极限_洛必达法则

Table of Contents

1. 洛必达法则 L’Hospital’s rule → $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ ← 即对分子分母 同时求导就行了.

洛必达法则, 主要用于求极限, 尤其是 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 这种的.

两个无穷小之比 $\frac{0}{0}$, 或两个无穷大之比$\frac{\infty}{\infty}$ 的极限可能存在，也可能不存在。因此，求这类极限时, 往往需要适当的变形，转化成可利用"极限运算法则"或"重要极限的形式", 进行计算. 洛必达法则, 便是应用于这类极限计算的通用方法.

极限值”存“洛必达法则”的内容:

有两个函数 $f(x)$ 和 $F(x)$，若它们满足以下条件:

1.当$x \to a$时，有 $f(x) \to 0$，$F(x) \to 0$

2.在a的“去心邻域”内，$f'(x)$ 和 $F'(x)$ 均存在，且 $F'(x) \neq 0$

3.当$x \to a$时，有 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 的值存在，或其极限值 $=$ 无穷大（$\pm\infty$皆可)

则，我们就有这个结论:

当$x \to a$时，这两个函数的比值，就 $= \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} =$ 存在,或 $\pm\infty$

注意上面第3个条件:

$\to$ 如果 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 这个“在，则 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

$\to$ 如果这个极限值 $= \infty$，则 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也 $= \infty$

$\to$ 如果这个极限值 不存在，则本“洛必达法则”方法无效，就要使用其他方法来求该极限了

Example 1. 标题

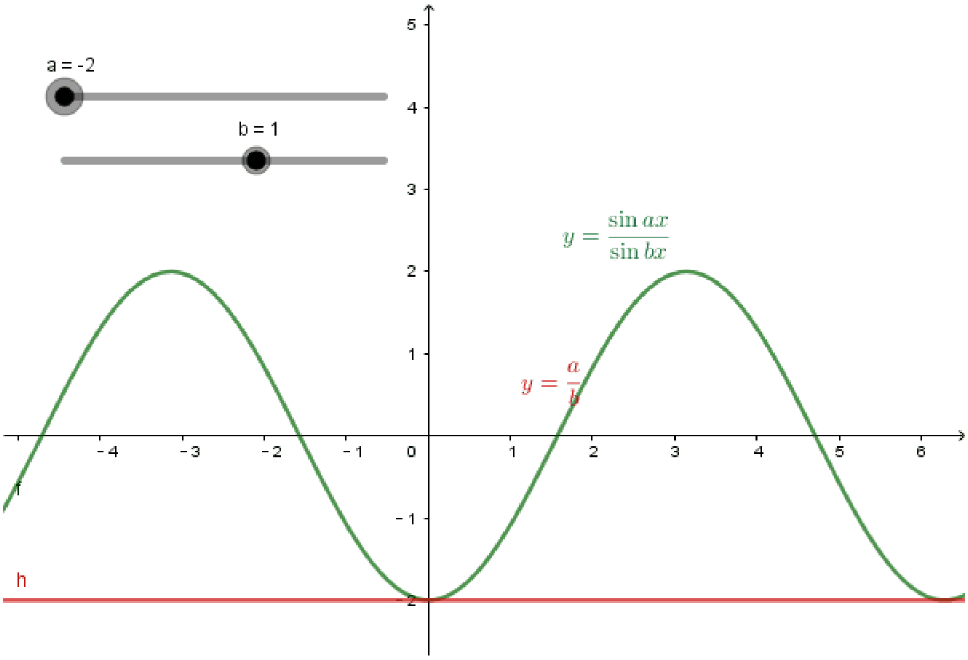
例如:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0)$$

套用洛必达法则，就有:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos ax \cdot a}{\cos bx \cdot b} = \frac{a}{b}$$

从下图就可以看出, 当 x→ 0时, $y = \frac{\sin ax}{\sin bx}$的极限值, 就等于 $y = \frac{a}{b}$



Example 2. 标题

例如：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

$\leftarrow$既然是 $x\to 1$，就先把$x=1$代入进去，试试看，满足 $\frac{0}{0}$ 型,可以用“洛必达法则”

