基础_复数 Z=a+bi

Table of Contents

1. 复数 complex number → $Z = a + bi$

$x^2 = -1,\ \ x = \pm\sqrt{-1}$, 我们就规定 $\sqrt{-1} =$ 虚数i, 即: $i^2 = -1$

如: $\sqrt{-7} = \sqrt{7\cdot(-1)} = \sqrt{7}\,i$

$$\text{复数集}C\ (complex\ \ number)\begin{cases}\text{实数集}R\ \ (real\ \ number) & = a\\ \text{虚数集}Z\ \ (imaginary\ \ number) & = a + bi\quad (a,b\in R,\quad b\neq 0)\end{cases}$$

$$\text{虚数集}\ \ Z = a + bi\begin{cases}\text{当}a = 0\text{时,}\quad \text{只剩下}bi\text{，就是“纯虚数”}\\ \end{cases}$$

$$\text{如:}\ \ \begin{array}{ll}\sqrt{3} & :\text{实数}\\ 1 + \sqrt{3}\,i & :\text{虚数}\\ \sqrt{3}\,i & :\text{纯虚数}\end{array}$$

$$\text{所以: } Z = \underset{\text{实部}}{\underbrace{a}} + \underset{\text{虚部}}{\underbrace{b}}\ i \leftarrow \begin{cases}\text{当虚部}b = 0\text{时，只有“实部”存在，}Z\text{就是“实数”}\\ \text{当虚部}b \neq 0\text{时，即“虚部”和“实部”都存在时，}Z\text{就是“虚数”}\\ \text{当实部}a = 0\text{，虚部}b \neq 0\text{时，即没有“实部”，只有“虚部”时，}Z\text{就是“纯虚数”}\end{cases}$$

1.1. 虚数 i 是个周期函数 → 在 $i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1$ 之间循环

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\
i^4 &= (i^2)^2 = 1 \\
i^5 &= (i^2)^2 \cdot i = i
\end{aligned}
$$

Example 1. 标题

例如:

$$i^{2003} = i^{2000} i^3 = i^{4\cdot 500}\underbrace{i^3}_{=-i} \leftarrow \text{因为} \begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}$$

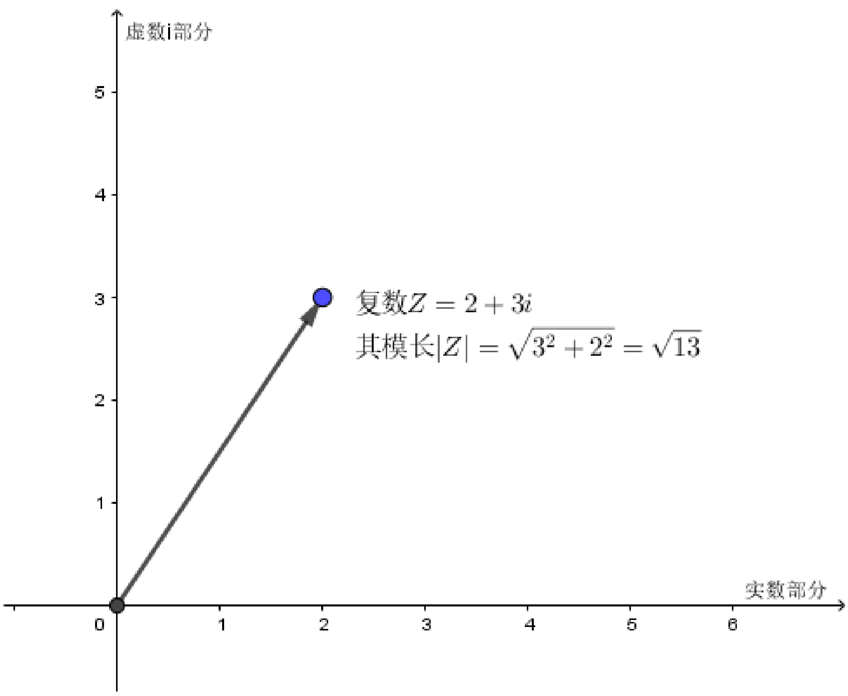
$$= 1^{500} \cdot (-i)$$

$$= -i$$

---

2. 复平面 complex plane

两个不同"复数"间, 是可以比大小的. 怎么比较呢? 就是看它们与"原点"间的距离(即"线性代数"中的"模长"的概念).



