第二换元法 之"根式代换法"

Table of Contents

1. 第二换元法 之"根式代换法"

Example 1. 标题

例如:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx \leftarrow \text{既然是根式代换法，我们就用一个变量来代换这个根号全部,}$$

$$\text{如，令} t = \sqrt{2x+1}$$

$$\text{则 } t^2 = 2x+1,\quad x = \frac{1}{2}(t^2-1)$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t} d\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right) \leftarrow \text{ 这里的做微分: } d\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right) = (\frac{1}{2}(t^2-1))' \underbrace{dt}_{\text{是自变量的微分!}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2t \ dt = tdt$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t} tdt$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^2-1) \ \mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int t^2 dt - \int 1 dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 - t + C\right)$$

$$= \frac{1}{6}t^3 - \frac{t}{2} + C \leftarrow \text{再把} t \text{还原成} x, \quad \text{因为} t^2 = 2x+1, \text{所以: } t = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

Example 2. 标题

例如:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx \leftarrow \text{令} t=\sqrt{2x+1}, \text{则:} \quad t^2=2x+1, \quad x=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

$$\begin{aligned} dx\text{部分} &= d\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right) \\ &= (2^{-1}(t^2-1))' dt \\ &= 2^{-1}(2t)dt \\ &= t\cdot d(t) \end{aligned}$$

换元必换限($\int$符号的上下限):

本例, 原始$\int$对x的上限是4, 下限是0, 即 $\int_0^4 \dots\ dx$

那么"换元"成t后, $\int$对t的"新限"是多少呢?

因为 $t=\sqrt{2x+1}$

所以x的原上限4(即$x=4$), 用t表示就是 $t=\sqrt{2(4)+1}=3$

x的原下限0(即$x=0$), 用t表示就是 $t=\sqrt{2(0)+1}=1$

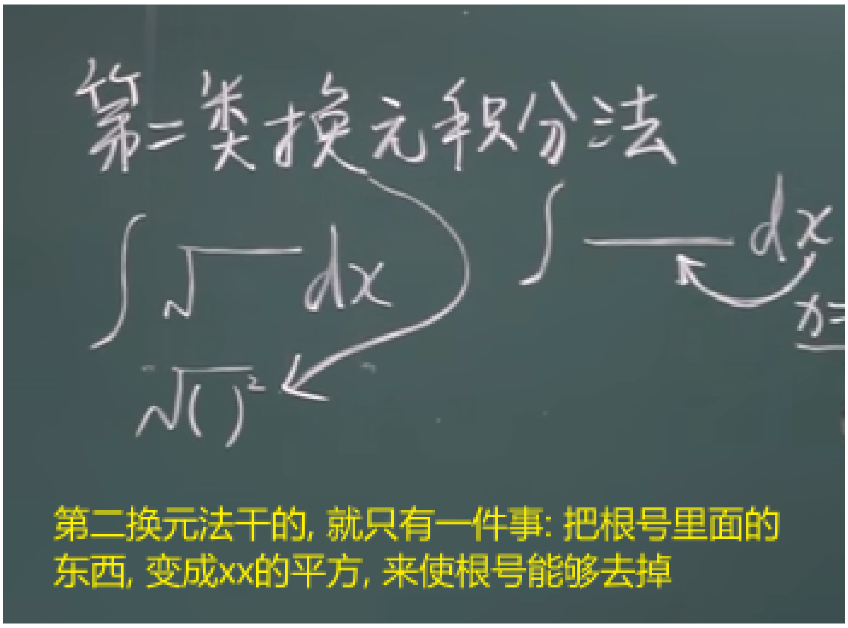
所以, 新的积分符号就是 $\int_1^3 \dots\ dt$

$$\begin{aligned} &= \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t} \cdot t \cdot dt \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2-1)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^3 \end{aligned}$$

---

2. 第二类换元积分法

Header 1	Header 2
第一类换元积分法	是把d前面的东西, 往d里面拿, 即这个过程相当于是: 先把d外面的东西"求原函数", 再放到d里面.

