

目录

第一部分	基本概念	2
1	排列 and 组合	2
1.1	加法原理, 乘法原理 . . . . .	2
1.2	不重复排列 : $P_{\text{总数}n}^{\text{选出的数量}m} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$ . . . . .	2
1.3	全排列 : $P_{\text{总数}n}^n = n!$ . . . . .	2
1.4	重复排列 . . . . .	3
1.5	“送利益”模型 (放球模型) . . . . .	3
1.6	组合 combination : $C_{\text{总}}^{\text{选}} = \frac{\text{总!}}{\text{选!}(\text{总}-\text{选}!) } = C_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}$ . . . . .	3
2	交集 $\cap$ , 与并集 $\cup$	4
3	频率	5
4	频率的性质:	5
5	公理化	5
5.1	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ . . . . .	5
5.2	对于“完备事件组”中的所有事件来说: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$	5
5.3	$P(A - B) = P(A) - P(AB)$ . . . . .	7
5.4	若A包含着B, 则有: $P(A - B) = P(A) - P(B)$ , 且 $P(A) \geq P(B)$ . . . . .	7
5.5	加法公式: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ . . . . .	7
5.6	加法公式: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$ . . . . .	8
6	古典概型 : $P(A) = \frac{A \text{中包含的“基本事件”有多少个}}{S \text{中“基本事件”的总数}}$	9
7	几何概型	10
7.1	“古典概率模型”和“几何概率模型”的区别 . . . . .	13

# 概率

## 第一部分 基本概念

### 1 排列 and 组合

#### 1.1 加法原理, 乘法原理

- 一件事, 只需“一步”就能完成. 但这一步中有几种不同的方案可供选择, 就用“加法”原理.
- 一件事, 要分成“几步骤”才能完成. 每一步, 又有几种不同的选择方案. 就用“乘法”原理.

#### 1.2 不重复排列: $P_{\text{总数}n}^{\text{选出的数量}m} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$

不重复排列: 就是从n个不同的元素中, 取出m个来排列, 排过的元素不放回, 没有下次排列资格了.

则, 所有可能的排列(Permutation)方案, 就是:

$$P_{\text{总数}n}^{\text{选出的数量}m} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$$

例

10人选5人上岸, 共有多少种选择?

$$P_{\text{总}10}^{\text{取}5} = \frac{\text{总!}}{(\text{总}-\text{选})!} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$$

#### 1.3 全排列: $P_{\text{总数}n}^n = n!$

全排列, 就是从n个里面, 取出全部n个来排列, 即所有的元素都参与了排列.

$$P_{\text{总数}n}^n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

例如:

$$- P_2^2 = 2! = 2$$

$$- P_1^1 = 1! = 1$$

例

一套书,共5本, 排在一起. 问: 自左向右, 或自右向左, 是按着1,2,3,4,5编号顺序的概率是?

$$\text{即} = \frac{\text{顺序排是1种情况} + \text{倒序排是1种情况}}{P_{\text{总}5}^{\text{选}5}} = \frac{2}{P_5^5} = \frac{1}{60} = 0.0166667$$

-  $0! = 1$ . 因为:

(1) 解释1:  $m! = m(m-1)!$ , 如  $10! = 10 \cdot 9!$ . 所以  $1! = 1 \cdot 0!$ , 即得到  $0! = 1$

(2) 解释2:  $P_0^0$  就是从0个元素里面, 取出0个元素来排列. 这只有一种情况: 即“不选”. 因为不存在任何元素, 所以没法选. 所以  $P_0^0 = 0! = 1$

- $5^0 = 1 \leftarrow$  因为  $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
- $0^0$  无意义.  $\leftarrow$  因为  $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$ , 而分母不能为0, 所以该式子无意义.

1.4 重复排列

即: 排过队的元素, 可以拿回去, 重复参加后面的排队. (但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。)

重复排列:  $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{\text{共取了m次的n}} = n^m$

1.5 “送利益”模型 (放球模型)

将 $n_{benefit}$ 种利益, 随机投送给 $N_{man}$ 个人 ( $N_{man} \geq n_{benefit}$ ). 问: 每个人中, 最多只拿到1种利益的概率?