即: 和"线性代数"中的"向量"相似, 复数 $Z = a + bi$ 的模长 $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

若两个复数相等, 则它们一定是"实部"与"实部"相等, "虚部"与"虚部"相等.

Example 2. 标题

例如:
若已知这两个复数相等: $\underbrace{(3x+2y)}_{a} + \underbrace{(5x-y)}_{b}i = \underbrace{17}_{a} \underbrace{-2}_{b}i, \quad (x,y \in R)$

则有 $\begin{cases} 3x+2y=17 \\ 5x-y=-2 \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$

---

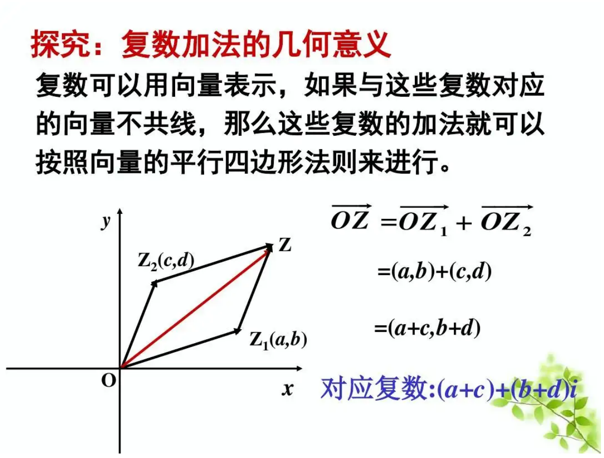
3. 复数的四则运算

3.1. 加减法 → 符合"向量"的加减法规则

Example 3. 标题

例如:
$Z_1 = 1+2i, \quad Z_2 = 3+4i,$
则$Z_1 + Z_1 = \underbrace{(1+3)}_{\text{实部}+\text{实部}} + \underbrace{(2+4)i}_{\text{虚部}+\text{虚部}} = 4+6i$

"复数"的加减法, 和"向量"的加减法一模一样, 符合平行四边形法则:



3.2. 乘法

复数的乘法, 你把虚数i 当做变量x 来进行就行了:

Example 4. 标题

例如:

$Z_1 = 1 + 2i, \quad Z_2 = 3 + 4i,$

$$
\begin{aligned}
\text{则} Z_1 \cdot Z_1 &= (1+2i)(3+4i) \\
&= 3 + 4i + 6i + 8\underbrace{i^2}_{=-1} \\
&= 3 + 10i - 8 \\
&= -5 + 10i
\end{aligned}
$$

3.3. 共轭复数 conjugate complex number → $Z_1 = a + bi, \text{ and } Z_2 = a - bi$

两个复数, 若它们的"实部"相等，"虚部"互为"相反数". 则它们就称为"共轭复数".

共轭复数, 一般用在将分母上的"复数", 转化成"实数"的过程中. 即: 如果一个分式, 分母上为复数, 我们想把分母变成实数, 就利用共轭复数, 让它们相乘, 即$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$, 就把虚数i的部分化解掉了.

