目录

概率

第一部分 基本概念

1 排列 and 组合

1.1 加法原理, 乘法原理

- 一件事, 只需 "一步" 就能完成. 但这一步中有几种不同的方案可供选择, 就用 "加法" 原理.
- 一件事, 要分成 "几步骤" 才能完成. 每一步, 又有几种不同的选择方案. 就用 "乘法" 原理.

1.2 不重复排列: $\mathbf{P}_{\text{总数 n}}^{\text{选出的数量 m}} = \dfrac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$

不重复排列: 就是从 n 个不同的元素中, 取出 m 个来排列, 排过的元素不放回, 没有下次排列资格了.
则, 所有可能的排列 (Permutation) 方案, 就是:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\text{选出的数量 m}} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}}$$

例

10 人选 5 人上岸, 共有多少种选择?
$\mathrm{P}_{\text{总}10}^{\text{取}5} = \frac{\text{总!}}{(\text{总}-\text{选})!} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$

1.3 全排列: $\mathbf{P}_{\text{总数 n}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{n!}$

全排列, 就是从 n 个里面, 取出全部 n 个来排列, 即所有的元素都参与了排列.

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{n} = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

例如:
- $\mathrm{P}_2^2 = 2! = 2$
- $\mathrm{P}_1^1 = 1! = 1$

例

一套书, 共 5 本, 排在一起. 问: 自左向右, 或自右向左, 是按着 1,2,3,4,5 编号顺序的概率是?
即 $= \dfrac{\text{顺序排是 1 种情况} + \text{倒序排是 1 种情况}}{\mathrm{P}_{\text{总}5}^{\text{选}5}} = \dfrac{2}{\mathrm{P}_5^5} = \dfrac{1}{60} = 0.0166667$

- $0! = 1$. 因为:
(1) 解释 1: $m! = m(m-1)!$, 如 $10! = 10 \cdot 9!$. 所以 $1! = 1 \cdot 0!$, 即得到 $0! = 1$
(2) 解释 2: P_0^0 就是从 0 个元素里面, 取出 0 个元素来排列. 这只有一种情况: 即 "不选". 因为不存在任何元素, 所以没法选. 所以 $P_0^0 = 0! = 1$

- $5^0 = 1 \leftarrow$ 因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
- 0^0 无意义. $\leftarrow$ 因为 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 而分母不能为 0, 所以该式子无意义.

1.4 重复排列

即: 排过队的元素, 可以拿回去, 重复参加后面的排队. (但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。)
重复排列: $\underbrace{\mathrm{n} \cdot \mathrm{n} \cdot ... \cdot \mathrm{n}}_{\text{共取了 m 次的 n}} = \mathrm{n}^{\mathrm{m}}$

1.5 "送利益" 模型

将 $n_{benefit}$ 种利益, 随机投送给 N_{man} 个人 ($N_{man} \geq n_{benefit}$). 问: 每个人中, 最多只拿到 1 种利益的概率?
→ 先看样本空间: 第 1 种利益, 有 N_{man} 个人的去向可供选择; 第 2 种利益, 同样如此, ... 所以, 根据 "分步骤" 法, 全部 $n_{benefit}$ 种利益, 它们的所有去向, 就共有: $\underbrace{N_{man} \cdot N_{man} \cdot ... \cdot N_{man}}_{\text{共} n_{benefit} \text{个}} = N^n$ 个.

2 交集 ∩ , 与并集 ∪

A, B, C 是试验 E 的随机事件. 则表示法是:
- A 发生: A

下面, 加法即表示 "或" :
- A, B, C 恰有一个发生: $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$
- A, B, C 至少一个发生 (即 >=1) : A+B+C 或 $A \cup B \cup C \leftarrow$ 即 3 选 1, 还有两个发不发生, 不用管, 随意, 都行.
- A, B, C 至多一个发生 (即 <=1) : $\underbrace{A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C}_{3\text{选}1} + \underbrace{\overline{ABC}}_{3\text{选}0}$
- 恰有两个发生: $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$
- 至少两个发生 (即,>=2) : $\underbrace{AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC}_{3\text{选}2} + \underbrace{ABC}_{3\text{选}3} + \underbrace{AB + BC + AC}_{\text{3选 2, 还有一个发不发生不用管, 随意}}$

