目录

文件名

1 事件的独立性

1.1 (1) 独立事件, (2) 互斥 (互不相容) 事件, (3) 对立事件的区别

独立	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
互斥, 矛盾对立	$P(A\cap B)=0$, 并且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

1.1.1 独立事件 (一方对另一方的发生概率, 毫无影响) : $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$

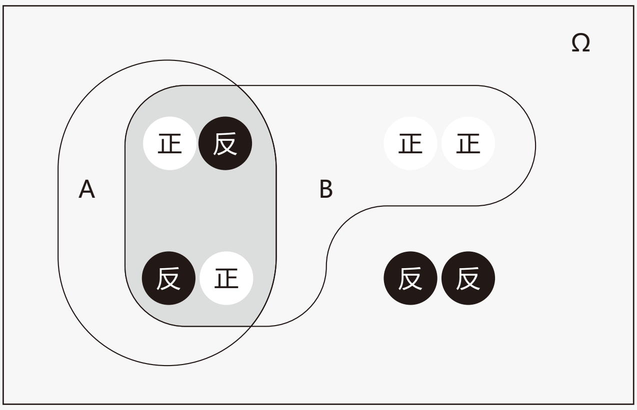
(1) 独立:
- **是指一个事件 (A) 的发生概率, 不受另一个事件 (B) 发生与否的影响.** 比如, 你抛两个骰子, 两个骰子的结果, 彼此互不影响. 它们可以点数不同, 也可以点数相同.
- 即: $P(A|B)=P(A)$. ← 意思就是: 即使 B 发生的条件下, 来看 A 发生的情况, 其发生概率和 A 单独自己发生, 没有任何区别. 换言之, 有没有 B 先发生, 对 A 的发生概率毫无影响.
- 若 A,B 是互相独立事件, 则:$P(AB)=P(A)\cdot P(B)>0$
- 反之, **独立事件判断标准就是：若 $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$, 则事件 A 和事件 B, 为相互独立事件.**

例

两个事件相互独立性判断的步骤：
(1) 求出样本空间 Ω 的样本点数
(2) 分别求出事件 A、B、$A\cap B$ 的样本点数
(3) 分别求出 P(A)、P(B)、P(AB)
(4) 验证：P(A)×P(B) 是否等于 P(AB)
(5) 如相等则为 “独立性” 事件, 反之为 “非独立性” 事件.

换言之：只要满足 P(A)×P(B)=P(AB)，则 AB 互为独立事件！

例如: 抛两枚硬币:
- 事件 A: 抛出一正一反
- 事件 B: 抛出至少一个正面
问：AB 是否为互为独立事件？



第 1 步：求样本空间样本点数，Ω {(正, 正),(正, 反),(反, 正),(反, 反)} = 4 个样本点

第 2 步：求 A、B、$A \cap B$ 的样本点数:
- A 抛出：一正一反，即 A { (正, 反),(反, 正) } =2 个样本点数
- B 抛出：至少一个正面，即 B { (正, 反),(反, 正),(正, 正) } =3 个样本点数
- $A \cap B$：一正一反，即 AB { (正, 反),(反, 正) } =2 个样本点数

第 3 步：求出 P(A)、P(B)、P(AB):
- P(A)=2/4
- P(B)=3/4
- P(AB)=2/4

第 4 步：看 P(A)×P(B) 是否等于 P(AB)?
P(A)×P(B)=(2/4)×(3/4)=3/8，不等于 P(AB)=2/4
所以, 事件 A 与事件 B 不是相互独立事件.