→ 先看样本空间: 第1种利益, 有 $N_{man}$ 个人的去向可供选择; 第2种利益, 同样如此, ... 所以, 根据“分步骤”法, 全部 $n_{benefit}$ 种利益, 它们的所有去向, 就共有:  $\underbrace{N_{man} \cdot N_{man} \cdot \dots \cdot N_{man}}_{\text{共}n_{benefit}\text{个}} = N^n$  个.

→ 再来看“每个人中, 最多只拿到1种利益”: 第1个人, 未完待续... 这里没看懂

1.6 组合 combination :  $C_{总}^{选} = \frac{总!}{选!(总-选!)} = C_{总}^{总-选}$

组合: 是从n个不同元素中, 每次取出m个不同元素 ( $0 \leq m \leq n$ ), 合成一组, 而不需要管排队顺序, 就称为: 从n个元素中不重复地选取m个元素的一个组合.

即: 有顺序, 就用排列; 无顺序, 就用组合.

组合的公式是:

$$C_{总数}^{选数} = \frac{P_{总}^{选}}{选!} = \frac{总!}{选!(总-选!)}$$

$$C_{总}^{选} = C_{总}^{总-选}$$

上面第二个公式的意思是: 比如你有100人, 选其中10人上岸, 就相当于选90人不上岸. 即:  $C_{100}^{10} = C_{100}^{100-10} = C_{100}^{90}$

同理, 有 :  $C_{总}^0 = C_{总}^{总-0} = C_{总}^{总}$

例

有共N人, 其中有w个女, 你任抽n人, 其中恰好有x个女人 ( $x \leq w$ ) (记为事件A) 的概率是?

我们用“分步骤法”来做: 第一步, 先取x个女人. 第二步, 再取男人(数量就是= n-x).

第一步:先从全部女人里面,取x个女人      第二步:再从总男人里,取剩下的男人数量

$$P(A) = \frac{\text{取到x女}}{\text{从总N人中取n人}} = \frac{C_{总w女}^{取x女}}{C_{总N人}^{取n人}} \cdot \frac{C_{总N人-总w女}^{总取n人-x女}}{C_{总N人-总w女}^{总取n-x男}}$$

上面这个公式, 其实就是“古典概型”里面的“超几何分布”.

例

有共9球, 5白, 4黑. 任取3球, 问:

(1) 是 2白1黑的概率: 
$$P(2白1黑) = \frac{\overbrace{C_5^2}^{\text{第一步:5白取2}} \cdot \overbrace{C_4^1}^{\text{第二步:4黑取1}}}{\underbrace{C_9^3}_{\text{总9取3}}} = 0.47619$$

(2) 取到的3球中, 无黑球: 
$$P(3白) = \frac{\overbrace{C_5^3}^{5白取3}}{\underbrace{C_9^3}_{\text{总9取3}}} = 0.119048$$

(3) 取到的3球中, 颜色相同: 
$$P(3球同色) = \frac{\overbrace{C_5^3}^{5白取3} + \overbrace{C_4^3}^{4黑取3}}{\underbrace{C_9^3}_{\text{总9取3}}} = 0.166667$$

或, 也可用第二种思路来解:

$$\begin{aligned} P(3球同色) &= 1 - P(3球存在不同色) \\ &= 1 - \frac{1白2黑, \text{或} 2白1黑}{9取3} \\ &= 1 - \frac{\overbrace{C_5^1}^{5白取1} \overbrace{C_4^2}^{4黑取2} + \overbrace{C_5^2}^{5白取2} \overbrace{C_4^1}^{4黑取1}}{C_9^3} \\ &= 0.166667 \end{aligned}$$

2 交集  $\cap$ , 与并集  $\cup$

A, B, C 是试验E 的随机事件. 则表示法是:

- A发生: A

下面, 加法即表示“或”:

