目录

向量组的秩

1 极大线性无关组

极大线性无关组 maximal linearly independent system: 就是在线性空间中, 拥有向量个数最多的那一个 “线性无关的向量组”. 其实就是在一个向量组, 最多有几个 “基轴” 的概念.

比如, 有一个向量组 A: $\alpha_1, ..., \alpha_5$, 其中:
- α_1, α_2 是线性无关的, 即它们就属于基轴了.
- 这个向量组 A 中的每一个向量, 都可由基轴 α_1, α_2 来表示.
则, α_1, α_2 就称为是这个向量组 A 的 “极大线性无关组”.

注意: 在一个向量组中, 找其子集 “极大线性无关组”, 可能是不唯一的 (即基轴不唯一).

例

比如:

对于这个向量组: $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \end{vmatrix},$

它的“极大线性无关组”(即基轴组)，就不是唯一的，有两个: $\begin{cases} 1.\ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix} \\ 2.\ \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix} \end{cases}$

---

2 向量组的秩 rank: 就是该向量组的 “极大线性无关组” 中所含向量的个数

注意: “向量组的秩”, 和 “矩阵的秩”, 定义并不相同.

一个向量组, 由 $\alpha_1, ...\alpha_s$ 这些向量构成, 则, 该向量组的秩, 数量范围就是在:

$$0 \leq \underbrace{r\left(\alpha_1, ...\alpha_s\right)}_{\text{该向量组的}rank\text{数}} \leq \underbrace{\min\{\text{该向量组中的向量个数, 向量的维度数}\}}_{\text{取两者中的最小者}}$$

比如, 在 3 维空间中, 有 10 个 3 维的向量, 则, 该向量组的秩 (基轴数), 就是 3 了.

所以, 我们就知道:
→ 如果一个向量组 (含有 s 个向量) 的秩数 r = s 的话, 那么这个向量组中的向量, 就是 “线性无关” 的. 即每个向量都成为了一个基轴.
→ 如果一个向量组 $\alpha_1, ...\alpha_s$ 中的向量, 是 “线性相关” 的, 则: 该向量组的秩数 r 就小于 s.

3 矩阵的行秩, 和列秩

把一个矩阵的每一行, 拿出来, 作为 “行向量组”, 则这个 “行向量组” 的秩, 就叫 “行秩”.
把一个矩阵的每一列, 拿出来, 作为 “列向量组”, 则这个 “列向量组” 的秩, 就叫 “列秩”.

有定理:

3.1 矩阵的行秩 = 列秩 = 矩阵的秩