目录

函数

第一部分　反函数

函数f 是: 输入x, 输出y.	f(x自变量) = y因变量.
反函数 f^{-1} 是: 输入y, 输出x.	相当于时间倒流, 把原函数的功能倒过来. 就像线性代数中的”逆矩阵”变换功能.

“反函数”和“原函数”, 图象关于直线 y=x 对称.

例

有函数 y = 3x+5, 即输入x, 输出y. 它可以变为:

$$3x = y - 5$$
$$x = \frac{y-5}{3}$$

这样, 就是输入y, 输出x 的形式了, 即就变成了“反函数”.
但一般我们习惯于将输入值, 用x表示; 输出值 , 用y值表示, 所以上面的反函数, 就索性写成 $y = \frac{x-5}{3}$, 但你不要混淆这里的x和y的意义. 这里的x是原y值, 这里的y是原x值.

第二部分　初等函数

1　power function 幂函数: $y = x^{exp}$

变量x 作为“底”的, 就是幂函数. 形如 $y = x^2$, 格式是 $y = x^{exp}$

2　exponential function 指数函数: $y = base^x$

变量x 在肩膀上做为次方来用的, 就是“指数函数”. 形如 $y = 100(1 + 0.1)^x$. 格式是 $y = base^x$.
其中, base >0 并且 base≠1.
其实, “投资回报率”终值计算公式 $F = P(1 + i)^n$, 就是指数函数. 如: $y = 100(1 + 0.1)^x$

2.1　为什么 $base^0 = 1$?

因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$

而 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$ ← 分母上不能为0, 所以无意义

2.2 重要公式 $\boxed{a^n = e^{n \cdot \ln a}}$

证明过程, 我们倒过来做:

例

$e^{b \cdot \ln a}$ ← 指数部分的 $b \cdot \ln a = b \cdot \log_e a = \log_e(a^b)$

所以原式 $= e^{\overbrace{\log_e(a^b)}^{即\ e^? = a^b}} = a^b$

即得出了: $e^{b \cdot \ln a} = a^b$

即:

$$\begin{aligned} e^{指 \cdot \ln 底} &= e^{指 \cdot \log_e 底} \\ &= e^{\overbrace{\log_e \overbrace{底^{指}}^{幂}}^{即\ e^? = 底^{指}}} \\ &= 底^{指} = 幂 \end{aligned}$$

记忆法: 把底数(a)换成e, 把指数(n)换成: 原指数后面再乘个“ln底” (n × ln a). 即 $a^n = e^{n \cdot \ln a}$

3 Logarithmic function 对数函数: $\log_{底}$ 幂 = 指

- 底数 Base Number
- 指数 Exponent
- 幂 Power

有: $底^{指}$ = 幂, 则: → $\log_{底}$ 幂 = 指

- $\log_{10}$ 幂 = lg 幂
- $\log_e$ 幂 = ln 幂

显然, 就有:

3.1 $底^{\log_{底} 幂}$ = 幂

即 $底^{\overbrace{\log_{底} 幂}^{指}} = 幂$

例

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3} = (2^{-3})^{\log_2 3} = \underbrace{\left(2^{\overbrace{\log_2 3}^{即\ 2^? = 3}}\right)}_{=3}^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

. . . .

3.2 $\log_{底} 底^{指}$ = 指

即 $\log_{底} \underbrace{底^{指}}_{幂} = 指$

. . . .

3.3 $\log_{底}\left(\frac{幂1}{幂2}\right)=\log_{底}幂1-\log_{底}幂2$

即：

$$\underbrace{\log_{底}\left(\frac{幂1}{幂2}\right)}_{即：底^{?}=\frac{幂1}{幂2}}=\overbrace{\log_{底}幂1}^{指1}-\overbrace{\log_{底}幂2}^{指2}$$

反过来, 即是: $\log_{底}幂1-\log_{底}幂2=\log_{底}\left(\frac{幂1}{幂2}\right)$

. . . .

3.4 $\log_{底}幂1+\log_{底}幂2=\log_{底}(幂1\cdot幂2)$

. . . .

3.5 $\boxed{\log_{原底}幂=\frac{\log_{任意底}幂}{\log_{任意底}原底}}$ ← 这个就是“换底公式”

由换底公式, 可以推导出以下一些常用的结论:

$\rightarrow \log_{原底}幂=\frac{\log_{幂}幂}{\log_{幂}原底}=\frac{1}{\log_{幂}原底}$ ← 看一头一尾, 即就有: $\boxed{\log_{底}幂\cdot\log_{幂}底=1}$

$\rightarrow \boxed{\log_{底1}幂1\cdot\log_{幂1}幂2=\log_{底1}幂2}$

即:

$$\begin{aligned}\log_{底1}幂1\cdot\log_{幂1}幂2&=\frac{\cancel{\log_{任意底}幂1}}{\log_{任意底}底1}\cdot\frac{\log_{任意底}幂2}{\cancel{\log_{任意底}幂1}}\\&=\frac{\log_{任意底}幂2}{\log_{任意底}底1}\\&=\log_{底1}幂2\end{aligned}$$

← 即 $\log_{a}b\cdot\log_{b}C=\log_{a}C$

你可以这样记忆: $\log_{a}\cancel{b\cdot\log_{b}}C=\log_{a}C$

$\rightarrow \boxed{\log_{原底}幂:\ \rightarrow 根据换底公式,有=\frac{\log_{10}幂}{\log_{10}原底}=\frac{\lg幂}{\lg原底}}$

即有, 例如: $\log_a 2=\frac{\lg 2}{\lg a}$

. . . .

3.6 $\log_{a^n}b^m=\frac{m}{n}\log_a b$

← 简单记忆法: 把 m 和n, 上下保持不动, 直接向左平移到 log 外面去就行了.

例

$\log_2\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+\log_8 3$ ← 加号右边的 $\log_8 3=\log_{2^3}3^1=\frac{1}{3}\log_2 3=\log_2 3^{\frac{1}{3}}$

所以，原式 $=\log_2\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+\log_2 3^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned}&=\log_2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\\&=\log_2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{3}\right)=\log_2 2=1\end{aligned}$$

这个公式可以推导出:

$\rightarrow \log_{底}M^n=\log_{底^1}M^n=\frac{n}{1}\log_{底}M=n\cdot\log_{底}M$

$\rightarrow \log_{a^n} b^n = \frac{n}{n} \log_a b = \log_a b$
$\rightarrow \log_{a^n} a^m = \frac{m}{n} \log_a a = \frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n}$
$\rightarrow \ln a^b = \log_{e^1} a^b = \frac{b}{1} \log_e a = b \ln a$

---

4 trigonometric function 三角函数: $y = base^x$

4.1 sin & arcSin

4.2 cos & arcCos

4.3 tan & arcTan

4.4 cot & arcCot

4.5 sec & arcSec

4.6 csc & arcCsc