

目录

第一部分 什么是极限?	3
1 数列的极限	3
2 函数的极限	4
第二部分 极限运算法则	4
第三部分 极限的规律, 和求法(方法论)	5
3 若 $f(x) > g(x)$, 则 $\lim f(x) \geq \lim g(x) \leftarrow$ 注意: 是大于等于 \geq !	5
4 分子上“项的最高次数” > 分母上“项的最高次数”, 则该分式的极限 = ∞ . 反之, 则极限 = 0	6
4.1 对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 $m > n$, 即: 分子的值 > 分母的值. 则函数极限值 = ∞	6
4.2 对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 $m = n$, 则函数极限值 = $\frac{a}{b}$	6
4.3 对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 $n > m$, 即: 分子的值 < 分母的值. 则函数极限值 = 0	7
5 重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	7
6 重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	7
7 重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	9
8 求极限时, 遇到 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种时, 可使用“洛必达法则” L'Hospital's rule : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$	10
8.1 技巧1: 在乘积中, 可以用“等价无穷小替换”	13
8.2 技巧2: 趋近于“常数”的那些项, 就向外挪出去, 而不要一并进入求导环节	14
第四部分 无穷大 & 无穷小	14
9 无穷大	14
9.1 $\infty + \infty = ?$ 结果未知	14
9.2 $\infty - \infty = ?$ 结果未知	14
9.3 $\infty \cdot \infty = \infty$	14
9.4 $\infty / \infty = ?$ 结果未知	14
10 无穷小	14
10.1 有限个“无穷小”的和, 是无穷小.	15

10.2 有限个“无穷小”的乘积, 依然是无穷小.	15
10.3 常数 $C \times$ 无穷小 = 无穷小	15
10.4 有界函数 \times 无穷小 = 无穷小	15
10.5 无穷小 \times 无穷大 = ? 结果未知	15
11 无穷小的比较 : $\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}$	15
11.1 高阶无穷小 & 低阶无穷小	16
11.2 同阶无穷小 : $\lim \frac{b}{a} = \text{常数} C, C \neq 0$	16
11.3 等价无穷小 $\rightarrow \lim \frac{b}{a} = 1$	17
11.4 在 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1$ 等价于 $\frac{1}{n}x$	18
11.5 k阶无穷小	18

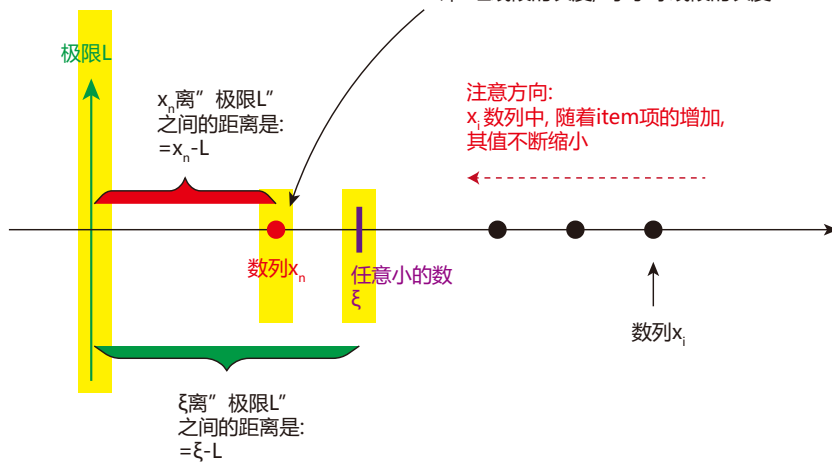
函数

2022 年 12 月 9 日

第一部分 什么是极限？

1 数列的极限

x_i 数列, 随着其项数 item 的增加,
它终有一个第 n 项的值, 即 x_n 离“极限值 L ”的距离,
一定会小于“一个任意小的数 ξ ”与“极限值 L ”之间的距离.
即: 红线段的长度, 小于绿线段的长度.



即: 给定 (1)任意一个极小值 ϵ , (2)一个确定的极限值 L , (3))一个数列 x_i (里面的元素值不断变小). \rightarrow 则随着数列 x_i 中item的增长, 必定会有一个 item项(比如第 n 项), 该“item项的值 x_n ”与“极限值 L ”的距离, 必定会小于“极小值 ϵ ”与“极限值 L ”之间的距离 (这个距离其实就是 ϵ 本身).

