

目录

第一部分	泰勒公式 Taylor Formula	2
第二部分	麦克劳林公式 Maclaurin's series	2

# 泰勒公式 Taylor Formula

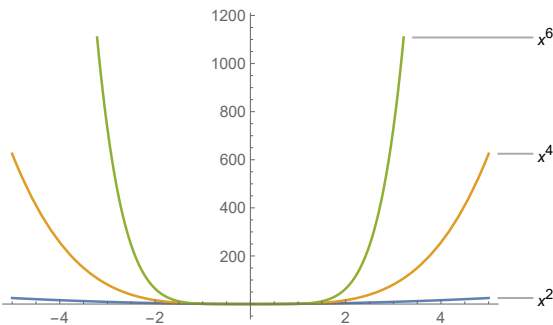
## 第一部分 泰勒公式 Taylor Formula

泰勒函数的思想: 对于一个给定的光滑函数, 我们能否使用“任意次的多项式函数”, 来逼近它? 事实上可以. 项数越多, 每项的系数不同, 多项式就能拟合不同的曲线.

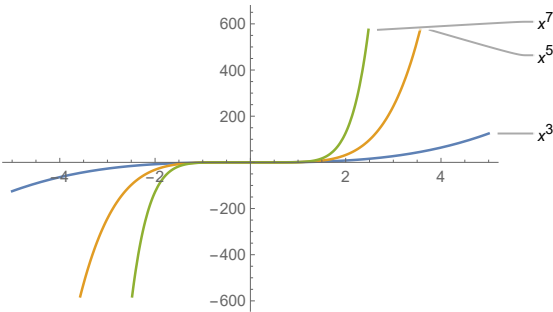
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

忽略系数后, 可以看到, 多项式最基础的部分, 就是幂函数  $x^1, x^2, \dots$ .

幂函数分为两种, 一种是”偶函数”, 图像的开口方向同向:



另一种, 为”奇函数”, 图像的开口方向相反:



偶函数和奇函数组合在一起, 就能产生让曲线拉伸的效果.

泰勒公式的本质, 就是用“幂函数”, 去“近似”任何一个函数. 反过来, 我们就可以把任何一个函数, 展开成“幂函数的和”.

每个函数fn, 用泰勒展开后的前几项, 就是该函数fn的“等价无穷小”公式.

所谓“等价无穷小”, 是指: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 则称 f 和 g 是“等价无穷小量”, 记作  $f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow x_0)$ .

## 第二部分 麦克劳林公式 Maclaurin's series

泰勒公式, 我们一般在  $x_0 = 0$  处展开, 就变成麦克劳林公式 (Maclaurin's series), 它是泰勒公式的一种特殊形式.

从泰勒公式, 到麦克劳林公式的演变:

泰勒公式是: 
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \quad (1)$$

其中的“余项”  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  中的  $\xi$ , 是一个介于  $x_0$  与  $x$  之间的数 ( $x_0$  和  $x$  谁打谁小, 并不一定)

下面:

(1) 我们就用  $\theta \cdot x$ , 来代表  $\xi$ .  $\leftarrow \theta$  是个系数 (倍数)

(2) 我们把  $x_0$  和  $x$ , 也写成带有系数的形式.

$\rightarrow x_0 = 0 = 0x$

$\rightarrow x = 1x$

因为  $\xi = \theta \cdot x$ , 是一个介于  $x_0$  与  $x$  之间的数, 即  $\underbrace{x_0}_{=0x} < \underbrace{\xi}_{=\theta x} < \underbrace{x}_{=1x}$

所以系数  $\theta$  就是:  $0 < \theta < 1$

我们把  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \xi = \theta x \end{cases}$ , 代入泰勒公式 (1) 中.

即得到: 
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{余项}} \quad \leftarrow 0 < \theta < 1 \quad \leftarrow \text{即“麦克劳林公式”}$$

注意: 余项的分子上的  $f^{(n+1)}(\theta x)$ , 意思是对  $f(\theta x)$  函数求  $n+1$  次导数 (而不是次方的意思, 别搞错了).

