目录

文件名

第一部分　贝叶斯公式 Bayes' theorem :

$$\boxed{P\left(A_k|B\right)=\frac{P\left(A_k\right)\cdot P\left(B|A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(A_i\right)\cdot P\left(B|A_i\right)\right]}=\frac{P\left(A_kB\right)}{P\left(B\right)}}$$

1　先验概率 (从经验来推后果) & 后验概率(更新迭代经验)

先验概率 ：是指根据以往经验和分析得到的概率，它往往作为"由因求果"问题中的"因"出现.	"先验概率"的计算比较简单，没有使用"贝叶斯公式".
后验概率: 是基于新的信息，修正原来的"先验概率"后，所获得的更接近实际情况的概率估计.	"后验概率"的计算， 要使用"贝叶斯公式".

2　贝叶斯公式: 从"果", 来推是"某因"的可能性大小

根据新信息, 不断调整对一个随机事件发生概率的判断, 这就是"贝叶斯推理"。即反复迭代, 不断逼近真相 (即人工智能的原理).

通常, "事件A, 在事件B(发生)的条件下的概率"， 与"事件B, 在事件A的条件下的概率", 是不一样的. 然而, 这两者是有确定的关系, "贝叶斯法则"就是对这种关系的陈述。

推导1 :

"条件概率"的公式是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ ①

可进一步变换为：$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

改变 A 和 B 的顺序， 就得到： $\underbrace{P(BA)}_{\substack{P(AB)\\ \text{是}AB\text{同时发生的概率,}\\ \text{其实就}=P(BA)}}=P(B)\cdot P(A|B)$ ②

把公式②代入公式①， 就得到： $P(B|A)=\frac{\overbrace{P(AB)}^{=P(BA)=P(B)\cdot P(A|B)}}{P(A)}$

$$=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

即：$P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}}$ ③ ←这个就是"贝叶斯公式"

上面"贝叶斯公式"的意思就是说: "在现象B出现的条件下, 事件A发生的概率" (即 P(A—B)), 就等于"事件A发生的概率 (即 P(A))", 乘以 "事件A发生条件下, 事件B出现的概率" (即 P(B—A)), 再除以"事件B出现的概率" (即 P(B)).

推导2 :

