)

Пожалуйста, **вносите изменения** в этот файл, **дополняйте** его. Пусть он станет вашим рабочим столом. Нет никакого другого способа что-то понять, чем попытаться изложить это листу бумаги/соседу/уточке в ванной. Но у изложения листу бумаги есть два дополнительных бонуса:

- не пропадёт ваш скорбный труд и дум высокое стремление
- возможность конструктивного фидбека от n слушателей семинара

0.0.1 Как вносить изменения в файл

После некоторых размышлений я пришёл к выводу, что в качестве системы контроля версий мы будем использовать GitHub.

Если вы обнаруживаете, что чего-то не понимаете — предлагаю задать вопрос сноской. Делается это с помощью синтаксиса `\que{почему?}`. Пример¹ заданного таким образом вопроса.

Если вы обнаруживаете, что что-то понимаете — просто берёте и редактируете текст.

Если у вас не компилируется этот `tex`-файл — закомментируйте строку `\usepackage{psycg}` и попробуйте снова; пакет `psycg`, содержащий красивые кириллические шрифты, не все себе устанавливали.

и вот я вношу изменение

¹почему?

1 A_∞ -структуры, Δ_{BV} -оператор, поливекторные поля

1.1 Наша задача — понять, что вместо вопроса

(Пока что наша задача — великолепно переписать этот огрызок.)

Есть нечётные векторные поля v_n :

$$v_n \in \oplus_k V^{\otimes k} \rightarrow V.$$

И главное уравнение A_∞ -структуры имеет вид: $v_n^2 = 0$. Или $\{v, v\}_G = 0$.

Но неправильно говорить просто об этом уравнении. Нужно ещё сфакторизовать по соотношению эквивалентности $v \sim v + \{v, w\}$ — автоморфизмам этого векторного пространства.

$$v = v_0 + Pol, \quad Pol \ll v_0.$$

Получится уравнение $\{v_0, Pol\} + \{Pol, Pol\} = 0$.

Далее, можно сказать, что $Pol = P_0 + \omega$. Т.е. $v = v_0 + P_0 + \omega$. Именно ω , этот чёртов третий член, даёт нам когомологии. Первые же два члена этого разложения определяют мир, который рассматривается.

Стоит отметить, что $v_0 : V^{\otimes 2} \rightarrow V$ — обычное умножение. Поэтому его обычно обозначают m_2 .

Если мы работаем с кольцом $\mathbb{C}[x] \otimes \mathbb{C}[\lambda, \theta]/(\lambda\gamma\lambda)$ (пространственных переменных x 10, чётных полей λ 16, нечётных полей θ тоже 16), а в качестве P_0 мы берём $\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$, то получится $\mathcal{N} = 1$ $D = 10$ SYM ². Низкоэнергетическое приближение — $D = 10$ супергравитация.

Получается такой коммутативный квадрат:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \text{nearly comm.limit} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hbar \Delta_{BV} Pol + \{Pol, Pol\} = 0 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \{Pol, Pol\} = 0 \end{array}$$

И наша задача — понять, что вместо вопроса.

1.2 Задача матричной факторизации

Точки на нашем пространстве модулей могут подъезжать к границе, и нужно предложить какое-то граничное условие. Граница является браной.

Сама по себе задача матричной факторизации давно известна в теории особенностей и сводится к элементарному утверждению. Именно, нужно решить матричное уравнение на N вида $W = N^2$. $W(x)$ — суперпотенциал, N — матрица, которую необходимо найти.³ Высший смысл происходящего формулируется так: триангулированные категории особенностей слоёв отображения W эквивалентны категориям В-бран.

