目录

文件名

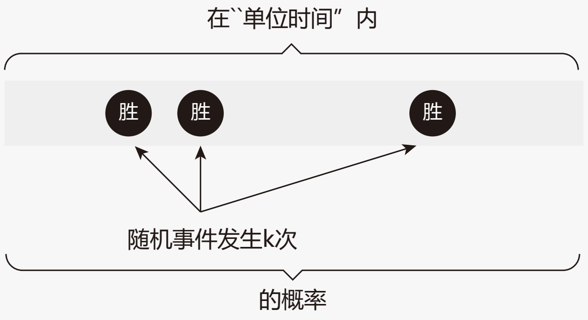
第一部分　指数分布 Exponential distribution

1　指数分布：若一段时间内, 随机事件发生的次数, 呈“泊松分布”. 那么，这些随机事件发生的时间间隔, 便呈“指数分布”.

“指数分布”与“泊松分布”密切相关：如果在某时间段内, 随机事件发生的次数, 呈“泊松分布”. 那么，这些随机事件之间的时间间隔, 便呈“指数分布”.

例

回想一下: “泊松分布”是描述单位时间内, 随机事件发生的次数.



$P\{X=\text{你希望“随机事件}A\text{”发生的次数}k\}$

$=\dfrac{(\text{单位时间内,}A\text{的平均发生次数}\lambda)^{\text{你希望}A\text{发生的次数}k}}{(\text{你希望}A\text{发生的次数}k)!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,...,n$

即 $=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$

所以, 泊松分布的“概率函数”就是: $\boxed{P\left(X=\text{你想要发生的次数}\right)=\dfrac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想!}}}$

例如, 如果抵达某家银行的客户人数呈“泊松分布”，比如说 λ=12 人/小时 (λ, 是单位时间 (或单位面积) 内, 随机事件的**平均发生次数**). 那么，他们抵达的时间间隔, 则呈“指数分布”，平均值 μ=1/12，或者说 5 分钟.

“泊松分布”中的参数 λ :	是单位时间 (或单位面积) 内, 随机事件的**平均发生次数**.
“指数分布”中的参数 μ :	表示“随机事件发生的**平均时间间隔**”. 它与 λ 的关系是: $\boxed{\lambda=\frac{1}{\mu}}$.

即,“指数分布”可以用来表示: 独立随机事件**发生的时间间隔**. 比如:
- 旅客进入机场的时间间隔.
- 电话打进客服中心的时间间隔.
- twitter 上用户发表新微博的时间间隔.
- 机器的寿命等 (许多电子产品的寿命分布, 一般服从”指数分布”).

2 指数分布的“概率函数”: $\boxed{f(x;\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ (x>0)}$

若一个随机变量 X 呈“指数分布”, 则可以写作: $\boxed{X \sim E(\lambda)}$.

指数分布的“概率函数”是:

$$\boxed{f\left(x; \underbrace{\lambda}_{\text{每单位时间内, 随机事件发生的次数}}\right) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ (x>0) \\ 0\ (x \le 0) \end{cases}}$$

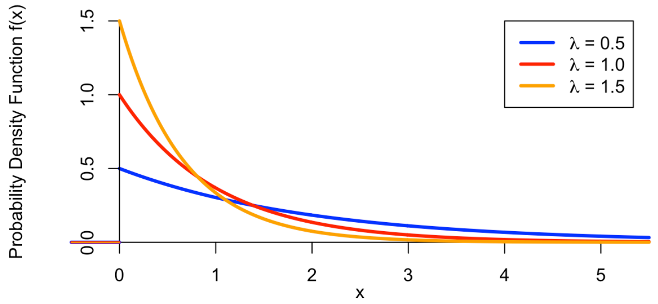
其中, λ 表示: 每“单位时间”内, 随机事件的发生次数.

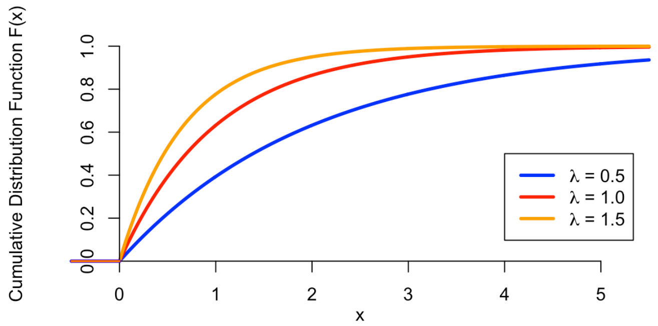
或:

$$\boxed{f\left(x; \underbrace{\beta}_{\text{随机事件, 在每单位时间内的发生率}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{1}{\beta}x}\ (x \ge 0) \\ 0\ (x < 0) \end{cases}}$$

其中, β 表示: 随机事件, 在“每单位时间”内的“发生率”.

