目录

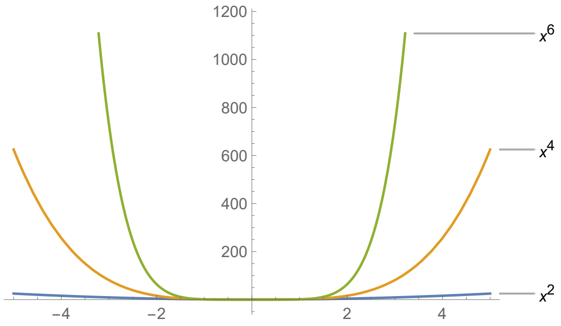
泰勒公式 Taylor Formula

第一部分　泰勒公式 Taylor Formula

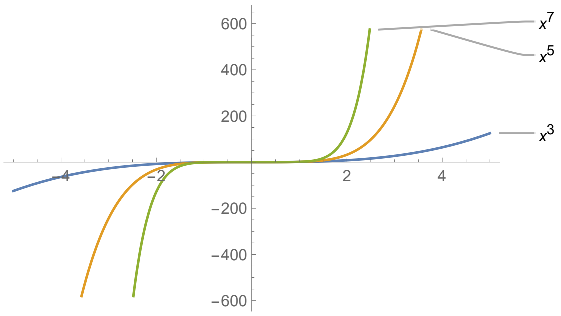
泰勒函数的思想: 对于一个给定的光滑函数, 我们能否使用“任意次的多项式函数”, 来逼近它? 事实上可以. 项数越多, 每项的系数不同, 多项式就能拟合不同的曲线.
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$

忽略系数后, 可以看到, 多项式最基础的部分, 就是幂函数 $x^1, x^2, ...$

幂函数分为两种, 一种是”偶函数”, 图像的开口方向同向:



另一种, 为”奇函数”, 图像的开口方向相反:



偶函数和奇函数组合在一起, 就能产生让曲线拉伸的效果.
泰勒公式的本质, 就是用“幂函数”, 去“近似”任何一个函数. 反过来, 我们就可以把任何一个函数, 展开成“幂函数的和”.

每个函数fn, 用泰勒展开后的前几项, 就是该函数fn的“等价无穷小”公式.
所谓“等价无穷小”, 是指: 若 $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 f 和 g 是“等价无穷小量”，记作 $f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$.

第二部分　麦克劳林公式 Maclaurin’s series

泰勒公式, 我们一般在 $x_0 = 0$ 处展开, 就变成麦克劳林公式（Maclaurin’s series）, 它是泰勒公式的一种特殊形式.

从泰勒公式，到麦克劳林公式的演变：

泰勒公式是：$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\underbrace{R_n(x)}_{余项=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}}$ ①

其中的“余项” $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 中的ξ，是一个介于x_0与x之间的数(x_0和x谁打谁小，并不一定)

下面：

(1) 我们就用 $\theta\cdot x$，来代表ξ. $\leftarrow$ θ是个系数(倍数)

(2) 我们把x_0和x，也写成带有系数的形式.

$\rightarrow x_0=0=0x$

$\rightarrow x=1x$

因为 $\xi=\theta\cdot x$，是一个介于x_0与x之间的数，即 $\underbrace{x_0}_{=0x}<\theta x<\underbrace{x}_{=1x}$

所以系数θ就是：$0<\theta<1$

我们把$\begin{cases}x_0=0\\ \xi=\theta x\end{cases}$，代入泰勒公式①中.

即得到：$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{余项}\ \leftarrow 0<\theta<1}$ $\leftarrow$即“马克劳林公式”

注意：余项的分子上的 $f^{(n+1)}(\theta x)$，意思是对 $f(\theta x)$ 函数求 n+1 次导数 (而不是次方的意思，别搞错了).

麦克劳林公式，比泰勒公式更常用. 即，我们一般只在 $x_0=0$ 处展开泰勒公式.

