

Содержание

0	Как вносить изменения в файл	2
0.1	Зачем нужна система контроля версий?	2
0.2	Linux-мануал	3
0.2.1	При первом использовании	3
0.2.2	При использованиях последующих	4
0.3	Windows-мануал	5
0.3.1	При первом использовании	5
0.3.2	При использованиях последующих	6
1	A_∞-структуры, Δ_{BV}-оператор, поливекторные поля	7
1.1	Наша задача — понять, что вместо вопроса	7
1.2	Задача матричной факторизации	7
2	Новый взгляд на геометрию	8
2.1	Собственно взгляд	8
2.2	Напоминание о том, что такое конформная теория поля	8
3	Тропический взгляд	11
3.1	Введение	11
3.2	Струнная геометрия в тропических координатах	11
3.3	Как из тропической науки многообразия Калаби—Яу лезут	13
3.4	Тропический миррор (анонс)	16
4	Связь суперконформной теории поля и теории Сайто	16
4.1	Строим основной объект, деформируем дифференциал Бельтрами	16
4.2	Теория Сайто	17
4.2.1	Изложение хронологическое	17
4.2.2	Изложение теоретико-полевого	18
5	Топологическая квантовая механика	19
5.1	A_∞ —структура и один из контекстов её возникновения в матфизике	19
5.2	Перенормировки в топологической квантовой механике	20
5.3	Об аксиальной аномалии	21
5.4	Как вычислять амплитуды	21
5.5	Постоянная Планка — скрытое число петель (внутренних и внешних)	22
6	Концевич и теория деформаций	22
6.1	Пока не пережали	23
6.2	Постановка задачи о деформационном квантовании	23
7	Вместо фейнмановского интеграла — некоммутативная геометрия	24
7.1	Программа	24
7.2	Струнная теория поля	26
7.3	Правильное понимание тетрад, уравнения Эйнштейна через тетрады и фактическое существование кручения	27

А.С. нам рассказывает вещи, которые не должны быть утеряны. Каждый раз он рассказывает, каковой (по-видимому) на самом деле должна быть парадигма. Здесь будет записываться «передний фронт разработки», как в программировании. (Таким образом, это не конспект нашего семинара.)

Пожалуйста, **вносите изменения** в этот файл, **дополняйте** его. Пусть он станет вашим рабочим столом. Нет никакого другого способа что-то понять, чем попытаться изложить это листу бумаги/соседу/уточке в ванной. Но у изложения листу бумаги есть два дополнительных бонуса:

- не пропадёт ваш скорбный труд и дум высокое стремление
- возможность конструктивного фидбека от n слушателей семинара

0 Как вносить изменения в файл

Если вы обнаруживаете, что чего-то не понимаете — предлагаю задать вопрос сноской. Делается это с помощью синтаксиса `\que{почему?}`. Пример¹ заданного таким образом вопроса.

Если вы обнаруживаете, что что-то понимаете — просто берёте и редактируете текст.

Если у вас не компилируется этот `tex`-файл — закомментируйте строку `\usepackage{psycug}` и попробуйте снова; пакет `psug`, содержащий красивые кириллические шрифты, не все себе устанавливали.

В качестве системы контроля версий мы будем использовать GitHub (сейчас это фактически стандарт индустрии).

0.1 Зачем нужна система контроля версий?

Зачем Волга впадает в Каспийское море, а хлоропласты — зелёные?

GitHub основан на Git. Их плюсы:

- У Git не бывает ошибок при синхронизации, в отличие от многих других систем совместной разработки (например, `shared Dropbox folder` творит ерунду, когда трое или больше человек одновременно работают над файлом)
- Git сохраняет абсолютно все версии отслеживаемых файлов. Каждый раз, когда вы делаете коммит, вы сохраняете в специальной скрытой папке снимок состояния вашего проекта, который можете позже восстановить или с которым можно сравнить текущее состояние.
- Удобно, что проект публичен и имеет короткий, простой и понятный, милый нашему сердцу веб-адрес — github.com/m-theory/book.

Минус у Git/GitHub только один — относительная сложность освоения. Но вас никакие сложности не коснутся, потому что ниже по пунктам расписано, что и как делать.

¹почему?

0.2 Linux-мануал

0.2.1 При первом использовании

Сначала необходимо установить git. Для этого, как знает каждый Linux-юзер, нужно запустить Terminal/Konsole и установить соответствующий пакет. В Ubuntu 14.04 это делается командой

```
sudo apt-get install git
```

В других дистрибутивах эта команда может выглядеть по-другому, но каждый Linux-пользователь знает, как она выглядит для его дистрибутива.

Далее необходимо сделать клон на своём локальном компьютере текущей версии репозитория m-theory:

```
git clone https://github.com/m-theory/book.git
```

Такой клон называется локальным репозиторием. *(В Git/GitHub у каждого из проектов, над которым работает разработчик, есть по репозиторию; именно в репозиториях хранятся файлы.)*

В результате выполнения такой команды репозиторий будет скопирован в папку ~/book. Зайдём же в неё.

```
cd book
```

Полюбуемся на файлы в ней:

```
ls
```

Попробуем внести изменение в tex-файл. Откроем его texmaker'ом (или вашим любимым текстовым редактором — vim, nano, kate, gedit, emacs):

```
texmaker paradigm.tex
```

Внесли изменения. Внесли? Отлично.

Давайте полюбуемся на внесённые изменения:

```
git diff paradigm.tex
```

Более чем наглядно, не правда ли? *(Выйти из процесса git:diff можно нажатием клавиши q.)*

Далее необходимо пометить интересные нам файлы как отслеживаемые (добавить их под версионный контроль). Если пометить как отслеживаемые все файлы репозитория командой `git add .` и затем делать коммиты, то на диске такого разработчика будут сохраняться не только 654 версии файлов `paradigm.tex` и `paradigm.pdf`, но и 654 версии таких невероятно полезных файлов, как `paradigm.aux`, `paradigm.log`, `paradigm.blg`, `paradigm.toc`, (я могу долго перечислять), возникающих во время процедуры PDF \LaTeX . Это была бы лишь трата места на жёстком диске. К счастью, в нашем случае мы можем заранее назвать все файлы, которые мы хотим индексировать, так что удобно просто выполнить две команды

```
git add paradigm.tex
```

```
git add paradigm.pdf
```

Что это? Зачем это нужно? Здесь уместно ещё раз проговорить, что Git — это система контроля версий. Командами `git add` мы создали указатель на текущие версии файлов `paradigm.tex` и `paradigm.pdf`. После совершения так называемого коммита в скрытой папке `/.git/` будут созданы слепки этих текущих версий. Оттуда Git способен полностью восстановить любую из версий любого из отслеживаемых файлов. Каждый раз, когда вы делаете коммит, вы сохраняете снимок состояния вашего проекта, который можете позже восстановить или с которым можно сравнить текущее состояние.

Пытаемся сделать коммит

```
git commit -m "Внёс небольшие правки; в частности, задал пару вопросов в сносках"
```

но, внезапно, нам выкатывают такую предьяву:

```
Please tell me who you are.
```

```
git config --global user.email "you@example.com"
```

```
fatal: unable to auto-detect email address
```

Действительно, GitHub просит публиковать e-mail'ы тех, кто делает коммиты (=разработчиков). Это необходимо, чтобы, увидев на гитхабе восхитительный проект, заинтересованные лица могли связаться с его авторами. Словом, ничего не поделаешь, придётся послушаться и выполнить команду

```
git config --global user.email "yourmail@xxx.xxx"
```

и теперь всё получится

```
git commit -m "Внёс небольшие правки; в частности, задал пару вопросов в сносках"
```

Сообщение, отражающее суть изменения (commit message), надо писать обязательно!

Ура, теперь текущее состояние файлов, с которыми вы работаете, сохранено в репозиторий. Сделан слепок, из которого вы это текущее состояние сможете в любой момент восстановить.

Последнее, что осталось сделать —

```
git push
```

Здесь вы «толкаете» свой локальный репозиторий на удалённый сервер. Здесь вас спросят username и password. Ваш юзернейм `m-theory`, ваш пассворд вы знаете (а если не знаете, спросите у кого-нибудь из нас).

Всё! Файлы с изменениями публично доступны по адресу github.com/m-theory/book.

0.2.2 При использованиях последующих

Работа начинается с

```
git pull
```

Здесь отличие. `git pull` «тянет» удалённый репозиторий (расположенный по адресу github.com/m-theory/book — более точно, по тому адресу, с которого вы в своё время сделали `git clone`) на локальную машину, при этом локальный репозиторий будет перезаписан. Это необходимо, когда вы не уверены в том, что именно вы внесли последнюю правку в файлы нашего «официального» репозитория github.com/m-theory/book (т.е. необходимо почти всегда).

```
cd book
```

```
texmaker paradigm.tex
```

(вносим изменения; необязательный шаг — полюбоваться на них командой `git diff paradigm.tex`)
(выйти из открывшегося процесса `book:git` можно нажатием клавиши `q`)

```
git commit -a -m "Внёс небольшие правки; в частности, задал пару вопросов в сносках"
```

Сообщение, отражающее суть изменения (commit message), надо писать обязательно! Директива `-a` автоматически делает `git add` для всех файлов, которые уже являются отслеживаемыми.

Q: Зачем `git add`, зачем снова добавлять файлы в отслеживаемые?

A: `git commit` создаёт слепок файлов в том состоянии, в котором они были на момент последнего выполнения `git add`. Так что следует сначала вносить изменения, и лишь затем выполнять `git add filename(s)` и `git commit`. К счастью, последние две команды можно объединить в одну (`git commit -a`).