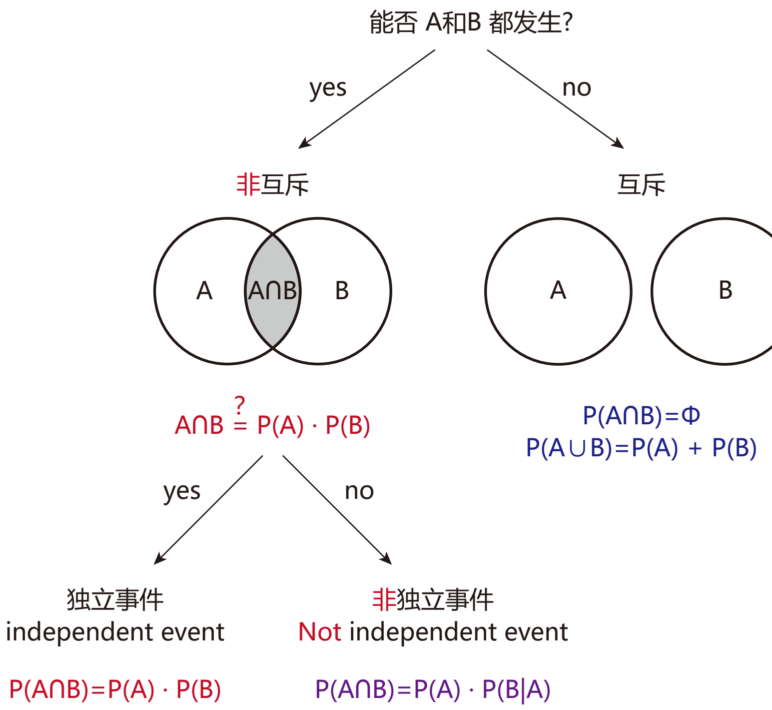
- 多个事件彼此独立: 若 A,B,C 互相独立, 则有:

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A) \cdot P(B) \\
P(BC) &= P(B) \cdot P(C) \\
P(AC) &= P(A) \cdot P(C) \\
P(ABC) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)
\end{aligned}
$$

1.1.2 互斥事件 (曹操, 刘备, 是 “互拆” 事件关系. 但它们的并集不构成天下的 Ω 全集, 还有其他竞争诸侯存在) ： $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

(2) 互斥 (互不相容), 彼此矛盾对立:
- **它指的是：两个事件不可能同时发生** (至多只有一个发生. 它们可能都不发生, 但不会同时发生). 或两个结果不可能同时出现.
- 是指两个事件没有交集.
- 从集合的角度看, 几个事件彼此 “互斥”, 就是指各个事件所含的基本事件组成的集合, 彼此互不相交.
- **即 $AB = \Phi$ 空集. 有你没我, 有我没你.** AB 同时发生的可能性为 0.
- 比如，一个人的性别不是男就是女, 不可能同时既是男又是女.

- 于是可以得到：若 AB 为互斥事件，A 和 B 发生的概率 P($A \cup B$)=P(A)+P(B)
- 反过来, 就是: 若要证明事件 A 和事件 B 为互斥事件，则只需证明 P(A)+P(B)=P(A+B)



“独立” 与 “互斥” 不会同时成立.

注意区别:
→ 事件 A 的 “条件概率” $P(A|B)$:
事件 B 的发生, 改变了事件 A 发生的概率, 也即事件 B 对事件 A 有某种 “影响” .

→ 事件 A 的 “无前提条件的概率” $P(A)$: 这里, 事件 B 的发生, 对事件 A 的发生毫无影响，即 $P(A|B) = P(A)$.
由此又可推出 $P(B|A) = P(B)$, 即事件 A 发生对 B 也无影响. 可见独立性是相互的.

例

已知: $P(A \cup B) = 0.9, P(A) = 0.4$, 问:

- 当 A, B 互斥时, P(B)=?
A, B 互斥, 即说明 AB 的交集 =Φ, 即 P(AB)=0.
因为 $\underbrace{P(A+B)}_{=0.9} = \underbrace{P(A)}_{=0.4} + P(B) - \underbrace{P(AB)}_{=0}$
所以 $P(B) = 0.9 - 0.4 - 0 = 0.5$

- 当 A, B 独立时, P(B)=?
两个事件彼此独立, 则有公式: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
但注意: 这里的 P(AB) 不能直接搬用上面的值 0. 因为这里的 A,B 是独立事件, 而非

上面的互斥事件.