例

对 $f(x)=e^x$ 用马克劳林公式来拟合它 (在 $x_0=0$点处展开)

那我们就把 e^x 代入“马克劳林公式”中的分子上的每个f 中了.

$$\boxed{\text{麦克劳林公式: } f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\text{余项}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

本例的f 代入后，就是：

$$\begin{aligned}e^x&=e^0+\frac{(e^0)'}{1!}x+\frac{(e^0)''}{2!}x^2+\ldots+\frac{(e^0)^{(n)\text{次导数}}}{n!}x^n+\text{余项}\frac{(e^{\theta x})^{(n+1)\text{次导数}}}{(n+1)!}(x)^{n+1}\\&=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1\end{aligned}$$

上面，因为 e^x 的任何次导数，都等于 e^x 自己. 所以在$x_0=0$处展开后，上面的每一个分子上，就有：$(e^0)'=(e^0)''=\ldots=(e^0)^{(n)\text{次导数}}=1$

注意：只要用“麦克劳林公式”来拟合，就一定能得到严格的“等于号(=)”，而不是约等于号(≈).

因为余项中的θ 所取的区间 0-1 之中，一定能取到一个数，能令“麦克劳林公式”能精确的拟合原函数. 但至于θ 到底是哪个数？我们是不知道的.

反过来说，如果你把余项部分去掉了，θ 就不存在了. 则就只能使用约等于号(≈)了.

即，去掉余项后，上例就是：

$$\begin{aligned}e^x&\approx e^0+\frac{(e^0)'}{1!}x+\frac{(e^0)''}{2!}x^2+\ldots+\frac{(e^0)^{(n)\text{次导数}}}{n!}x^n\\&\approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n\end{aligned}$$

例

又例如，我们用马克劳林公式，来拟合 $f(x)=\sin x$.

即，把 sin x 的各次导数，代入马克劳林公式的每个分子上.

$(\sin x)'=\cos x\leftarrow$ 因为公式是在 x=0 处展开，即把 x=0 代进去，即 $(\sin 0)'=\cos 0=1$

$(\sin x)'' = -\sin x \quad \leftarrow (\sin 0)'' = -\sin 0 = 0$
$(\sin x)^{(3)} = -\cos x \quad \leftarrow (\sin 0)^{(3)} = -\cos 0 = -1$
$(\sin x)^{(4)} = \sin x \quad \leftarrow (\sin 0)^{(4)} = \sin 0 = 0$

我们可以发现 sin x 的高阶导数的规律:
→ 其偶数阶导数 = 0
→ 当 x=0 时, 其高阶导数的导数值, 以 1, 0, -1, 0 循环

下面, 就把 sin 这些各次的导数值, 代入马克劳林公式中.
马克劳林公式是:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{余项}}$$

$f(x)$	$=f(0)$	$+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)$	$+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$	$+\frac{f^{(3)}(0)}{2!}(x-0)^3$	$+\cdots$	$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$	$+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{余项}}$
$\sin x$	$=\underbrace{\sin 0}_{=0}$	$+\frac{(\sin 0)'}{1!}(x-0)$	$+\frac{(\sin 0)''}{2!}(x-0)^2$			$+\frac{(\sin 0)^{(n)\text{次导数}}}{n!}(x-0)^n$	$+\frac{(\sin(\theta x))^{(n+1)\text{次导数}}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$
	$=0$	$+\frac{\overbrace{\cos 0}^{=1}}{1!}x$	$\frac{\overbrace{-\sin 0}^{=0}}{2!}x^2$				
	$=$	$\frac{1}{1!}x$	$+\frac{0}{2!}x^2$	$+\frac{-1}{3!}x^3$			
	$=$	x	0	$-\frac{x^3}{3!}$			

所以 sin x 展开后, 就是:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

所以, 如果只取第一项, 就有 $\sin x \sim x$