下面, 乘法即表示 "同时" :
- 只有 A 发生: $A\overline{BC}$
- A, B, C 同时发生: ABC

例

一次射击试验, 整个流程是打三枪, 用 $A_i, (i = 1, 2, 3)$ 来表示 "在第 i 次时击中了目标".
记住: 加法 (+) 代表 "或, 并 ∪"; 乘法代表 "交 ∩".
- $A_1 + A_2$: 表示第一次击中了, 或第二次击中了. 即前两次至少击中一次.
- $\overline{A_2}$: 表示第二次没击中.
- $A_1 + A_2 + A_3$: 表示仅第一次击中, 或仅第二次击中, 或仅第三次击中.
- $A_1A_2A_3$: 表示三次全中.
- $A_2\overline{A_3} = A_2 - A_3$: 表示第二次击中, 并且第三次失败.
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 + A_3}$: 表示第一次没中, 并且第三次也没中.
- $\overline{A_1} + \overline{A_3}$: 表示第一次没中, 或第三次没中.

3 频率

做 n 次试验, A 事件发生了 m 次, 我们就把 $\frac{A\text{事件发生的次数}m}{\text{共}n\text{次试验}}$ 叫做 “频率”. 记作 $\omega_n(A)$. 比如丢硬币, 丢 10 次, 丢 100 次, 丢 1000 次, 每次的 “频率” 可能都不一样, 比如结果是 $\frac{7}{10}, \frac{55}{100}, \frac{508}{1000}$. 所以这就是 “频率” 和 “概率” 的区别.
但你可以发现, 随着试验次数 n 的增大, A 事件的 “频率” 的值, 会接近与 “概率” 的值. 即: $\lim_{n\to 0}\omega_n(A) \to P$

4 频率的性质:

规范性:
- $\omega_n(\Omega) = 1 \leftarrow$ 做 n 次试验, 里面 “必然事件” 发生的频率, 是 1. 既然是 “必然事件 Ω”, 它肯定会发生, 所以频率肯定是 1.
- $\omega_n(\Phi) = 0 \leftarrow$ 做 n 次试验, 里面 “不可能事件” 发生的频率, 是 0.

可加性:
比如做 1000 次试验, 即 Ω_{1000}, 则有:

$$\omega_{1000}(A_1 + A_2) = \underbrace{\omega_{1000}(A_1)}_{1000\text{次试验中},A1\text{事件发生的频率}} + \underbrace{\omega_{1000}(A_2)}_{1000\text{次试验中},A2\text{事件发生的频率}}$$

即: “和的频率”, 就等于 “频率的和”.

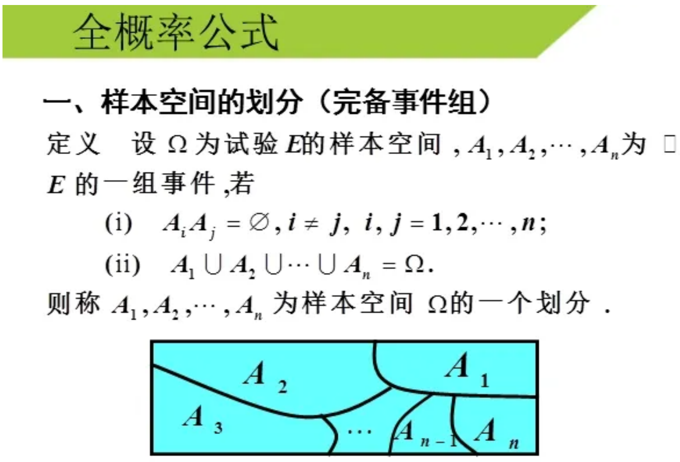
$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\omega_n}_{\text{做}n\text{次试验}}\underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_m)}_{\text{里面有}m\text{个事件}}}_{\text{做}n\text{次试验, 里面有}m\text{个事件发生了的频率}} = \omega_n(A_1) + \omega_n(A_2) + ... + \omega_n(A_m)}$$

5 公理化

5.1 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

5.2 对于 “完备事件组” 中的所有事件来说: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(\Omega) = 1$

完备事件组 collectively exhaustive events 就是: 如果事件 B1, B2, B3, ... Bn 满足:
1. 它们两两互不相容 (即两两的交集 = 空集),
2. 其 “和” 为全集 Ω.
换言之, 若 n 个事件两两互斥, 且这 n 个事件的 “并” 是 Ω，则称这 n 个事件为 “完备事件组”.



