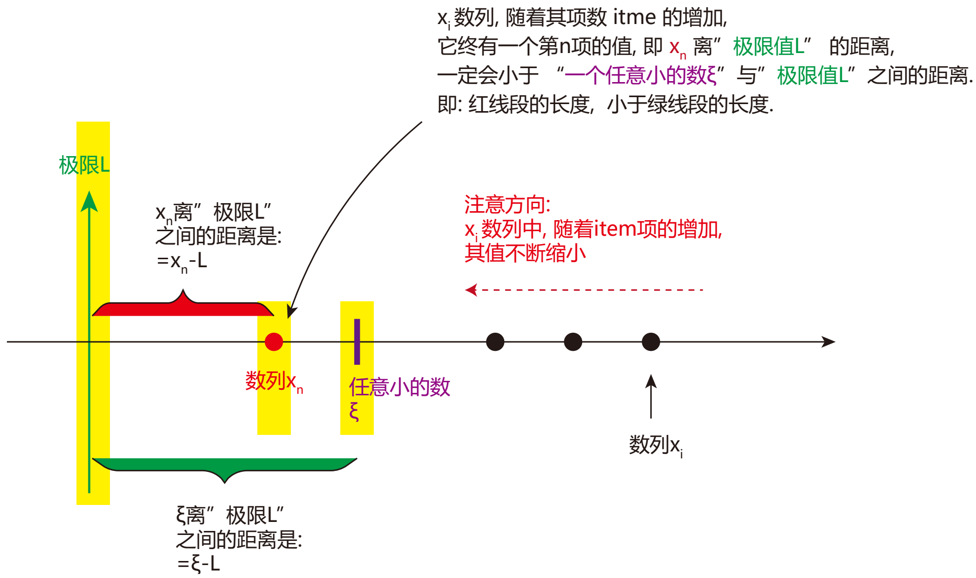
目录

函数

2022 年 12 月 7 日

第一部分　数列的极限



即: 给定①任意一个极小值 ε, ②一个确定的极限值L, ③一个数列 x_i(里面的元素值不断变小). → 则随着数列 x_i 中item的增长, 必定会有一个 item项(比如第n项), 该“item项的值 x_n”与“极限值L”的距离, 必定会小于 “极小值 ε ”与“极限值L”之间的距离 (这个距离其实就是 ε 本身).

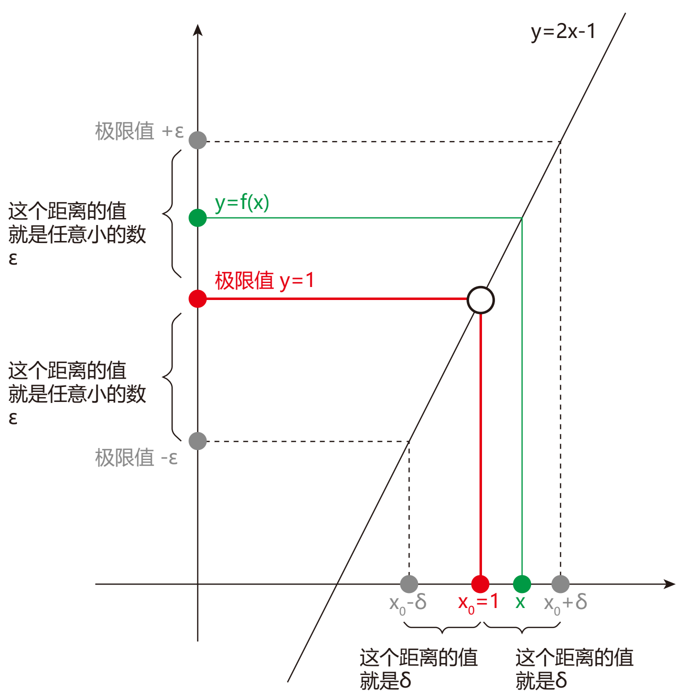
例

有数列 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 的极限是0. 问: 该数列取到哪一项item 时, 它与“极限0”之间的距离, 就小于“任意小的数 ε ”了呢?
即, 问的就是: 该数列与 0 之间的距离, 要小于 ε .

$$\left|\text{数列}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - \text{极限值}0\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon$$
$$(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$n+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$$

为了保证n 为正数(而非有小数点), n就取 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right) + 1$

第二部分　函数的极限



第三部分　极限运算法则

$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$
$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$

$\lim(\frac{x}{y}) = \frac{\lim x}{\lim y}$
$\lim(\text{常数}C \cdot y) = \text{常数}C \cdot \lim y$