Мы не предполагаем, что в проекте появятся другие значимые файлы, помимо `paradigm.tex` и `paradigm.pdf`, что появятся другие файлы, которые следует отслеживать. Если они появятся, то непосредственно перед коммитом необходимо сделать одну или несколько команд вида `git add newfile.tex`.

Осталось лишь отправить результат наших правок на «официальный репозиторий»:

```
git push
```

Здесь всё то же самое: username `m-theory`, пароль вы знаете.

0.3 Windows-мануал

0.3.1 При первом использовании

Заходим на github.com, листаем вниз, долистываем до кнопки «Download GitHub for Windows». Устанавливаем.

После установки запустится замечательный графический интерфейс. Он скажет «Welcome» и предложит залогиниться. Username наш `m-theory`, пароль вы знаете (а если не знаете, то спросите у кого-нибудь из нас).

На шаге «Configure» вам просто нужно нажать Continue.

На шаге поиска локальных репозитория нажать Skip. Всё, вас отпустило, и вам пишут «Get started by adding a repository».

В левом верхнем углу вашего внимания добивается пульсирующая кнопка «+». Жмём на неё, выбираем вкладку Clone, нажимаем на `book`. Clone `book`.

Отлично! Вы в раю. Ваши файлы находятся, скорее всего, в папке `/Документы/GitHub/book/`. Вы можете изменять их там как хотите и копировать в эту папку что хотите.

Как только содержимое этой папки малейшим образом изменится, в приложении GitHub (надеюсь, вы его ещё не закрыли?..) появится оповещение «Uncommitted changes». Нажимаем на Show. Пишем что-нибудь в «Message» и «Description», делаем коммит. После чего замечаем, что справа от кнопки Sync есть ↑1, что как бы намекает нам загрузить изменения с локальной машины на «официальный» репозиторий github.com/m-theory/book.

Вы восхитительны! Ваши изменения вписаны золотыми буквами в историю github.com/m-theory/book. Просто пройдите туда и взгляните.

0.3.2 При использованиях последующих

Если в публичном репозитории github.com/m-theory/book кипела работа, пока вы наслаждались жизнью, то у кнопки Sync в правом верхнем углу будет ненавязчиво привлекать к себе внимание циферка (количество коммитов, сделанных другими людьми). Кнопку Sync в таком случае неплохо бы нажать, чтобы загрузить на свой компьютер результаты работы других людей (самое свежее состояние проекта).

Важный момент, о котором осталось сказать. Если вы компилируете этот tex-файл в той же папке (/Документы/GitHub/book/), у вас постоянно обновляются разные автоматически генерируемые файлы (обычно это paradigm.aux, paradigm.log, paradigm.blg, paradigm.toc и paradigm.synctex.gz). Как уже было сказано, Git сохраняет слепок каждого из файлов, за которым он «следит». Эти слепки хороши в том смысле, что по ним можно восстановить каждую из версий файлов, но в случае .aux, .log, ... файлов они просто засоряют ваш диск. Можно приказать Git не делать слепки этих файлов. Для этого нажимаем на (символизирующую настройки) шестерёнку, выбираем «Repository settings». Выбираем Add a default .gitignore file, НО НЕ нажимаем Update. В этот файл необходимо добавить следующие строки:

```
*.aux
*.blg
*.log
*.synctex
*.synctex.gz
*.toc
*.bbl
*.nav
*.out
*.snm
```

Проследите за тем, чтобы эти строки не начинались со знака # (иначе Git их проигнорирует как комментарий). Теперь нажимаем Update. В чём смысл? В том, что Git теперь будет игнорировать изменения в файлах с такими расширениями, т.е. не будет записывать их слепки на жёсткий диск. Чего и требовалось добиться.

1 A_∞ -структуры, Δ_{BV} -оператор, поливекторные поля

1.1 Наша задача — понять, что вместо вопроса

(Пока что наша задача — великолепно переписать этот огрызок.)

Есть нечётные ² векторные поля v_n :

$$v_n \in \oplus_k V^{\otimes k} \rightarrow V.$$

И главное уравнение A_∞ -структуры ³ имеет вид: $v_n^2 = 0$. Или $\{v, v\}_G = 0$.

Но неправильно говорить просто об этом уравнении. Нужно ещё сфакторизовать по соотношению эквивалентности $v \sim v + \{v, w\}$ — автоморфизмам этого векторного пространства.

$$v = v_0 + Pol, \quad Pol \ll v_0.$$

Получится уравнение $\{v_0, Pol\} + \{Pol, Pol\} = 0$.

Далее, можно сказать, что $Pol = P_0 + \omega$. Т.е. $v = v_0 + P_0 + \omega$. Именно ω , этот чёртов третий член, даёт нам когомологии. Первые же два члена этого разложения определяют мир, который рассматривается.

Стоит отметить, что $v_0 : V^{\otimes 2} \rightarrow V$ — обычное умножение. Поэтому его обычно обозначают m_2 .

Если мы работаем с кольцом $\mathbb{C}[x] \otimes \mathbb{C}[\lambda, \theta]/(\lambda\gamma\lambda)$ (пространственных переменных x 10, чётных полей λ 16, нечётных полей θ тоже 16), а в качестве P_0 мы берём $\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$, то получится $\mathcal{N} = 1$ $D = 10$ SYM ⁴. Низкоэнергетическое приближение — $D = 10$ супергравитация.

Получается такой коммутативный квадрат:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & \text{nearly comm.limit} \\ \downarrow \text{dotted} & & \downarrow \text{solid} \\ \hbar\Delta_{BV}Pol + \{Pol, Pol\} = 0 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \{Pol, Pol\} = 0 \end{array}$$

И наша задача — понять, что вместо вопроса.

1.2 Задача матричной факторизации

Точки на нашем пространстве модулей могут подъезжать к границе, и нужно предложить какое-то граничное условие. Граница является браной.

Сама по себе задача матричной факторизации давно известна в теории особенностей и сводится к элементарному утверждению. Именно, нужно решить матричное уравнение на N вида $W = N^2$. $W(x)$ — суперпотенциал, N — матрица, которую необходимо найти. ⁵ Высший смысл происходящего формулируется так: триангулированные категории особенностей слоёв отображения W эквивалентны категориям В-бран.

²Что это такое?

³Что это такое?

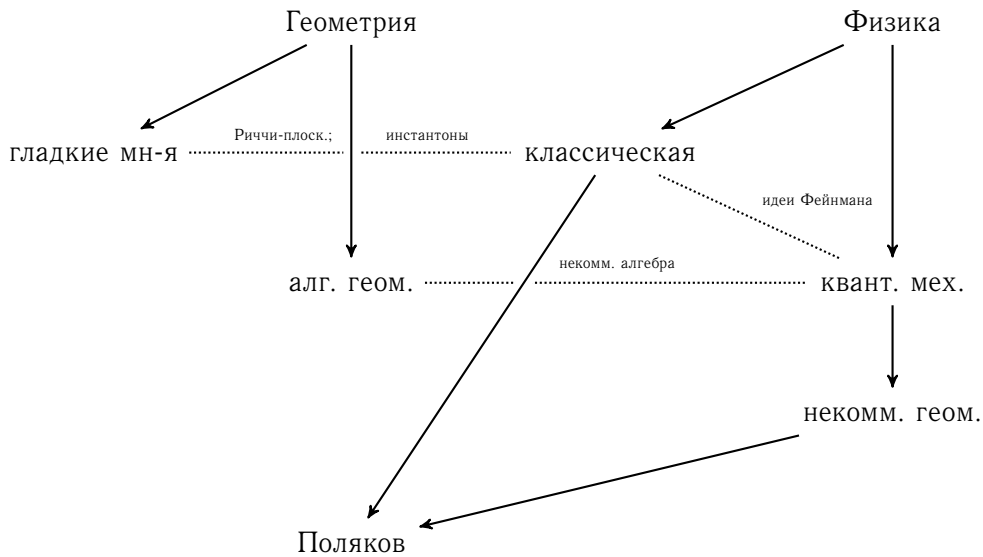
⁴интересно, какая из пяти?..

⁵Тема матриц не раскрыта

2 Новый взгляд на геометрию

2.1 Собственно взгляд

Классическая геометрия является вырождением геометрии Полякова.



Есть две точки зрения на то, что изучает геометрия:

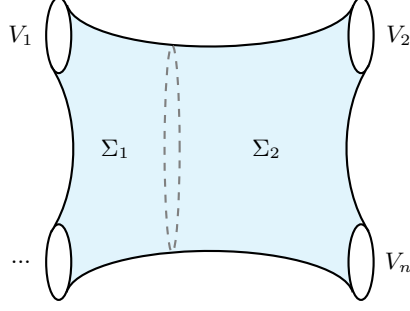
- пространство
- пространство и какая-нибудь геометрическая структура на нём

Согласно Полякову, (гомотопическая) конформная теория — это и есть пространство + геометрия на нём.

2.2 Напоминание о том, что такое конформная теория поля

Конформные теории поля — теории поля, инвариантные относительно конформных преобразований метрики. В них есть «основной объект» I , зависящий от поверхности Σ (вид поверхности зависит от того, открытая или замкнутая струна, а также от количества наблюдаемых V_1, \dots, V_n в рассматриваемом корреляторе). Метрик, сфакторизованных по соотношению эквивалентности «конформно связанные метрики эквивалентны», столько же, сколько комплексных структур, поэтому основной объект I зависит также от комплексной структуры (т.е. от дифференциала Бельтрами μ , который параметризует модули комплексных структур на Σ). Комплексные структуры, очевидно, надо изучать по модулю диффеоморфизмов. Физический смысл нижеследующей картинке вот каков: для того, чтобы вычислить коррелятор операторов V_1, \dots, V_n , нужно вырезать малые диски вокруг точек worldsheet'a и вычислять инварианты Громова—Виттена, являющиеся подсчётом композиций кобордизмов комплексно одномерных многообразий⁶.