- A, B, C 恰有一个发生:  $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$
- A, B, C 至少一个发生(即  $i=1$ ):  $A+B+C$  或  $A \cup B \cup C \leftarrow$  即3选1, 还有两个发不发生, 不用管, 随意, 都行.
- A, B, C 至多一个发生(即  $i=1$ ):  $\underbrace{\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}}_{3选1} + \underbrace{\overline{A}BC}_{3选0}$
- 恰有两个发生:  $\overline{A}BC + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$
- 至少两个发生(即,  $i=2$ ):  $\underbrace{\overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}BC}_{3选2} + \underbrace{ABC}_{3选3} + \underbrace{AB + BC + AC}_{3选2, \text{还有一个发不发生不用管, 随意}}$

下面, 乘法即表示“同时”:

- 只有A发生:  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
- A, B, C 同时发生:  $ABC$

例

一次射击试验, 整个流程是打三枪, 用  $A_i, (i = 1, 2, 3)$  来表示“在第i次时击中了目标”. 记住: 加法(+) 代表“或, 并  $\cup$ ”; 乘法代表“交  $\cap$ ”.

- $A_1 + A_2$ : 表示第一次击中了, 或第二次击中了. 即前两次至少击中一次.
- $\overline{A_2}$ : 表示第二次没击中.
- $A_1 + A_2 + A_3$ : 表示仅第一次击中, 或仅第二次击中, 或仅第三次击中.
- $A_1 A_2 A_3$ : 表示三次全中.

- $A_2\overline{A_3} = A_2 - A_3$  : 表示第二次击中, 并且第三次失败.
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 + A_3}$  : 表示第一次没中, 并且第三次也没中.
- $\overline{A_1} + \overline{A_3}$  : 表示第一次没中, 或第三次没中.

3 频率

做n次试验, A事件发生了m次, 我们就把  $\frac{A事件发生的次数m}{共n次试验}$  叫做“频率”. 记作 $\omega_n(A)$ .  
比如丢硬币, 丢10次, 丢100次, 丢1000次, 每次的“频率”可能都不一样, 比如结果是  $\frac{7}{10}, \frac{55}{100}, \frac{508}{1000}$ .  
所以这就是“频率”和“概率”的区别.  
但你可以发现, 随着试验次数n的增大, A事件的“频率”的值, 会接近与“概率”的值. 即:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(A) \rightarrow P$

4 频率的性质:

规范性:  
-  $\omega_n(\Omega) = 1 \leftarrow$  做n次试验, 里面“必然事件”发生的频率, 是1. 既然是“必然事件 $\Omega$ ”, 它肯定会发生, 所以频率肯定是1.  
-  $\omega_n(\Phi) = 0 \leftarrow$  做n次试验, 里面“不可能事件”发生的频率, 是0.

可加性:  
比如做1000次试验, 即 $\Omega_{1000}$ , 则有:  
$$\omega_{1000}(A_1 + A_2) = \underbrace{\omega_{1000}(A_1)}_{1000次试验中,A1事件发生的频率} + \underbrace{\omega_{1000}(A_2)}_{1000次试验中,A2事件发生的频率}$$

即: “和的频率”, 就等于“频率的和”.

$$\underbrace{\omega_n(A_1 + A_2 + \dots + A_m)}_{\substack{\text{做}n\text{次试验} \\ \text{里面有}m\text{个事件}}} = \omega_n(A_1) + \omega_n(A_2) + \dots + \omega_n(A_m)$$

做n次试验,里面有m个事件发生了的频率

5 公理化

- 5.1  $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- 5.2 对于“完备事件组”中的所有事件来说:  $P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n) = P(\Omega) = 1$

完备事件组 collectively exhaustive events 就是: 如果事件 B1, B2, B3, ... Bn 满足:

1. 它们两两互不相容(即两两的交集=空集),
2. 其“和”为全集 $\Omega$ .

换言之, 若n个事件两两互斥, 且这n个事件的“并”是 $\Omega$ , 则称这n个事件为“完备事件组”.

全概率公式

一、样本空间的划分（完备事件组）

定义 设  $\Omega$  为试验  $E$  的样本空间,  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  为  $\Omega$  的一组事件, 若

- (i)  $A_i A_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n;$
- (ii)  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$

则称  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分.



