目录

概率

第一部分　频率

做n次试验, A事件发生了m次, 我们就把 $\dfrac{A\text{事件发生的次数}m}{\text{共}n\text{次试验}}$ 叫做“频率”. 记作$\omega_n(A)$.
比如丢硬币, 丢10次, 丢100次, 丢1000次, 每次的“频率”可能都不一样, 比如结果是 $\frac{7}{10}, \frac{55}{100}, \frac{508}{1000}$.
所以这就是“频率”和“概率”的区别.
但你可以发现, 随着试验次数n的增大, A事件的“频率”的值, 会接近与“概率”的值. 即: $\lim_{nß0} \omega_n(A) \to P$

1　频率的性质:

规范性:
- $\omega_n(\mathit{\Omega}) = 1 \leftarrow$ 做n次试验, 里面“必然事件”发生的频率, 是1. 既然是“必然事件 Ω”, 它肯定会发生, 所以频率肯定是1.
- $\omega_n(\mathit{\Phi}) = 0 \leftarrow$ 做n次试验, 里面“不可能事件”发生的频率, 是0.

可加性:
比如做1000次试验, 即$\mathit{\Omega}_{1000}$, 则有:

$$\omega_{1000}(A_1 + A_2) = \underbrace{\omega_{1000}(A_1)}_{1000\text{次试验中},A1\text{事件发生的频率}} + \underbrace{\omega_{1000}(A_2)}_{1000\text{次试验中},A2\text{事件发生的频率}}$$

即: “和的频率”, 就等于“频率的和”.

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\omega_n}_{\text{做}n\text{次试验}} \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_m)}_{\text{里面有}m\text{个事件}}}_{\text{做}n\text{次试验,里面有}m\text{个事件发生了的频率}} = \omega_n(A_1) + \omega_n(A_2) + ... + \omega_n(A_m)}$$

2　古典概型：$\mathbf{P(A) = \dfrac{A\text{中包含的“基本事件”有多少个}}{S\text{中“基本事件”的总数}}}$

满足这些条件的, 就属于“古典概率 classical models of probability 模型”:
- 样本点是有限的
- 所有样本点出现的可能性, 是相同的. 即“等可能性”.

古典概型模型:
事件$\mathrm{A} = \{\mathrm{e_{i_1}}, \mathrm{e_{i_2}}, ..., \mathrm{e_{i_k}}\}$ 发生的概率为:
$\mathrm{P(A)} = \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}} = \dfrac{\text{A中包含的“基本事件”有多少个}}{\text{S中“基本事件”的总数}}$

古典概率模型的性质:
- $0 <= P(A) <= 1$
- $P(\Omega) = 1, \quad P(\Phi) = 0$

- 有限可加：$A_1, A_2, ...A_n$ 是互不相容的. 即 $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_n)$

古典概率模型:
- 其优点是: 可以直接套公式来算.
- 但其缺点是:
(1) 其结果必须是“有限个”的结果 (如, 掷骰子, 结果就是6个基本事件, 而不是无限个事件.)
(2)其结果, 必须是“等可能性”.

例

有 a个白, b个黑, 问: 从中连续取出 m个球 (连续取, 就是不放回的意思了) $(1 \le m \le a + b)$, 第m个是白球的概率= ?

思路1：其实我们只要考虑第 m 个位置的这一个球的情况就行了, 其他位置的球,随便它们什么颜色, 我们不用考虑的.

$$\mathrm{P}\,(\text{第m位置是白球}) = \frac{\text{在第m个位置上, 从a个白球里取1个放上去. 剩下数量的其他位置上, 依然做全排列}}{\text{所有球的全排列}}$$

$$\text{即 P}\,(\text{第m位置是白球}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白}}^{\text{取1}}}^{\text{第一步, 先取1个白球,占位放在第m个位置上. 第二步:剩下的所有球, 依然做全排列}} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白+总b黑}-1}^{\text{总a白+总b黑}-1}}}{\mathrm{P}_{\text{总a白+总b黑}}^{\text{总a白+总b黑}}}$$

