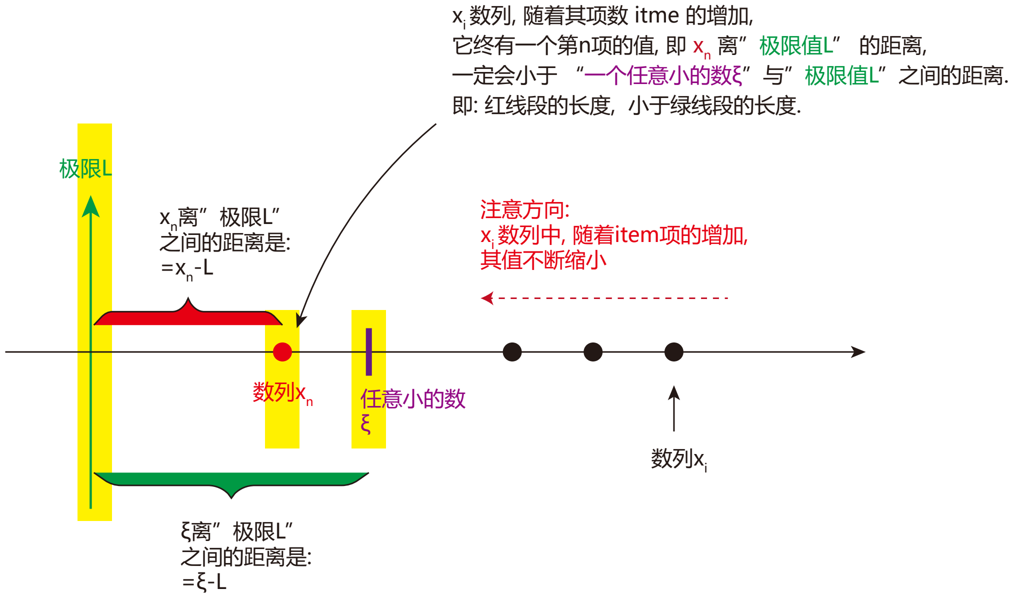
目录

函数

第一部分 什么是极限?

1 数列的极限



即: 给定 (1)任意一个极小值ϵ, (2)一个确定的极限值L, (3))一个数列 x_i(里面的元素值不断变小). $\rightarrow$ 则随着数列 x_i 中item的增长, 必定会有一个 item项(比如第n项), 该"item项的值x_n"与"极限值L"的距离, 必定会小于 "极小值ϵ"与"极限值L"之间的距离 (这个距离其实就是ϵ本身).

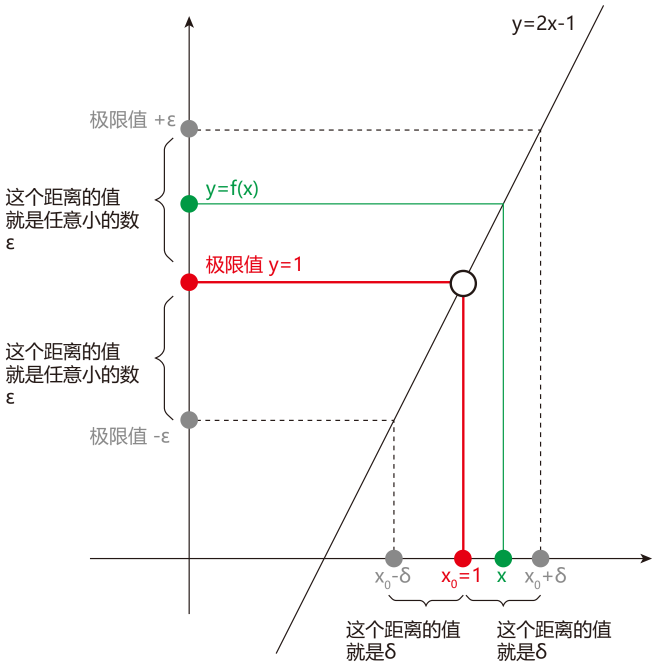
例

有数列 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 的极限是0. 问: 该数列取到哪一项item 时, 它与"极限0"之间的距离, 就小于"任意小的数 ε "了呢?
即, 问的就是: 该数列与 0 之间的距离, 要小于 ε .