例

有20件衣服，质量分3等，其中一等的6件，二等的10件，三等的4件.
问："任取3件，至少2件是同质量"的概率？

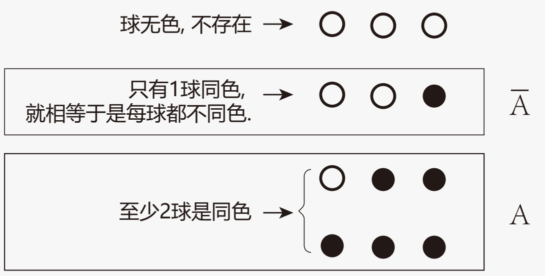
这个问题其实可转化为有色球问题：

20球,三色,每色数量分别是6, 10, 4球. 问3取2球，至少2球是同色的概率.

$$\text{即 } P(\underbrace{\text{同色} \geq 2\text{球}}_{\text{事件}A}) = 1 - P(\underbrace{3\text{球都不同色}}_{\text{事件}\overline{A}})$$

$$= 1 - \frac{\overbrace{C_6^1}^{\text{色1中的共6球取1个}} \cdot \overbrace{C_{10}^1}^{\text{色2中的共10球取1个}} \cdot \overbrace{C_4^1}^{\text{色3中的共4球取1个}}}{\underbrace{C_{20}^3}_{\text{总20球取3}}}$$

$$= \frac{15}{19} = 0.789474$$



例

n个人中，至少2人生日相同的概率是？

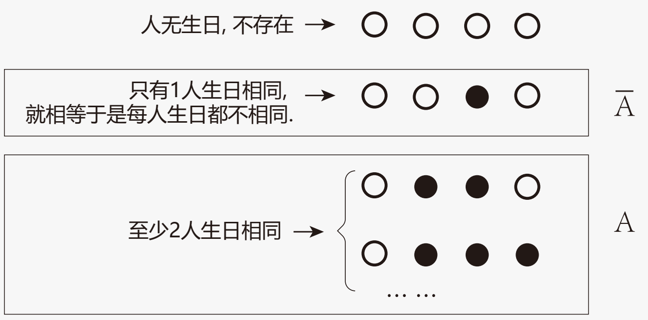
$$P(\underbrace{\text{至少2人生日相同}}_{\text{事件}A}) = 1 - P\ (\underbrace{\text{只有1人生日相同}}_{\text{即n个人每人生日都不相同. 即事件}\overline{A}})$$

$$= 1 - \frac{\text{n个人生日都不相同}}{\text{n个人，随便选生日，无所谓充不重复}}$$

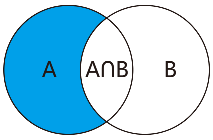
$$= 1 - \frac{\overbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365-n+1}^1}^{\text{共n人的}}}{\underbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365}^1}_{\text{共n人的}}}$$

比如，若总人数$n = 55$人，则：

$$P(A) = 1 - \frac{\overbrace{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-54)}^{\text{共55个数}}}{(C_{365}^1)^{55}} = 0.99$$



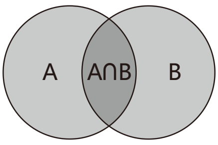
5.3 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$



P(A-B) = P(A) - P(AB)

5.4 若 A 包含着 B, 则有: $P(A-B)=P(A)-P(B)$, 且 $P(A)>=P(B)$

5.5 加法公式: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



P(A+B) = P(A) +P(B)- 它们的交集部分 P(AB)

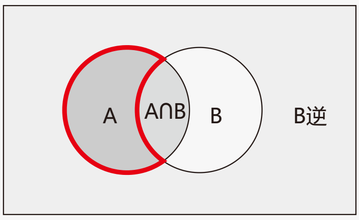
例

A 事件的概率是 0.4, 即 P(A)=0.4;
P(B)=0.3;
且 P(A+B)=0.6, ← 说明 A 与 B 有交集部分存在. 否则, 如果 A 与 B 是不相容的话, 它们和的概率, 应该是 0.4+0.3=0.7.
所以它们的交集 P(AB) 就是 =0.1 :

$$\underbrace{P(A+B)}_{0.6}=\underbrace{P(A)}_{0.4}-\underbrace{P(B)}_{0.3}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}$$