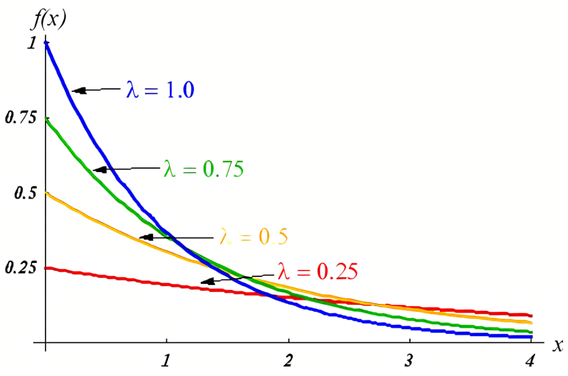
“概率函数”图如下:





从图上可以看出:

- 指数分布的 x 区间是 $[0,\infty)$.
- 指数分布, 它的 y 值是有下限的, =0.
- 在 x=0 处, 函数有最大的 y 值.
- 函数为右偏. 且随着 x 的增大, 函数的 y 值稳步下降 (即是个减函数).
- 其中的参数 $\lambda > 0$, 它表示“每单位时间内, 发生某事件的次数”. 它常被称为“率参数” (rate parameter).



这个 “指数分布 Exponential distribution” 的 “概率函数” 图形, 表面上看与 “幂律分布 Power law distribution” 很相似, 其实两者有极大不同: **“指数分布” 的收敛速度, 要远快过 “幂律分布”.**

3 指数分布的 “累加函数”: $\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ (x > 0)}$

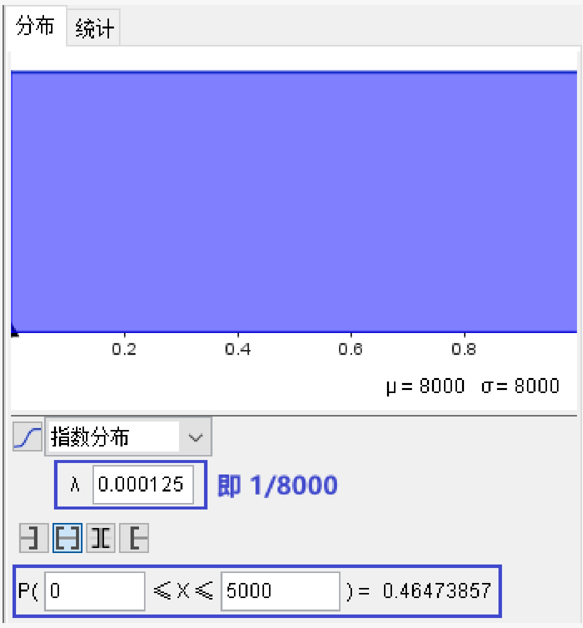
$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}}$$

例

一台发动机的某个关键零件, 出故障的 “平均间隔时间” =8000 小时. 则, 单位时间 (1 小时) 内, 出故障的次数就是:

$$\begin{aligned} &\frac{\text{出 1 次故障}}{8000\text{小时}} \leftarrow \text{分子分母同时除以8000} \\ &= \frac{\frac{\text{出 1 次故障}}{8000}}{1\text{小时}} \leftarrow \text{即每 1 小时(单位时间), 出}\frac{1}{8000}\text{次故障} \end{aligned}$$

因为该随机事件 (机器出故障), 可用 “指数分布” 来模拟. 所以, 如果我们要求 “它在 5000 小时之前会出故障” 的概率, 就用 “累加函数” 来算了.



mathematica 中的计算:

In[∘]:=
```
my指数分布 = ExponentialDistribution[1/8000]
```
指数分布

Out[∘]= ExponentialDistribution$\left[\frac{1}{8000}\right]$

```
PDF[my指数分布] (*获得"概率函数"*)
```
概率密度函数

Out[∘]= Function$\left[x, \begin{cases} \frac{e^{-x/8000}}{8000} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}, \text{Listable}\right]$

```
CDF[my指数分布] (*获得"累加函数"*)
```
累积分布函数

Out[∘]= Function$\left[x, \begin{cases} 1 - e^{-x/8000} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}, \text{Listable}\right]$

```
CDF[my指数分布, 5000]
```
累积分布函数

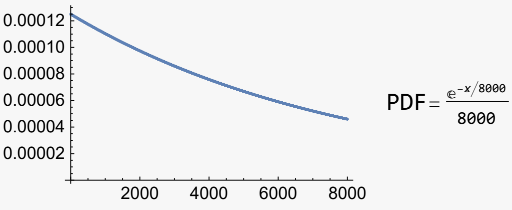
(在x=5000处的 累加函数F(x)值=0.46)

Out[∘]= $1 - \frac{1}{e^{5/8}}$

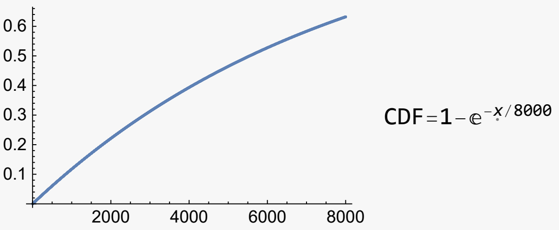
In[∘]:= $N\left[1 - \frac{1}{e^{5/8}}\right]$
数值运算

Out[∘]= 0.464739

```
ListPlot[Table[PDF[my指数分布, x], {x, 0, 8000}],
 PlotLegends → "PDF=e^(-x/8000)/8000"]
```
绘制点集 表格 概率密度函数
绘图的图例 概率密度函数

Out[∘]=



```
ListPlot[Table[CDF[my指数分布, x], {x, 0, 8000}],
 PlotLegends → "CDF=1-e^(-x/8000)"]
```
绘制点集 表格 累积分布函数
绘图的图例 累积分布函数

Out[∘]=


例

有一堆元件, 寿命用 X 表示, 服从 “指数分布”.