例

有数列 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 的极限是0. 问: 该数列取到哪一项item 时, 它与“极限0”之间的距离, 就小于“任意小的数 ε ”了呢?

即, 问的就是: 该数列与 0 之间的距离, 要小于 ε .

$$\left| \text{数列} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - \text{极限值} 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{(n+1)^2} \right| < \varepsilon$$

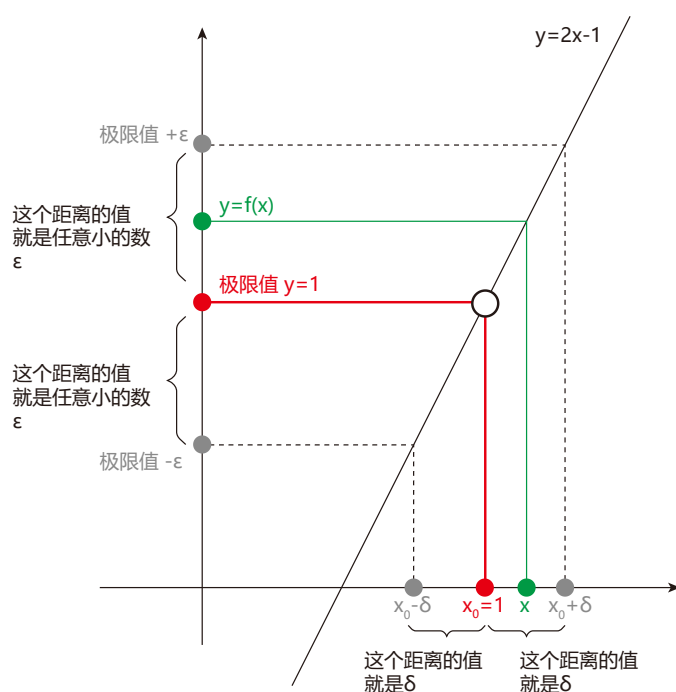
$$(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$$

为了保证n 为正数(而非有小数点), n就取 $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right) + 1$

2 函数的极限



第二部分 极限运算法则

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$$

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$$

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim x}{\lim y}$$

$$\lim(\text{常数}C \cdot y) = \text{常数}C \cdot \lim y$$

$$\lim y^n = (\lim y)^n$$

$$\lim y^{\frac{1}{n}} = (\lim y)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim(\text{常数}C) = \text{常数}C$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\text{常数}C) = C$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\text{常数}C \cdot f(x)) = \text{常数}C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

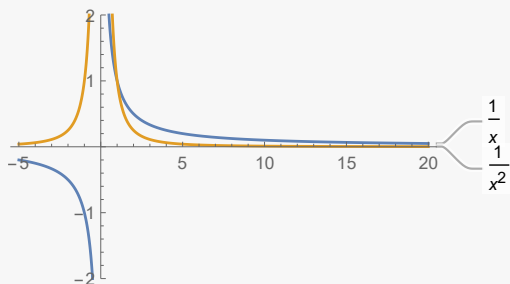
第三部分 极限的规律, 和求法(方法论)

3 若 $f(x) > g(x)$, 则 $\lim f(x) \geq \lim g(x) \leftarrow$ 注意: 是大于等于 \geq !

这个定理也就是说: 虽然一个函数, 可能大于另一个函数, 但它们的极限, 是有可能相等的.

例

虽然 $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$, 但它们的极限(在 $x \rightarrow \infty$ 时), 却是相等的. 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$



4 分子上“项的最高次数” > 分母上“项的最高次数”，则该分式的极限 = ∞ . 反之，则极限 = 0

一个函数若是“分数” $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 则其极限, 只看它分子分母上的“最高次数”的情况:

4.1 对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 $m > n$, 即: 分子的值 > 分母的值. 则函数极限值 = ∞

4.2 对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 $m = n$, 则函数极限值 = $\frac{a}{b}$

例

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{x^3}}{\frac{7x^3 + 5x^2 - 3}{x^3}}}_{\text{把分子分母, 同时除以最高项的 } x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}}_{\text{把 } x \rightarrow \infty \text{ 代入每一项中}} = \frac{3 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{3}{7}$$

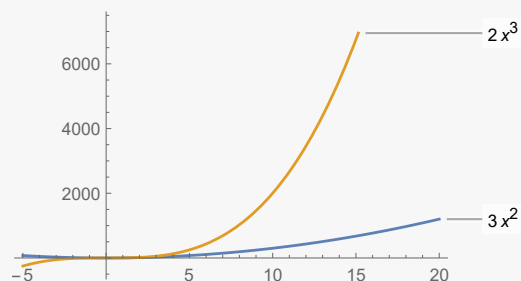
规律: 当满足① $x \rightarrow \infty$, ②分子分母的最高次的次数相同, 比如本例最高都是 x^3 次, 则: 极限值, 就取分子分母最高次的系数之比. 如本例就取 $\frac{3x^3}{7x^3}$ 的系数, 即 $3/7$, 这个就是极限值了.