Example 5. 标题

例如:

化简 $\dfrac{1+2i}{3-4i}$ ← 方法: 分子分母同时乘上 当前分母$(3-4i)$ 的共轭复数$(3+4i)$

$$= \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{3+10i-8}{9-16i^2}$$

$$= \frac{-5+10i}{9+16} = \frac{-5+10i}{25} = \underbrace{-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i}_{\text{最后要化成 } a+bi \text{ 的形式}}$$

Example 6. 标题

例如:

化简 $\dfrac{1}{i+1}$

$$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}_{\text{要写成标准形 } a+bi \text{ 的形式}}$$

Example 7. 标题

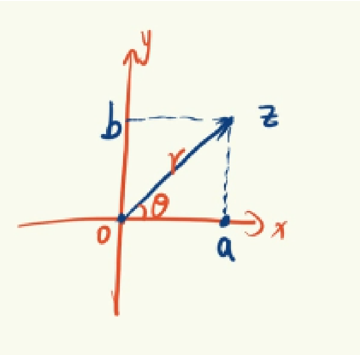
例如:

化简 $\frac{1}{i}$

$= \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$

---

4. 复数的 三角函数表示 → 复数 $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, r是模长, θ是幅角主值.



如上图(是个复平面):

Header 1	Header 2
→ r 为"模长 norm"	
→ θ 为"幅角 argument"	在复平面上，复数所对应的向量, 与x轴正方向的夹角, 称为复数的"辐角". 显然一个复数的辐角有无穷多个，它们相差 2π 的整数倍. 但是在区间（0，2π] 内的只有一个，这个辐角就是该向量的"辐角主值"，也称"主辐角 principal argument angle"，记为argZ.

则就有：$\sin\theta = \frac{b}{r}$，即 虚部$b = r\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$，即 实部$a = r\cos\theta$

所以，复数 $Z = a + bi$

$$= r\cos\theta + r\sin\theta\ i$$

$$= \underbrace{r}_{\text{模长}}\left(\cos\underbrace{\theta}_{\text{幅角}} + i\cdot\sin\theta\right) \leftarrow$$

所以我们发现，一个复数Z可以由两个变量来表示：①该复数的"模长r"，②该复数的"幅角θ"。

其中，θ的取值在：$0 \le \theta < 2\pi$，即一圈$360°$之内，
θ 也叫"幅角的主值"，记作：$\theta = argZ$，
意思就是：θ为复数Z的主幅角。