有条件概率: $P(B|A_i)=\dfrac{P(A_i\cap B)}{P(A_i)}$ ①

即: $P(A_iB)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$ ②

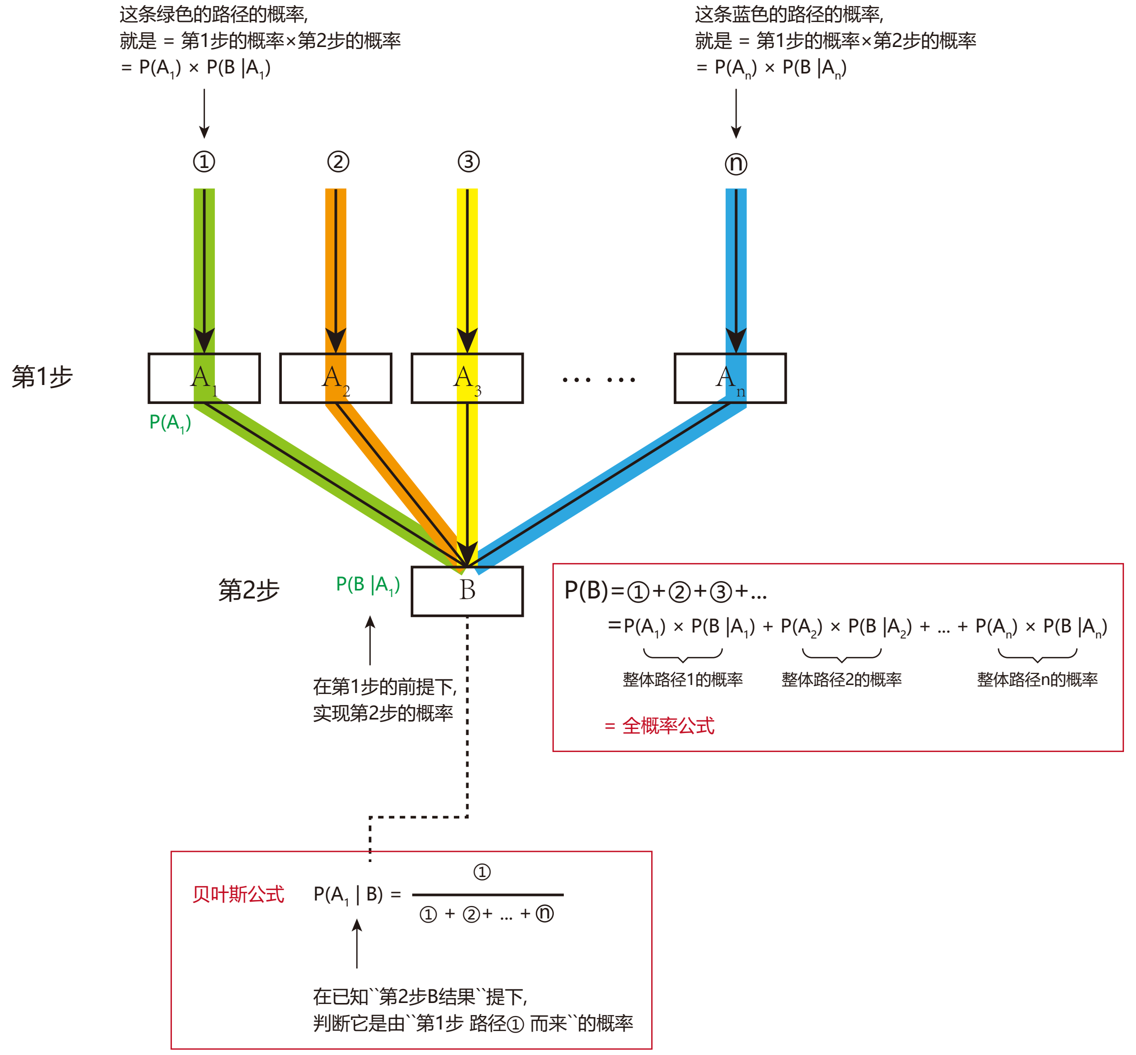
然后, 对①式, 我们把A_i和B 倒一倒, 让B作为条件, 即有:

$$P(A_i|B)=\frac{\overbrace{P(A_iB)}^{\text{分子即式②的内容}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{分母即“全概率公式”}}} \leftarrow \text{分母的 } P(B)=\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\cdot P(B|A_i)]$$

$$=\underbrace{P(A)\cdot P(B|A)}+\underbrace{P\left(\bar{A}\right)\cdot P\left(B|\bar{A}\right)}$$

$$=\frac{\overbrace{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}^{i\text{可取}1\text{到}n\text{中的任何索引值. 即任何一条路径}}}{\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\cdot P(B|A_i)]}=\frac{\leftarrow\text{条件概率}}{\leftarrow\text{全概率公式}}$$ ③ ←这个就是“贝叶斯公式”

推导3 :



→ 到第一步的, 其实就是“贝叶斯公式”. 即已知第二步的结果B, 我们来倒推推测它到底是从哪条路径走过来的 (即在第一步中是从哪个路口过来的). 比如, 如果从第A_1 节点过来, 那么其概率就是:$P(A_1|B)=\dfrac{\text{路径1的概率}}{\text{路径1的概率}+\text{路径2的概率}+..+\text{路径}n\text{的概率}}$

即:

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}[P(A_j)\cdot P(B|A_j)]}=\frac{\overbrace{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}^{\text{第}i\text{条路径的概率}}}{\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)}_{\text{分母上是把所有的路径概率,都加起来}=P(B)=\text{全概率公式}}}$$

→ 到第二步的, 其实就是“全概率公式”, 即:

$$P(B)=\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}_{\text{整条路径1的概率}}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}_{\text{整条路径2的概率}}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}_{\text{整条路径}n\text{的概率}}$$