例

有20件衣服, 质量分3等, 其中一等的6件, 二等的10件, 三等的4件.  
问: “任取3件, 至少2件是同质量”的概率?

这个问题其实可转化为有色球问题:

20球, 三色, 每色数量分别是6, 10, 4球. 问3取2球, 至少2球是同色的概率.

即  $P(\underbrace{\text{同色} \geq 2 \text{球}}_{\text{事件A}}) = 1 - P(\underbrace{\text{3球都不同色}}_{\text{事件}\bar{A}})$

色1中的共6球取1个. 色2中的共10球取1个. 色3中的共4球取1个

$$= 1 - \frac{\underbrace{\widehat{C_6^1} \cdot \widehat{C_{10}^1} \cdot \widehat{C_4^1}}_{\substack{C_{20}^3 \\ \text{总20球取3}}}}{C_{20}^3}$$
$$= \frac{15}{19} = 0.789474$$

球无色, 不存在  $\rightarrow$  ○ ○ ○

只有1球同色,  $\rightarrow$  ○ ○ ●

就相等于每球都不同色.

$\bar{A}$

至少2球是同色  $\rightarrow$  { ○ ● ●  
● ● ●

$A$

例

$n$ 个人中, 至少2人生日相同的概率是?

$$P(\underbrace{\text{至少2人生日相同}}_{\text{事件A}}) = 1 - P(\underbrace{\text{只有1人生日相同}}_{\text{即n个人每人生日都不相同. 即事件}\bar{A}})$$
$$= 1 - \frac{\text{n个人生日都不相同}}{\text{n个人, 随便选生日, 无所谓充不重复}}$$
$$= 1 - \frac{\overbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365-1}^1 \cdot \cdots \cdot C_{365-n+1}^1}^{\text{共n人的}}}{\underbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365}^1 \cdot \cdots \cdot C_{365}^1}_{\text{共n人的}}}$$

比如, 若总人数 $n = 55$ 人, 则:

$$P(A) = 1 - \frac{\overbrace{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - 54)}^{\text{共55个数}}}{(C_{365}^1)^{55}} = 0.99$$

人无生日, 不存在 → ○ ○ ○ ○

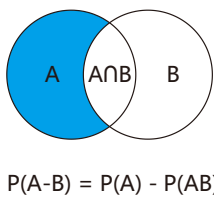
只有1人生日相同, → ○ ○ ● ○  
就相等于每人生日都不相同.

$\bar{A}$

至少2人生日相同 → {  
○ ● ● ○  
○ ● ● ●  
... ..  
}

$A$

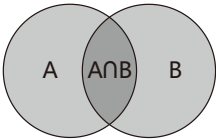
5.3  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$



$P(A-B) = P(A) - P(AB)$

5.4 若A包含着B, 则有:  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ , 且  $P(A) \geq P(B)$

5.5 加法公式:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

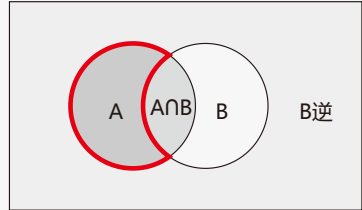


$P(A+B) = P(A) + P(B) - \text{它们的交集部分 } P(AB)$

例

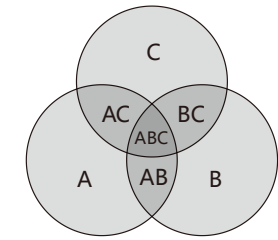
A事件的概率是0.4, 即  $P(A)=0.4$ ;  
 $P(B)=0.3$ ;  
且 $P(A+B)=0.6$ , ← 说明A与B有交集部分存在. 否则, 如果A与B是不相容的话, 它们和的概率, 应该是  $0.4+0.3=0.7$ .  
所以它们的交集  $P(AB)$  就是=0.1 :

$$\underbrace{P(A+B)}_{0.6} = \underbrace{P(A)}_{0.4} - \underbrace{P(B)}_{0.3} - \underbrace{P(AB)}_{=0.1}$$
  
