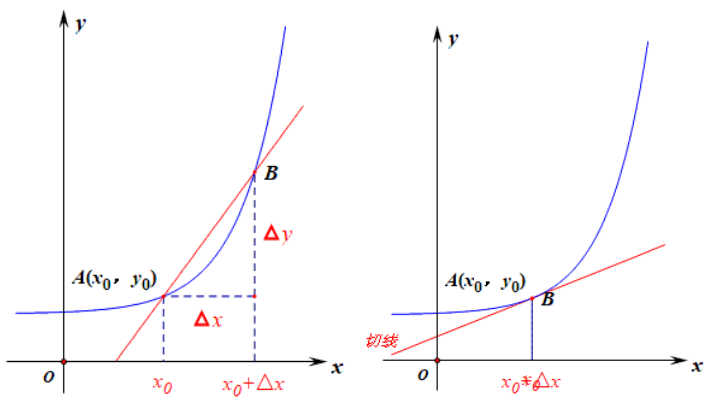
目录

导数 Derivative

2022 年 12 月 9 日

第一部分　什么是导数?

某点处的 “导数”, 就是该点处 “切线的斜率”.
导数, 就是一个 “极限值”, 比如, y 在点 x_0 处的导数, 就是: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



可导, 就意味着图像很” 光滑”. 即图像没有” 尖角” 存在 (因为尖角处的左右导数不相等).
并且, 切线不能垂直于 x 轴. 如果切线是垂直于 x 轴的, 它的斜率就会是 +∞ 或 -∞ 了.

x_0 点处的导数, 其实可以有下面 4 种写法来表示:
(1) $y'|_{x=x_0}$
(2) $f'(x_0)$
(3) $\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$
(4) $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

“位置” 的瞬时变化率 (变换趋势, 能预测未来), 就是 “速度”. 所以速度是位置的导数.
“速度” 的瞬时变化率, 就是 “加速度”. 所以 “加速度” 是 “速度” 的导数. “加速度” 就是 “位置” 的二阶导.

单侧导数, 就是从 “某一侧” 逼近某一 x 点时, 该点的切斜斜率.
所以, 左导数, 就是 “从左侧向右” 逼近了. 右导数, 就是 “从右边向左” 逼近了.
- 左导数: $f_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- 右导数: $f_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

第二部分　导数公式

1　常用的导数

1.1　(常数C)$' = 0$

常数不会变化, 自然没有 "瞬时变化率" 存在, 所以常数的导数就 =0.

1.2　$(x^n)' = nx^{n-1}$

(1) 当指数 n=1 时, 其导数 =1.
(2) 当 $n > 1$ 时, 其导数是 $(x^n)' = nx^{n-1}$

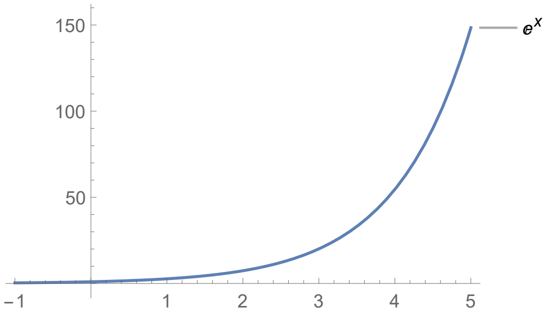
例

求 $y = \dfrac{1}{x}$ 在点 (1/2, 2) 处的切线的斜率 (即导数), 并求出该切线的方程.
其导数是: $y' = \left(x^{-1}\right)' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2}$
然后把点 (x=1/2, y=2) 代入进去, 得到: $y' \mid_{x=\frac{1}{2}} = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -4 \leftarrow$ 这个数值, 就是函数在点 (1/2, 2) 处的切线的斜率.
然后再套用直线的 "点斜式方程" $y - y_1 = k(x - x_1)$
本例的切线即: $y - \underbrace{y_1}_{=2} = \underbrace{k}_{\text{即}y'=-4}\left(x - \underbrace{x_1}_{=\frac{1}{2}}\right)$

1.3　$(a^x)' = a^x \ln a$

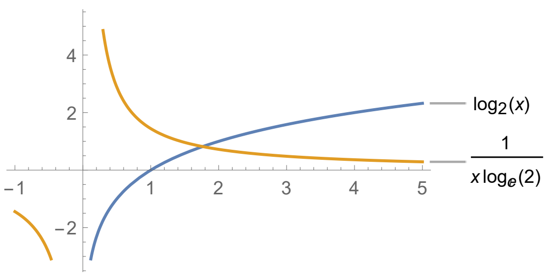
即直接后面跟个尾巴: ln a
例如, $(2^x)' = 2^x \ln 2$

1.4 $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$



1.5 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

即把 x 提到前面去, 把 log 变成 ln, 整体再放在分母上. 分子为 1.



1.6 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

例如: $(\log_e x)' = \dfrac{1}{x \underbrace{\ln e}_{=\log_e e=1}} = \dfrac{1}{x}$

对 “对数函数” 求导, 有一种技巧: 换底成 ln 后再来做. 因为转成 ln 后, 操作会变得简单.