$$\left| \text{数列} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - \text{极限值0} \right| < \varepsilon$$
$$\left| \frac{1}{(n+1)^2} \right| < \varepsilon$$
$$(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$n+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$$

为了保证n 为正数(而非有小数点), n就取 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right) + 1$

2 函数的极限



第二部分 极限运算法则

$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$

$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$

$\lim(\frac{x}{y}) = \frac{\lim x}{\lim y}$

$\lim(\text{常数}C \cdot y) = \text{常数}C \cdot \lim y$

$\lim y^n = (\lim y)^n$

$\lim y^{\frac{1}{n}} = (\lim y)^{\frac{1}{n}}$

$\lim(\text{常数}C) = \text{常数}C$

$\lim_{x\to a}(f(x)) = f(a)$

$\lim_{x\to a}(\text{常数}C) = C$

$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

$\lim_{x\to a}(\text{常数}C \cdot f(x)) = \text{常数}C \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$

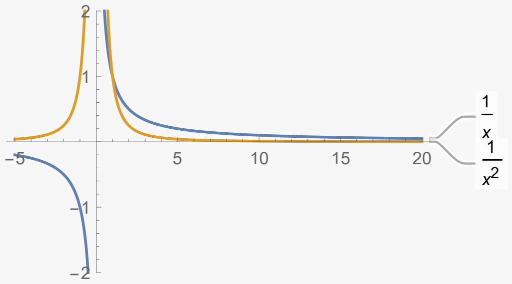
第三部分　极限的规律, 和求法(方法论)

3　若 $f(x)>g(x)$, 则 $\lim f(x)\geq \lim g(x) \leftarrow$ 注意: 是大于等于 $\geq$!

这个定理也就是说: 虽然一个函数, 可能大于另一个函数, 但它们的极限, 是有可能相等的.

例

虽然 $\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}$, 但它们的极限(在 $x\to\infty$ 时), 却是相等的. 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$



4　分子上"项的最高次数" >分母上"项的最高次数", 则该分式的极限= ∞. 反之, 则极限=0

一个函数若是"分数" $\frac{a\cdot x^m}{b\cdot x^n}$, 则其极限, 只看它分子分母上的"最高次数"的情况:

4.1　对于 $\frac{a\cdot x^m}{b\cdot x^n}$, 若 m >n, 即: 分子的值 >分母的值. 则函数极限值 $=\infty$

4.2　对于 $\frac{a\cdot x^m}{b\cdot x^n}$, 若 m=n, 则函数极限值 $=\frac{a}{b}$

例

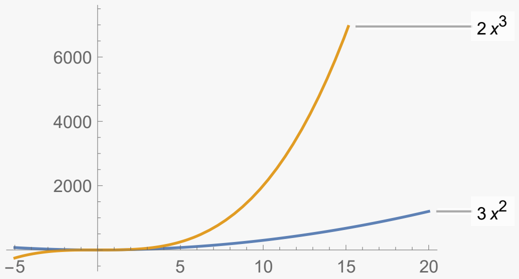
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3+4x^2+2}{x^3}}{\frac{7x^3+5x^2-3}{x^3}}}_{\text{把分子分母, 同时除以最高项的}x^3}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}}_{\text{把}x\to\infty\text{代入每一项中}}=\frac{3+0-0}{7-0+0}=\frac{3}{7}$$

规律: 当满足① $x\to\infty$, ②分子分母的最高次的次数相同, 比如本例最高都是 x^3 次, 则: 极限值, 就取分子分母最高次的系数之比. 如本例就取 $\frac{3x^3}{7x^3}$ 的系数, 即 3/7 , 这个就是极限值了.