求 $P(A\bar{B})$ , 即求 $A \cap B$ 逆 的概率:  
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = \underbrace{P(A)}_{=0.4} - \underbrace{P(AB)}_{=0.1} = 0.3$$



$A \cap B$ 逆: 就是红色面积的那块

5.6 加法公式:  $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$



$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) \\ -P(AB)-P(AC)-P(BC) \\ +P(ABC)$$

说明:

$$P(A + B + C) \\ = \underbrace{P(A) + P(B) + P(C)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分,被加了3次}} - \underbrace{P(AB) - P(AC) - P(BC)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分,又减了3次}} + \underbrace{P(ABC)}_{\text{所以最后,我们还要把镂空的}ABC\text{交集部分,加上一份上去}}$$

例

已知  $\begin{cases} P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4} \\ P(AB) = 0 \\ P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16} \end{cases}$ , 求  $\begin{cases} 1. A, B, C \text{ 至少一个发生的概率} \\ 2. A, B, C \text{ 都不发生的概率} \end{cases}$

我们先来算  $P(ABC)$ , 因为下面会用到.  
因为  $ABC \subset AB$ , 所以  $P(ABC) \leq \underbrace{P(AB)}_{=0}$ , 因此  $P(ABC) = 0$

→ 至少一个发生, 就是用“并  $\cup$ ”, 用加法:  
所以 
$$P(A + B + C) = \underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{4}} + \underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{4}} + \underbrace{P(C)}_{=\frac{1}{4}} - \underbrace{P(AB)}_{=0} - \underbrace{P(AC)}_{=\frac{1}{16}} - \underbrace{P(BC)}_{=\frac{1}{16}} + \underbrace{P(ABC)}_{=0} \\ = \frac{3}{4} - \frac{2}{16} = \frac{5}{8} = 0.625$$

→ 都不发生, 即  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = 1 - \underbrace{P(A + B + C)}_{\text{任意一个发生}} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$

例

有两台机床,  $\begin{cases} \text{第1台: 不需要照看的概率是0.9, 则需要照看它的概率就是0.1} \\ \text{第2台: 不需要照看的概率是0.8, 则需要照看它的概率就是0.2} \\ \text{两台都需要照看的概率, 是0.02} \end{cases}$

问: 至少1台需要照看的概率是?

思路1:  $P(\text{至少1台要照看}) = 1 - P(\text{都不需要照看}) \\ = 1 - (0.9 \cdot 0.8) = 0.28$

思路2: 至少1台需要照看, 就是要照看1台或2台呗, “或”就是用加法, 并集  
$$= P(A_1 + A_2) = \underbrace{P(A_1)}_{=0.1} + \underbrace{P(A_2)}_{=0.2} - \underbrace{P(A_1 A_2)}_{=0.02} = 0.28$$



6 古典概型： $P(A) = \frac{A \text{ 中包含的“基本事件”有多少个}}{S \text{ 中“基本事件”的总数}}$

满足这些条件的, 就属于“古典概率 classical models of probability 模型”:

- 样本点是有限的
- 所有样本点出现的可能性, 是相同的. 即“等可能性”.

古典概型模型:

事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$  发生的概率为:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中包含的“基本事件”有多少个}}{S \text{ 中“基本事件”的总数}}$$

古典概率模型的性质:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1, \quad P(\Phi) = 0$
- 有限可加:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是互不相容的. 即  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

古典概率模型:

- 其优点是: 可以直接套公式来算.
  - 但其缺点是:
- (1) 其结果必须是“有限个”的结果 (如, 掷骰子, 结果就是6个基本事件, 而不是无限个事件.)
  - (2) 其结果, 必须是“等可能性”.

例

有  $a$  个白,  $b$  个黑, 问: 从中连续取出  $m$  个球 (连续取, 就是不放回的意思了) ( $1 \leq m \leq a + b$ ), 第  $m$  个是白球的概率= ?

思路1: 其实我们只要考虑第  $m$  个位置的这一个球的情况就行了, 其他位置的球, 随便它们什么颜色, 我们不用考虑的.

