目录

文件名

第一部分　几何概型

1　几何概型 geometric models of probability

几何概型 geometric models of probability, 即这类概率问题, 能够转换成用“几何问题”来求解.

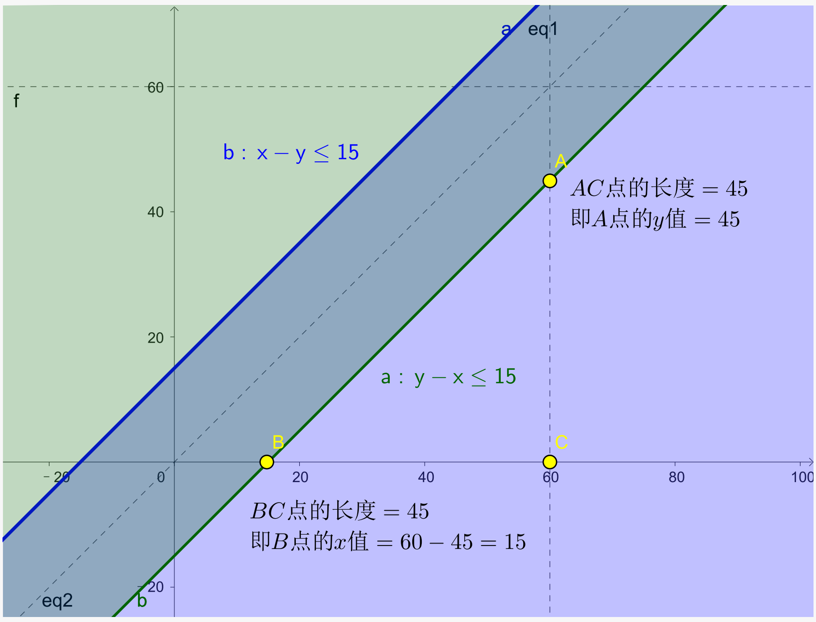
例

有甲乙两人, 相约在 6-7点见面 (其实这个具体的时间点也是个障眼法, 只要在1个小时的区间就行). 先到者, 最多等对方15分钟, 然后就离开了.
甲乙两人, 在这1小时内的任意时刻, 都可能到达.
问, 他们能相见的概率是多少?

我们令
- 事件A : 表示两人见到了面
- x : 表示甲到达的时间点
- y : 表示乙到达的时间点

他们要能见到面, 即 $|y-x| \le 15$分钟. 那么这就有两种可能性:
- 甲先到. 即 $x \le y$ (甲来到的时间点x, 比乙来到的时间点y 要小 (早)), 即 $y-x \le 15$
- 乙先到. 即 $y \le x$, 即 $x-y \le 15$

这两组不等式, 能用函数图形来表示出来, 如下图. x和y轴上的60, 分别代表两人的1小时区间(60分钟) . 中间的交集区域, 就是两人可以见到面的时间段.



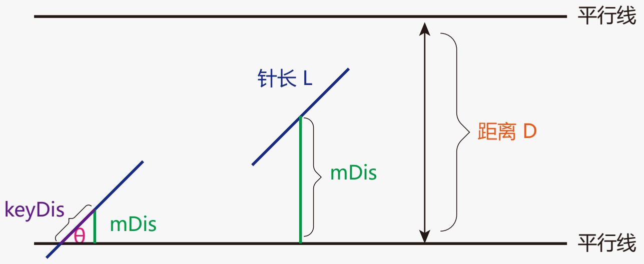
显然, 这就是求几何面积的问题.

$$\text{即: } \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) = \frac{60\cdot 60 - \overbrace{\frac{45\cdot 45}{2}}^{\text{上面的“边长为45”的三角形的面积}} - \overbrace{\frac{45\cdot 45}{2}}^{\text{下面的“边长为45”的三角形的面积}}}{\underbrace{60\cdot 60}_{\text{即“边长为60分钟”的矩形}}} = 0.4375$$

例

(法国)布丰(1707-1788) 投针 Buffon's needle problem.

说: 有两条平行的直线, 相聚为 D(distance), 距离单位不重要. 你哪一个针 (长度为 L (length), $L < D$), 随机地投向针. 问: 针与那两条平行直线相交的概率是?



思路: 针投上去后的位置状态, 是由两个参数决定的:

(1) 针的中点, 距离“最近那根直线”的最短距离. ← 该距离用变量 mDis (midpoint distance)来表示.

(2) 针倾斜的位置, 与直线的夹角. ← 我们用变量 θ 来表示.

用上面这两个变量, 我们能分别作为 x轴(表示 θ 变量) 和 y轴(表示 mDis变量), 来画出函数图像.

针投出后, 所有可能的状态, 其全集就是:

$$\Omega = \left\{ (\theta,\ \mathrm{mDis}) \mid 0 \le \underbrace{\theta}_{\text{夹角}} \le \pi;\ \ 0 \le \underbrace{\underbrace{\mathrm{mDis}}_{\text{针的一半长度}} \le \underbrace{\frac{\mathrm{D}}{2}}_{\text{两条平行线间距的一半}}}_{\text{因为针的长度L，是小于两条平行线的间距D的}} \right\}$$

那么, 什么状态下, “针”就与“直线”相交了呢? – 当“从针的中点(沿着针的身体走)到直线”的距离 (下面用变量 keyDis (key distance) 来表示这个距离) ≤ 针的一半长度时. 它们就相交了. 否则, 它们就不想交.