4.3 对于 $\frac{a\cdot x^m}{b\cdot x^n}$, 若 n >m, 即: 分子的值 <分母的值. 则函数极限值=0

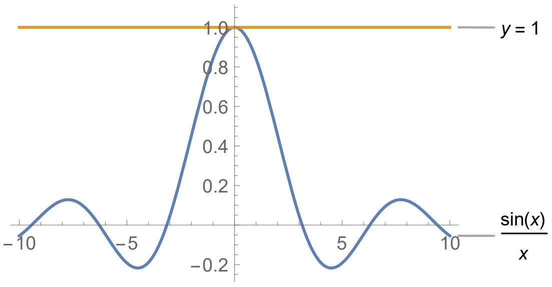
例

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-2x-1}{x^3}}{\frac{2x^3-x^2+5}{x^3}}}_{\text{把分子分母, 同时除以最高项的}x^3}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}}_{\text{把}x\to\infty\text{代入每一项中}}=\frac{0+0-0}{2-0+0}=0$$



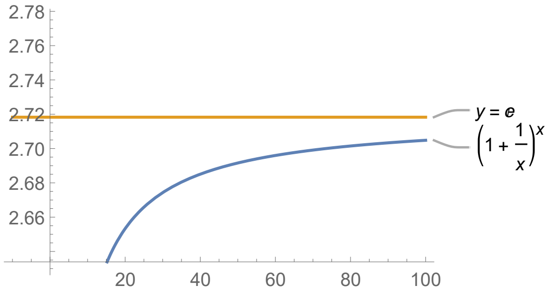
规律: 当满足① $x\to\infty$, ②分母的最高次的次数, 要比分子的最高次次数还大时, 比如本例"分母的最高次次数"是 x^3, 而"分子的最高次次数"只有 x^2, 则: 极限就是0.

5 重要极限: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$



其实, 它的骨架本质, 是这种形式的: $\lim_{\square\to 0}\frac{sin\square}{\square}$

6 重要极限: $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$



这个公式其实就是"复利"的终值计算公式: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\approx 2.71828$

注意: 该公式的本质是: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e$. ← 即两个"方框□"处的数字必须完全相同!

注意: 使用该极限公式时, 中间必须是加号+. 如果题目给出的不是加号, 你也要把它先变换成加号.

即:

这里必须是加号

这个数值必须是1

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

这两个数字必须完全相同

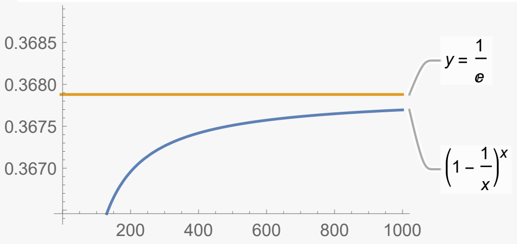
例

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^x \leftarrow \text{先把中间变成加号,才能套用公式}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} \leftarrow \text{指数上的x,也变成 } -(-x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} \leftarrow \text{指数上，根据公式，能变成 } \lim(a^n) = (\lim a)^n$$

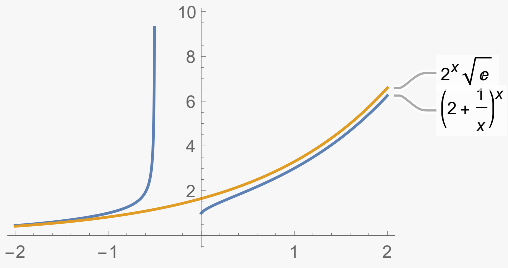
$$= \underbrace{\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}}_{\text{里面这块，就能套用公式 } \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} = e^{-1}$$



例

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^x \leftarrow \text{这里的2, 必须变成1, 才能套用公式}$$

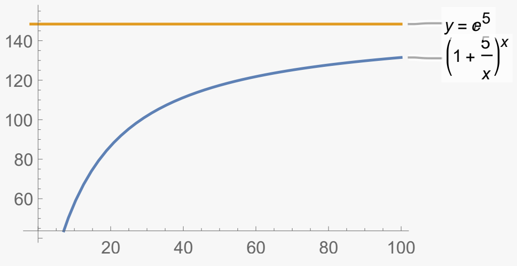
$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)^x = 2^x \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}} = 2^x \underbrace{\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}_{\text{这块的极限值, 就是e}} = 2^x e^{\frac{1}{2}}$$



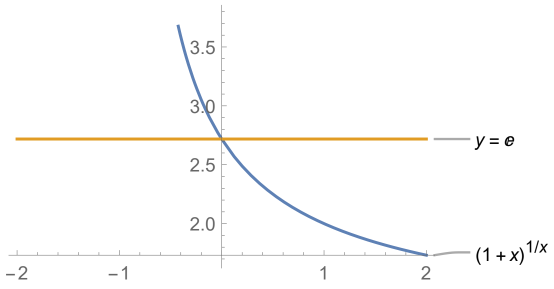
例

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} \leftarrow \text{这里分子上的5, 必须变成1, 才能套用公式}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 5}=\underbrace{\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5}}_{\text{这块的极限值, 就是e}}=e^{5}$$



7 重要极限: $\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$



8 求极限时, 遇到 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种时, 可使用"洛必达法则" :

$$\boxed{\lim_{x\text{ß}a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}}$$

洛必达法则 L'Hospital's rule , 主要用于求极限, 尤其是 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 这种的.