思路2：或者我们也只需考虑前m个数量的球就行了, 后面其他的球, 爱怎样颜色怎样颜色, 不用我们考虑.

$$\mathrm{P}\,(\text{第m位置是白球}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白}}^{\text{取1}}}^{\text{第一步, 先取1个白球,占位放在第m个位置上}} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白+总b黑}-1}^{\mathrm{m}-1}}^{\text{第二步:m个数中的剩下的所有球, 依然做全排列}}}{\underbrace{\mathrm{P}_{\text{总a白+总b黑}}^{\mathrm{m}}}_{\text{m个球的全排列}}}$$

其实你有没有发现? “在第m个位置上出现白球” 这个“m索引位置”, 其实是个障眼法. 白球出现在任何其他位置, 它出现在第1个位置, 第10个位置, 最后一个位置, 对我们的计算结果没有任何影响. 因为不管白球出现在第几个位置上, 它出现的概率都是相同的, 因为是古典概率嘛! 所以, “位置为几”其实不重要.

所以, 我们就有了第三种思路: 我们就把这个白球, 让它直接出现在第1个位置就好了:

$$\mathrm{P}\,(\text{第1个位置是白球}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白}}^{1}}^{\text{(在第1个位置上,) 从白球里, 取1个 的取法数量}}}{\underbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白+总b黑}}^{1}}_{\text{(在第1个位置上,) 从总数里, 取1个 的取法数量}}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}}$$

---

3 几何概型

几何概型 geometric models of probability, 即这类概率问题, 能够转换成用“几何问题”来求解.

例

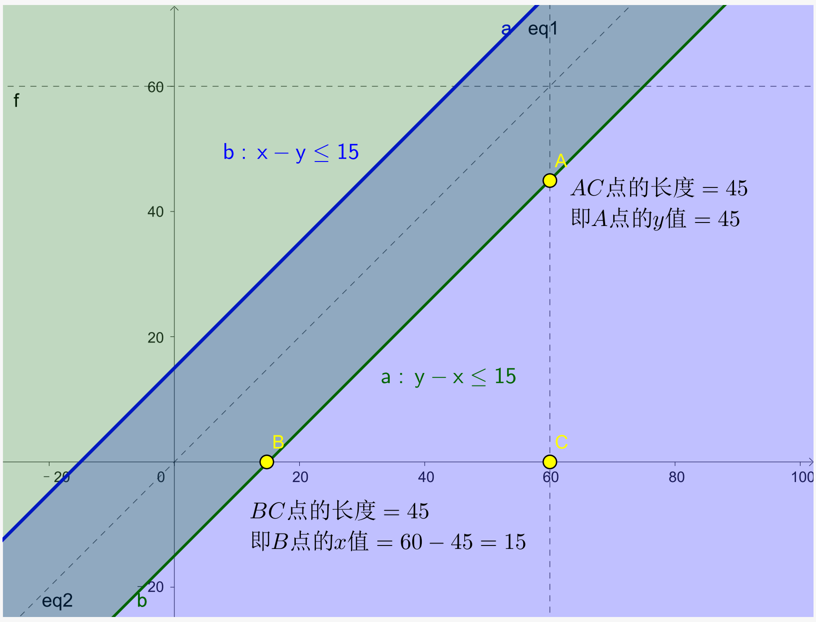
有甲乙两人, 相约在 6-7点见面 (其实这个具体的时间点也是个障眼法, 只要在1个小时的区间就行). 先到者, 最多等对方15分钟, 然后就离开了.
甲乙两人, 在这1小时内的任意时刻, 都可能到达.

问, 他们能相见的概率是多少?