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

$\leftarrow$再把$x=1$代入进去，试试看，满足 $\frac{0}{0}$ 型,可以继续用“洛必达法则”

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}$$

再把$x=1$代入进去，试试看，发现 $=\frac{6}{4}$，所以不满足 $\frac{0}{0}$ 型 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型了，就不能继续用“洛必达法则”了

所以，本题的最终结果，即$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

所以: 在运用洛必达法则之前，要先验证两个条件:

1. 分子分母的极限, 是否都等于零(或者无穷大). → 因为**"洛必达法则"常用于求"不定式极限"。基本的不定式极限为：$\frac{0}{0}$ 型；$\frac{\infty}{\infty}$ 型（$x\to\infty$ 或 $x\to 0$）**. 而其他的如 $0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，以及 1^{∞} 型，∞^0 型和 0^0 型等形式的极限, 则可以通过相应的变换, 转换成上述两种基本的不定式形式, 来求解.
2. 分子分母在限定的区域内, 是否分别"可导".

如果这两个条件都满足，就能使用"洛必达法则" :分子分母分别求导, 并判断求导之后的极限是否存在:
→ 如果极限存在，就直接得到答案了.
→ 如果极限不存在，则说明此种"未定式", 不可用"洛必达法则"来解决. 就应从其他途径求极限, 比如利用"泰勒公式"求解.
→ 如果极限依然不确定是否存在，即结果仍然为"未定式"，就再在验证前面所说的两个条件的基础上, 继续使用"洛必达法则"来做. → 即, **若条件符合，洛必达法则可连续多次使用，直到求出极限为止.**

Example 3. 标题

例如:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型，用“洛必达法则”}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型，继续用“洛必达法则”}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} \leftarrow\text{根据两个重要极限公式之一 有}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
$$\text{所以 本例最终}=\frac{1}{6} \leftarrow \text{根据极限公式 }\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim_{x\to a}[f(x)]$$

极限公式为:

Suppose that c is a constant and the limits $\lim_{x\to a} f(x)$ and $\lim_{x\to a} f(x)$ exist. Then

Sum Law $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

Difference Law $\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$

Constant Multiple Law $\lim_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\lim_{x\to a} f(x)$

Product Law $\lim_{x\to a}\left(f(x)\bullet g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\bullet\lim_{x\to a} g(x)$

Quotient Law $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\text{if } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

Power Law $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$

Root Law $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, where n is a positive integer

Constant Law $\lim_{x\to a} c=c$

Direct Substitution Law $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

---

2. 洛必达法则, 该定理所有条件中，对 x→ ∞ 的情况，结论依然成立.

Example 4. 标题

例如:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\leftarrow\frac{\infty}{\infty}\text{型，就用洛必达法则}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{0-\frac{1}{1+x^2}}{-1x^{-2}}\leftarrow\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\leftarrow\frac{\infty}{\infty}\text{型，即使不用“洛必达法则”继续求，}$$

其实也已经可以看出来：分子是无穷大，分母是无穷大 $+1$，两者相比例，结果 $=1$

Example 5. 标题

例如：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ (n>0)\leftarrow\frac{\infty}{\infty}\text{型，就用洛必达法则}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^n)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}$$