5 重要极限: $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$

4.3 对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 $n > m$, 即: 分子的值 $<$ 分母的值. 则函数极限值 $= 0$

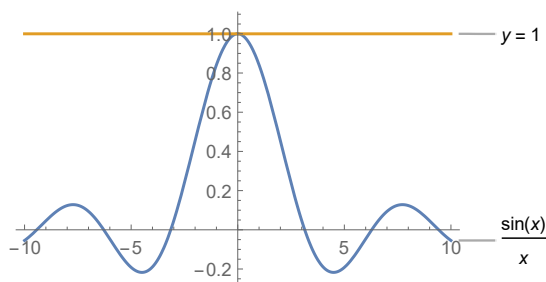
例

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3}}{\frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^3}}}_{\text{把分子分母, 同时除以最高项的 } x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}}_{\text{把 } x \rightarrow \infty \text{ 代入每一项中}} = \frac{0 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = 0$$



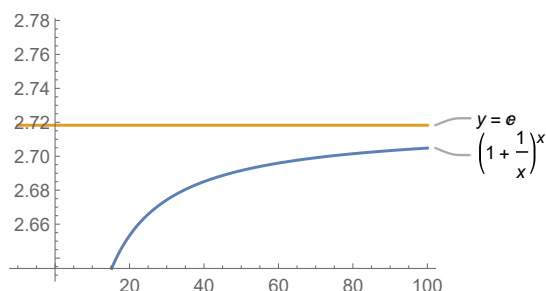
规律: 当满足① $x \rightarrow \infty$, ②分母的最高次的次数, 要比分子的最高次次数还大时, 比如本例“分母的最高次次数”是 x^3 , 而“分子的最高次次数”只有 x^2 , 则: 极限就是0.

5 重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



其实, 它的骨架本质, 是这种形式的: $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square}$

6 重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$



6 重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

这个公式其实就是“复利”的终值计算公式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$

注意: 该公式的本质是: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$. \leftarrow 即两个“方框□”处的数字必须完全相同!

注意: 使用该极限公式时, 中间必须是加号+. 如果题目给出的不是加号, 你也要把它先变换成加号.

即:

这里必须是加号 \downarrow 这个数值必须是1 \downarrow

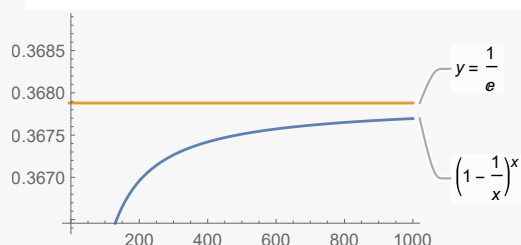
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

\nwarrow \nearrow

这两个数字必须完全相同

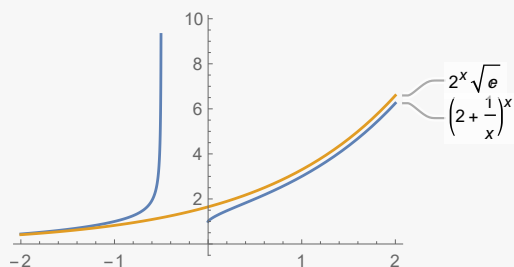
例

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^x \quad \leftarrow \text{先把中间变成加号, 才能套用公式} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} \quad \leftarrow \text{指数上的 } x, \text{ 也变成 } -(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} \quad \leftarrow \text{指数上, 根据公式, 能变成 } \lim(a^n) = (\lim a)^n \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-1} = e^{-1} \\ &\quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}}_{\text{里面这块, 就能套用公式}} = e \end{aligned}$$