⁶я правильно понимаю, что основной объект $I(\Sigma, V_1, \dots, V_n)$ и соответствующий ему инвариант Громова—Виттена — это одно и то же?



Т.е. вот где основной объект принимает значения:

$$I(\Sigma, \mu) \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n \otimes (\mu(\Sigma)/\text{diff})$$

и при этом есть единственная аксиома: что если эту поверхность разрезать, то

$$I(\Sigma, \mu) = I(\Sigma_1, \mu) \circ I(\Sigma_2, \mu).$$

Тензор энергии-импульса же можно вытащить из такой теории вариацией основного объекта по дифференциалу Бельтрами:

$$T = \frac{\delta I(\Sigma, \mu)}{\delta \mu}$$

Польчинский пишет действие, которое мы назовём действием старой струнной геометрии:

$$S = \int g_{\mu\nu}(x) dx^\mu * dx^\nu + B_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

второй член — поле Калба—Рамона, 2-форма на таргете. Действие новой же струнной геометрии таково:

$$S = \int_{\Sigma} \left(P_i \bar{\partial} X^i + \bar{P}_{\bar{i}} \partial \bar{X}^{\bar{i}} + \boxed{g^{i\bar{j}}(x, \bar{x}) P_i P_{\bar{j}} + \mu_j^i P_i \bar{\partial} \bar{X}^{\bar{j}} + \bar{\mu}_{\bar{j}}^i P_{\bar{i}} \partial X^j + b_{i\bar{j}} \partial X^i \bar{\partial} \bar{X}^{\bar{j}}} \right). \quad (2.1)$$

С помощью комплексной структуры J можно переходить от старой геометрии к новой и, почти всегда, наоборот:

$$(G, B) \xleftrightarrow{J} (g, \mu, \bar{\mu}, b). \quad (2.2)$$

Поговорим про теорию

$$S = \int_{\Sigma} P_i \bar{\partial} X^i.$$

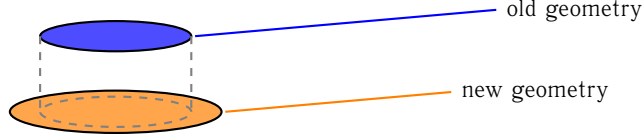
В ней есть поля размерности $(\bullet, 0)$. Это, конечно, функции $f(x) \in (0, 0)$, но также и $(\text{Vect} \oplus \Omega) \in (1, 0)$ — алгебра векторных полей, расширенная своими представлениями. Такие элементы образуют алгебру Ли, назовём её L .

Новая геометрия лежит в $L \otimes \bar{L}$. Именно, произведём следующее несложное вычисление:

$$(V \oplus \Omega^1) \otimes (\bar{V} \oplus \bar{\Omega}^1) =$$

$$= V \otimes \bar{V} \oplus V \otimes \bar{\Omega}^1 \oplus \Omega^1 \otimes \bar{V} \oplus \Omega^1 \otimes \bar{\Omega}^1.$$

Как уже стало понятно из боевой раскраски, $g \in V \otimes \bar{V}$, $\mu \in V \otimes \bar{\Omega}^1$, $\bar{\mu} \in \Omega^1 \otimes \bar{V}$, $b \in \Omega^1 \otimes \bar{\Omega}^1$. Новая геометрия «чуть» больше старой:



Например, в старой геометрии годилась только Риччи-плоская метрика.

Новая геометрия существует на 0-мерных схемах. (А 0-мерные схемы — это по разным причинам хорошо.)

Говоря «схема», мы, в первую очередь, держим в уме следующий пример:

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_{F(x)}.$$

Посредством резольвенты Кошуля это эквивалентно $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \theta]$ с дифференциалом $Q = F \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Пространство является гомологическим многообразием с гомологическим векторным полем. (Гомологическое векторное поле — такое векторное поле $Q = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, что $Q^2 = 0$.) Для вещественно двумерного многообразия с комплексной структурой условие гомологичности векторного поля означает интегрируемость структуры. Деформация многообразия — это деформация гомологического векторного поля.⁷

Традиционного пространства в CFT нет.

Пусть есть семейство CFT_t . Пусть, когда $t \rightarrow t_0$, некоторая группа полей неожиданно приобретает размерность 0.

Назовём эти поля $\tilde{\varphi}$. У них есть операторное разложение

$$\tilde{\varphi}_a(t) \tilde{\varphi}_b(0) = c_{ab}^c(z, t) \tilde{\varphi}_c + \dots$$

Мы видим, что пространство возникает алгебраически. Возникает как аффинная схема («по Гротендику»), а не как набор дисков, склеенных между собой.

Классическая физика и связанная с ней дифференциальная геометрия умерли. Фейнман как великий контрреволюционер.

Пусть $\gamma \in L \otimes \bar{L}$, $a \in L$, $\bar{a} \in \bar{L}$. Определим скобку $[[,]]$:

$$[[a \otimes \bar{a}, b \otimes \bar{b}]] := [a, b]_L \otimes [\bar{a}, \bar{b}]_{\bar{L}}$$

Уравнение струнной гравитации, предположительно, выглядит так:

$$(d + Q)(\gamma) + [[\gamma, \gamma]] + \mathcal{O}(\gamma^3) = 0 \quad (2.3)$$

$\gamma \in (g, \mu, \bar{\mu}, b)$, так что это действительно уравнение струнной гравитации (струнной — потому что с полем Калба—Рамона b , гравитации — потому что с метрикой). У этого уравнения есть решения на схемах, которые можно изучать.

То есть, по-видимому, уравнения струнной гравитации имеют вид уравнения Маурера—Картана.

Не так же ли выглядят уравнения М-теории? Этот вопрос, естественно, открыт.

Изучение этого уравнения и его симметрий — это и есть более-менее изучение струнной геометрии пространства-времени.

⁷Тут где-то ещё мимо проходили обобщённые деформации комплексных структур по Баранникову—Концевичу, но, где конкретно, я не понимаю.

3 Тропический взгляд

3.1 Введение

Изучим тропикализацию worldsheet'a и протопчем тропинку к тропической зеркальной симметрии.

Жизнь становится тропической, когда мы переходим от комплексной координаты z worldsheet'a к координате z^T следующим образом:

$$z = e^{i\varphi z} e^{z^T/\hbar}$$

Отсюда также $z^T = \hbar \operatorname{Re} \ln z$.

Сразу видно, что умножению обычных координат соответствует сложение тропических:

$$z_1 \cdot z_2 \longleftrightarrow z_1^T + z_2^T$$

Сложению же соответствует операция взятия максимума (после перехода к пределу $\hbar \rightarrow 0$):

$$z_1 + z_2 \longleftrightarrow \begin{cases} \max(z_1^T, z_2^T) & z_1^T \neq z_2^T \\ (-\infty, z_i^T] & z_1^T = z_2^T \end{cases}$$

Поскольку за базар надо отвечать, проделаем вычисление:

$$\begin{aligned} |e^{i\varphi_1} e^{z_1^T/\hbar} + e^{i\varphi_2} e^{z_2^T/\hbar}| &= \sqrt{(\cos \varphi_1 e^{z_1^T/\hbar} + \cos \varphi_2 e^{z_2^T/\hbar})^2 + (\sin \varphi_1 e^{z_1^T/\hbar} + \sin \varphi_2 e^{z_2^T/\hbar})^2} = \\ &= \sqrt{e^{2z_1^T/\hbar} + e^{2z_2^T/\hbar} + 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) e^{z_1^T/\hbar} e^{z_2^T/\hbar}} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \sqrt{e^{2\max(z_1^T, z_2^T)/\hbar}} \text{ при } z_1^T \neq z_2^T. \end{aligned}$$

В случае $z_1^T = z_2^T$ переход к пределу $\hbar \rightarrow 0$ даёт

$$\sqrt{2e^{2z^T/\hbar}(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1))},$$

значения чего варьируются от 0 до $2e^{z^T/\hbar}$ в зависимости от разности фаз. Перепишем это в форме $e^{i\varphi} e^{z^T/\hbar}$

$$e^{-\infty/\hbar} \div e^{(z^T + \hbar \ln 2)/\hbar}$$

и увидим, что результат суммы $z_1 + z_2$ лежит в интервале $(-\infty, z_i^T + \hbar \ln 2]$, т.е., после взятия предела $\hbar \rightarrow 0$, $(-\infty, z_i^T]$.

Таким образом, переход от координат z к z^T — переход к тропической геометрии в привычном её понимании⁸.

Тропический сеттинг особенно замечателен тем, что, в отличие от случая поверхностей, фейнмановский интеграл в нём определён прекрасно. Действительно, в нём совершенно не нужно совершать бесконечное суммирование по путям:

$$\int D\varphi e^{-S(\varphi)/\hbar} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} e^{-S(\varphi_{\text{extr}})/\hbar}.$$

3.2 Струнная геометрия в тропических координатах

Будем рассматривать отображения сферы Римана в себя: $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Как известно, это дробно-линейные функции — например, такая:

$$w = a \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Не ограничивая общности, положим $z_1 < z_2$.

⁸Здесь неплохо бы оставить читателю ссылки на классическую литературу по тропической геометрии.