当$x\to+\infty$时，分母是无穷大，所以结果 $=0$

Example 6. 标题

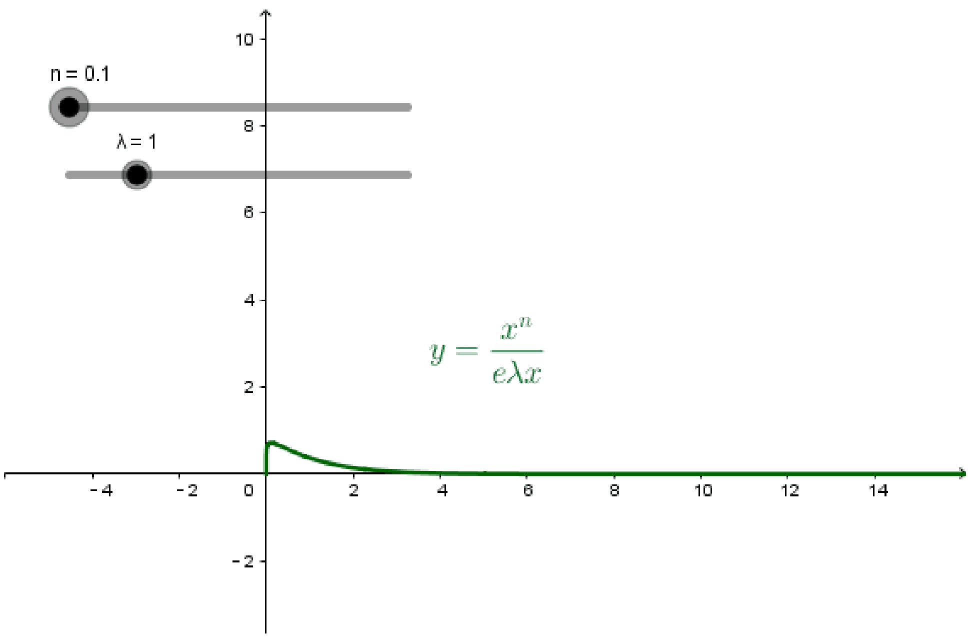
例如：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n\text{是正整数，}\lambda>0)\leftarrow\frac{\infty}{\infty}\text{型，就用洛必达法则}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^{\lambda x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}=\cdots$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^ne^{\lambda x}}$ ←分子上，当减到x^{n-n}时，就 $=x^0=1$了，所以分子是 $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$

分子上，$n!$不是无限大的，而分母上 当$x\to\infty$ 时，$e^{\lambda x}$则是无限大的，所以分子比分母，结果就 $=0$
$=0$



Example 7. 标题

例如:

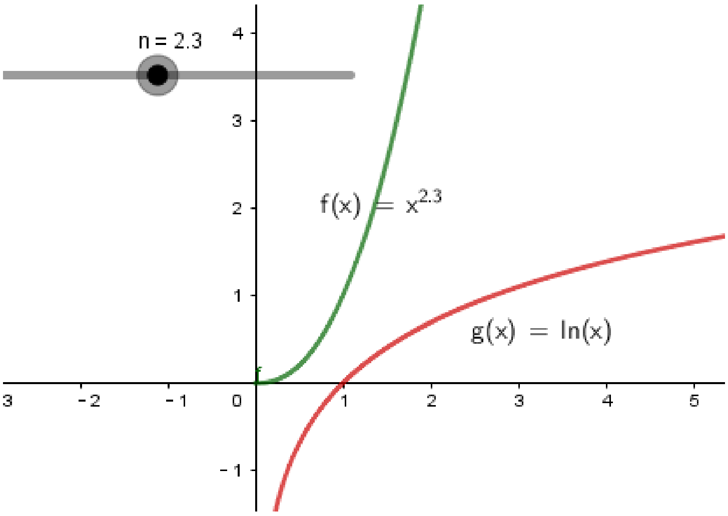
$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x \quad (n>0)$$

当$x\to 0^+$ 时，$x^n\to 0$，$\ln x\to -\infty$，所以本题是 $0\cdot\infty$型，能用洛必达法则

$$原式=\lim_{x\to 0^+}(x^{-n})^{-1}\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-n}}$$

使用洛必达法则，分子分母同时求导:

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-n})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{nx^{-n}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^n}{n}=0$$



Example 8. 标题

例如:

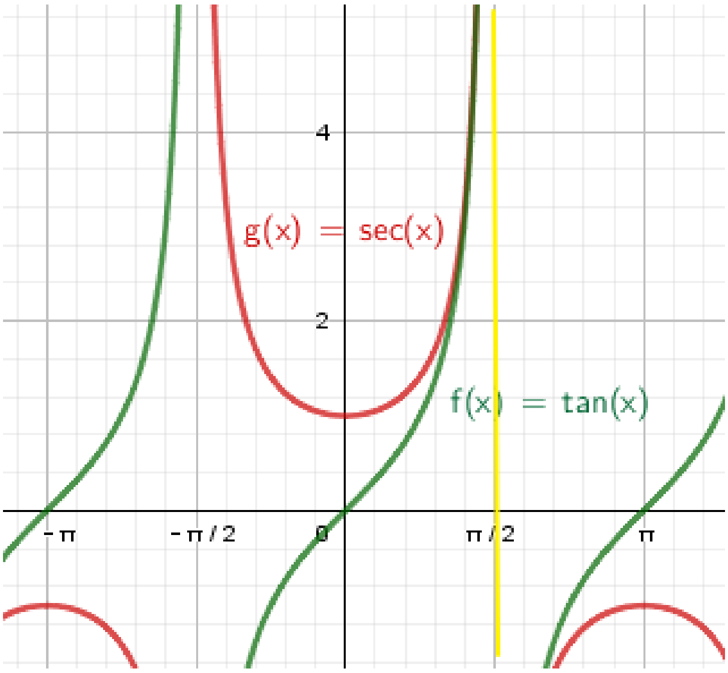
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x) \leftarrow 是\infty-\infty型，用洛必达法则$$

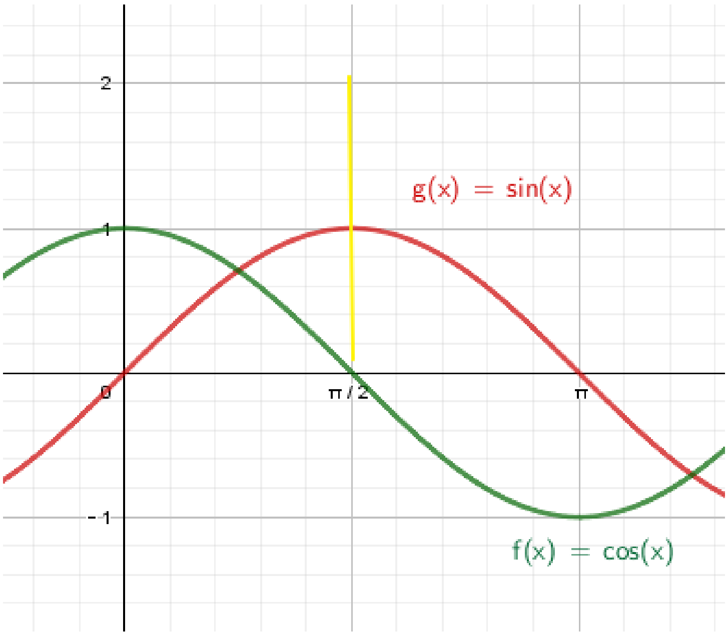
$$原式先变化成分数形式=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

使用洛必达法则:

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} \leftarrow 在x\to\frac{\pi}{2}时，分子\cos\to 0，所以分数值\to 0$$

$$=0$$





Example 9. 标题

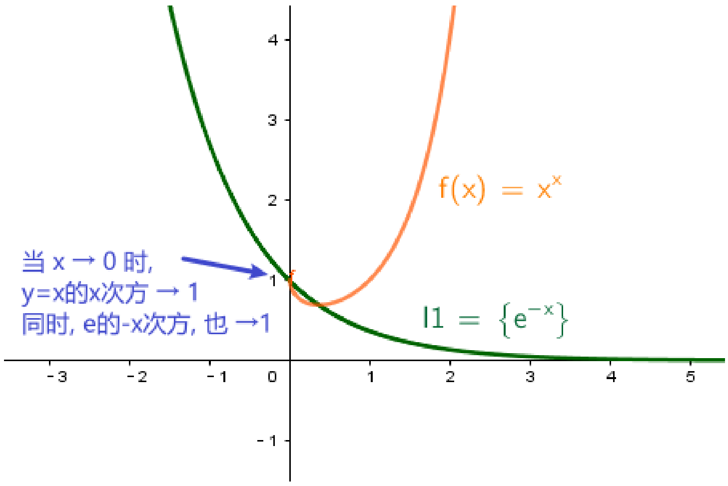
例如：
$$5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$$
$$0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} \leftarrow \text{分母上不能为}0\text{，所以无意义}$$