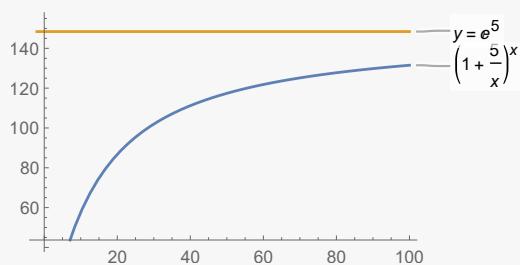
例

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^x &\leftarrow \text{这里的2, 必须变成1, 才能套用公式} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)\right)^x = 2^x \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x \cdot \frac{1}{2}} = 2^x \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}_{\text{这块的极限值, 就是e}} = 2^x e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

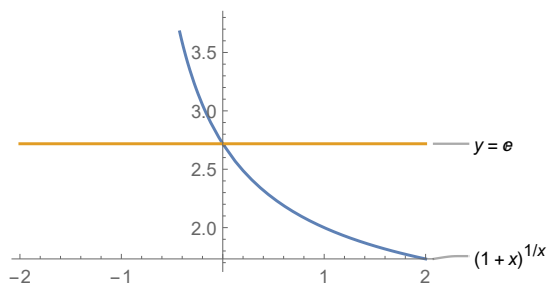


例

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x &\leftarrow \text{这里分子上的5, 必须变成1, 才能套用公式} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5} \cdot 5} = \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^5}_{\text{这块的极限值, 就是e}} = e^5 \end{aligned}$$



7 重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$



8 求极限时, 遇到 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种时, 可使用“洛必达法则” *L'HOSPITAL'S RULE* : $\lim_{X \rightarrow A} \frac{F(X)}{F'(X)} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{F'(X)}{F''(X)}$ 10

8 求极限时, 遇到 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种时, 可使用“洛必达法则” *L'Hospital's rule* :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则, 主要用于求极限, 尤其是 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 这种的.

两个无穷小之比 $\frac{0}{0}$, 或两个无穷大之比 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限可能存在, 也可能不存在。因此, 求这类极限时, 往往需要适当的变形, 转化成可利用“极限运算法则”或“重要极限的形式”, 进行计算. 洛必达法则, 便是应用于这类极限计算的通用方法.

洛必达法则的内容:

有两个函数 $f(x)$ 和 $F(x)$, 若它们满足这些条件:

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 有 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的值, 都趋向于 0.
- (2) 在 a 的“去心邻域”内, $f'(x)$ 和 $F'(x)$, 即它们的导数均存在, 且 $F'(x) \neq 0$
- (3) 当 $x \rightarrow a$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 的值存在, 或其极限值 = 无穷大 ($\pm\infty$ 皆可)

则, 我们就有这个结论:

当 $x \rightarrow a$ 时, 这两个函数的比值, 即 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ = 存在, 或 $\pm\infty$

总结就是:

- 如果“这两个函数的导数之比”的极限值存在, 则它们的“函数之比”的极限, 也存在, 且其值就等于前者. 即: 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$
- 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 这个极限值 = ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也 = ∞
- 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 这个极限值不存在, 则本“洛必达法则”方法无效, 就要使用其他方法来求该极限了.

例

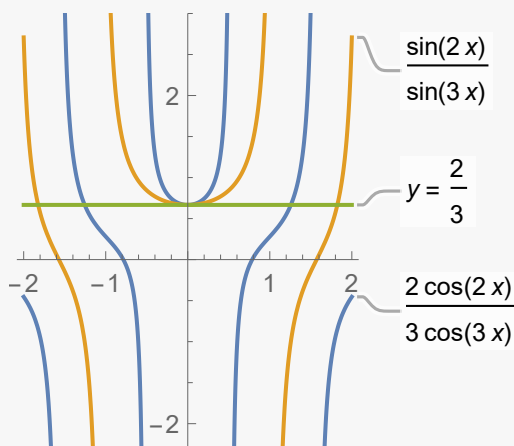
求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0)$$

先看“它们的导数之比”的极限, 存不存在?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos ax) \cdot a}{(\cos bx) \cdot b} = \frac{a}{b}$$

其“导数之比”的极限存在, 所以“原函数”之比的极限也存在, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, 就 = $\frac{a}{b}$



例

求 $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ \leftarrow 先把 $x=1$ 代入进去, 发现满足 $\frac{0}{0}$ 型, 能用“洛必达法则”. 那么我们就先来求“这两个函数的导数之比”的极限:

$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x + 2)'}{(x^3 - x^2 - x + 1)'} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$ \leftarrow 再把 $x=1$ 代入进去, 发现满足 $\frac{0}{0}$ 型, 继续能用“洛必达法则”

$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 3)'}{(3x^2 - 2x - 1)'} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$ \leftarrow 再把 $x=1$ 代入进去, 发现 $= \frac{6}{4}$, 不满足 $\frac{0}{0}$ 型, 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型了, 就不能继续用“洛必达法则”了.