例

$$
\begin{aligned}
&y = x^x,\ \text{求}y' \\
&\ln(y) = \ln(x^x) \ \leftarrow \text{两边同时取}\ln \\
&\ln(y) = x \ln x \\
&(\ln y)' = (x \ln x)' \ \leftarrow \text{两边同时对}x\text{求导, 注意}y\text{是个复合函数, 要用剥洋葱法} \\
&\ln{}'y \cdot y' = x' \ln x + x(\ln x)' \\
&\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} \\
&y' = (\ln x + 1)\, y \ \leftarrow \text{再把}y\text{这个复合函数的具体内容} = x^x\text{代进去} \\
&y' = (\ln x + 1)\, x^x
\end{aligned}
$$

2 反函数的导数: $\boxed{[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{原函数的导数f'(x)}}$

反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈 "倒数关系".
原函数是 y=f(x), 其反函数是 x=f(y), 则, 反函数的导数, 就是 "原函数导数" 的倒数.
换言之, 原函数的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, , 则其反函数的导数就是 $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.
"原函数" 和 "反函数", 它们 "导数" 的乘积 =1.
"原函数" 与其 "反函数" 的图像, 是关于 y=x 对称的.

3 三角函数的导数

3.1 $(\sin x)' = \cos x$

3.2 $(\cos x)' = -\sin x$

3.3 $(\tan x)' = \sec^2 x$

3.4 $(\cot x)' = -\csc^2 x$

3.5 $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

3.6 $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

4 反三角函数的导数

4.1 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4.4 $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

第三部分 求导的各种方法, 方法论

5 求导法则: 和差积商

5.1 $(a+b)' = a' + b'$

例: $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

5.2 $(a+b)' = a' + b'$

5.3 $(a+b+c)' = a' + b' + c'$

5.4 $(a-b)' = a' - b'$

5.5 $(ab)' = a'b + ab'$

例: $(x^3e^x)' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2e^x + x_3e^x$

5.6 $(abc)' = a'bc + ab'c + abc'$

5.7 (**常数 C** $\cdot a)' = C \cdot a'$

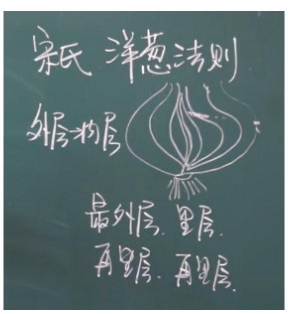
← 直接把常数提到外面去就行了
例: $(5sinx)' = 5(sinx)' = 5cosx$

5.8 $(\frac{a}{b})' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$

即: $\left(\frac{\text{上}}{\text{下}}\right)' = \frac{\text{上'} \cdot \text{下} - \text{上} \cdot \text{下'}}{\text{下}^2}$

6 对 “复合函数” 求导的方法: 链式法则 / 剥洋葱法

$$\text{有}\begin{cases} \text{大} = f(\text{中}) \\ \text{中} = g(\text{小}) \\ \text{小} = h(\text{微}) \end{cases}, \quad \text{则:}\frac{d\text{大}}{d\text{微}} = \frac{d\text{大}}{d\text{中}} \cdot \frac{d\text{中}}{d\text{小}} \cdot \frac{d\text{小}}{d\text{微}}$$



例

我们用 “剥洋葱法”(从外向内一层层求导), 来求下面的复合函数的导数

$$y = \left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$y' = \left[\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]' \cdot \left(1-2x^2\right)' = \frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-2 \cdot 2x)$$

7 对“参数方程”求导的方法

比如, 有这个参数方程, t 是参数:

$$d(x) = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

要求“y 对 x 求导”. 则:

其“一阶导数”是: $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{y对t的导数}{x对t的导数} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

其“二阶导数”是: $\frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{dy}{dx}对t的导数}{x对t的导数} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

8 对“隐函数”求导的方法

- 显函数: 能清晰的写成 y= ...x 的形式.
- 而隐函数: 虽然 x 和 y 之间有关系, 但无法写成清晰的 $y = f(x)$ 的形式. 即无法变换成“能把 y 单独提取出来, 放在等号左边”的这种形式.

对“隐函数”求导的方法是: 等号两边同时对 x 求导.

例

$$\begin{aligned}
&有隐函数\ e^y + xy - e = 0, 求y' \\
&(e^y + xy - e)\text{'} = 0' \\
&(e^y)\text{'}y' + (xy)\text{'} - e' = 0 \ \leftarrow 常数e的导数也 = 0 \\
&e^y y' + (x'y + xy') = 0 \\
&e^y y' + y + xy' = 0 \\
&(e^y + x)y' = -y \\
&y' = -\frac{y}{(e^y + x)}
\end{aligned}$$

因为是隐函数, y 无法写成...x 的形式, 所以我们就会发现, y’ 的结果里面, 也无法只有纯粹的 x, 会带着 y.