虽然0^0 无意义, 但我们可以求它附近的极限处的值.

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} \leftarrow \text{根据公式 } a^b = e^{b\ln a}$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} \leftarrow \text{指数的分式上，可以使用洛必达法则来做，对分子分母同时求导}$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{x^{-1}}{-1x^{-2}}} = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x^{-1}}} = \lim_{x\to0^+} e^{-x} = 1$$



2.1. 技巧1: 在乘积中, 可以用 "等价无穷小替换"

Example 10. 标题

下面的例子中, 会用到等价无穷小的替换, **但注意: 只有在乘积中, 才能用"等价无穷小替换", 如果是在加减中, 则不能用替换!**

例如:

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型，用洛必达法则}$$

首先，因为当$x\to0$时， $\sin x$可以等价于x，所以 我们用x来代替$\sin x$

$$= \lim_{x\to0} \frac{(\tan x - x)'}{(x^2 x)'} = \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型，继续用洛必达法则}$$

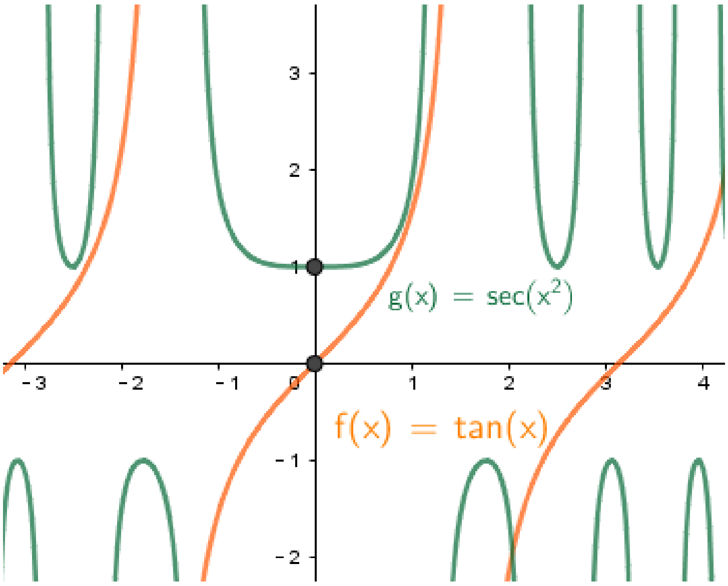
$$= \lim_{x\to0} \frac{(\sec^2 x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to0} \frac{((\sec x)^2)' \cdot \sec' x}{6x} = \lim_{x\to0} \frac{2\sec x \cdot \sec x \tan x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sec x^2 \cdot \tan x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to0} \frac{\sec x^2 \cdot \tan x}{x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to0} \sec x^2 \cdot \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} \leftarrow \text{因为根据极限公式：} \lim(f\cdot g) = \lim f \cdot \lim g$$

当$x\to0$时，$\sec x^2 \to 1$， $\frac{\tan x}{x}$也$\to1$

$$= \frac{1}{3}$$



2.2. 技巧2: 趋近于"常数"的那些项, 就向外挪出去, 而不要一并进入求导环节

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\tan x}{\cos x\sin x}$ ←当$x\to 0$时，$\cos x\to 1$，趋近于一个常数，所以$\cos x$可以先挪出去

即，把常数，和趋于常数的项，先移到外面去，而不参与“洛必达法则”中的求导过程

$$=\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan x}{\sin x}$$