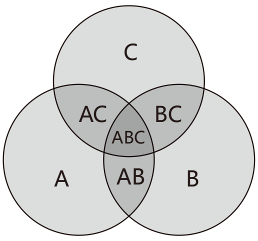
求 $P\left(A\overline{B}\right)$, 即求 $A\cap B$逆 的概率:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A-B)=\underbrace{P(A)}_{=0.4}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}=0.3$$



A∩B逆：就是红色面积的那块

5.6 加法公式: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$



P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)
−P(AB)−P(AC)−P(BC)
+P(ABC)

说明:

$$P(A+B+C)$$
$$=\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分, 被加了 3 次}}\underbrace{-P(AB)-P(AC)-P(BC)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分, 又减了 3 次}}+\underbrace{P(ABC)}_{\text{所以最后, 我们还要把镂空的}ABC\text{交集部分, 加上一份上去}}$$

例

已知 $\begin{cases} \mathrm{P(A)=P(B)=P(C)}=\frac{1}{4} \\ \mathrm{P(AB)}=0 \\ \mathrm{P(AC)=P(BC)}=\frac{1}{16} \end{cases}$ ，求 $\begin{cases} 1.\ \mathrm{A,B,C}\text{ 至少一个发生的概率} \\ 2.\ \mathrm{A,B,C}\text{ 都不发生的概率} \end{cases}$

我们先来算 $\mathrm{P(ABC)}$，因为下面会用到.

因为 $\mathrm{ABC}\subset\mathrm{AB}$，所以 $\mathrm{P(ABC)}\le\underbrace{\mathrm{P(AB)}}_{=0}$，因此 $\mathrm{P(ABC)}=0$

→ 至少一个发生，就是用“并∪”，用加法:

所以 $\mathrm{P(A+B+C)}=\underbrace{\mathrm{P(A)}}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{\mathrm{P(B)}}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{\mathrm{P(C)}}_{=\frac{1}{4}}-\underbrace{\mathrm{P(AB)}}_{=0}-\underbrace{\mathrm{P(AC)}}_{=\frac{1}{16}}-\underbrace{\mathrm{P(BC)}}_{=\frac{1}{16}}+\underbrace{\mathrm{P(ABC)}}_{=0}$

$=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}=0.625$

→ 都不发生，即 $\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{C}}=1-\underbrace{\mathrm{P(A+B+C)}}_{\text{任意一个发生}}=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}=0.375$

例

有两台机床，$\begin{cases} \text{第}1\text{台：不需要照看的概率是}0.9\text{，则需要照看它的概率就是}0.1 \\ \text{第}2\text{台：不需要照看的概率是}0.8\text{，则需要照看它的概率就是}0.2 \\ \text{两台都需要照看的概率，是}0.02 \end{cases}$

问：至少1台需要照看的概率是?

思路1：P(至少1台要照看) = 1 − P(都不需要照看)

$=1-(0.9\cdot0.8)=0.28$

思路2：至少1台需要照看，就是要照看1台或2台呗，“或”就是用加法，并集

$=\mathrm{P(A_1+A_2)}=\underbrace{\mathrm{P(A_1)}}_{=0.1}+\underbrace{\mathrm{P(A_2)}}_{=0.2}-\underbrace{\mathrm{P(A_1A_2)}}_{=0.02}=0.28$

6 古典概型: $\mathrm{P(A)}=\frac{\text{A 中包含的“基本事件”有多少个}}{\text{S 中“基本事件”的总数}}$

满足这些条件的, 就属于 “古典概率 classical models of probability 模型”:
- 样本点是有限的
- 所有样本点出现的可能性, 是相同的. 即 “等可能性”.

古典概型模型:
事件 $\mathrm{A}=\{\mathrm{e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_k}}\}$ 发生的概率为:
$\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}=\frac{\text{A 中包含的“基本事件”有多少个}}{\text{S 中“基本事件”的总数}}$

古典概率模型的性质:
- $0<=P(A)<=1$
- $P(\Omega)=1,\quad P(\Phi)=0$
- 有限可加: $A_1,A_2,...A_n$ 是互不相容的. 即 $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_n)$

古典概率模型:
- 其优点是: 可以直接套公式来算.
- 但其缺点是:
(1) 其结果必须是 “有限个” 的结果 (如, 掷骰子, 结果就是 6 个基本事件, 而不是无限个事件.)
(2) 其结果, 必须是 “等可能性”.