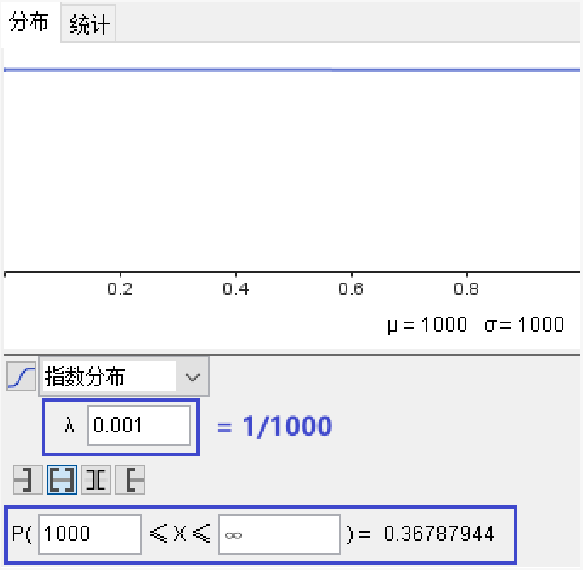
其概率函数是: $f(x)=\begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}=\frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$

某机器上, 含有 3 个这种元件. 其中只要坏掉 1 个元件, 整个机器就坏掉.
问: 该机器能工作到 1000 小时以上的概率?

其实就是求: “这 3 个元件, 能同时保持正常状态到 1000 小时以上” 的概率.

→ 我们先求 1 个元件, 能 “保持正常状态, 超过 1000 小时” 的概率:

$$P\{X>1000\}=\int_{1000}^{+\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}}_{\text{即概率函数} f(x)}\right]dx=-e^{-\frac{1}{1000}x}\Big|_{1000}^{+\infty}=e^{-1}=0.367879$$



→ 所以, 同时有 3 个都能满足 “保持正常状态, 超过 1000 小时” 的概率就是:
$[P\{X>1000\}]^3=(e^{-1})^3=e^{-3}=0.0497871$

4 指数分布, 具有 “无记忆”

但是，由于指数分布具有缺乏 “记忆” 的特性, 因而限制了它在 “机械可靠性” 研究中的应用.

所谓缺乏 “记忆”，是指它假设：某种产品或零件，经过一段时间 t0 的工作后，仍然如同全新的产品一样，不影响以后的工作寿命值 (换言之，它忽略了 “磨损或风蚀” 会对产品寿命有 “缩短” 的影响).
即, “无记忆性” 就是说: 一个灯泡, 你用了 n 年后, 它能再用 1 年的概率, 和它刚买时, 能再用 1 年的的概率, 是相等的. 即, 在 “指数分布” 里, 一个东西的寿命, 对 “已使用时间” 是没有记忆的.

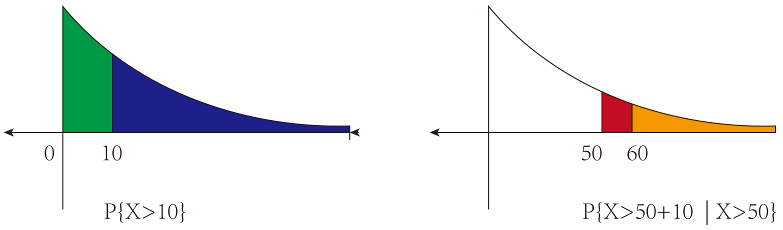
或者说，它假设：经过一段时间 t0 的工作之后，该产品的寿命分布，与原来还未工作时的寿命分布相同.

所以, “指数分布” 只能近似地来作为机器或系统的 “失效分布模型”.

无记忆性, 就是说:

$$\boxed{P\{X > s + t \mid 当X > s时\} = P\{X > t\}, \quad for\ a, x > 0}$$

这个等式也就是说: “X 超过 s+t” 的概率, 和 “超过 t” 的概率, 是相等的. 换言之, 这个概率 “无视 t 的存在与否”, 都不影响概率本身的值.



即面积关系是: $\frac{蓝}{蓝+绿=1} = \frac{黄}{黄+红}$

5 指数分布的: 期望 $E = \frac{1}{\lambda}$, 方差 $\sigma^2 = (\frac{1}{\lambda})^2$

	期望 E	方差 σ^2
泊松分布 Poisson distribution	λ	λ
指数分布 Exponential distribution	$\frac{1}{\lambda}$	$(\frac{1}{\lambda})^2$