我们令
- 事件A：表示两人见到了面
- x：表示甲到达的时间点
- y：表示乙到达的时间点

他们要能见到面, 即 $|y-x| \le 15$分钟. 那么这就有两种可能性:
- 甲先到. 即 $x \le y$ (甲来到的时间点x, 比乙来到的时间点y 要小 (早)), 即 $y-x \le 15$
- 乙先到. 即 $y \le x$, 即 $x-y \le 15$

这两组不等式, 能用函数图形来表示出来, 如下图. x和y轴上的60, 分别代表两人的1小时区间(60分钟). 中间的交集区域, 就是两人可以见到面的时间段.

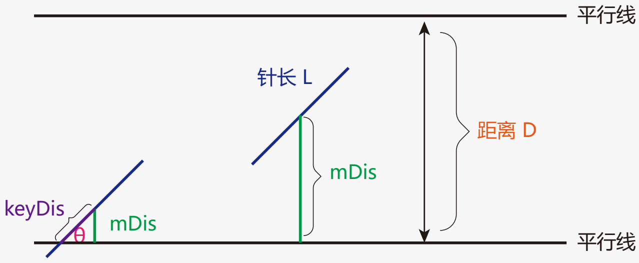


显然, 这就是求几何面积的问题.

$$\text{即: P (A)} = \frac{60\cdot 60 - \overbrace{\frac{45\cdot 45}{2}}^{\text{上面的“边长为45”的三角形的面积}} - \overbrace{\frac{45\cdot 45}{2}}^{\text{下面的“边长为45”的三角形的面积}}}{\underbrace{60\cdot 60}_{\text{即“边长为60分钟”的矩形}}} = 0.4375$$

例

(法国)布丰(1707-1788) 投针 Buffon's needle problem.
说: 有两条平行的直线, 相聚为 D(distance), 距离单位不重要. 你哪一个针 (长度为 L (length), $L < D$), 随机地投向针. 问: 针与那两条平行直线相交的概率是?



思路: 针投上去后的位置状态, 是由两个参数决定的:
(1) 针的中点, 距离"最近那根直线"的最短距离. ← 该距离用变量 mDis (midpoint distance)来表示.
(2) 针倾斜的位置, 与直线的夹角. ← 我们用变量 θ 来表示.
用上面这两个变量, 我们能分别作为 x轴(表示 θ 变量) 和 y轴(表示 mDis变量), 来画出函数图像.

针投出后, 所有可能的状态, 其全集就是:

$$\Omega=\left\{(\theta,\ \mathrm{mDis})\ \middle|\ 0\leq \underbrace{\theta}_{\text{夹角}} \leq \pi;\quad 0\leq \underbrace{\underbrace{\mathrm{mDis}}_{\text{针的一半长度}} \leq \underbrace{\frac{D}{2}}_{\text{两条平行线间距的一半}}}_{\text{因为针的长度L，是小于两条平行线的间距D的}}\right\}$$

那么, 什么状态下, "针"就与"直线"相交了呢? – 当"从针的中点(沿着针的身体走)到直线"的距离 (下面用变量 keyDis (key distance) 来表示这个距离) ≤ 针的一半长度时. 它们就相交了. 否则, 它们就不想交.
即, 就有:

→ 因为 θ角度有sin值： $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{mDis}}{\mathrm{keyDis}}$，

则有： $\mathrm{keyDis} = \dfrac{\mathrm{mDis}}{\sin\theta}$，←当该值 $\leq \dfrac{针长L}{2}$时，针与直线相交.

→ 因为y轴是代表 mDis变量，所以我们要写出 mDis 曲线的函数值：

根据 上面的 $\mathrm{keyDis} = \dfrac{\mathrm{mDis}}{\sin\theta} \leq \dfrac{针长L}{2}$

就有： $\mathrm{mDis} \leq \dfrac{针长L}{2} \cdot \sin\theta$

即： $\mathrm{mDis} \leq \dfrac{1}{2}针长L \cdot \sin\theta$ ←这个就是$y = \mathrm{mDis}$曲线的函数表达式内容了.
既然这里是 小于等于符号，则mDis的值，
就是$\dfrac{1}{2}针长L \cdot \sin\theta$这条曲线下方的面积了，

