目录

函数

2022 年 12 月 9 日

第一部分　反函数

函数 f 是: 输入 x, 输出 y.	f(x 自变量) = y 因变量.
反函数 f^{-1} 是: 输入 y, 输出 x.	相当于时间倒流, 把原函数的功能倒过来. 就像线性代数中的" 逆矩阵" 变换功能.

"反函数" 和 "原函数", 图象关于直线 y=x 对称.

例

有函数 y = 3x+5, 即输入 x, 输出 y. 它可以变为:

$$3x = y - 5$$
$$x = \frac{y-5}{3}$$

这样, 就是输入 y, 输出 x 的形式了, 即就变成了 "反函数".
但一般我们习惯于将输入值, 用 x 表示; 输出值, 用 y 值表示, 所以上面的反函数, 就索性写成 $y = \frac{x-5}{3}$, 但你不要混淆这里的 x 和 y 的意义. 这里的 x 是原 y 值, 这里的 y 是原 x 值.

第二部分　初等函数

1　power function 幂函数: $y = x^{exp}$

变量 x 作为 "底" 的, 就是幂函数. 形如 $y = x^2$, 格式是 $y = x^{exp}$

2　exponential function 指数函数: $y = base^x$

变量 x 在肩膀上做为次方来用的, 就是 "指数函数". 形如 $y = 100(1 + 0.1)^x$. 格式是 $y = base^x$. 其中, base >0 并且 base 1.
其实, "投资回报率" 终值计算公式 $F = P(1 + i)^n$, 就是指数函数. 如: $y = 100(1 + 0.1)^x$

2.1 为什么 $base^0 = 1$?

因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$

而 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} \leftarrow$ 分母上不能为 0, 所以无意义

2.2 重要公式 $\boxed{a^n = e^{n \cdot \ln a}}$

证明过程, 我们倒过来做:

例

$e^{b \cdot \ln a} \leftarrow$ 指数部分的 $b \cdot \ln a = b \cdot \log_e a = \log_e(a^b)$

所以原式 $= e^{\overbrace{\log_e(a^b)}^{即\ e^? = a^b}} = a^b$

即得出了: $e^{b \cdot \ln a} = a^b$

即:

$$\begin{aligned} e^{指 \cdot \ln 底} &= e^{指 \cdot \log_e 底} \\ &= e^{\overbrace{\log_e \overbrace{底^{指}}^{幂}}^{即\ e^? = 底^{指}}} \\ &= 底^{指} = 幂 \end{aligned}$$

记忆法: 把底数 (a) 换成 e, 把指数 (n) 换成: 原指数后面再乘个 “ln 底” (n × ln a). 即 $a^n = e^{n \cdot \ln a}$

3 Logarithmic function 对数函数: $\log_{底}$ 幂 = 指

- 底数 Base Number
- 指数 Exponent
- 幂 Power

有: $底^{指} = 幂$, 则: $\rightarrow \log_{底}$ 幂 = 指

- $\log_{10}$ 幂 = lg 幂
- $\log_e$ 幂 = ln 幂

显然, 就有:

3.1 $底^{\log_{底} 幂} = 幂$

即 $底^{\overbrace{\log_{底} 幂}^{指}} = 幂$

例

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{-3}\right)^{\log_2 3} = \left(\underbrace{2^{\overbrace{\log_2 3}^{\text{即 } 2^? = 3}}}_{=3}\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

....

3.2 $\log_{底} 底^{指} = 指$

即 $\log_{底} \underbrace{底^{指}}_{幂} = 指$

....

3.3 $\log_{底}\left(\frac{幂1}{幂2}\right) = \log_{底} 幂1 - \log_{底} 幂2$

即:

$$\underbrace{\log_{底}\left(\frac{幂1}{幂2}\right)}_{\text{即: } 底^? = \frac{幂1}{幂2}} = \overbrace{\log_{底} 幂1}^{指1} - \overbrace{\log_{底} 幂2}^{指2}$$

反过来, 即是: $\log_{底} 幂1 - \log_{底} 幂2 = \log_{底}\left(\frac{幂1}{幂2}\right)$

....

3.4 $\log_{底} 幂1 + \log_{底} 幂2 = \log_{底} (幂1 \cdot 幂2)$

....

3.5 $\boxed{\log_{原底} 幂 = \frac{\log_{任意底} 幂}{\log_{任意底} 原底}}$ ← 这个就是"换底公式"

由换底公式, 可以推导出以下一些常用的结论:

$\rightarrow \log_{原底} 幂 = \frac{\log_{幂} 幂}{\log_{幂} 原底} = \frac{1}{\log_{幂} 原底}$ ← 看一头一尾, 即就有: $\boxed{\log_{底} 幂 \cdot \log_{幂} 底 = 1}$

$\rightarrow \boxed{\log_{底1} 幂1 \cdot \log_{幂1} 幂2 = \log_{底1} 幂2}$

即:

$$\begin{aligned}\log_{底1} 幂1 \cdot \log_{幂1} 幂2 &= \frac{\cancel{\log_{任意底} 幂1}}{\log_{任意底} 底1} \cdot \frac{\log_{任意底} 幂2}{\cancel{\log_{任意底} 幂1}} \\ &= \frac{\log_{任意底} 幂2}{\log_{任意底} 底1} \\ &= \log_{底1} 幂2 \quad \leftarrow \text{ 即 } \log_a b \cdot \log_b C = \log_a C\end{aligned}$$

你可以这样记忆: $\log_a \cancel{b \cdot \log_b} C = \log_a C$

$\rightarrow \boxed{\log_{原底} 幂: \rightarrow \text{根据换底公式, 有} = \frac{\log_{10} 幂}{\log_{10} 原底} = \frac{\lg 幂}{\lg 原底}}$

即有, 例如: $\log_a 2 = \dfrac{\lg 2}{\lg a}$

3.6 $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b$

← 简单记忆法: 把 m 和 n, 上下保持不动, 直接向左平移到 log 外面去就行了.

例

$\log_2 \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} + \log_8 3$ ← 加号右边的 $\log_8 3 = \log_{2^3} 3^1 = \dfrac{1}{3}\log_2 3 = \log_2 3^{\frac{1}{3}}$

所以, 原式 $= \log_2 \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} + \log_2 3^{\frac{1}{3}}$

$$= \log_2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{3}\right) = \log_2 2 = 1$$

这个公式可以推导出:

→ $\log_{底} M^n = \log_{底^1} M^n = \frac{n}{1}\log_{底} M = n \cdot \log_{底} M$
→ $\log_{a^n} b^n = \frac{n}{n}\log_a b = \log_a b$
→ $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}\log_a a = \frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n}$
→ $\ln a^b = \log_{e^1} a^b = \frac{b}{1}\log_e a = b\ln a$

---

4 trigonometric function 三角函数: $y = base^x$

4.1 sin & arcSin

4.2 cos & arcCos

4.3 tan & arcTan

4.4 cot & arcCot

4.5 sec & arcSec

4.6 csc & arcCsc