$P(\text{第}m\text{位置是白球}) = \frac{\text{在第}m\text{个位置上, 从}a\text{个白球里取}1\text{个放上去. 剩下数量的其他位置上, 依然做全排列}}{\text{所有球的全排列}}$

第一步, 先取1个白球, 占位放在第 $m$ 个位置上. 第二步: 剩下的所有球, 依然做全排列

$$\text{即 } P(\text{第}m\text{位置是白球}) = \frac{\overbrace{C_{\text{总}a\text{白}}^{\text{取}1}} \cdot \overbrace{C_{\text{总}a\text{白}+\text{总}b\text{黑}-1}^{\text{总}a\text{白}+\text{总}b\text{黑}-1}}{P_{\text{总}a\text{白}+\text{总}b\text{黑}}^{\text{总}a\text{白}+\text{总}b\text{黑}}}$$

思路2: 或者我们也只需考虑前 $m$ 个数量的球就行了, 后面其他的球, 爱怎样颜色怎样颜色, 不用我们考虑.

第一步, 先取1个白球, 占位放在第 $m$ 个位置上. 第二步:  $m$ 个数中的剩下的所有球, 依然做全排列

$$P(\text{第}m\text{位置是白球}) = \frac{\overbrace{C_{\text{总}a\text{白}}^{\text{取}1}} \cdot \overbrace{C_{\text{总}a\text{白}+\text{总}b\text{黑}-1}^{m-1}}{P_{\text{总}a\text{白}+\text{总}b\text{黑}}^m}$$

$m \text{ 个球的全排列}$

其实你有没有发现? “在第 $m$ 个位置上出现白球” 这个“ $m$ 索引位置”, 其实是个障眼法. 白球出现在任何其他位置, 它出现在第1个位置, 第10个位置, 最后一个位置, 对我们的计算结果没有任何影响. 因为不管白球出现在第几个位置上, 它出现的概率都是相同的, 因为是古典概率嘛! 所以, “位置为几” 其实不重要.

所以, 我们就有了第三种思路: 我们就把这个白球, 让它直接出现在第1个位置就好了:

(在第1个位置上,) 从白球里, 取1个 的取法数量

$$P(\text{第1个位置是白球}) = \frac{C_{\text{总a白}}^1}{C_{\text{总a白}+\text{总b黑}}^1} = \frac{a}{a+b}$$

(在第1个位置上,) 从总数里, 取1个 的取法数量

7 几何概型

几何概型 geometric models of probability, 即这类概率问题, 能够转换成用“几何问题”来求解.

例

有甲乙两人, 相约在 6-7点见面 (其实这个具体的时间点也是个障眼法, 只要在1个小时的区间就行). 先到者, 最多等对方15分钟, 然后就离开了.  
甲乙两人, 在这1小时内的任意时刻, 都可能到达.  
问, 他们能相见的概率是多少?