所以, 本题的最终结果, 即 $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

即:

(1) 如果你代入 x 的值后, 发现“分子比分母”的极限, 是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种不定式极限 (这两种称为“基本型”), 就适合于用“洛必达法则”来求解. 并且, 其他变种, 如: $0 \cdot \infty$ 型, $\infty - \infty$ 型, 1^∞ 型, ∞^0 型, 0^0 型的极限, 可以通过相应的变换, 转换成上述两种基本的不定式形式, 来求解.

(2) 不过在使用“洛必达法则”之前, 还需要验证一下: 分子分母在限定的区域内, 是否分别“可导”. 满足的话, 才能用“洛必达法则”.

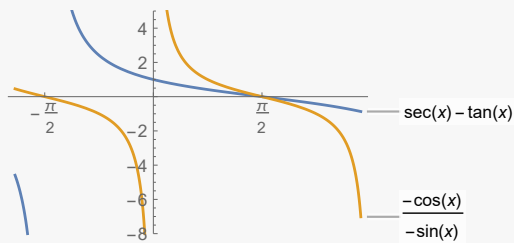
(3) 使用了一次“洛必达法则”后, 如果极限依然不确定是否存在, 即结果仍然为“未定式”, 就再在验证前面所说的两个条件的基础上, 继续使用“洛必达法则”来做. 即, 若条件符合, “洛必达法则”可连续多次使用, 直到求出极限为止.

例

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \leftarrow \frac{0}{0} \text{型, 用洛必达法则} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \leftarrow \frac{0}{0} \text{型, 继续用洛必达法则} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} \leftarrow \text{根据极限公式, 有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \leftarrow \infty - \infty \text{型, 可用洛必达法则} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \leftarrow \text{原式先变化成分式的形式} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)'}{(\cos x)'} \leftarrow \text{使用洛必达法则} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} \leftarrow \text{在 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ 时, 分子 } \cos \rightarrow 0, \text{ 所以整个分数值 } \rightarrow 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



例

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

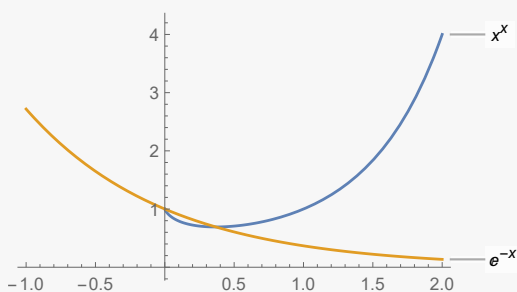
如果把 $x=0$ 代入的话, 会得到 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 因为分母不能为0, 所以该分式无意义.

虽然 0^0 无意义, 但我们可以求它附近的极限处的值.

根据公式: $e^{b \ln a} = e^{b \log_e a} = e^{\overbrace{\log_e a^b}^{\text{即 } e^? = a^b}} = a^b$, 即 $e^{b \ln a} = a^b$

我们就有:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} \leftarrow \text{指数上的分式, 可以用洛必达法则做, 对分子分母同时求导} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x^{-1}}{-1x^{-2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = e^0 = 1 \end{aligned}$$



8.1 技巧1: 在乘积中, 可以用“等价无穷小替换”

下面的例子中, 会用到等价无穷小的替换, 但注意: 只有在“乘积”中, 才能用“等价无穷小替换”, 如果是在加减中, 则不能用替换!

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2} \underbrace{\sin x}_{\text{可用 } x \text{ 代替}} \leftarrow \frac{0}{0} \text{ 型, 用洛必达法则}$$

首先, 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 在此处的 y 值, 等价于 x 在此处的 y 值, 所以我们可以用 x 来代替 $\sin x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x^3)'} \leftarrow \text{用洛必达法则}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \leftarrow \frac{0}{0} \text{ 型, 继续用洛必达法则}$$

= ...