两个无穷小之比 $\frac{0}{0}$, 或两个无穷大之比 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限可能存在，也可能不存在。因此，求这类极限时, 往往需要适当的变形，转化成可利用"极限运算法则"或"重要极限的形式", 进行计算. 洛必达法则, 便是应用于这类极限计算的通用方法.

洛必达法则的内容:
有两个函数 f(x) 和 F(x), 若它们满足这些条件:
(1) 当 $x\to a$ 时, 有 f(x) 和 F(x)的值, 都趋向于0.
(2) 在a的"去心邻域"内, f'(x) 和 F'(x) , 即它们的导数均存在, 且 F'(x) $\neq 0$
(3) 当$x\to a$ 时, 有 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 的值存在, 或其极限值 = 无穷大 (±∞皆可)

则, 而我们就有这个结论:
当$x\to a$ 时, 这两个函数的比值, 即 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ =存在, 或=±∞

总结就是:

8 求极限时, 遇到 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 这种时, 可使用 "洛必达法则"： $\boxed{\mathrm{LIM}_{X\text{ß}A}\frac{F(X)}{F(X)}=\mathrm{LIM}_{X\to A}\frac{F'(X)}{F'(X)}}$

- 如果"这两个函数的导数之比"的极限值存在, 则它们的"函数之比"的极限, 也存在, 且其值就等于前者. 即: 若 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在, 则 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$
- 如果 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 这个极限值 $=\infty$, 则 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也$=\infty$
- 如果 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 这个极限值不存在, 则本"洛必达法则"方法无效, 就要使用其他方法来求该极限了.

例

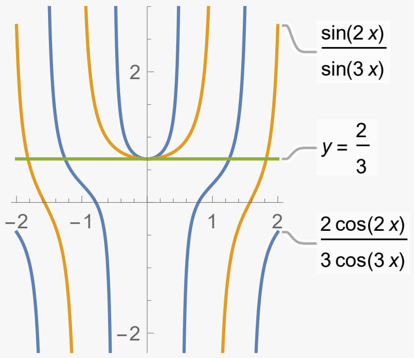
求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ ax}{\sin\ bx}\quad (b\neq 0)$$

先看"它们的导数之比"的极限, 存不存在?

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos ax)\cdot a}{(\cos bx)\cdot b}=\frac{a}{b}$$

其"导数之比"的极限存在, 所以"原函数"之比的极限也存在, 即当 $x\to 0$时, 就$=\frac{a}{b}$



例

求 $\lim_{n\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ ← 先把x=1代入进去,发现满足$\frac{0}{0}$型,能用"洛必达法则". 那么我们就先来求"这两个函数的导数之比"的极限:

$=\ \lim_{n\to 1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}\ =\ \lim_{n\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$ ← 再把 x=1代入进去,发现满足$\frac{0}{0}$型, 继续能用"洛必达法则"

$=\lim_{n\to 1}\frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}=\lim_{n\to 1}\frac{6x}{6x-2}$ ← 再把 x=1代入进去,发现=$\frac{6}{4}$, 不满足$\frac{0}{0}$型, 或$\frac{\infty}{\infty}$型了, 就不能继续用"洛必达法则"了.

所以,本题的最终结果,即 $\lim_{n\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

即:

(1) 如果你代入x的值后, 发现 "分子比分母"的极限, 是 $\frac{0}{0}$ 或$\frac{\infty}{\infty}$ 这种不定式极限 (这两种称为"基本型"), 就适合于用"洛必达法则"来求解. 并且, 其他变种, 如: $0\cdot\infty$型, $\infty-\infty$型, 1^∞型, ∞^0型, 0^0型的极限, 可以通过相应的变换, 转换成上述两种基本的不定式形式, 来求解.