麦克劳林公式, 比泰勒公式更常用. 即, 我们一般只在  $x_0 = 0$  处展开泰勒公式.

例

对  $f(x) = e^x$  用马克劳林公式来拟合它 (在  $x_0 = 0$  点处展开)

那我们就把  $e^x$  代入“马克劳林公式”中的分子上的每个  $f$  中了.

麦克劳林公式: 
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \text{余项} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

本例的  $f$  代入后, 就是:

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + \frac{(e^0)'}{1!}x + \frac{(e^0)''}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(e^0)^{(n)\text{次导数}}}{n!}x^n + \text{余项} \frac{(e^{\theta x})^{(n+1)\text{次导数}}}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

上面, 因为  $e^x$  的任何次导数, 都等于  $e^x$  自己. 所以在  $x_0 = 0$  处展开后, 上面的每一个分子上, 就有:  $(e^0)' = (e^0)'' = \cdots = (e^0)^{(n)\text{次导数}} = 1$

注意: 只要用“麦克劳林公式”来拟合, 就一定能得到严格的“等于号(=)”, 而不是约等于号( $\approx$ ). 因为余项中的  $\theta$  所取的区间  $0-1$  之中, 一定能取到一个数, 能令“麦克劳林公式”能精确的拟合原函数. 但至于  $\theta$  到底是哪个数? 我们是不知道的.

反过来说, 如果你把余项部分去掉了,  $\theta$  就不存在了. 则就只能使用约等于号( $\approx$ )了.

即, 去掉余项后, 上例就是:

$$\begin{aligned} e^x &\approx e^0 + \frac{(e^0)'}{1!}x + \frac{(e^0)''}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(e^0)^{(n)\text{次导数}}}{n!}x^n \\ &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

例

又例如, 我们用马克劳林公式, 来拟合  $f(x) = \sin x$ .  
即, 把  $\sin x$  的各次导数, 代入马克劳林公式的每个分子上.

$(\sin x)' = \cos x \leftarrow$  因为公式是在  $x=0$  处展开, 即把  $x=0$  代进去, 即  $(\sin 0)' = \cos 0 = 1$   
 $(\sin x)'' = -\sin x \leftarrow (\sin 0)'' = -\sin 0 = 0$   
 $(\sin x)^{(3)} = -\cos x \leftarrow (\sin 0)^{(3)} = -\cos 0 = -1$   
 $(\sin x)^{(4)} = \sin x \leftarrow (\sin 0)^{(4)} = \sin 0 = 0$

我们可以发现  $\sin x$  的高阶导数的规律:  
→ 其偶数阶导数 = 0  
→ 当  $x=0$  时, 其高阶导数的导数值, 以 1, 0, -1, 0 循环

下面, 就把  $\sin$  这些各次的导数值, 代入马克劳林公式中.  
马克劳林公式是:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{余项}}$$

$f(x)$	$= f(0)$	$+ \frac{f'(0)}{1!}(x-0)$	$+ \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$	$+ \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3$	$+ \cdots$	$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$	$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$
$\sin x$	$= \underbrace{\sin 0}_{=0}$	$+ \frac{(\sin 0)'}{1!}(x-0)$	$+ \frac{(\sin 0)''}{2!}(x-0)^2$			$+ \frac{(\sin 0)^{(n)} \text{次导数}}{n!}(x-0)^n$	$+ \frac{(\sin(\theta x))^{(n+1) \text{次导数}}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$
	$= 0$	$+ \frac{\overbrace{\cos 0}^{=1}}{1!}x$	$+ \frac{\underbrace{-\sin 0}_{=0}}{2!}x^2$				
	$=$	$\frac{1}{1!}x$	$+ \frac{0}{2!}x^2$	$+ \frac{-1}{3!}x^3$			
	$=$	$x$	$0$	$-\frac{x^3}{3!}$			

所以  $\sin x$  展开后, 就是:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

所以, 如果只取第一项, 就有  $\sin x \sim x$