Header 1	Header 2
第二类换元积分法 : 它主要解决 "∫(根号)dx" 这类导函数是带根号的问题	是把d里面的东西, 朝外拿, 即: 对于dx, 将 $x = \varphi(t)$ 朝外拿, 这个过程相当于对 φ(t) 求导. 即变成 $\varphi'(t)dt$ ← 这个其实就是做微分. 这不也是第一换元法这个"凑微分法"的过程之一么? 

原式 $\int f(x)dx$，我们用一个函数来代替x，比如 $x=\varphi(t)$，依此，$t=\varphi^{-1}(x)$

意思是：原函数如果是输入t，会输出x，

则其“时间倒流性质”的反函数就是 输入x，能输出t

就像，原函数是输入水果原材料，输出水果汁；

则其反函数机器就是：输入水果汁，能输出其水果原材料.

则原式 $=\int f[\varphi(t)]\, d(\varphi(t)) \leftarrow d(\varphi(t)) =$ 给$\varphi(t)$做微分，$=\varphi'(t)\,dt$

所以原式就继续 $=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ ←别忘了：我们还要把t，重新换回x

$$=[\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Example 3. 标题

例如:

总结做题的方法，一般的替换规律如下:

第①种：对于$\sqrt{a^2-x^2}$的，

$\rightarrow$ 我们令 $x=\mathrm{a}\cdot\sin t$

根号部分 $=\sqrt{a^2-(\mathrm{a}\cdot\sin t)^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}$

第②种：对于$\sqrt{x^2-a^2}$的，

$\rightarrow$ 我们令 $x=\mathrm{a}\cdot\sec t$

根号部分 $=\sqrt{a^2-(\mathrm{a}\cdot\sec t)^2}=\sqrt{a^2(1-\sec^2 t)}=\sqrt{a^2\tan^2 t}$

第③种：对于$\sqrt{x^2+a^2}$的，

$\rightarrow$ 我们令 $x=\mathrm{a}\cdot\tan t$

根号部分 $=\sqrt{a^2+(\mathrm{a}\cdot\tan t)^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}=\sqrt{a^2\sec^2 t}$

2.1. 对于 $\sqrt{a^2-x^2}$, 其中的x, 用 $x=a\cdot\sin t$ 来替换.

Example 4. 标题

例如:

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \ (a>0) \leftarrow$ 令$x=\mathrm{a}\cdot\sin t, \quad (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$

限定t的定义域，是为了让“该令”有反函数.

这个“令”，也就有：$\sin t=\frac{x}{a}$,

两边同时乘上一个arcsin，把t暴露出来，就有：

$$\underbrace{ar\sin\ \sin t}_{\text{相当于线性代数中的 } A^{-1}A=I} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$t=\arcsin\frac{x}{a}$$

$$=\int \sqrt{a^2-(\mathrm{a}\cdot\sin t)^2}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$$=\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$$=\int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$$=\int \sqrt{a^2\ \cos^2 t}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$=\int |\mathrm{a}\cdot\cos t|\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t) \leftarrow$ d的部分就是 对$(\mathrm{a}\cdot\sin t)$ 做微分，

即$d(\mathrm{a}\cdot\sin t) \ =d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$
$=(\mathrm{a}\cdot\sin t)'dt$
$=\mathrm{a}\cdot\cos t\cdot dt$

$$=\int |\mathrm{a}\cdot\cos t|\ \cdot \mathrm{a}\cdot\cos t\cdot dt$$

$=a^2\int \cos^2 t\ dt \leftarrow$ 根据倍角公式：$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$
$=2\cos^2 x-1$
$=1-2\sin^2 x$

则...

...

$$=a^2(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})+C \leftarrow \sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$=a^2(\frac{t}{2}+\frac{2\sin t\cos t}{4})+C$$

$=\frac{a^2 t}{2}+\frac{a^2\sin t\cos t}{2}+C \leftarrow$把$t$换回$x$，上面我们已经做出过：

$\rightarrow \sin t=\frac{x}{a}$,

并且，既然$\sin t=\frac{\text{对边}x}{\text{斜边}a}$，所以$\cos t=\frac{\text{临边}}{\text{斜边}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$\rightarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$

$$=\frac{a^2(\arcsin\frac{x}{a})}{2}+\frac{a^2\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}{2}+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$$

2.2. 对于 $\sqrt{x^2+a^2}$, 其中的x, 用 $x=a\cdot\tan t$ 来替换.