(2) 不过在使用"洛必达法则"之前, 还需要验证一下: 分子分母在限定的区域内, 是否分别"可导". 满足的话, 才能用"洛必达法则".

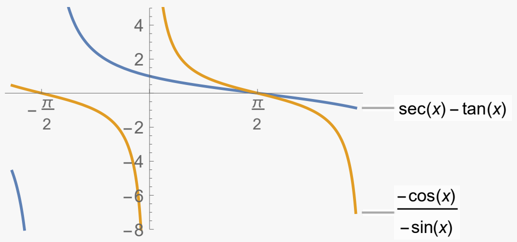
(3) 使用了一次"洛必达法则"后, 如果极限依然不确定是否存在，即结果仍然为"未定式"，就再在验证前面所说的两个条件的基础上, 继续使用"洛必达法则"来做. 即, 若条件符合， "洛必达法则"可连续多次使用，直到求出极限为止.

例

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{}{x^3} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型,用洛必达法则} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型,继续用洛必达法则} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1} \leftarrow \text{根据极限公式,有} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

例

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) \leftarrow \infty - \infty\text{型,可用洛必达法则} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) \leftarrow \text{原式先变化成分式的形式} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} \leftarrow \text{使用洛必达法则} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} \leftarrow \text{在}x\to\frac{\pi}{2}\text{时,分子} \cos \to 0\text{, 所以整个分数值} \to 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$



例

求 $\lim_{x\to 0^+} x^x$

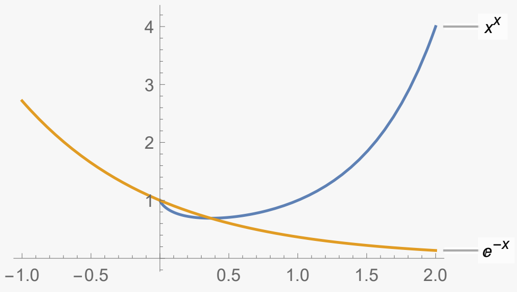
如果把 x=0 代入的话, 会得到 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 因为分母不能为0,所以该分式无意义.

虽然 0^0 无意义,但我们可以求它附近的极限处的值.

根据公式: $\boxed{e^{b\ln a} = e^{b\log_e a} = e^{\overbrace{\log_e a^b}^{\text{即 } e^? = a^b}} = a^b}$, 即 $e^{b\ln a} = a^b$

我们就有:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} \leftarrow \text{指数上的分式, 可以用洛必达法则做,对分子分母同时求导} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x^{-1}}{-1x^{-2}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^{-1}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1
\end{aligned}
$$



8.1 技巧1: 在乘积中, 可以用 “等价无穷小替换”

下面的例子中, 会用到等价无穷小的替换, 但注意: 只有在“乘积”中, 才能用“等价无穷小替换”, 如果是在加减中, 则不能用替换!

例

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\underbrace{\sin x}_{\text{可用}x\text{代替}}} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型,用洛必达法则}$$

首先,因为当$x\to 0$时, $\sin x$在此处的y值,等价于x在此处的y值,所以我们可以用x来代替 $\sin x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x^3)'} \leftarrow \text{用洛必达法则}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \leftarrow \frac{0}{0}\text{型,继续用洛必达法则}$$

$$= \ldots$$

8.2 技巧2: 趋近于“常数”的那些项, 就向外挪出去, 而不要一并进入求导环节

例

比如, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \tan x}{\cos x \sin x}$

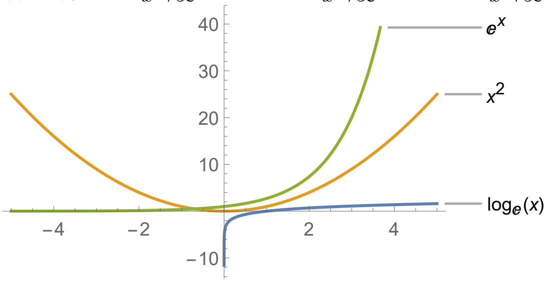
当 $x\to 0$时, $\cos x \to 1$, 即趋向于一个常数. 所以 cos x 就可以挪出去, 而不参与“洛必达法则”中的求导过程.