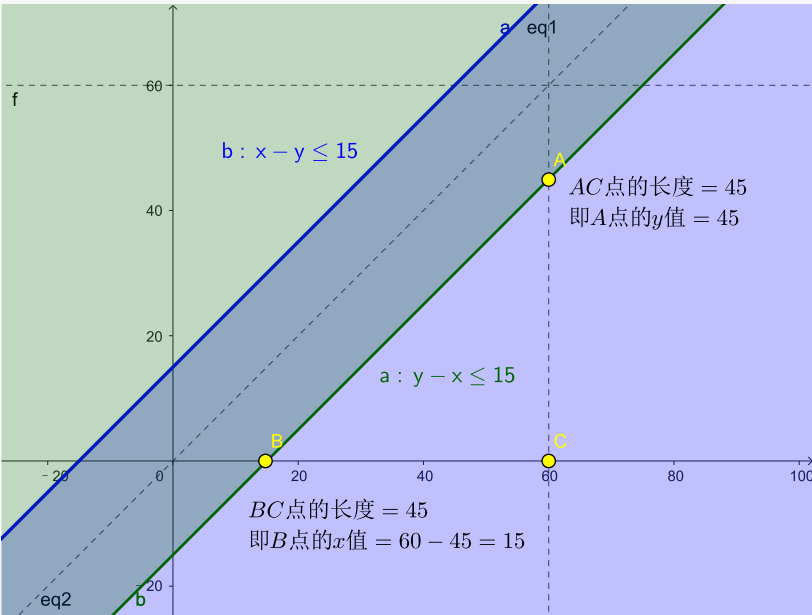
我们令

- 事件A : 表示两人见到了面
- x : 表示甲到达的时间点
- y : 表示乙到达的时间点

他们要能见到面, 即  $|y - x| \leq 15$  分钟. 那么这就有两种可能性:

- 甲先到. 即  $x \leq y$  (甲来到的时间点x, 比乙来到的时间点y 要小 (早)), 即  $y - x \leq 15$
- 乙先到. 即  $y \leq x$ , 即  $x - y \leq 15$

这两组不等式, 能用函数图形来表示出来, 如下图. x和y轴上的60, 分别代表两人的1小时区间(60分钟). 中间的交集区域, 就是两人可以见到面的时间段.



显然, 这就是求几何面积的问题.

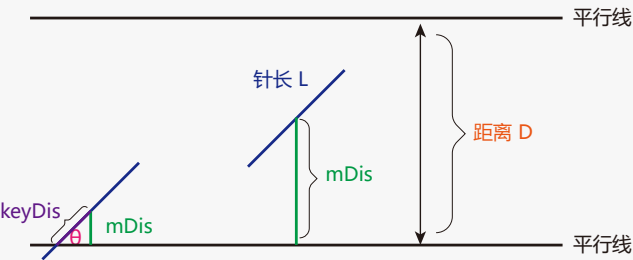
上面的“边长为45”的三角形的面积

下面的“边长为45”的三角形的面积

$$\text{即: } P(A) = \frac{60 \cdot 60 - \frac{\overbrace{45 \cdot 45}^{\text{上面的“边长为45”的三角形的面积}}}{2} - \frac{\overbrace{45 \cdot 45}^{\text{下面的“边长为45”的三角形的面积}}}{2}}{\underbrace{60 \cdot 60}_{\text{即“边长为60分钟”的矩形}}} = 0.4375$$

例

(法国)布丰(1707-1788) 投针 Buffon’s needle problem.  
说: 有两条平行的直线, 相聚为  $D$ (distance), 距离单位不重要. 你哪一个针 (长度为  $L$  (length),  $L < D$ ), 随机地投向针. 问: 针与那两条平行直线相交的概率是?



思路: 针投上去后的位置状态, 是由两个参数决定的:  
(1) 针的中点, 距离“最近那根直线”的最短距离.  $\leftarrow$  该距离用变量  $mDis$  (midpoint distance)来表示.  
(2) 针倾斜的位置, 与直线的夹角.  $\leftarrow$  我们用变量  $\theta$  来表示.  
用上面这两个变量, 我们能分别作为  $x$ 轴(表示  $\theta$  变量) 和  $y$ 轴(表示  $mDis$ 变量), 来画出函数图像.

针投出后, 所有可能的状态, 其全集就是:

$$\Omega = \left\{ (\theta, mDis) \mid 0 \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{夹角}}}{\theta} \leq \pi; \quad 0 \leq \underbrace{mDis}_{\substack{\uparrow \\ \text{针的一半长度}}} \leq \underbrace{\frac{D}{2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{两条平行线间距的一半}}} \right\}$$

因为针的长度 $L$ , 是小于两条平行线的间距 $D$ 的

那么, 什么状态下, “针”就与“直线”相交了呢? – 当“从针的中点(沿着针的身体走)到直线”的距离 (下面用变量  $keyDis$  (key distance) 来表示这个距离)  $\leq$  针的一半长度时. 它们就相交了. 否则, 它们就不想交.  
即, 就有:

→ 因为  $\theta$  角度有sin值:  $\sin\theta = \frac{mDis}{keyDis}$ ,

则有:  $keyDis = \frac{mDis}{\sin\theta}$ , ← 当该值  $\leq \frac{针长L}{2}$  时, 针与直线相交.