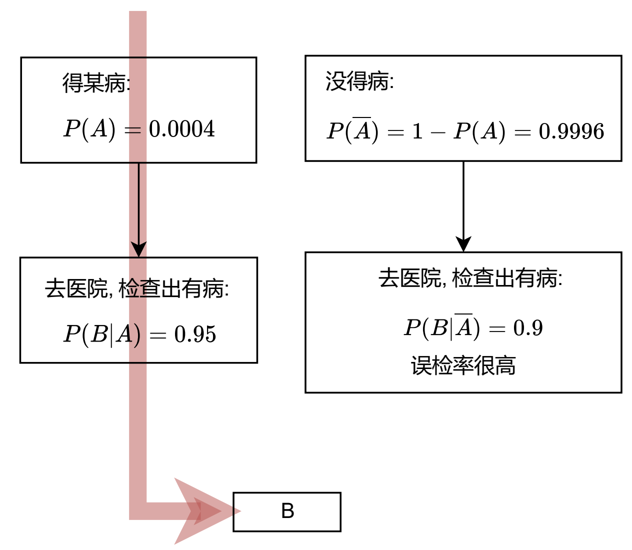
宋浩的上课：
有事件 $A_1,A_2,...A_n$ 组成“完备事件组” (它们作为“原因事件”), $P(A_i)>0$
有一个事件B (作为“结果事件”), $P(B)>0$

则: 从B结果, 来倒推推断“它是由第A_k个原因造成的”的可能性占多大的概率, 就由这个公式(贝叶斯公式)给出:

$$\begin{aligned}&P(\text{原因}A_k\ |\text{结果}B)\\&=\frac{P(\text{原因}A_k\ \cap\ \text{结果}B)}{P(\text{结果}B)}\\&=\frac{P\left(\text{原因}A_k\right)\cdot P\left(\text{结果}B\ |\text{原因}A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\text{原因}A_i\right)\cdot P\left(\text{结果}B\ |\text{原因}A_i\right)\right]}\\&=\frac{A_k\text{这个人,他的责任量}}{\text{所有相关的人(所有的}A\text{), 责任加起来的总和量}}\end{aligned}$$

例

得某病← 事件A
医院检查出有病← 事件B



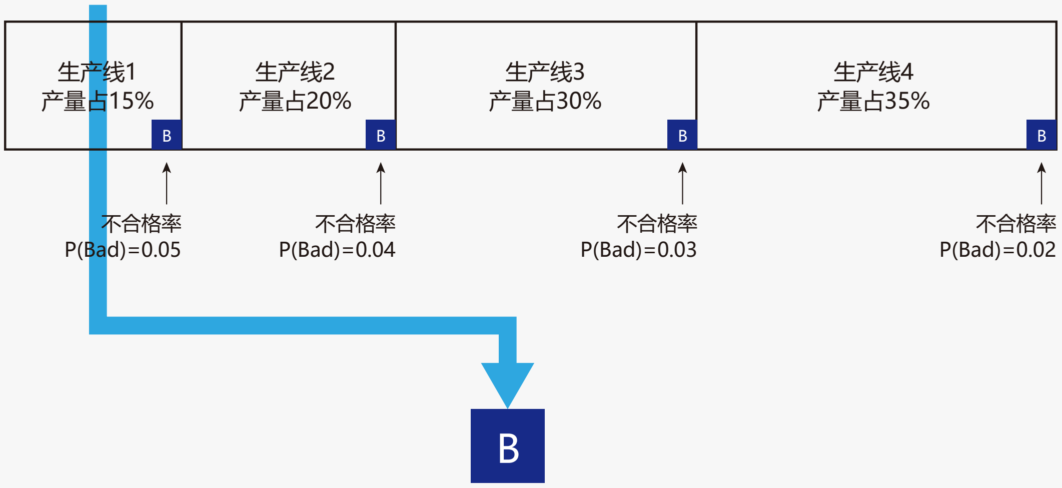
在某人检测出有病(B)的前提下, 问“其是真实患病(A)”的概率是多少? (即走的是上面红色路径的概率). 即求: $P(A|B)=?$

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(AB)}{P(B)}\\&=\text{或用贝叶斯公式}\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(A_i)\cdot P(B|A_i)\right]}\\&=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}\\&=\frac{0.0004\cdot 0.95}{(0.0004\cdot 0.95)+(0.9996\cdot 0.9)}=0.000422213\end{aligned}$$

所以, 你可以看出:

- 全概率公式, 是从“原因”来推“结果的可能性是多少”.
- 贝叶斯公式, 是从“结果”来倒推其“是从哪一种原因得来的”的可能性. 即 $P(原因_i\,|结果)$

例



一个工厂, 有4条生产线, 情况如下:

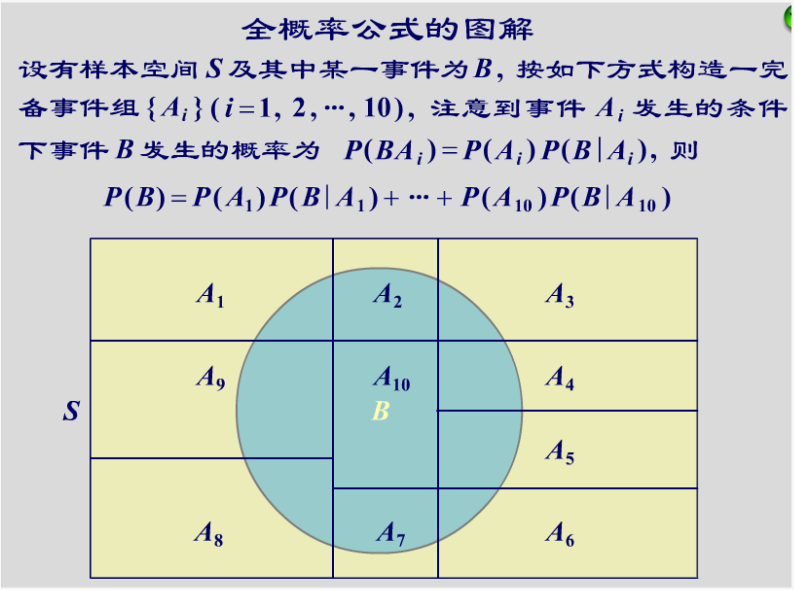
	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

我们设 :
- A_1 : 代表生产线1的产品
- A_2 : 代表生产线2的产品
- A_3 : 代表生产线3的产品
- A_4 : 代表生产线4的产品
- B (bad) : 代表不合格品.

则, 这个工厂的总的不合格率 :

$$P(B)=\overbrace{\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}_{\text{第1条生产线的产量占比,乘以第1条生产线的不合格率}}+...+P(A_4)\cdot P(B|A_4)}^{\text{即全概率公式}}$$

$$=(0.15\cdot 0.05)+(0.2\cdot 0.04)+(0.3\cdot 0.03)+(0.35\cdot 0.02)=0.0315$$



现在问: 在发生了B结果的前提下, 它是由 A_1 原因(路径)引起的可能性, 是多少? ← 这就是要用“贝叶斯公式”了. 从“结果”,来问“某原因”导致的可能性是多少.

$$P(A_1|B)=\frac{P\left(A_1B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\overbrace{P\left(A_1\right)}^{A_1\text{生产线产量占}0.15}\cdot\overbrace{P(B|A_1)}^{A_1\text{生产线的不合格率}=0.05}}{\underbrace{P\left(B\right)}_{\text{这个工厂总的不合格率}=0.0315}}=\frac{0.15\cdot 0.05}{0.0315}=0.238095$$

同理, 其他原因(其他生产线带来的次品)的可能性是:

$$P(A_2|B)=\frac{P\left(A_2B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_2\right)\cdot P(B|A_2)}{P\left(B\right)}=\frac{0.2\cdot 0.04}{0.0315}=0.253968$$

$$P(A_3|B)=\frac{P\left(A_3B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_3\right)\cdot P(B|A_3)}{P\left(B\right)}=\frac{0.3\cdot 0.03}{0.0315}=0.285714$$

$$P(A_4|B)=\frac{P\left(A_4B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_4\right)\cdot P(B|A_4)}{P\left(B\right)}=\frac{0.35\cdot 0.02}{0.0315}=0.222222$$

所以, 是第3条生产线造成的原因的可能性最大, 因为其概率值最高.