即原式$= \dfrac{1}{\cos x}\cdot \lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \tan x}{\sin x}$

第四部分 无穷大 & 无穷小

9 无穷大

有规律: $\lim_{x\to\infty}\ln x < \lim_{x\to\infty} x^n < \lim_{x\to\infty} e^x$



9.1 $\infty + \infty = ?$ 结果未知

9.2 $\infty - \infty = ?$ 结果未知

9.3 $\infty \cdot \infty = \infty$

9.4 $\infty / \infty = ?$ 结果未知

10 无穷小

无穷小: 就是“以数0 为极限”的变量。称一个函数是无穷小量，一定要说明“自变量x”的变化趋势.

10.1 有限个“无穷小”的和, 是无穷小.

10.2 有限个“无穷小”的乘积, 依然是无穷小.

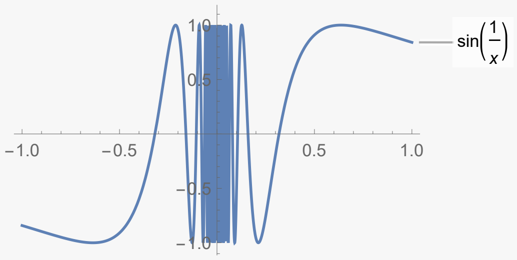
10.3 常数C $\times$ 无穷小 $=$ 无穷小

10.4 有界函数$\times$ 无穷小 $=$ 无穷小

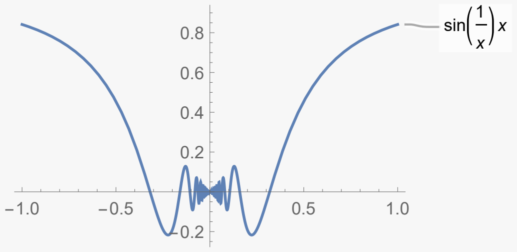
有界函数, 就是说该函数的”值域”, 是在有限区间中的. 如 sin, cos三角函数, 就是有界的.

例

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\cdot x\right) = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\sin\frac{1}{x}\right)}_{\text{有界函数}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}(x)}_{\text{无穷小}} = 0$$



乘法就意味着: 随着 $x \to 0$, 它把“有界函数”的y值, 越来越压缩到趋向于0. 如下图的中间部分趋势:



10.5 无穷小$\times$ 无穷大 $=$? 结果未知

结果未知. 即可能是无穷小, 也可能是0, 也可能是无穷大.

11 无穷小的比较 : $\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}$

$\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}$ 的比值, 未必是个无穷小, 要看分母和分子,谁缩小地更快.
两个数都趋向于无穷小 , 但两者趋向于0 的速度有快有慢, 所以它们就能进行比较了.

11.1 高阶无穷小 & 低阶无穷小

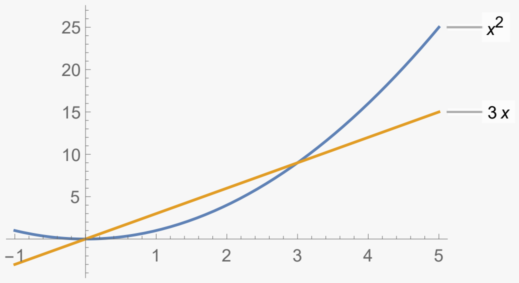
对于两个无穷小量 α 和 β，如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, 我们就把 α, 叫做 “比 β 高阶的无穷小量”. 简称 “α 是 β 的高阶无穷小 (infinitesimal of higher order)”. 意思是 $\alpha \to 0$ 的速度, 远远要比 $\beta \to 0$ 的速度更快. 记作: $\alpha = o(\beta) \leftarrow$ 中间的 o 是希腊字母 omicron.
“高阶”的意思, 就是说“更快速”, 即它趋近于0 的速度比别人更快速, 更迅速, 更光速.