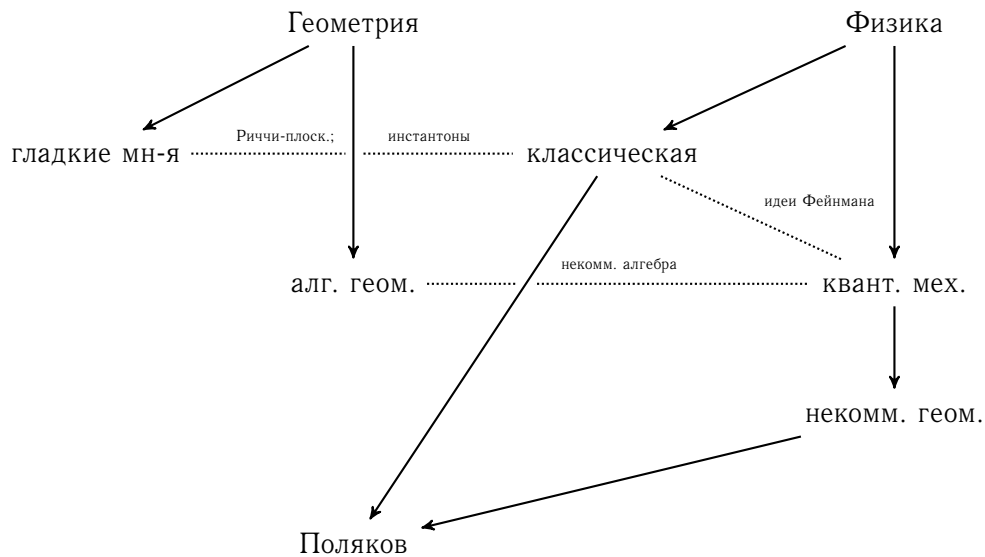
²интересно, какая из пяти?..

³Тема матриц не раскрыта

2 Новый взгляд на геометрию

2.1 Собственно взгляд

Классическая геометрия является вырождением геометрии Полякова.



Есть две точки зрения на то, что изучает геометрия:

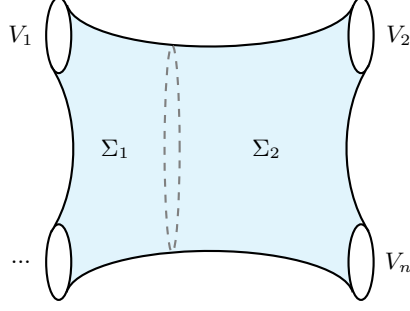
- пространство
- пространство и какая-нибудь геометрическая структура на нём

Согласно Полякову, (гомотопическая) конформная теория — это и есть пространство + геометрия на нём.

2.2 Напоминание о том, что такое конформная теория поля

Конформные теории поля — теории поля, инвариантные относительно конформных преобразований метрики. В них есть «основной объект» I , зависящий от поверхности Σ (вид поверхности зависит от того, открытая или замкнутая струна, а также от количества наблюдаемых V_1, \dots, V_n в рассматриваемом корреляторе). Метрик, сфакторизованных по соотношению эквивалентности «конформно связанные метрики эквивалентны», столько же, сколько комплексных структур, поэтому основной объект I зависит также от комплексной структуры (т.е. от дифференциала Бельтрами μ , который параметризует модули комплексных структур на Σ). Комплексные структуры, очевидно, надо изучать по модулю диффеоморфизмов. Физический смысл нижеследующей картинке вот каков: для того, чтобы вычислить коррелятор операторов V_1, \dots, V_n , нужно вырезать малые диски вокруг точек worldsheet'a и вычислять инварианты Громова—Виттена, являющиеся подсчётом композиций кобордизмов комплексно одномерных многообразий⁴.

⁴я правильно понимаю, что основной объект $I(\Sigma, V_1, \dots, V_n)$ и соответствующий ему инвариант Громова—Виттена — это одно и то же?



Т.е. вот где основной объект принимает значения:

$$I(\Sigma, \mu) \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n \otimes (\mu(\Sigma)/\text{diff})$$

и при этом есть единственная аксиома: что если эту поверхность разрезать, то

$$I(\Sigma, \mu) = I(\Sigma_1, \mu) \circ I(\Sigma_2, \mu).$$

Тензор энергии-импульса же можно вытащить из такой теории вариацией основного объекта по дифференциалу Бельтрами:

$$T = \frac{\delta I(\Sigma, \mu)}{\delta \mu}$$

Польчинский пишет действие, которое мы назовём действием старой струнной геометрии:

$$S = \int g_{\mu\nu}(x) dx^\mu * dx^\nu + B_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

второй член — поле Калба—Рамона, 2-форма на таргете. Действие новой же струнной геометрии таково:

$$S = \int_{\Sigma} \left(P_i \bar{\partial} X^i + \bar{P}_{\bar{i}} \partial \bar{X}^{\bar{i}} + \left[g^{i\bar{j}}(x, \bar{x}) P_i P_{\bar{j}} + \mu_j^i P_i \bar{\partial} \bar{X}^{\bar{j}} + \mu_{\bar{j}}^{\bar{i}} P_{\bar{i}} \partial X^j + b_{i\bar{j}} \partial X^i \bar{\partial} \bar{X}^{\bar{j}} \right] \right). \quad (2.1)$$