8.2 技巧2: 趋近于“常数”的那些项, 就向外挪出去, 而不要一并进入求导环节

例

比如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \tan x}{\cos x \sin x}$

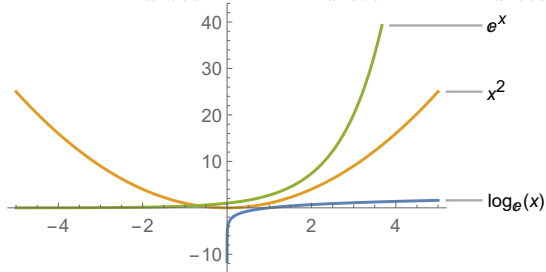
当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x \rightarrow 1$, 即趋向于一个常数. 所以 $\cos x$ 就可以挪出去, 而不参与“洛必达法则”中的求导过程.

即原式 = $\frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \tan x}{\sin x}$

第四部分 无穷大 & 无穷小

9 无穷大

有规律: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x < \lim_{x \rightarrow \infty} x^n < \lim_{x \rightarrow \infty} e^x$



9.1 $\infty + \infty = ?$ 结果未知

9.2 $\infty - \infty = ?$ 结果未知

9.3 $\infty \cdot \infty = \infty$

9.4 $\infty / \infty = ?$ 结果未知

10 无穷小

无穷小: 就是“以数0 为极限”的变量。称一个函数是无穷小量, 一定要说明“自变量x”的变化趋势.

10.1 有限个“无穷小”的和, 是无穷小.

10.2 有限个“无穷小”的乘积, 依然是无穷小.

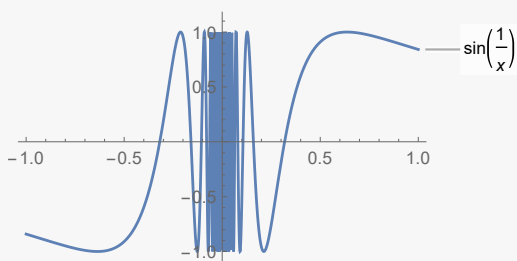
10.3 常数 $C \times$ 无穷小 = 无穷小

10.4 有界函数 \times 无穷小 = 无穷小

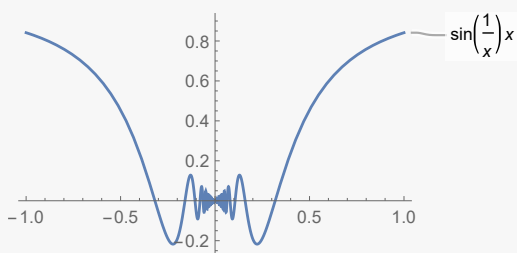
有界函数, 就是说该函数的“值域”, 是在有限区间中的. 如 \sin, \cos 三角函数, 就是有界的.

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\sin \frac{1}{x} \right)}_{\text{有界函数}} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} (x)}_{\text{无穷小}} = 0$$



乘法就意味着: 随着 $x \rightarrow 0$, 它把“有界函数”的 y 值, 越来越压缩到趋向于 0. 如下图的中部分趋势:



10.5 无穷小 \times 无穷大 = ? 结果未知

结果未知. 即可能是无穷小, 也可能是 0, 也可能是无穷大.

11 无穷小的比较：无穷小

无穷小 / 无穷小的比值, 未必是个无穷小, 要看分母和分子, 谁缩小地更快.

两个数都趋向于无穷小, 但两者趋向于 0 的速度有快有慢, 所以它们就能进行比较了.

11.1 高阶无穷小 & 低阶无穷小

对于两个无穷小量 α 和 β , 如果 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 我们就把 α , 叫做“比 β 高阶的无穷小量”. 简称“ α 是 β 的高阶无穷小 (infinitesimal of higher order)”. 意思是 $\alpha \rightarrow 0$ 的速度, 远远要比 $\beta \rightarrow 0$ 的速度更快. 记作: $\alpha = o(\beta)$ ← 中间的 o 是希腊字母 omicron.

“高阶”的意思, 就是说“更快速”, 即它趋近于0的速度比别人更快速, 更迅速, 更光速.