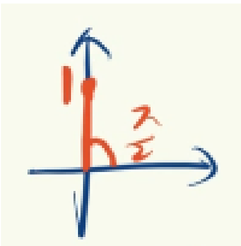
Example 8. 标题

例如：
问 $arg\ i = ?$

把i 写成标准形式：$= 0 + 1i$，即向量的终点是$x = 0$，$y = 1$

显然其"辐角主值" $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$

其幅角 $= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

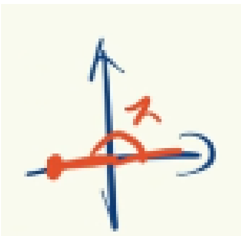


Example 9. 标题

例如：
问 $arg(-1) = ?$

把 -1 写成标准形式：$= -1 + 0i$，即向量的终点是$x = -1$，$y = 0$

显然其"辐角主值" $\theta = 180 = \pi$



Example 10. 标题

例如：

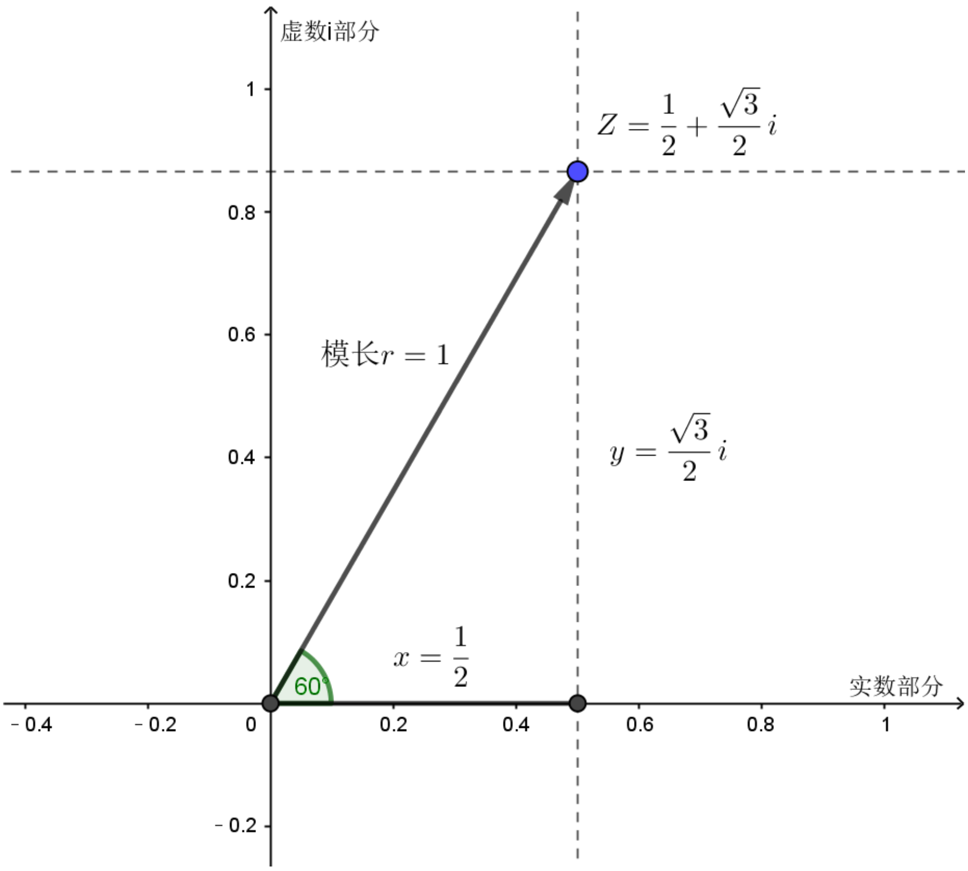
复数$Z = \underbrace{\frac{1}{2}}_{x轴的实部a} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{y轴的虚部b} i$，求其三角表示，模长$r$，及辐角主值$argZ$

$\rightarrow$ 模长$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

$\rightarrow$ $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$，所以该复数$Z$的“辐角主值”$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow$ 三角表示：直接套用公式就行. 公式就是 复数$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，.
我们把模长r，和辐角主值θ的值，代入这个公式，就能得到复数Z的三角表示了.

$$Z = 1(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{3}} i) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \leftarrow \text{即，最终要写成 } Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\text{的形式}$$



Example 11. 标题

例如:

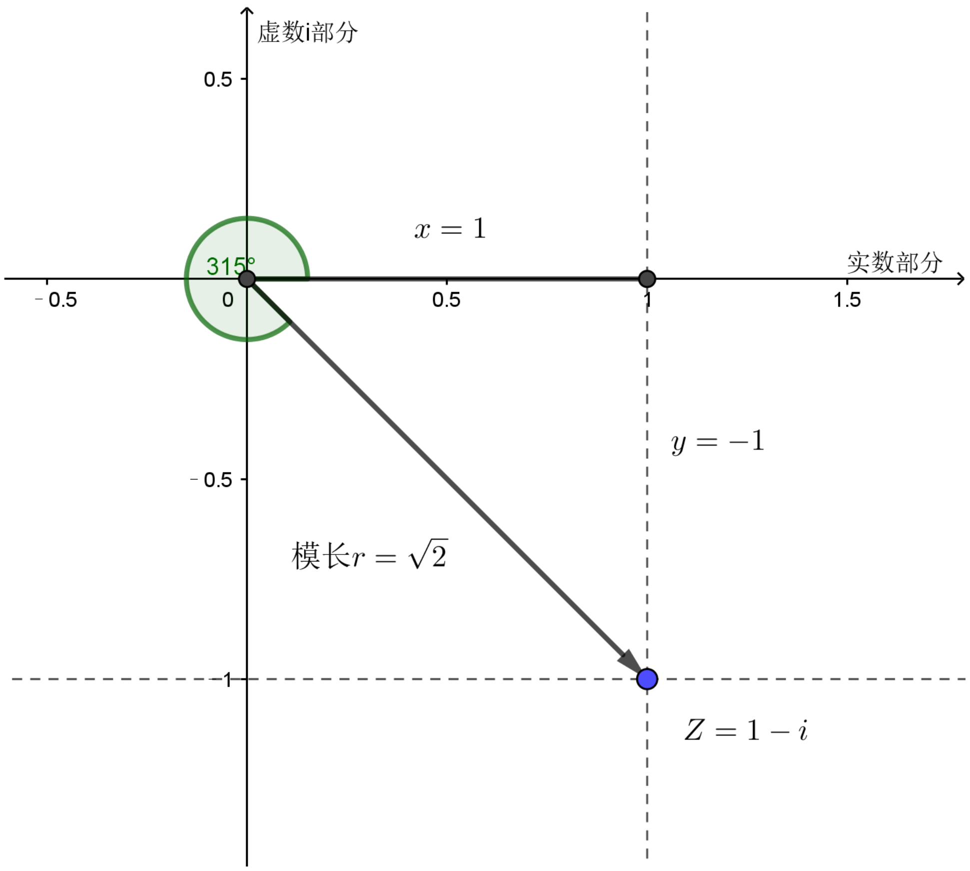
对$Z=1-i$　求其三角表示

→ 模长r：因为 $a=1$，$b=-1$，所以模长$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

→ 幅角主值θ ：根据Z向量在“复平面”上的画图，幅角主值$\theta=argZ=\frac{7}{4}\pi$

→ 复数Z的三角表示，直接套用公式：复数$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ，把r和θ的值代入进去

即：$Z=\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)$



4.1. 复数的"三角表示", 有什么用处? 用处就在于, 当两个复数"相乘"或"相除"时, 能利用"三角表示"很快算出答案.

4.2. 两个复数"相乘"的结果 :

$$Z_1Z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

当两个复数相乘时，比如这两个复数(用三角表示)：

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

那么它们的乘积，即 $Z_1 Z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right]$$

$\rightarrow$ 中括号中的部分

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1 i\sin\theta_2$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right) - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$\rightarrow$蓝色部分的 $cc - ss = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

$\rightarrow$绿色部分的 $cs + sc = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ $\leftarrow$这不也是复数的“三角表示”么!

所以，两个复数的乘积的结果，即 $Z_1 Z_2$，依然能表示成“三角表示”：

即：$Z_1 Z_2 = \underbrace{r_1 r_2}_{模长 r}[\cos(\underbrace{\theta_1 + \theta_2}_{辐角主值}) + i\sin(\underbrace{\theta_1 + \theta_2}_{幅角主值})]$

即: 两个复数α, β 相乘的结果, 是个新复数 γ. 而 γ依然可以用"三角表示":

→ γ的 模长r, 就等于α和β的模长的"乘积". 即: $r_\gamma = r_\alpha r_\beta$

→ γ的"辐角主值"θ, 就等于α和β的θ的"和", 即: $\theta_\gamma = \theta_\alpha + \theta_\beta$

4.3. 两个复数"相除"的结果 : $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

同样，当两个复数相除时，就有：

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \underbrace{\frac{r_1}{r_2}}_{模长}\left[\cos\left(\underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{幅角主值}\right) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

即: 两个复数α, β "相除"的结果, 是个新复数 γ. 而 γ依然可以用"三角表示":

→ γ的 模长r, 就等于α和β的模长的"相除". 即: $r_\gamma = \frac{r_\alpha}{r_\beta}$

→ γ的"辐角主值"θ, 就等于α和β的θ的"差", 即: $\theta_\gamma = \theta_\alpha - \theta_\beta$

Example 12. 标题

例如:

计算 $\dfrac{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$ $\leftarrow$ 既然是两个复数(用了“三角表示”)相除,就来直接套用公式了:

新的复数的模长 $r=\dfrac{r_1}{r_2}$,辐角主值 $\theta=\theta_1-\theta_2$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)) \quad \leftarrow \text{公式}$$

$$=\frac{4}{2}(\cos(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}))$$

$$=2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}+i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right)$$

$$=2i$$