С помощью комплексной структуры J можно переходить от старой геометрии к новой и, почти всегда, наоборот:

$$(G, B) \xleftrightarrow{J} (g, \mu, \bar{\mu}, b). \quad (2.2)$$

Поговорим про теорию

$$S = \int_{\Sigma} P_i \bar{\partial} X^i.$$

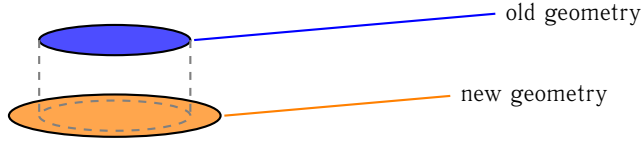
В ней есть поля размерности $(\bullet, 0)$. Это, конечно, функции $f(x) \in (0, 0)$, но также и $(\text{Vect} \oplus \Omega) \in (1, 0)$ — алгебра векторных полей, расширенная своими представлениями. Такие элементы образуют алгебру Ли, назовём её L .

Новая геометрия лежит в $L \otimes \bar{L}$. Именно, произведём следующее несложное вычисление:

$$(V \oplus \Omega^1) \otimes (\bar{V} \oplus \bar{\Omega}^1) =$$

$$= V \otimes \bar{V} \oplus V \otimes \bar{\Omega}^1 \oplus \Omega^1 \otimes \bar{V} \oplus \Omega^1 \otimes \bar{\Omega}^1.$$

Как уже стало понятно из боевой раскраски, $g \in V \otimes \bar{V}$, $\mu \in V \otimes \bar{\Omega}^1$, $\bar{\mu} \in \Omega^1 \otimes \bar{V}$, $b \in \Omega^1 \otimes \bar{\Omega}^1$. Новая геометрия «чуть» больше старой:



Например, в старой геометрии годилась только Риччи-плоская метрика.

Новая геометрия существует на 0-мерных схемах. (А 0-мерные схемы — это по разным причинам хорошо.)

Говоря «схема», мы, в первую очередь, держим в уме следующий пример:

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_{F(x)}.$$

Посредством резольвенты Кошуля это эквивалентно $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \theta]$ с дифференциалом $Q = F \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Пространство является гомологическим многообразием с гомологическим векторным полем. (Гомологическое векторное поле — такое векторное поле $Q = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, что $Q^2 = 0$.) Для вещественно двумерного многообразия с комплексной структурой условие гомологичности векторного поля означает интегрируемость структуры. Деформация многообразия — это деформация гомологического векторного поля.⁵

Традиционного пространства в CFT нет.

Пусть есть семейство CFT_t . Пусть, когда $t \rightarrow t_0$, некоторая группа полей неожиданно приобретает размерность 0.

Назовём эти поля $\tilde{\varphi}$. У них есть операторное разложение

$$\tilde{\varphi}_a(t) \tilde{\varphi}_b(0) = c_{ab}^c(z, t) \tilde{\varphi}_c + \dots$$

Мы видим, что пространство возникает алгебраически. Возникает как аффинная схема («по Гротендику»), а не как набор дисков, склеенных между собой.

Классическая физика и связанная с ней дифференциальная геометрия умерли. Фейнман как великий контрреволюционер.

Пусть $\gamma \in L \otimes \bar{L}$, $a \in L$, $\bar{a} \in \bar{L}$. Определим скобку $[[,]]$:

$$[[a \otimes \bar{a}, b \otimes \bar{b}]] := [a, b]_L \otimes [\bar{a}, \bar{b}]_{\bar{L}}$$

Уравнение струнной гравитации, предположительно, выглядит так:

$$(d + Q)(\gamma) + [[\gamma, \gamma]] + \mathcal{O}(\gamma^3) = 0 \quad (2.3)$$

$\gamma \in (g, \mu, \bar{\mu}, b)$, так что это действительно уравнение струнной гравитации (струнной — потому что с полем Калба—Рамона b , гравитации — потому что с метрикой). У этого уравнения есть решения на схемах, которые можно изучать.

То есть, по-видимому, уравнения струнной гравитации имеют вид уравнения Маурера—Картана.

Не так же ли выглядят уравнения М-теории? Этот вопрос, естественно, открыт.

Изучение этого уравнения и его симметрий — это и есть более-менее изучение струнной геометрии пространства-времени.

⁵Тут где-то ещё мимо проходили обобщённые деформации комплексных структур по Баранникову—Концевичу, но, где конкретно, я не понимаю.