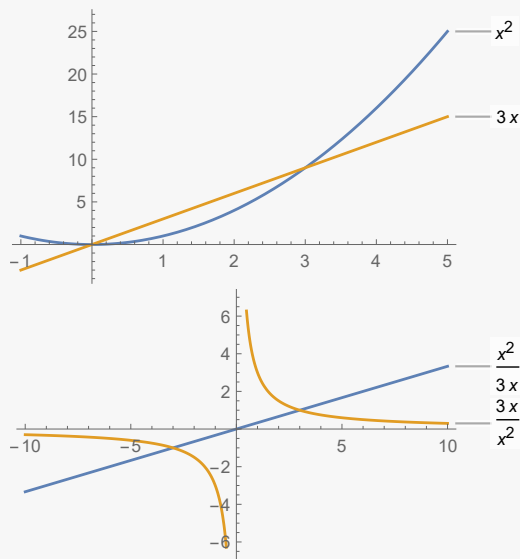
反过来看, 也就是: β 是“比 α 低阶的无穷小量”, 简称: β 是 α 的低阶无穷小 (Low order infinitesimal). 即 $\beta \rightarrow 0$ 的速度, 要比 $\alpha \rightarrow 0$ 的速度远远更慢.

即, 如果 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就称 β 是比 α 低阶的无穷小.

例

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{兔子(更快的趋近于0终点)}}{\text{乌龟(更慢的趋近于0终点)}} = 0$ ← 即分子 \downarrow 分母. 即 x^2 是比 $3x$ “高阶”的无穷小.
高阶, 即值它趋向于0的效率(速度)更高, 更快.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{乌龟(更慢的趋近于0终点)}}{\text{兔子(更快的趋近于0终点)}} = \infty$ ← 即分子 \downarrow 分母. 即 $3x$ 是比 x^2 “低阶”的无穷小.
低阶, 即值它趋向于0的效率(速度)更低, 更慢.



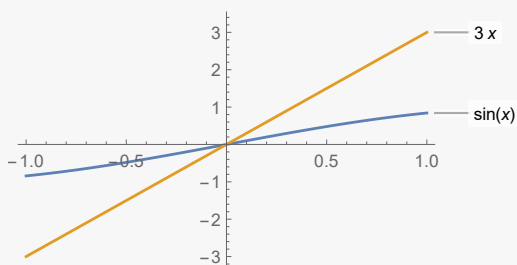
11.2 同阶无穷小: $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{b}{a} = \text{常数} C, C \neq 0$

若 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{b}{a} = \text{常数} C, C \neq 0$, 就称: b 和 a 为“同阶无穷小” Infinitesimal of the same order. 意思是两者趋近于0的速度相仿。

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

← 因为分子分母的 x 的指数次数相同.



11.3 等价无穷小 $\rightarrow \lim \frac{b}{a} = 1$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 就称: β 与 α 是“等价无穷小”. 记为 $\beta \sim \alpha$. 等价, 就可以“相互替换”来使用. 所以我们做题的“方法论”就是: 把复杂的东西, 用它等价的简单东西, 来替换掉. 即, “以简替繁”.

注意: 两个函数是“等价无穷小”关系, 因而可以互相替换使用, 这种用法是有前提条件的:

- (1) 只有在 $x \rightarrow 0$ 的时候, 才能用“等价无穷小”的另一种函数来替换.
- (2) 只有在求的是两个“等价无穷小”的“比值”的时候, 才能用“等价物”来替换. 即如果求的是两个“等价无穷小”的相加, 相减, 相乘, 就都不能用“等价物”来替换.

例

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x} &\leftarrow \text{因为在 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \text{ 分子上, 我们就用 } x \text{ 来代替 } \sin x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x^2 + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

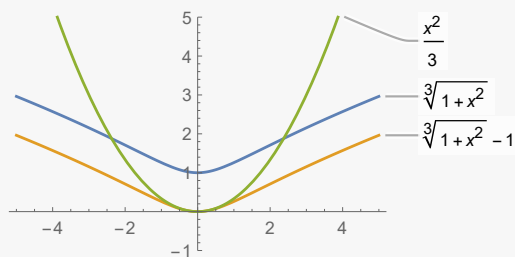
分子或分母, 可拆成若干因子的乘积时, 就可对其中的一个或几个因子, 做等价替换.

注意: 必须是“乘积”才行, 如果只能拆成若干因子的“相加减”, 则不能用“等价替换”的方法.

11.4 在 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1$ 等价于 $\frac{1}{n}x$

例

在 $x \rightarrow 0$ 时, $\left[(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \sim \left[\frac{1}{3}x^2\right]$



11.5 k阶无穷小

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = \text{常数} C, \quad C \neq 0, \quad k > 0$, 就称: β 是关于 α 的“k阶无穷小”.