即 $\mathrm{mDis} = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\frac{1}{2}针长L \cdot \sin\theta}^{即\ \mathrm{mDis}\ 函数曲线} \right) \mathrm{d}\theta$

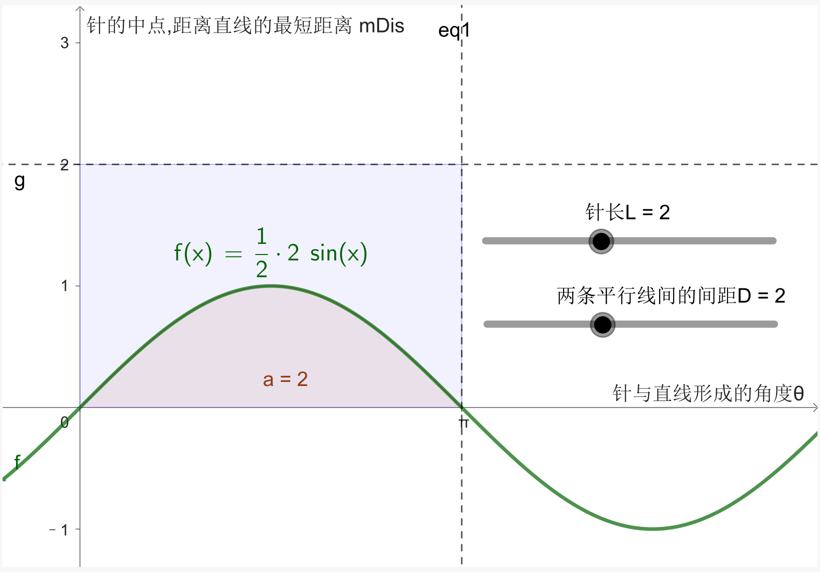
→ 所以，相交的概率

$$= \frac{“针”与“直线”相交时的\ \mathrm{mDis}\ 与\ \theta\ 的所有取值范围}{针投出后的\ 所有可能的\ \mathrm{mDis}\ 与\ \theta\ 的取值范围}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}针长L}_{常数} \cdot \sin\theta}^{即\ \mathrm{mDis}\ 函数曲线} \right) \mathrm{d}\theta}{\underbrace{\pi}_{x轴上代表的“\theta角”的取值范围} \cdot \underbrace{\frac{D}{2}}_{y轴上代表的“针的一半长度\mathrm{mDis}”的取值范围}}$$

←分子上积分的下限是0，上限是π，
这个也就是 θ角度的所有区间$(0-\pi)$

$$= \frac{\frac{1}{2}针长L \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}}{\frac{1}{2}\pi D} = \frac{针长L \cdot \overbrace{\left[-\cos\pi - (-\cos 0)\right]}^{=2}}{\pi D} = \frac{\overbrace{2针长L}^{即函数图中红色区域的面积}}{\underbrace{\pi D}_{即函数图中蓝色区域的面积}}$$



3.1 “古典概率模型”和“几何概率模型”的区别

- 古典概率模型 :

具有 “有限可加性” (finite additivity): 是指“有限个”两两互不相容事件的“和事件”的概率, 等于“每个事件概率”的和.

即: $\underbrace{\mathrm{P}\Big(\underbrace{\cup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{A_i}}_{\text{和}}\Big)}_{\text{的概率}}=\underbrace{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A_i}\right)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

- 几何概率模型 :

具有"完全可加性": 即先求和, 再求概率, 等于先求每个事件概率, 再求和.

即: $\underbrace{\mathrm{P}\Big(\underbrace{\cup_{\mathrm{i}=1}^{\infty}\mathrm{A_i}}_{\text{和}}\Big)}_{\text{的概率}}=\underbrace{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty}\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A_i}\right)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

注意两者的区别: 一个是"有限(到n)"的加, 一个是"无限(到∞)"的加.