$$\underbrace{P(A+B)}_{=0.9} = \underbrace{P(A)}_{=0.4} + P(B) - \underbrace{P(AB)}_{=P(A)\cdot P(B)}$$

即: $0.9 = 0.4 + P(B) - 0.4 \cdot P(B)$

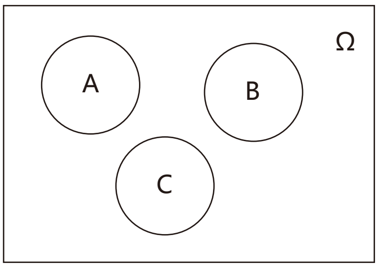
$0.9 - 0.4 = (1 - 0.4) \cdot P(B)$

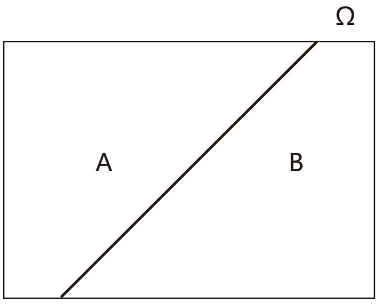
$P(B) = \dfrac{0.5}{0.6} = \dfrac{5}{6} = 0.833333$

1.1.3 对立事件 (平分天下的刘邦, 项羽, 是 "对立" 事件关系) : P(A+B)=P(A)+P(B)=1=Ω

- 通俗的说：所有可能的结果非黑即白, 并且他们的并集能组成全集 Ω, 就叫对立事件!
如, 一个婴儿出生，要么是男孩，要么是女孩.
争夺天下, 要么成王, 要么败寇.
一道选择题，只有 2 个选项 A 和 B，要么选 A，要么选 B.

- 若 AB 为对立事件，且 A+B=Ω，则 AB 互为对立事件.
反过来说, 即: 若 AB 为对立事件，A 和 B 发生的概率 P(A+B)=P(A)+P(B)=1
还可以得到：若 AB 为对立事件，P(A)=1-P(B)





A,B 互斥
AB没有交集,
且 A+B ≠Ω

A是曹操, B是刘备
但天下还有其他诸侯存在

互拆(无交集), 未必是对立关系
(未必天下只有你我两个竞争对手)

A,B 对立, 楚河汉界
A+B=Ω

A是刘邦, B是项羽,
天下没有其他争夺帝位的人存在了

对立(二分天下), 必定是互拆(无交集)

- 对立事件，必定是互斥事件，但互斥事件，未必是对立事件.
所以可以说：互斥事件，是对立事件的前提条件 (必要条件)

1.2 A,B 是两个相互独立的事件, 则有: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

即, 事件相互独立: 就是指一个事件发生，不会影响另一个事件的发生或不发生. 两个事件没有相关性，相关系数为 0.

从数学上定义, 就是 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
即: 两个相互独立的事件 A 和 B 都发生的概率, 等于每个事件发生的概率的积. (即等于 "分步骤法".)

另外: "Φ 和 Ω" 与 "任意事件 A" 都独立.

例

甲乙丙三人投篮 (显然这三个人的命中率是独立事件, 彼此互不影响), 命中率分别是:
- 甲投中 (A 事件) : P(A)=0.7. 则甲没投中的概率就是 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.3$
- 乙投中 (B 事件) : P(B)=0.8. 乙没投中就是 $P(\overline{B})=0.2$
- 丙投中 (C 事件) : P(C)=0.75. 丙没投中就是 $P(\overline{C})=0.25$

问:
→ 他们各投一次, 恰有一人投中的概率:

$$\begin{aligned}
&=P\left(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\right)\\
&=P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)\\
&\leftarrow \text{因为}ABC\text{是独立事件, 所以它们乘积的概率, 就等于各自概率的乘积}\\
&=\underbrace{P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{C}\right)}+\underbrace{P\left(\overline{A}\right)\cdot P(B)\cdot P\left(\overline{C}\right)}+\underbrace{P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P(C)}
\end{aligned}$$

→ 三人全部投中的概率: $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

→ 至少有一人投中的概率 (即 >= 1 人, 就是把 "0 人投中" 排除出去后, 剩下的全部) :
$=1-\underbrace{P(\overline{ABC})}_{\text{所有人全没投中}}=1-\underbrace{P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{C}\right)}_{ABC\text{是独立事件, 所以它们乘积后的概率, 就等于各自概率的乘积}}$

例

破译某密码, 如果仅靠一个人去破译, 成功概率是 0.6 (即 60%).
问: 如果想将成功率提高到 99%, 至少需要多少人来一起破译?