При $z < z_1 < z_2$ $w = a \frac{z-z_1}{z-z_2} \Rightarrow e^{i\varphi_w} e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_1}} e^{z_1^T/\hbar}}{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}} = a \frac{-e^{i\varphi_{z_1}} e^{z_1^T/\hbar}}{-e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}}$, после взятия модулей $e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{z_1^T/\hbar}}{e^{z_2^T/\hbar}}$, откуда $w^T = z_1^T - z_2^T + \hbar \ln a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \boxed{z_1^T - z_2^T}$ — константа.

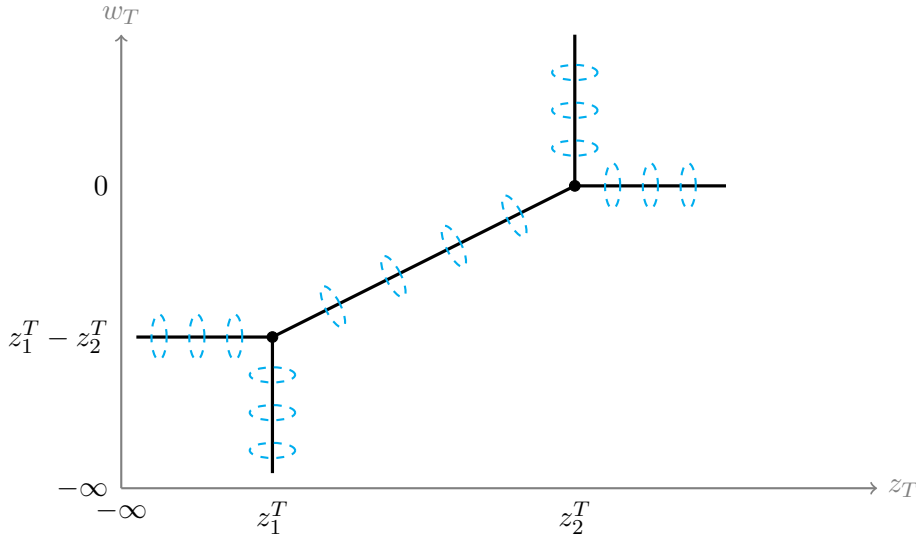
При $z = z_1$ $w = a \frac{z-z_1}{z-z_2} \Rightarrow e^{i\varphi_w} e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_1}} e^{z_1^T/\hbar}}{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}} = a \frac{e^{i\varphi} e^{(-\infty, z_1^T]/\hbar}}{-e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}}$, после взятия модулей $e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{(-\infty, z_1^T]/\hbar}}{e^{z_2^T/\hbar}}$, откуда $w^T = (-\infty, z_1^T] - z_2^T + \hbar \ln a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} (-\infty, z_1^T] - z_2^T = \boxed{(-\infty, z_1^T - z_2^T]}$.

При $z_1 < z < z_2$ $w = a \frac{z-z_1}{z-z_2} \Rightarrow e^{i\varphi_w} e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_1}} e^{z_1^T/\hbar}}{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar}}{-e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}}$, после взятия модулей $e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{z^T/\hbar}}{e^{z_2^T/\hbar}}$, откуда $w^T = z^T - z_2^T + \hbar \ln a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \boxed{z^T - z_2^T}$ — линейная функция.

При $z = z_2$ $w = a \frac{z-z_1}{z-z_2} \Rightarrow e^{i\varphi_w} e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_1}} e^{z_1^T/\hbar}}{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}} = a \frac{e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}}{e^{i\varphi} e^{(-\infty, z_2^T]/\hbar}}$, после взятия модулей $e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{z_2^T/\hbar}}{e^{(-\infty, z_2^T]/\hbar}}$, откуда $w^T = z_2^T - (-\infty, z_2^T] + \hbar \ln a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} z_2^T - (-\infty, z_2^T] = \boxed{[0, +\infty)}$.

При $z_1 < z_2 < z$ $w = a \frac{z-z_1}{z-z_2} \Rightarrow e^{i\varphi_w} e^{w^T/\hbar} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_1}} e^{z_1^T/\hbar}}{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar} - e^{i\varphi_{z_2}} e^{z_2^T/\hbar}} = a \frac{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar}}{e^{i\varphi_z} e^{z^T/\hbar}} = a$, после взятия модулей $w^T = \hbar \ln a \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \boxed{0}$ — снова константа.

Боже, мы сделали это. Зачем? Затем, чтобы нарисовать вид дробно-линейного отображения в тропических координатах:

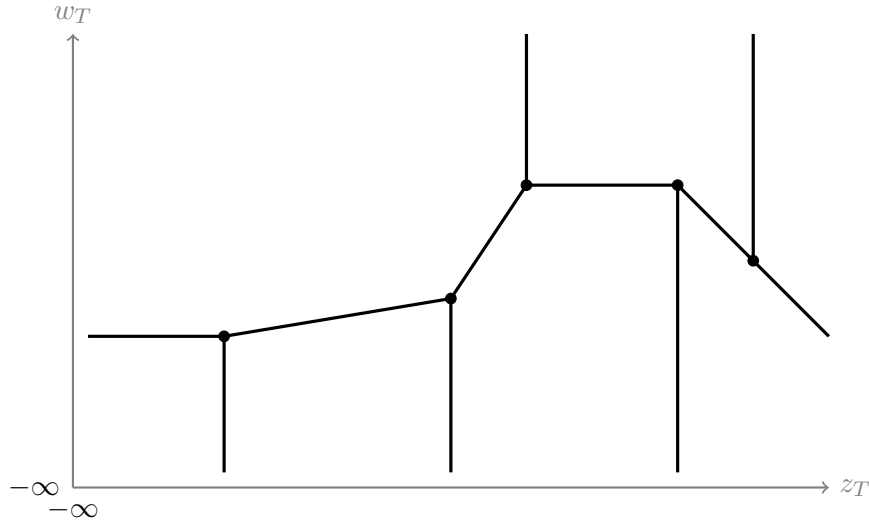


Пунктирными окружностями обозначены направления вращения по фазе. Если бы \hbar не стремился к нулю, а был бы просто мал, эти прямые были бы цилиндрами.

Разумеется, можно рассматривать также множественные мутации автоморфизмы \mathbb{CP}^1 . Символьно это выглядит так:

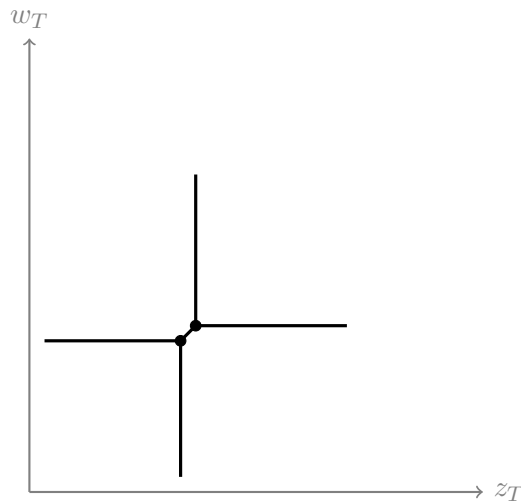
$$w = a \frac{\prod_{\alpha} (z - z_1^{\alpha})}{\prod_{\alpha} (z - z_2^{\alpha})}$$

и, конечно, взглянем на картинку:



Симпатично, но ничего неожиданного. :)

При $z_1^T \rightarrow z_2^T$ происходит вот что:

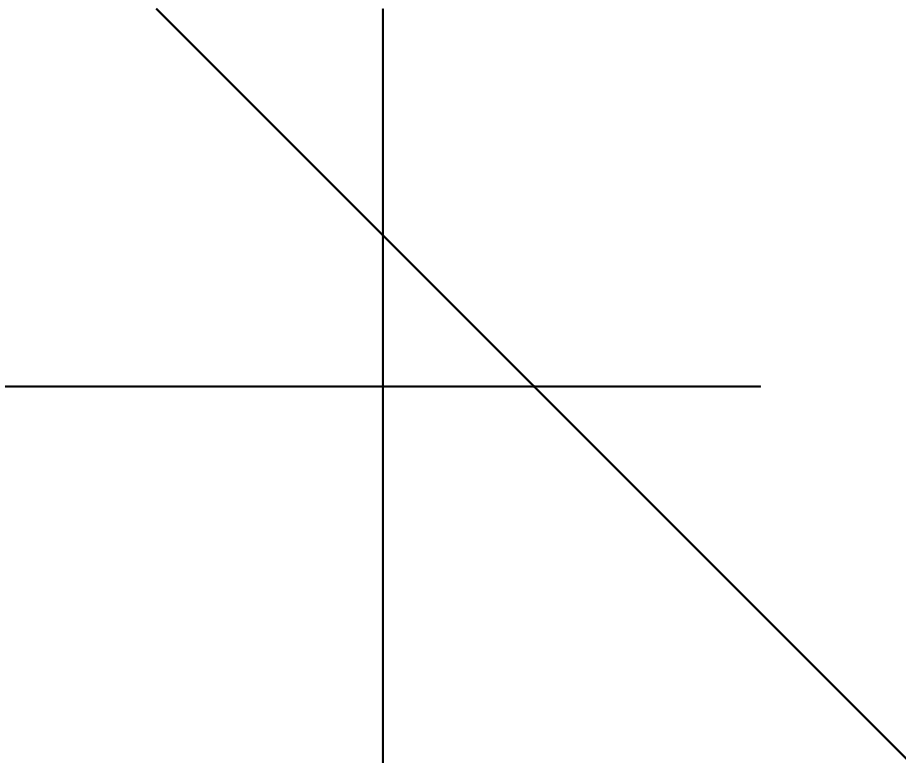


На языке поклонника физики элементарных частиц «s-канал становится t-каналом». Математически, это диаграмма столкновения четырёх дивизоров. Пример того, когда четыре дивизора встречаются в живой природе: $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Это квадрат, который компактифицируется четырьмя прямыми, которые по совместительству также подрабатывают четырьмя дивизорами.

