# 目录

# 矩阵及其运算

## 1 矩阵

矩阵一般用大写字母来表示. 比如 A, B, C, E. (D 留给了行列式.)

【矩阵和行列式的区别】:

| 行列式 D | 矩阵 Matrix |
|---|---|
| 本质是个"数" | 是张"数表" |
| 符号, 用竖线包围表示, 即 \|...\| | 用 [] 或 () 包围. 几乎不用大括号. |
| 必定是方形的, 即行数 = 列数 | 行列数无要求. |

【元素都是 0 的矩阵, 叫零矩阵, 记作 0】:

【负矩阵】: 所有元素, 都取其负数的矩阵, 叫负矩阵. 记为 -A.

【单位阵】: 即"主对角线"上元素都是 1, 其他都是 0 的矩阵. 记作 E 或 I.
记忆方法:
- 主对角线, 是下坡 \
- 次对角线, 是上坡 /

注意: **只有"方阵", 才有"主对角线"的概念.** 不是方阵, 就没有主对角线.

$$E\text{或}I=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{单位阵}}$$

【只有一个元素的矩阵, 书写它时可以不带矩阵括号】:
如: [5]=5

【同型矩阵】:
即两个矩阵 A,B, 若 A 的行数 =B 的行数, A 的列数也 =B 的列数, 则它们就叫"同型矩阵".
如: $A_{3\times5}$ 和 $B_{3\times5}$, 就是同型矩阵. 它们的形状是一样的.

若同型矩阵中, 对应元素都相等, 则这两个矩阵相等. 换言之, **两个矩阵相等的前提, 是它们必须是"同型矩阵".**

所以, 两个零矩阵, 不一定相等. 因为它们不一定是同型的. 如:
$0_{2\times2} \neq 0_{2\times3}$

---

# 2 矩阵的运算

## 2.1 矩阵的加法, 减法

矩阵的加法, 只要把两个矩阵, 对应位置的元素直接相加就行了. 即:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{bmatrix}$$

**注意: 只有 "同型矩阵" 才能做相加减.**

减法也是这个规律: 对应元素相减即可.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d-j & e-k & f-l \end{bmatrix}$$

---

## 2.2 加法的性质

- A+B = B+A
- (A+B) + C = A + (B+C)
- A + 0 = A ← 注意, 零矩阵与 A, 应该是 "同型" 的才能相加. (同时, 两个零矩阵, 也未必是同型的. 如 $0_{3\times 5} \neq 0_{4\times 7}$
- A + (-A) = 0
- $A+B=C \iff A=C-B$

---

## 2.3 矩阵的数乘

$$k\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{bmatrix}$$

就是把数字 k, 乘给矩阵中每一个元素身上.

反过来说, 就是: **若矩阵中的所有元素, 都有同一个公因子, 则该公因子提到矩阵外, 只需提 "一次".**
(**注意: 行列式中的公因子, 是 "每行提一次" 的.**)

---

## 2.4 数乘的性质

- k(A+B) = kA + kB
- (k+l)A = kA + lA
- $k(lA)=(k\cdot l)A$ ← 两个数 K 和 L, 可以先结合, 再去乘以矩阵 A

---

## 2.5 矩阵的乘法

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e & f \\ g & h \end{array}\right] = \begin{bmatrix} ae+bg & A\text{行}1 * B\text{列}2 \\ A\text{行}2 * B\text{列}1 & A\text{行}2 * B\text{列}2 \end{bmatrix}$$

注意：两个矩阵能相乘的前提是：前面矩阵的列数 $=$ 后面矩阵的行数.

矩阵的乘法：

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \times \underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \begin{array}{cc} A行1\times B列1 & A行1\times B列2 \\ \left[\begin{matrix} ae+bg \\ ce+dg \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} af+bh \\ cf+dh \end{matrix}\right] \\ A行2\times B列1 & A行2\times B列2 \end{array}$$

矩阵能相乘的前提条件是：前列数 = 后行数

$$A_{m\times n}\cdot B_{s\times t} = C_{m\times t}$$

内 $n=s$，则 A可乘B → 因此，AB ≠ BA → 若 AB 能 = BA，则称它们是"可交换的矩阵"，它们必定是同阶方阵.

叫"A左乘B"（AB）　叫"A右乘B"（BA）

乘出来的新矩阵，就是外面的两个数字，即 m行t列的

如：$B_{2\times 3}\ A_{5\times 2}$　内里两个数字不同，不能相乘

例

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{-1\cdot 1+1\cdot 0+5\cdot -3}^{前行1\cdot 后列1} & \overbrace{-1\cdot -1+1\cdot 2+5\cdot 6}^{前行1\cdot 后列2} \\ \overbrace{4\cdot 1+3\cdot 0+-2\cdot -3}^{前行2\cdot 后列1} & \overbrace{4\cdot -1+3\cdot 2+-2\cdot 6}^{前行2\cdot 后列2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 33 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

---

# 第一部分　线性方程组和矩阵

# 第二部分　矩阵的运算

# 第三部分　逆矩阵

# 第四部分　克拉默法则

# 第五部分　矩阵分块法