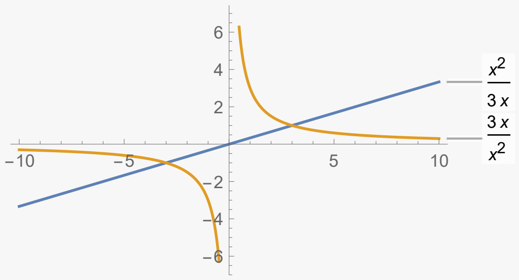
反过来看, 也就是: β 是“比 α 低阶的无穷小量”, 简称:β 是 α 的低阶无穷小 (Low order infinitesimal). 即 $\beta \to 0$ 的速度, 要比 $\alpha \to 0$ 的速度远远更慢.
即, 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就称 β 是比 α 低阶的无穷小.

例

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{3x} = \dfrac{\text{兔子(更快的趋近于0终点)}}{\text{乌龟(更慢的趋近于0终点)}} = 0 \quad \leftarrow$ 即分子 ¡ 分母. 即 x^2 是比 3x “高阶”的无穷小.
高阶, 即值它趋向于0 的效率 (速度) 更高, 更快.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{3x}{x^2} = \dfrac{\text{乌龟(更慢的趋近于0终点)}}{\text{兔子(更快的趋近于0终点)}} = \infty \quad \leftarrow$ 即分子 ¿ 分母. 即 3x 是比 x^2 “低阶”的无穷小.
低阶, 即值它趋向于0 的效率 (速度) 更低, 更慢.





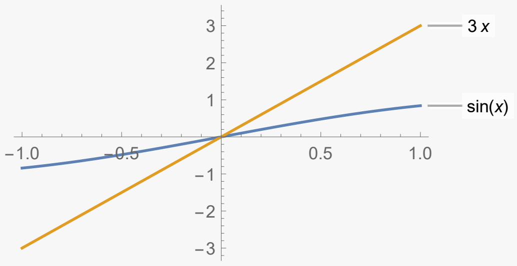
11.2 同阶无穷小：$lim\dfrac{b}{a} = 常数C, \quad C \neq 0$

若 $\lim \dfrac{b}{a} = 常数C, \quad C \neq 0$, 就称: b 和 a 为“同阶无穷小” Infinitesimal of the same order. 意思是两者趋近于0的速度相仿。

例

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$$

← 因为分子分母的 x的指数次数相同.



11.3 等价无穷小 → $lim\frac{b}{a}=1$

若 $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1$, 就称: β 与 α 是"等价无穷小".记为 $\beta\sim\alpha$. 等价, 就可以"相互替换"来使用.
所以我们做题的"方法论"就是: 把复杂的东西, 用它等价的简单东西, 来替换掉. 即, "以简替繁".

注意: 两个函数是"等价无穷小"关系, 因而可以互相替换使用, 这种用法是有前提条件的:
(1) 只有在 $x\to 0$ 的时候, 才能用"等价无穷小"的另一种函数来替换.
(2) 只有在求的是两个"等价无穷小"的"比值" 的时候, 才能用"等价物"来替换. 即如果求的是两个"等价无穷小"的相加, 相减, 相乘, 就都不能用"等价物"来替换.

例

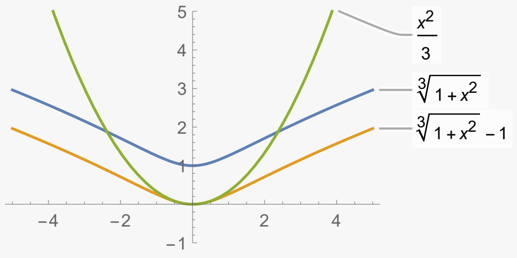
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}\ \leftarrow\ \text{因为在}x\to 0\text{时, }\sin x\sim x\text{, 分子上, 我们就用 x 来代替 }\sin x$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\,(x^2+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}$$

分子或分母, 可拆成若干因子的乘积时, 就可对其中的一个或几个因子, 做等价替换.
注意: 必须是"乘积"才行, 如果只能拆成若干因子的"相加减", 则不能用"等价替换"的方法.

11.4 在 $x\to 0$时, $(1+x)^{\frac{1}{n}}-1$ 等价于 $\frac{1}{n}x$

例

在$x\to 0$时, $\left[(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\right]\sim\left[\frac{1}{3}x^2\right]$



11.5 k阶无穷小

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} =$ 常数$C, \quad C \neq 0, \quad k > 0$, 就称: β 是关于α 的“k阶无穷小”.