3.3 Как из тропической науки многообразия Калаби—Яу лезут

Нарисуем кубик в \mathbb{P}^2 . Простейшая задаётся формулой $u_0 u_1 u_2 = 0$. Если перейти из однородных координат в обычные ($y_1 = u_1/u_0, y_2 = u_2/u_0$), появляется шанс изобразить такую кубик на плоскости⁹:

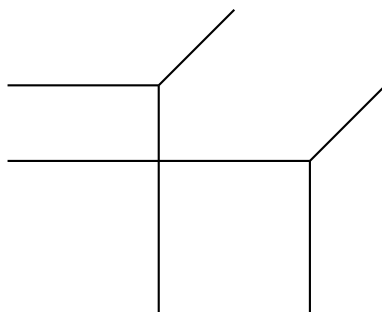
⁹пояснить рисунок



Это кубика в \mathbb{RP}^2 . На самом-то деле случай у нас, естественно, комплексный, и это не прямые на картинке сверху, а поверхности. При тропикализации каждая из них¹⁰ перейдёт в объекты вида



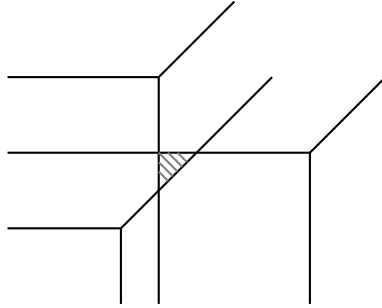
Например, вот как будет выглядеть квадратика после перехода к тропическим координатам в \mathbb{CP}^2 :



(Вращение по фазе по-прежнему происходит вокруг вырожденных кривых.)

А вот как — кубика в \mathbb{P}^2 :

¹⁰почему??

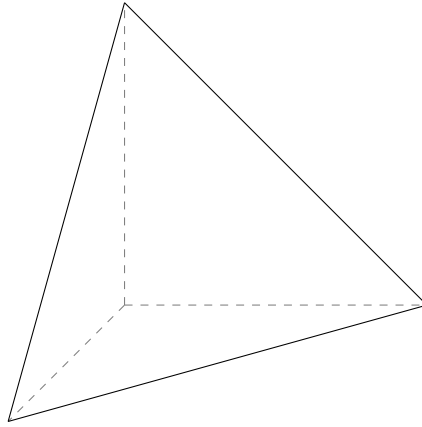


Кубика в \mathbb{P}^2 отсекает тор (на рисунке заштрихован его ареал обитания). Имеет два цикла: один — по рёбрам заштрихованной области, другой — вокруг них (цикл по фазе).

Вообще, в \mathbb{P}^n гиперповерхность $(n + 1)$ -ой степени задаёт многообразие Калаби—Яу. Как частный случай, в \mathbb{P}^3 кватрика задаёт КЗ-поверхность. Для начала давайте просто нарисуем кватрику в \mathbb{P}^3 , и лишь потом уже будем думать, что означает слово «задаёт».

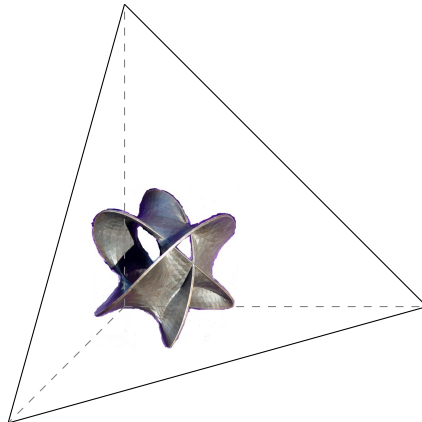
Самая простая кватрика имеет вид $u_0 u_1 u_2 u_3 = 0$. Что означает уравнение $u_i = 0$ в \mathbb{P}^3 ? Это плоскость.

Аналогично тому, как в предыдущем примере тремя прямыми отсекался треугольник, четыре плоскости общего положения отсекут тетраэдр:



Внутренность тетраэдра — аналог внутренности треугольника, заштрихованной серым в разобрном чуть выше случае \mathbb{P}^2 . КЗ вписывается туда.

В этом примере возникает нестягиваемый двумерный цикл (а всего таких двумерных циклов 6):



3.4 Тропический миррор (анонс)

В А-модели задача формулируется так: сколько определённых кривых¹¹ пройдёт через отмеченные циклы¹².

$$\text{А-сторона:} \quad H = \vec{p} \cdot \vec{n} + \sum_{\delta} V_{\delta}$$

$$\text{В-сторона:} \quad H = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \vec{y}} + e^{\vec{\delta} \vec{y}}$$

Видно, что А- и В-стороны связаны просто-напросто Фурье-преобразованием. На В-стороне получается теория поля; так получающаяся теория поля называется теорией Бершадского—Чекотти—Огури—Вафы (только они писали для обычной комплексной структуры, а надо для деформированной суперпотенциалом).

4 Связь суперконформной теории поля и теории Сайто

4.1 Строим основной объект, деформируем дифференциал Бельтрами

Введём несколько пространств модулей:

$$\mathcal{M}_g = \{\text{все дифференциалы Бельтрами}\} / \{\text{диффеоморфизмы}\}$$

$$\mathcal{M}_{g,n} = \{\text{все дифференциалы Бельтрами}\} / \{\text{диффеоморфизмы, обращающиеся в ноль}\}$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{g,n} = \{\text{все дифференциалы Бельтрами}\} / \{\text{диффеоморфизмы, имеющие нулевой росток}\}$$

И объявим главным объектом рассмотрения т.н. «основной объект» I :

$$I^{(k,l)} = \langle V_1(z_1) \dots V_n(z_n) \int_{\Sigma} G \cdot \mu^{(1)} \dots \int_{\Sigma} G \cdot \mu^{(k)} \int_{\Sigma} \bar{G} \cdot \bar{\mu}^{(1)} \int_{\Sigma} \bar{G} \cdot \bar{\mu}^{(l)} \rangle \quad (4.1)$$

Теперь продеформируем μ векторным полем: $\mu \rightarrow \mu + \bar{\partial}v$ (v не может иметь нули более чем первого порядка, но хотя бы один ноль первого порядка имеет), получим выражение вида

$$\int_{\Sigma} \bar{\partial}(Gv)$$

и произведём интегрирование по частям в δI .

На пространстве вертексных операторов действует $Q_{\varepsilon} = Q + \varepsilon G_0$. Возьмём два каких-то вертексных оператора и потребуем, чтобы

$$V_1 - \varepsilon \tilde{V}_1 = Q_{\varepsilon}(\dots).$$

¹¹картинка?

¹²здесь тонкость: нужно переопределить понятие цикла

Тогда для основного объекта верно

$$I(V_1, \dots) \sim c_1(\mathcal{L}_1) \wedge I(\tilde{V}_1, \dots)$$

Подействуем:

$$(d + \varepsilon \iota_v)A = F + \varepsilon,$$

F и ε не просто замкнуты по отдельности, но ещё и их сумма точна. Поэтому ε представляется первым классом Черна.

Формула Картана и соотношение между тензором энергии-импульса T , его суперпартнёром G и дифференциалом де Рама Q невероятно похожи:

$$\mathcal{L}_v = \{d, \iota_v\}$$

$$T = \{Q, G\}$$

Поэтому эти матфизические величины можно интерпретировать так: T — то, что представляет диффеоморфизмы, Q — то, что представляет дифференциал де Рама, G — то, что представляет подстановку векторного поля.

4.2 Теория Саито

Теория Саито отвечает на вопрос «как построить связность в когомологиях Q_ε ».

Зачем нужна такая связность? Затем, что эта связность наряду со связностью Гаусса—Манина образуют плоский пучок и дают уравнение WDVV.

4.2.1 Изложение хронологическое

Сам Саито занимался, как известно, теорией особенностей и начал с изучения таких интегралов:

$$\int \frac{\Omega}{W - t_0},$$

а также их производных по t_0 . Он заметил, что удобно ввести величину $\varepsilon := \left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^{-1}$. Потом Варченко указал ему, что его интегралы — то же, что интегралы вида

$$\int_{\Gamma} e^{\frac{W}{\varepsilon}} \Omega.$$

Некоторые из них оказываются нулями. При каких условиях?

Рассмотрим самый простой — одномерный случай, $\Omega = Pdx = d\tilde{P}$. Получаем

$$- \int e^{\frac{W}{\varepsilon}} d\tilde{P} = \int d\left(e^{\frac{W}{\varepsilon}}\right) \tilde{P} = \int \frac{dW}{\varepsilon} e^{\frac{W}{\varepsilon}} \tilde{P},$$

$$\int \left(d + \frac{dW}{\varepsilon}\right) \tilde{P} e^{\frac{W}{\varepsilon}} = 0$$

$$\int (\varepsilon d + dW) \tilde{P} e^{\frac{W}{\varepsilon}} = 0$$

Чтобы искомая связность $\Omega = d\tilde{P}$ была плоская, надо потребовать $(\varepsilon d + dW) \tilde{P} = 0$.