$\lim y^n = (\lim y)^n$
$\lim y^{\frac{1}{n}} = (\lim y)^{\frac{1}{n}}$

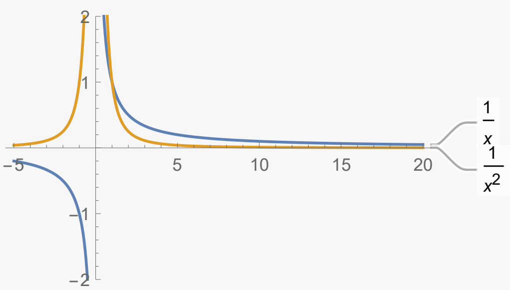
$\lim(\text{常数}C) = \text{常数}C$

1　若 $f(x)>g(x)$, 则 $\lim f(x) \geq \lim g(x)$ $\leftarrow$ 注意: 是大于等于⩾！

这个定理也就是说: 虽然一个函数, 可能大于另一个函数, 但它们的极限, 是有可能相等的.

例

虽然 $\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}$, 但它们的极限(在 x $\rightarrow$ ∞时), 却是相等的. 即 $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{x} = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



第四部分　极限的规律

2　分子上“项的最高次数” >分母上“项的最高次数”, 则该分式的极限= ∞. 反之, 则极限=0

一个函数若是“分数” $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 则其极限, 只看它分子分母上的“最高次数”的情况:

2.1　对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 m >n, 即: 分子的值 >分母的值. 则函数极限值 $= \infty$

2.2　对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 m=n, 则函数极限值 $= \frac{a}{b}$

例

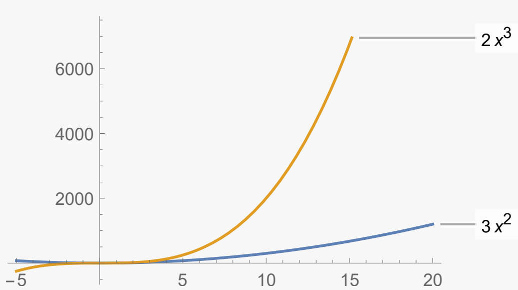
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^3+4x^2+2}{x^3}}{\frac{7x^3+5x^2-3}{x^3}}}_{\text{把分子分母, 同时除以最高项的}x^3} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}}_{\text{把}x\to\infty\text{代入每一项中}} = \frac{3+0-0}{7-0+0} = \frac{3}{7}$$

规律: 当满足① $x \to \infty$, ②分子分母的最高次的次数相同, 比如本例最高都是 x^3 次, 则: 极限值, 就取分子分母最高次的系数之比. 如本例就取 $\frac{3x^3}{7x^3}$ 的系数, 即 3/7 , 这个就是极限值了.

2.3　对于 $\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$, 若 n >m, 即: 分子的值 <分母的值. 则函数极限值=0

例

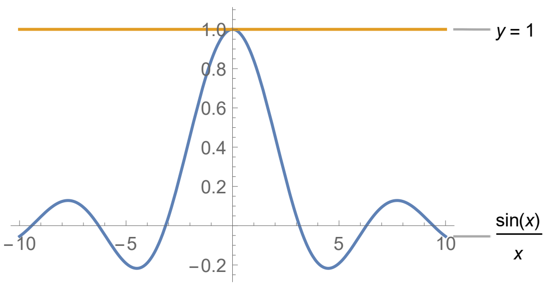
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2-2x-1}{x^3}}{\frac{2x^3-x^2+5}{x^3}}}_{\text{把分子分母, 同时除以最高项的}x^3} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}}_{\text{把}x\to\infty\text{代入每一项中}} = \frac{0+0-0}{2-0+0} = 0$$



规律: 当满足① $x \to \infty$, ②分母的最高次的次数, 要比分子的最高次次数还大时, 比如本例“分母的最高次次数”是 x^3, 而“分子的最高次次数”只有 x^2, 则: 极限就是0.

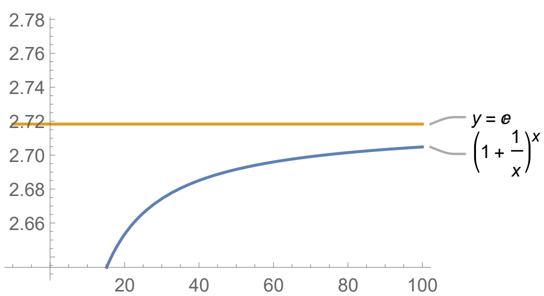
第五部分　几个重要的极限

3　$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



其实，它的骨架本质，是这种形式的：$\lim_{\square\to 0}\dfrac{sin\square}{\square}$

4　$\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$



这个公式其实就是“复利”的终值计算公式：$\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e\approx 2.71828$

注意：该公式的本质是：$\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\square})^{\square}=e$. ← 即两个”方框□”处的数字必须完全相同!

注意：使用该极限公式时，中间必须是加号+. 如果题目给出的不是加号，你也要把它先变换成加号.

即：

这里必须是加号　这个数值必须是1

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

这两个数字必须完全相同

5　$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$