→ 因为y轴是代表  $mDis$  变量, 所以我们要写出  $mDis$  曲线的函数值:

根据 上面的  $keyDis = \frac{mDis}{\sin\theta} \leq \frac{针长L}{2}$

就有:  $mDis \leq \frac{针长L}{2} \cdot \sin\theta$

即:  $mDis \leq \frac{1}{2} 针长L \cdot \sin\theta$  ← 这个就是  $y = mDis$  曲线的函数表达式内容了.  
既然这里是 小于等于符号, 则  $mDis$  的值,  
就是  $\frac{1}{2} 针长L \cdot \sin\theta$  这条曲线下方的面积了,

$$即\ mDis = \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} 针长L \cdot \sin\theta \right) d\theta$$

→ 所以, 相交的概率

=  $\frac{\text{“针”与“直线”相交时的 } mDis \text{ 与 } \theta \text{ 的所有取值范围}}{\text{针投出后的 所有可能的 } mDis \text{ 与 } \theta \text{ 的取值范围}}$

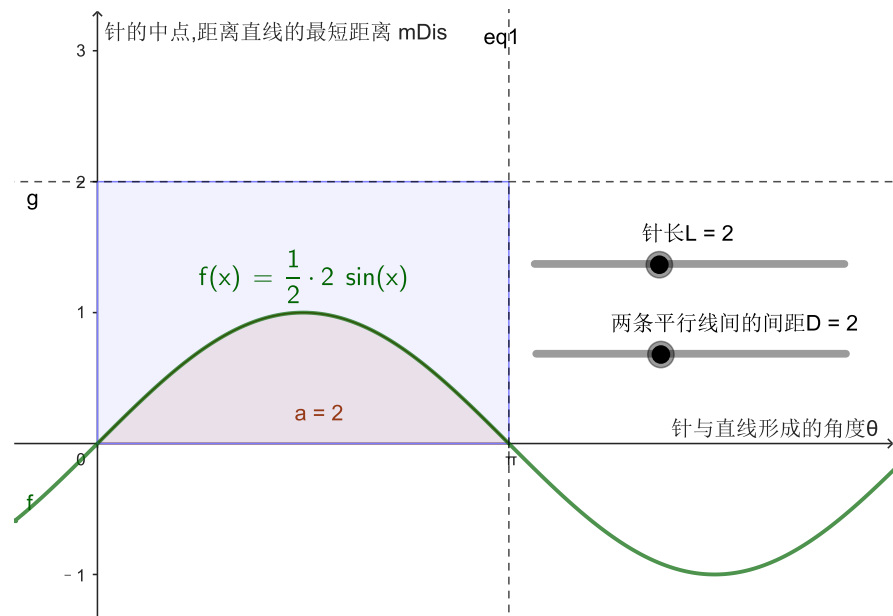
$$= \frac{\int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} 针长L \cdot \sin\theta \right) d\theta}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{D}{2}}$$

← 分子上积分的下限是0, 上限是 $\pi$ , 这个也就是  $\theta$  角度的所有区间  $(0 - \pi)$

$\frac{1}{2} 针长L \cdot (-\cos\theta)|_0^{\pi} = 针长L \cdot \frac{[-\cos\pi - (-\cos 0)]}{\pi D} = \frac{2 针长L}{\pi D}$

即函数图中红色区域的面积

即函数图中蓝色区域的面积



7.1 “古典概率模型”和“几何概率模型”的区别

- 古典概率模型：  
具有“有限可加性” (finite additivity): 是指“有限个”两两互不相容事件的“和事件”的概率, 等

于“每个事件概率”的和.

即: 
$$\underbrace{P\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^n A_i}_{\text{和}}\right)}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{P(A_i)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$$

- 几何概率模型 :

具有“完全可加性”: 即先求和, 再求概率, 等于先求每个事件概率, 再求和.

即: 
$$\underbrace{P\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\text{和}}\right)}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P(A_i)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$$

注意两者的区别: 一个是“有限(到n)”的加, 一个是“无限(到 $\infty$ )”的加.