Порассматриваем какие-нибудь простейшие суперпотенциалы. Пусть, например, $W = x^2$. Методом неопределённых коэффициентов найдём связность \tilde{P} :

$$(\varepsilon d + 2x)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) = 0$$

$$(\varepsilon \alpha_1 + 2\varepsilon \alpha_2 x + 3\varepsilon \alpha_3 x^2 + \dots) + (2\alpha_0 x + 2\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 x^3 + \dots) = 0,$$

откуда можно вытащить такую череду равенств:

$$\varepsilon \alpha_1 = 0$$

$$2\varepsilon \alpha_2 + 2\alpha_0 = 0$$

$$3\varepsilon \alpha_3 + 2\alpha_1 = 0$$

$$4\varepsilon \alpha_4 + 2\alpha_2 = 0$$

и так далее. Из неё вполне видно, что все нечётные α_i равны нулю, а все чётные удовлетворяют равенству

$$\alpha_{2n} = \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n n!} \alpha_0.$$

Поэтому плоская связность для такого суперпотенциала равна дифференциалу де Рама от следующего выражения:

$$\tilde{P} = \alpha_0 - \frac{1}{\varepsilon 1!} \alpha_0 x^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 2!} \alpha_0 x^4 + \dots$$

Приравняем к единице несущественный общий множитель. Возьмём дифференциал и получим наконец плоскую связность для суперпотенциала $W = x^2$:

$$\Omega = d\tilde{P} = d \sum_n \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n n!} x^{2n} = \boxed{\sum_n \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n (n-1)!} x^{2n-1}}$$

(множитель 2 опущен как общий).

Аналогично можно рассмотреть $W = x^3$.

ε генерирует ψ -классы Мориты—Мамфорда¹³.

4.2.2 Изложение теоретико-полевое

$$S = \int \left(\partial X \bar{\partial} \bar{X} + \bar{\pi} \partial \bar{\psi} + \pi \bar{\partial} \psi \right)$$

$$G = \pi \partial \bar{X}$$

$$J = \psi \partial X$$

Как устроены поля конформной размерности 0? Вот так: $F(X, \bar{X}, \psi, \bar{\psi})$.

Однако можно сделать замену вида $\rho = \psi + \bar{\psi}$, $\theta = (\psi - \bar{\psi})g$. Тогда внезапно оказывается, что $F(X, \bar{X}, \rho^{\bar{i}}, \theta_i)$ — не что иное, как поливекторные поля со значениями в $(0, \bullet)$ -формах.

$$QP = \rho \frac{\partial}{\partial \bar{X}} P = \bar{\partial}^t P$$

¹³Раскрыть.

$$G_0 - \bar{G}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial X^i} = \Delta_{BV}$$

Это всё было при $W = 0$. Если «включить» суперпотенциал, ток изменится на такой:

$$J = \psi \partial X + W' \pi$$

а дифференциал превратится в такой:

$$Q + \varepsilon G_0 = \bar{\partial} + \varepsilon \Delta_{BV} + \frac{\partial W}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i},$$

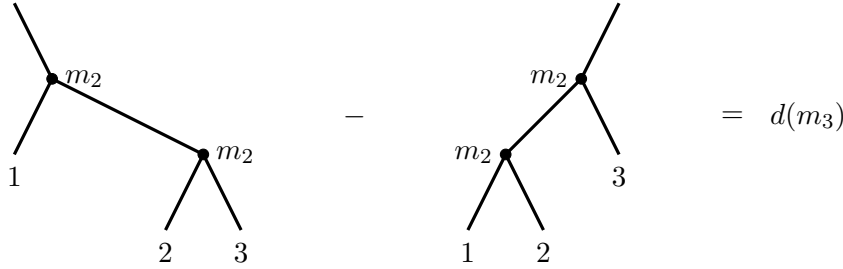
$\bar{\partial}$ — дифференциал свободной теории, $\varepsilon \Delta_{BV}$ — эквивариантная добавка, $\frac{\partial W}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ — вызванное наличием суперпотенциала возмущение.

5 Топологическая квантовая механика

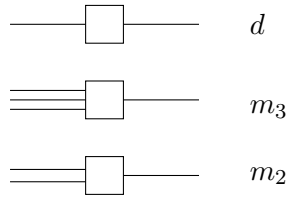
5.1 A_∞ —структура и один из контекстов её возникновения в матфизике

Попробуем спасти идею функционального интеграла. Исторически он регуляризовывался введением решётки. Однако, как заметил Колмогоров в 50-е гг., на коцелях нет ассоциативного умножения¹⁴. На дифференциальных формах есть ассоциативное умножение, а вот на симплицальной реализации того же самого — как оказалось, нет. Однако там есть почти ассоциативное умножение — A_∞ -структура.

Например, m_2 ассоциативно с точностью до высших операций:



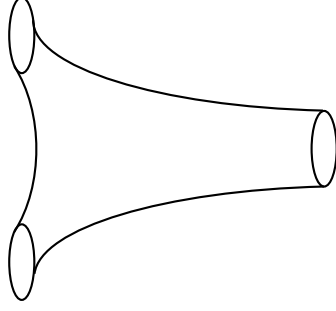
Есть n —арные операции: элементы d, m_2, m_3, m_4, \dots . Их можно изобразить так:



Набор операций (d, m_2, m_3, \dots) , согласованный с (супер)правилом Лейбница, называется A_∞ -структурой.

В струнах, конечно, эти диаграммы будут выглядеть как

¹⁴почему?



m_2



d (она же m_1)

5.2 Перенормировки в топологической квантовой механике

Общепринятым способом избегания УФ расходимостей является введение параметра обрезания:

$$\int d^N p \longrightarrow \int_0^\Lambda d^N p$$

Способ ввести параметр обрезания «в лоб» в топологической квантовой механике — ограничиться на формы $\Omega_X^{\bullet\Lambda}$ — на формы, у которых импульсы, получающиеся после преобразования Фурье функции, стоящей перед $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, ограничены по модулю числом Λ :

$$\Omega_X^{\bullet\Lambda} := \Omega_X^\bullet \Big|_{|\vec{p}| < \Lambda}, \quad \Omega_X^\bullet \longrightarrow \Omega_X^{\bullet\Lambda}.$$

Но на $\Omega_X^{\bullet\Lambda}$ уже нет структуры dg-алгебры¹⁵. Проблема.

Необходим более умный способ перенормировки. (Где здесь вообще может возникнуть расходимость? Она может возникнуть, если вершины сталкиваются. Коррелятор в таком случае может быть не определён, а вклад пропагатора будет стремиться к тождественному оператору.)

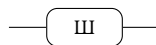
Предложение заключается в том, чтобы перейти к швингеровскому представлению пропагатора и затем перенормировать «время»:

$$\int_{\tau_{\text{ш}}}^{\infty} d\tau e^{-\tau\Delta} = [\tau' = \tau - \tau_{\text{ш}}] = \int_0^{\infty} d\tau' e^{-(\tau' + \tau_{\text{ш}})\Delta} = e^{-\tau_{\text{ш}}\Delta} \int_0^{\infty} d\tau' e^{-\tau'\Delta} = e^{-\tau_{\text{ш}}\Delta} \frac{1}{\Delta},$$

т.е. перенормированный пропагатор вот каков:

$$\frac{1}{\Delta_{\text{ren}}} = e^{-\tau_{\text{ш}}\Delta} \frac{1}{\Delta}.$$

Перенормированный таким образом пропагатор будем помечать буквой «ш» (швингеровское же представление):

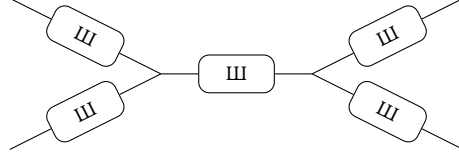


Впоследствии мы будем делать утверждения вида «такой-то пропагатор чему-то равен». В целях удобства обсуждения договоримся опускать в них множитель $1/\Delta$. В рамках этой договорённости у нас получилось, что

¹⁵кстати, почему?

$$\text{---} \boxed{\text{Ш}} \text{---} = e^{-\tau_{\text{ш}} \Delta}, \quad \text{---} = 1$$

Пример перенормированной диаграммы:



Дальше мы в шутку будем называть швингеровские пропагаторы резисторами.

Если отнести деформации пропагатора к вершинам и воспринимать их уже как деформации операторов, стоящих в вершинах, то получится как раз A_∞ -структура.

5.3 Об аксиальной аномалии

Далее, есть такой хорошо известный математический факт — что лапласиан есть суперкоммутатор дифференциала де Рама d и сопряжённого к нему по Ходжу d^* . Т.е.

$$e^{-\tau_{\text{ш}} \Delta} = e^{-\tau_{\text{ш}} \{d, d^*\}}$$

Обсудим аномальный распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L$$

$$\psi_R \rightarrow e^{-i\alpha} \psi_R$$

$$\text{Tr}_{\text{Spin}} \gamma^5 e^{-\beta \mathcal{D}_A^2} = \text{Str} e^{-\beta \mathcal{D}_A^2}$$

Эйлерова характеристика:

$$\chi = \text{Str}_{\Omega^\bullet} e^{-\tau_{\text{ш}} \{d, d^*\}}$$

Арифметический род:

$$H\chi = \text{Str}_{\Omega^{0,\bullet}} e^{-\tau_{\text{ш}} \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\}}$$

5.4 Как вычислять амплитуды

Вот BV-регуляризация по Костелло:

$$\text{---} \boxed{\text{Ш}} \text{---} = e^{-\tau_{\text{ш}} \{Q, G\}}$$

Рецепт вычисления амплитуд: необходимо проинтегрировать по всем внутренним линиям, а входы и выходы замкнуть на когомологии. Если подстановка резистора (отличие резистора от его отсутствия) — Q -точная вещь:

$$\text{---} \boxed{\text{Ш}} \text{---} - 1 = Q(..),$$

то ответ не будет зависеть от величины швингеровского обрезания. Нас интересует именно Q -точный случай как самый красивый и реалистичный, ибо если на графах существует суперпартнёр тензора энергии-импульса G , то подстановка резистора Q -точна.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ 0 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \tau_{\text{ш}} \end{array} = \{Q, \int_0^{\tau_{\text{ш}}} e^{-\tau\{Q,G\}} G d\tau\}$$

Зачем вводить теорию струн in order to avoid divergences, когда это можно сделать проще с помощью топологической квантовой механики?