显然, 每个人的破译成功率, 彼此间毫无影响, 是 "独立事件" 关系的.
我们先设:
- A_i : 表示是第 i 个人破译出了密码.
- B : 表示破译成功. 即 $B=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, ← 也就是说: 只要一堆 A 里面任何一个人成功了, 就相当于整个团队完成了任务. (这里就用了并集).

我们倒过来想: 成功概率, 就等于 1 减去 "大家都没成功的概率". 即:

$$P(B)=1-\underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)}_{\text{连乘后的概率}}\leftarrow 1\text{减去 每一个人都失败了, 即失败交集的概率}$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P\left(\overline{A_i}\right)\leftarrow \text{ 连乘 后的概率, 就等于概率后的乘积}$$

$$=1-0.4^n\leftarrow \text{每一个人失败的概率}=1-\text{成功率}0.6=0.4.\text{ 然后一共有}n\text{个人在做破解工作.}$$

上面, 0.4^n 就是 n 个人都失败的概率.

即我们要让:

$$\begin{aligned}&P(B) \geq 0.99\\&1-0.4^n \geq 0.99\\&n \approx 5.026\end{aligned}$$

即, 至少需要 6 个人才行.

1.3 若 A,B 是互相独立的事件, 则有: (1) A 与 $\overline{B}$ 独立; (2) $\overline{A}$ 与 B 独立; (3) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立

既然 A,B 是相互独立的事件了, 彼此发生或不发生, 对另一方毫无影响. 所以, 我上不上岸 (A 或 $\overline{A}$), 和你结不结婚 (B 或 $\overline{B}$) 毫无影响.

1.4 若 $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$, 则 A 与 "任意事件" 都互相独立.

---

2 伯努利模型 bernoulli model

- 独立试验序列:
在相同的试验条件下，进行一系列随机试验 $E_1, E_2, ...E_n$, (每次做的实验, 可以是不相同的), 观察某事件 A 发生与否. 若每次试验结果相互独立, 则这样的一系列试验称为 "独立试验序列".

- n 重独立试验:
把一个试验, 重复做 n 次. 即: E, E, ... E, 记作: E^n

2.1 伯努利试验: 其试验结果只有两种: 成功, 失败

伯努利试验: **其试验结果只有两种.** 即: $\Omega = \{A, \overline{A}\}$

属于 "伯努利试验" 的例子有:
- 掷硬币, 结果只有 "正面" 和 "反面" 两种.
- 射击, 结果只有 "击中" 和 "没击中" 两种.
- 检验产品, 结果只有 "合格","次品" 两种.

不属于 "伯努利试验" 的例子是: 掷骰子, 有 6 种结果.

如果在一个试验中, 我们只关心某个事件 A 发生与否, 那么就称这个试验为 "伯努利试验". 此时, 试验的结果可以看成只有两种: A 发生, 或 A 不发生. 相应的数学模型, 就称为 "伯努利概型".

2.2 n 重伯努利试验: 事件 A 恰好发生 k 次的概率, 就是 =

n 重伯努利试验: 就是把 “伯努利试验” 重复做 n 次, 每次都是独立的. 并且试验结果只有两种.
比如, 抛硬币, 是一个伯努利试验 (它只有正面, 反面, 这两种结果). 我们做 100 次这个试验, 就是做了 100 重伯努利试验.

设在单次试验中, 事件 A 发生的概率为 P, 将此试验重复独立地进行 n 次, 则事件 A 恰好发生 k 次的概率是多少? 通常记这个概率为: $P_n(k), \quad k = 0, 1, 2, ..., n$.