即, 就有:

→ 因为 θ角度有sin值： $\sin\theta = \dfrac{\text{mDis}}{\text{keyDis}}$,

则有： $\text{keyDis} = \dfrac{\text{mDis}}{\sin\theta}$，←当该值 $\le \dfrac{\text{针长L}}{2}$时，针与直线相交.

→ 因为y轴是代表 mDis变量，所以我们要写出 mDis 曲线的函数值：

根据 上面的 $\text{keyDis} = \dfrac{\text{mDis}}{\sin\theta} \le \dfrac{\text{针长L}}{2}$

就有： $\text{mDis} \le \dfrac{\text{针长L}}{2} \cdot \sin\theta$

即： $\text{mDis} \le \dfrac{1}{2}\text{针长L} \cdot \sin\theta$ ←这个就是$y = \text{mDis}$曲线的函数表达式内容了.
既然这里是 小于等于符号，则mDis的值，
就是$\dfrac{1}{2}\text{针长L} \cdot \sin\theta$这条曲线下方的面积了，

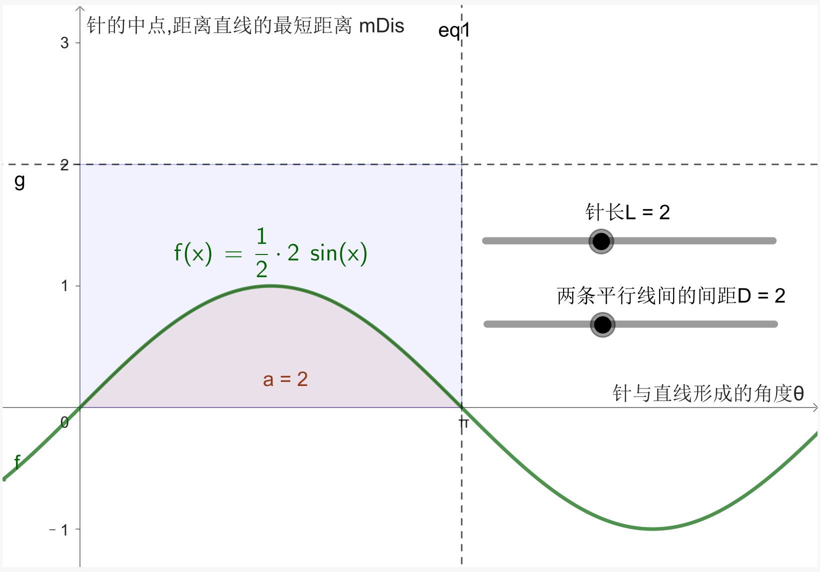
即 $\text{mDis} = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\frac{1}{2}\text{针长L} \cdot \sin\theta}^{\text{即 mDis 函数曲线}} \right) d\theta$

→ 所以，相交的概率

$$= \frac{\text{“针”与“直线”相交时的 mDis 与 } \theta \text{ 的所有取值范围}}{\text{针投出后的 所有可能的 mDis 与 } \theta \text{ 的取值范围}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{常数}}\text{针长L} \cdot \sin\theta}^{\text{即 mDis 函数曲线}} \right) d\theta}{\underbrace{\pi}_{\substack{\text{x轴上代表的}\\ \text{“θ角”的取值范围}}} \cdot \underbrace{\frac{D}{2}}_{\substack{\text{y轴上代表的}\\ \text{“针的一半长度mDis”}\\ \text{的取值范围}}}}$$ ←分子上积分的下限是0，上限是π，
这个也就是 θ角度的所有区间$(0-\pi)$

$$= \frac{\frac{1}{2}\text{针长L} \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}}{\frac{1}{2}\pi D} = \frac{\text{针长L} \cdot \overbrace{\left[-\cos\pi - (-\cos 0)\right]}^{=2}}{\pi D} = \frac{\overbrace{2\text{针长L}}^{\text{即函数图中红色区域的面积}}}{\underbrace{\pi D}_{\text{即函数图中蓝色区域的面积}}}$$



2 “古典概率模型”和“几何概率模型”的区别

- 古典概率模型：

具有 “有限可加性” (finite additivity)：是指“有限个”两两互不相容事件的“和事件”的概率，等于“每个事件概率”的和.

即: $\underbrace{\mathrm{P}\underbrace{\left(\cup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right)}_{\text{和}}}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

- 几何概率模型 :

具有“完全可加性”: 即先求和, 再求概率, 等于先求每个事件概率, 再求和.

即: $\underbrace{\mathrm{P}\underbrace{\left(\cup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right)}_{\text{和}}}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

注意两者的区别: 一个是“有限(到n)”的加, 一个是“无限(到∞)”的加.