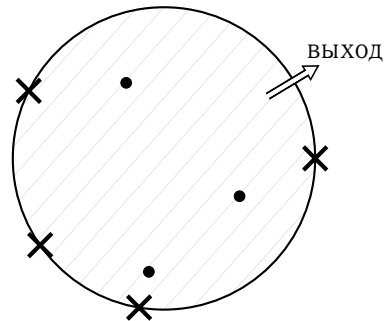
5.5 Постоянная Планка — скрытое число петель (внутренних и внешних)

$$\begin{array}{l} \text{Фейнман: } e^{\frac{1}{\hbar} S} \\ \text{Костелло—Швингер—Цвибах: } e^{\frac{1}{\hbar} S(\hbar)} \end{array}$$

Гений Баталина(?) состоял в том, чтобы написать действие, зависящее от постоянной Планка, а не как у Фейнмана¹⁶.

Ещё раз: после перехода к дискретному пространству теория струн становится теорией частиц, в которой очень много вершин и пропагаторов между ними. После перехода к дискретному пространству теория струн — частный случай описанной выше конструкции. Это придумал Цвибах, но побоялся включить в свою книжку по теории струн.

6 Концевич и теория деформаций

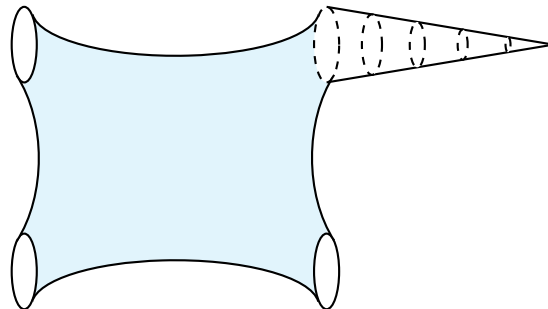


Есть три взгляда на то, что такое локальная наблюдаемая.

Согласно Фейнману, локальная наблюдаемая — некоторая функция от значений полей и их производных в точке x_0 .

Согласно Полякову, локальная наблюдаемая — некоторый предел решёточных статсумм.

Согласно Сигалу, локальная наблюдаемая получается стягиванием окружности в точку:



¹⁶Раскрыть эту мысль и раскрыть мысль, вынесенную в заголовок.

Если угодно, здесь возможна такая аналогия. «Поляковский» взгляд на число Эйлера — число Эйлера e есть предел следующей последовательности:

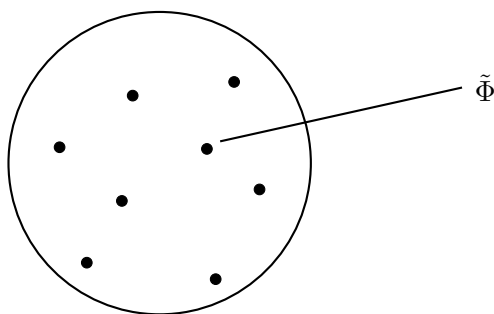
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

«Сигаловский» же взгляд — решите уравнение $f'(x) = f(x)$ как хотите (рецепт не предоставляется), и когда вы его решите (любым из способов), окажется, что

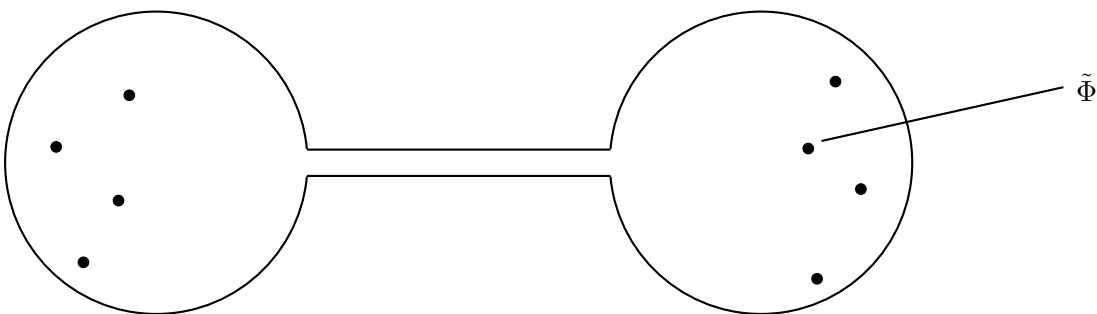
$$e = \frac{f(1)}{f(0)}.$$

6.1 Пока не пережали

Пока не пережали, была сфера. Все точки — Φ , и только одна — $\tilde{\Phi}$:

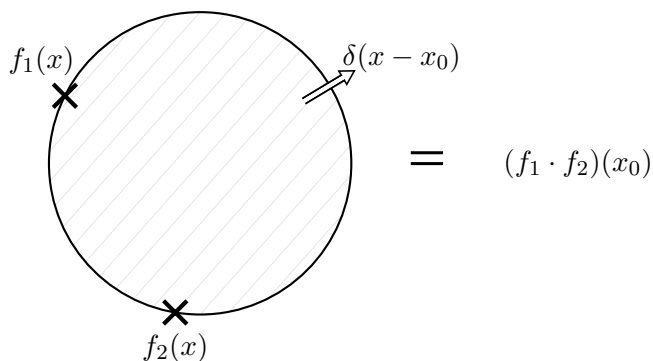


После того, как пережали,



левая половина стала для правой наблюдаемой типа Φ (бесконечно далёкой, похожей на точку). Правая половина стала для левой наблюдаемой типа $\tilde{\Phi}$ (тоже бесконечно далёкой и похожей на точку).

6.2 Постановка задачи о деформационном квантовании



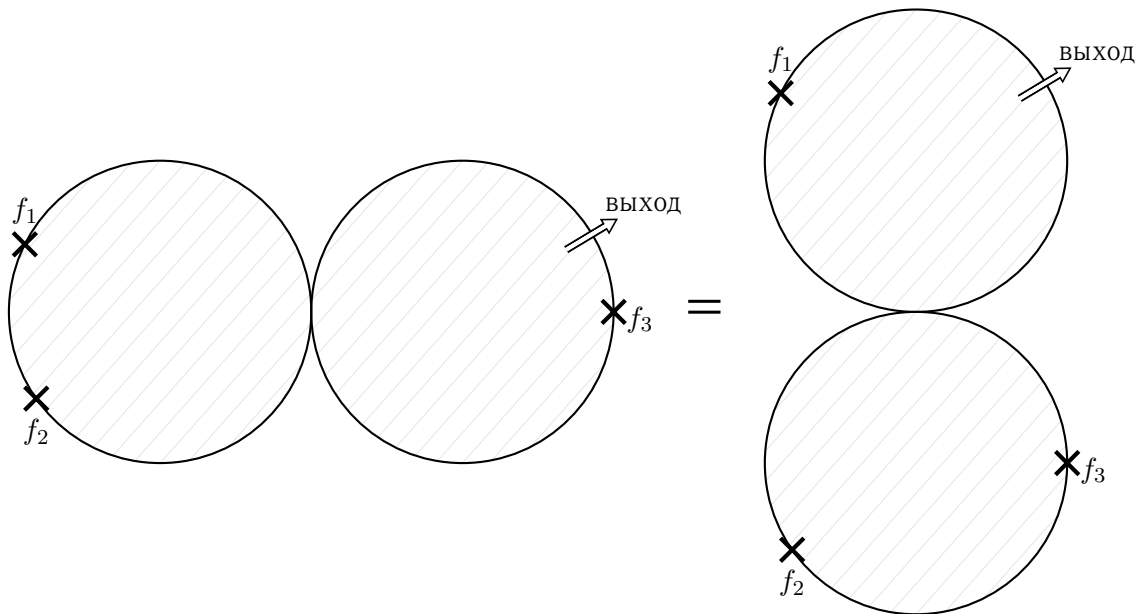
По-видимому, в поисках пертурбативной некоммутативной геометрии Концевич в 1997 поставил задачу деформации коммутативных ассоциативных алгебр в классе ассоциативных. Более точно, он поставил задачу найти такое умножение $m_\bullet(f_1, f_2)$, которое бы обладало тремя следующими свойствами:

1. $m_0(f_1, f_2) = f_1 f_2$
2. $\left. \frac{\partial m}{\partial \hbar} \right|_{\hbar \rightarrow 0} = \{f_1, f_2\}^\pi := \pi^{ij}(x) \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial f_2}{\partial x^j}$
3. m_\bullet ассоциативно (??)

Поначалу казалось, что хорошим кандидатом является скобка Моела:

$$f_1 * f_2 = e^{\hbar \pi^{ij}} f_1(x) f_2(y)$$

Однако позже стало понятно, что есть ряд моментов¹⁷, ввиду которых она не годится. Причина ассоциативности:



7 Вместо фейнмановского интеграла — некоммутативная геометрия

7.1 Программа

КТП буквально в фейнмановской формулировке неприменимо: $\int D\varphi$ не определено

1. Переписать действие КТП на языке dga. Однако dga бесконечномерна и содержит всё те же проблемы.