Example 5. 标题

例如:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \ (a>0) \ \leftarrow \ 令x=\mathrm{a}\cdot\tan t \ \ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$$

则分母上的 $\sqrt{x^2+a^2}$ 部分，就

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\mathrm{a}\cdot\tan t)^2+a^2} \\
&= \sqrt{a^2\tan^2 t+a^2} \\
&= \sqrt{a^2(\tan^2 t+1)} \\
&= a\sqrt{\sec^2 t} \ \leftarrow \ \sec t=\frac{1}{\cos t}，因为 -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}，所以\sec t>0 \\
&= \mathrm{a}\cdot\sec t
\end{aligned}$$

$$=\int \frac{1}{a\cdot\sec t} \ d(\mathrm{a}\cdot\tan t) \ \leftarrow d部分=(\mathrm{a}\cdot\tan t)'dt = a\cdot\sec^2 t \ dt$$

$$=\int \frac{a\cdot\sec^2 t}{a\cdot\sec t}dt$$

$$=\int \sec t \ dt \ \leftarrow \ 根据积分公式 \int \sec t \ dx = \ \ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$= \ \ln|\sec t+\tan t|+C \ \ \leftarrow \ 别忘了把t换回x. 因为 \ x=\mathrm{a}\cdot\tan t，所以$$

$$\color{green}{\tan t=\frac{x}{a}} = \frac{对边}{邻边}，所以另一条斜边=\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\color{blue}{\sec x=\frac{斜边}{邻边}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}$$

$$=\ln|\color{blue}{\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}+\color{green}{\frac{x}{a}}| \ +C$$

$$=\ln|\frac{1}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)| \ +C \ \ \leftarrow \ x和\sqrt{x^2}是一样大的，而根号里再加一个正数，其值肯定就比x更大了，$$

所以绝对值符号可以去掉，它肯定是个正数

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)+C$$

2.3. 对于 $\sqrt{x^2-a^2}$, 其中的x, 用 $x=a\cdot\sec t$ 来替换.

Example 6. 标题

例如:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\quad(a>0)$$ ①当分母根号中的$x^2>a^2$时:

$\leftarrow$令 $x=\mathrm{a}\cdot\sec t\quad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}dx&=d(\mathrm{a}\cdot\sec t)\\&=(\mathrm{a}\cdot\sec t)'dt\\&=\mathrm{a}\cdot\sec t\tan t\ dt\end{aligned}$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{a}\cdot\sec t)^2-a^2}}\ \mathrm{a}\cdot\sec t\tan t\ dt$$

$\leftarrow$分母的 $\sqrt{(\mathrm{a}\cdot\sec t)^2-a^2}$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{\mathrm{a}^2\cdot\sec^2t-a^2}\\&=\sqrt{\mathrm{a}^2(\sec^2t-1)}\quad\leftarrow\text{根据公式:}1+\tan^2x=\sec^2x\\&=a\sqrt{\tan^2t}\\&=\mathrm{a}\cdot\tan t\end{aligned}$$

$$=\int\frac{\mathrm{a}\cdot\sec t\tan t}{\mathrm{a}\cdot\tan t}dt$$

$$=\int\sec t\ dt$$ $\leftarrow$ 根据积分公式: $\int\sec t\ dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C$$ $\leftarrow$别忘了把t换回x:

因为我们令了 $x=\mathrm{a}\cdot\sec t$, 即 $\sec t=\frac{x}{a}=\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}$,

所以: 对边 $=\sqrt{\text{斜边}^2-\text{邻边}^2}=\sqrt{x^2-a^2}$

$\tan=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$$ $\leftarrow$其中的公因子 $\ln\left|\frac{1}{a}\right|$ 是一个常数，可以归并到常数C里面去

$$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

②当分母根号中的$x^2<a^2$时，结果是: $=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

---

https://www.bilibili.com/video/BV1Eb411u7Fw?p=46&vd_source=52c6cb2c1143f8e222795afbab2ab1b5

41.49

---

https://www.bilibili.com/video/BV1Jo4y1R7Bx?spm_id_from=333.337.top_right_bar_window_history.content.click&vd_source=52c6cb2c1143f8e222795afbab2ab1b5

9.55