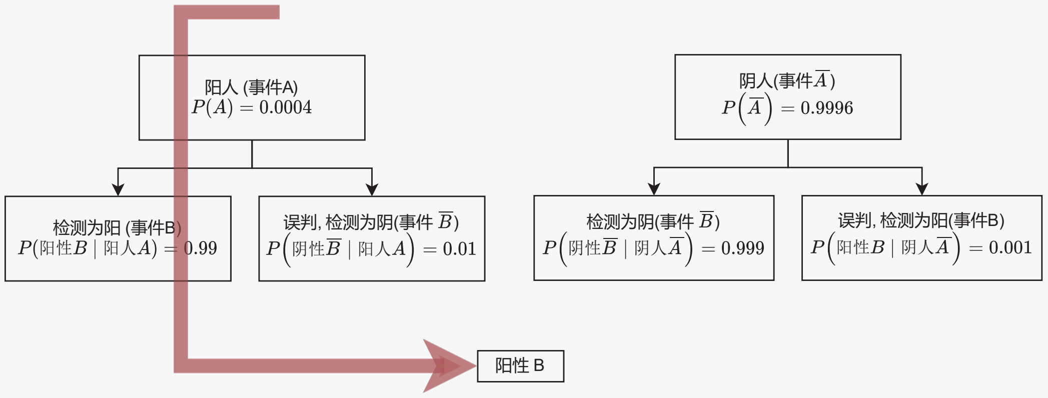
例

某病, 发病率是 0.0004. 有种检测方法, 但存在误诊情况.

我们先设定事件:

- 事件A: 表示某人真有病,即阳性
- 事件 $\overline{A}$: 表示某人无病, 阴性 - 事件B : 表示检测认为该人阳性.

该检测方法, 准确度如下:

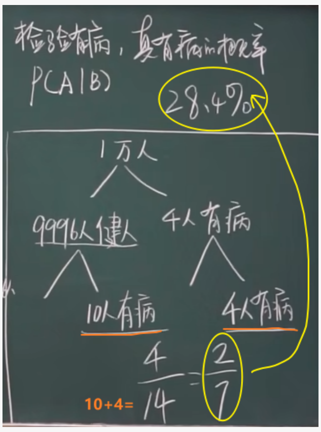


问: 一个人被检测为“阳”, 那么他真的是“得病”的概率是? 即问: $P(\text{阳人}A\ |\text{阳性}B=?)$

$$P(A|B)=\frac{\overbrace{P\left(AB\right)}^{P(\text{前后})=P(\text{前})\cdot P(\text{后—前})}}{\underbrace{P\left(B\right)}_{\text{任何一个人被检测为阳的概率}}}=\frac{P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)}{P\left(B\right)}$$

$$=\frac{\overbrace{P\left(A\right)}^{=0.0004}\cdot\overbrace{P\left(B|A\right)}^{=0.99}}{\underbrace{P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)}_{\text{无误诊,将患者}(A)\text{确认为阳性}(B)}+\underbrace{\overbrace{P\left(\overline{A}\right)}^{=0.9996}\cdot\overbrace{P\left(B|\overline{A}\right)}^{=0.001}}_{\text{有误诊,将阴人}(\overline{A})\text{误诊为阳性}}}$$

$$=\frac{0.0004\cdot 0.99}{0.0004\cdot 0.99+0.9996\cdot 0.001}=0.283749$$



概率告诉我们: 要相信长期中的期望.$0.99^{365} = 0.025518$, 而 $1.01^{365} = 37.7834$.
篮球领域有一句名言——“训练时，用正确姿势投丢的球, 比用错误姿势投进的球, 更有价值.”
站在当下，未来任何事都只是一个概率. **所谓坚持，所谓努力，其实就是寻找一个大概率成功的方向, 然后相信系统, 相信长期主义.** 当然，你得坚持活着. 等到长期的到来.

但行为经济学家发现，人们在决策过程中, 往往并不遵循“贝叶斯规律”，而是给予最近发生的事件和最新的经验, 以更多的权重值，更看重近期的事件。面对复杂问题，人们往往会走捷径，依据可能性, 而非概率来做决策. 这种对经典模型的系统性偏离, 称为“偏差”. 因此, 投资者在决策判断时, 并非绝对理性.
但长期以来，由于缺乏有力的“能结合人类决策中的理性和感性因素”的替代工具, 经济学家不得不在分析中坚持“贝叶斯法则”.