¹⁷что это за моменты?

2. Заменить dga на что-то конечномерное (а именно — на некоммутативную геометрию).

На самом деле конечномерность бывает разная: буквальная конечномерность $(\hbar^S)^{18}$ и гомотопическая конечномерность (по Алану Конну).

3. То, что написано на языке dga, приведём к каноническому виду (Гамильтон — AKSZ).

Объясним, что такое некоммутативная геометрия. Именно, надо избавиться от непрерывной формулировки и рассматривать fuzzy sphere. Это представления спина j алгебры $SU(2)$ (соотношения на генераторы T^{qcl}). К ним можно прийти так:

$$\{T_a, T_b\} = \varepsilon_{abc} T_c, \quad T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = j(j+1)$$

$$T_a^{qcl} = \frac{T_a}{j}$$

$$\{T_a^{qcl}, T_b^{qcl}\} = \frac{1}{j} \varepsilon_{abc} T_c^{qcl}, \quad (T_1^{qcl})^2 + (T_2^{qcl})^2 + (T_3^{qcl})^2 = 1 + \frac{1}{j}$$

При $j \rightarrow \infty$ получается обычная (супер)коммутативная геометрия на сфере. Но $j \rightarrow \infty$ — это «неправильный» непрерывный способ смотреть на вещи. На самом деле надо рассматривать большие конечные j (самый сложный случай). T_{\bullet}^{qcl} — генераторы, имеющие вид матриц $(2j+1) \times (2j+1)$.

Поля в таком понимании —

$$\varphi^i(x) = V \otimes \text{Fun}(x)$$

(по аналогии с $A_\mu(x) = \sum e_\mu(k) e^{ikx}$), V — конечномерное векторное пространство возможных «поляризаций».

И Fun мы заменяем на универсальную обёртывающую \mathcal{A} . Видимо, потому, что (по Гротендику) пространство — это ассоциативная алгебра.

Вопрос. Можно ли переписать любую теорию в таких терминах?

Некоммутативность — вполне себе способ победить УФ расходимость. У нас получаются, по сути, матричные модели.

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) \mu(x) \sqrt{g}$$

этим заниматься нельзя

На каком языке нужно говорить про некоммутативные вещи?

1. умножение (которое окажется внешним)
2. дифференциал
3. след (который есть дискретизация интеграла)

¹⁸что?

7.2 Струнная теория поля

Что нужно для построения струнной теории поля?

1. ассоциативная коммутативная алгебра с единицей и операторы ψ
2. дифференциал Q
3. инвариантное скалярное произведение $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ (инвариантное в том смысле что $\langle \psi_1, \psi_2 * \psi_3 \rangle = \langle \psi_1 * \psi_2, \psi_3 \rangle$)

Дифференциал должен удовлетворять свойству

$$\langle Q\psi_1, \psi_2 \rangle = \pm \langle \psi_1, Q\psi_2 \rangle$$

В 1985 Виттен написал следующее действие:

$$S = \langle \psi, Q\psi \rangle + \langle \psi, \psi * \psi \rangle \quad (7.1)$$

В 1988 он написал такое действие:

$$S = \int \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3) \quad (7.2)$$

В 1992 он, по-видимому, понял, что это одно и то же, и написал статью «Chern—Simons как струнная теория поля». Но заявить прямо об одинаковости этих теорий он постеснялся — его смущало, что действие (7.2) существенно трёхмерно, в то время как действие (7.1) вроде как не обязано иметь какую-то конкретную размерность.

В 1997 вышла работа AKSZ, главной идеей которой (которую они опять-таки умудрились явно не прописать) было то, что A — необязательно 1-форма:

$$S = \int \text{Tr}(\hat{A}d\hat{A} + \frac{2}{3}\hat{A}^3) \quad (7.3)$$

$$(A \in \Omega^\bullet \otimes \mathfrak{g})$$

Давайте обсудим чётные размерности:

$$S = \int \hat{P}_i d\hat{X}^i + \text{Pol}(\hat{P}, \hat{X}) \quad (7.4)$$

Вопрос. Как ввести вместо $\text{Fun}(x)$ дифференциальные формы?

Sample решения, указание. Есть переменные z^i , есть чётные дифференциальные операторы $z^i \frac{\partial}{\partial z^j}$, есть нечётные дифференциальные операторы $\theta^i \frac{\partial}{\partial z^j}$.

Ответ будет иметь вид какой-то вроде¹⁹

$$z^i \frac{\partial}{\partial z^i} + \theta^i \frac{\partial}{\partial \theta^i}$$

Вопрос. Сделать некоммутативный AKSZ. Сложность в том, чтобы сделать умножение, фигурирующее в действии, некоммутативным:

$$S = \text{Tr} \left(\hat{P}_i d\hat{X}^i + \text{Pol}(\hat{P}, \hat{X}) \right)$$

¹⁹почему?

С комплекса дифференциальных форм надо поменять комплекс на нечто конечное. Для этого надо заменить $\int \text{Tr}$ на Str :

$$S = \text{Str} \left(\hat{P}_i d\hat{X}^i + \text{Pol}(\hat{P}, \hat{X}) \right),$$

$$\hat{X}^i \in V \otimes \mathcal{A}, \hat{P}_i \in V^* \otimes \mathcal{A}$$

Свойство $\int d(\dots) = 0$ (повествующее об отсутствии граничных членов) превратится в $\text{Str}[D, \mathcal{A}] = 0$ (как и след от коммутатора, суперслед от суперкоммутатора — ноль).

$\text{Pol}(\hat{P}, \hat{X})$ — просто слова от \hat{P} и \hat{X} (потому что сейчас мы пытаемся обрисовать некоммутативный AKSZ)

Всё это время мы обсуждали чётномерные случаи. В нечётномерном случае симплектической структуры нет, поэтому одна координата вынужденно коммутативная, а остальные — некоммутативные.

(с «к предыдущей разобраться»)

7.3 Правильное понимание тетрад, уравнения Эйнштейна через тетрады и фактическое существование кручения

Правильное определение тетрады таково:

1. снабжаем наше n -мерное многообразие структурой $\text{Spin}(n)$ -расслоения
2. строим векторное расслоение

$$(\text{Spin}(n), \mathbb{R}^n) \rightarrow V$$

(\mathbb{R}^n — представление)

поскольку на самом деле это расслоение (левых или правых) спиноров, точнее будет сказать так:

$$(\text{Spin}(n), \mathbb{C}^{2^{n/2}}) \rightarrow S$$

3. тетрадой e называется некоторое (не обязательно невырожденное) отображение $e : T_x \rightarrow V_x$

У нас получаются две связности: ∇^V и ∇^S .

Действие Эйнштейна на самом деле имеет вид:

$$S = \int_X \langle \underbrace{e \wedge e \wedge \dots \wedge e}_{n-2} \wedge (\nabla^V)^2 \rangle + \int_X \langle \gamma(\psi \nabla^S \psi) \underbrace{e \wedge e \wedge \dots \wedge e}_{n-1} \rangle,$$

где $\gamma : S \otimes S \rightarrow V, \psi \in \Gamma(S), \langle \cdot \rangle : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ — детерминант.

Обязано ли e быть изоморфизмом?

Если $e^*(\cdot, \cdot) \in S^2 T^*$ вырождено, оно называется метрикой.

Если оно невырождено, оно называется невырожденной метрикой. В невырожденном случае также $e^*(\nabla^V) = \nabla^{EP}$ (связность Эйнштейна—Палатини).

Также, как обычно, пуллбэк e является метрикой:

$$e^*(\cdot, \cdot) = g(\cdot, \cdot),$$

так что существует также связность Леви—Чивита ∇^{LC} .

Обе эти связности сохраняют метрику! Это означает, что они отличаются на кручение (условием сохранения метрики связность не определяется однозначно).

Запишем уравнения движения для такого действия:

$$\underbrace{e \wedge e \wedge \dots \wedge e}_{n-2} \wedge \nabla^V e \wedge \delta \nabla + \underbrace{e \wedge e \wedge \dots \wedge e}_{n-1} \wedge \gamma(\psi, \psi) \wedge \delta \nabla = 0,$$

где

$$\nabla e = \nabla^{LC} - \nabla^{EP} = \text{torsion} = ((e \wedge e, \gamma_3(\psi, \psi))) + e \wedge e \gamma_1(\psi, \psi),$$

$((\cdot, \cdot))$ — двойное скалярное произведение.

Поупражняемся в переписывании привычных нам лагранжианов на этом языке! Лагранжиан электродинамики, написанный без метрики на языке dga:

$$(e \wedge \dots \wedge e, p) dA + (p, p) \wedge e \wedge \dots \wedge e$$

(в неабелевом случае $dA \rightarrow dA + A \wedge A$)

Мы изгоняем метрику, заменив её на форму в пространстве поляризации.

Челлендж. Переписать все лагранжианы современной физики в этом виде.

Переписать гравитацию, которая проистекает из бозонных струн, в таком же виде.

Вопрос. Может ли e вырождаться?

Действительно, вроде бы всю квантовую теорию можно записать в таком виде:

$$S = \int \alpha_a(\varphi) d\varphi^a + H(\varphi)$$

Действие Концевича:

$$S = p d\varphi + H(p, \varphi)$$

Челлендж. Переписать любую КТП в виде $p d\varphi + H(p, \varphi)$ (в виде AKSZ).