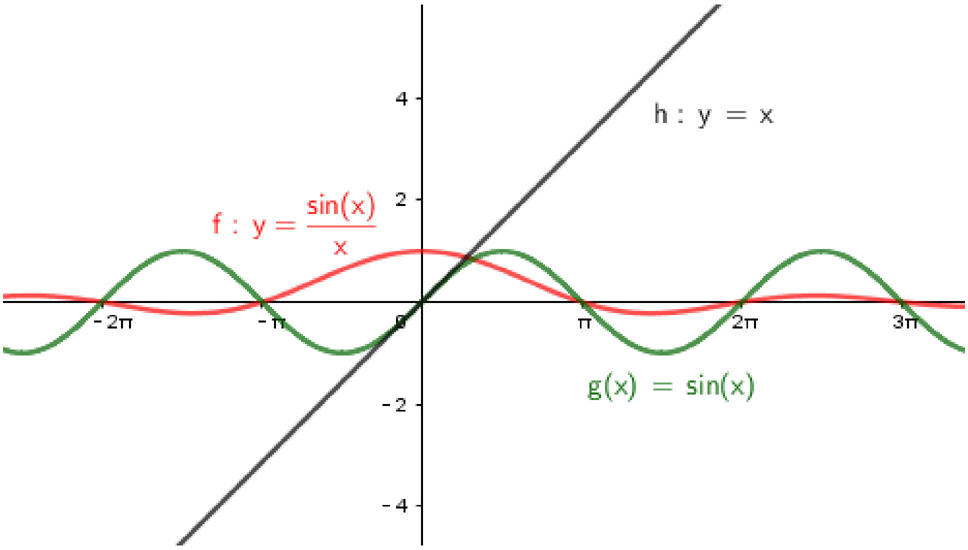
极限_两个重要的极限

Table of Contents

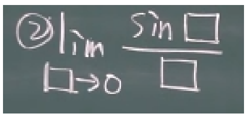
1. ★ 两个重要的极限 (必考)

1.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



不严谨的理解方法, 可以这样来记: 当 x 趋向于0时, 显然, 分子 sinx 也趋近于0, 分母x也趋近于0, 所以 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 就相当于 是 $\frac{0}{0}$, 就=1 了.

其实, 它的骨架是这种形式的:



该公式在实际应用中, 有很多披了马甲的形式, 你一定要火眼金睛能看出它的"本像".

Example 1. 标题

如:

$$\lim_{x \to 1} \frac{sin(x^2-1)}{x^2-1} \quad ①$$

当x趋近于1时, 分子的 $\sin\left(x^2-1\right)$ 就趋向于0, 分母的 x^2-1 也趋向于0. 所以它的"真身" 其实就是 $\frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 这个公式.

事实上, 这个① 可以改成 $\lim_{x^2-1 \to 0} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$ 的形式, 就完全是"本像"的形式了.

Example 2. 标题

另一种马甲: 没给出 sin, 但给出 cos, tan, arcsin, arctan 等 的形式.

如:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{这块就是本像了}, =0/0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\text{当}x\to 0\text{时,这块}=1} = 1$$

Example 3. 标题

另一种马甲: 无x. 那么我们就构造出一个x来.

如:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{0}{0} \cdot \frac{1}{2} = 1 \leftarrow \text{别忘了用本像公式时}, 0/0 = 1$$

Example 4. 标题

如:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tan\ 2x}{tan\ 3x} = \frac{\frac{sin\ 2x}{cos\ 2x}}{\frac{sin\ 3x}{cos\ 3x}} = \frac{\frac{sin\ 2x}{2x} \cdot 2x \cdot \frac{1}{cos\ 2x}}{\frac{sin\ 3x}{3x} \cdot 3x \cdot \frac{1}{cos\ 3x}} = \frac{2}{3} \frac{\frac{sin\ 2x}{2x} \cdot \frac{1}{cos\ 2x}}{\frac{sin\ 3x}{3x} \cdot \frac{1}{cos\ 3x}} = \frac{2}{3} \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

Example 5. 标题

如:

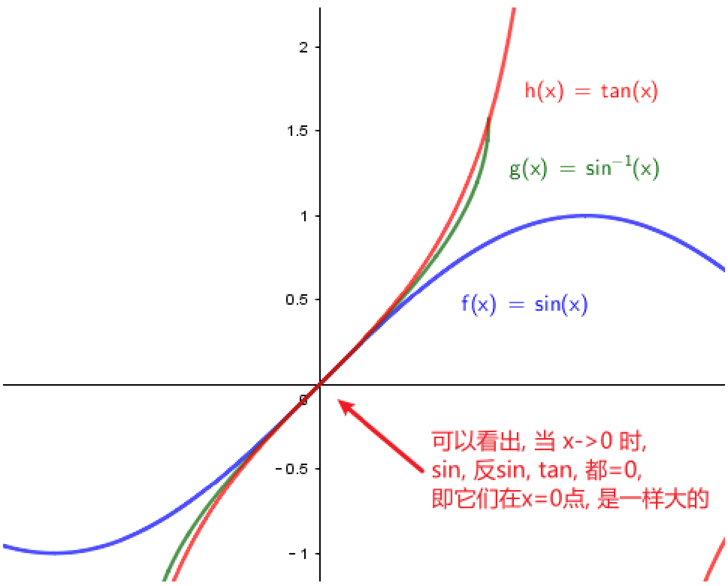
$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\ x}{x^2} \leftarrow \text{上下两边同时乘上一个 } 1+cos\ x \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cos\ x)(1+cos\ x)}{x^2(1+cos\ x)} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 x}{x^2(1+cos\ x)} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cos\ x} \\
&=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Example 6. 标题

例:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\ x}{x} \leftarrow \text{令 } x=sin\ t \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(sin\ t)}{sin\ t} \\
&=\lim_{sin\ t\to 0}\frac{t}{sin\ t}=1
\end{aligned}
$$

总结规律:

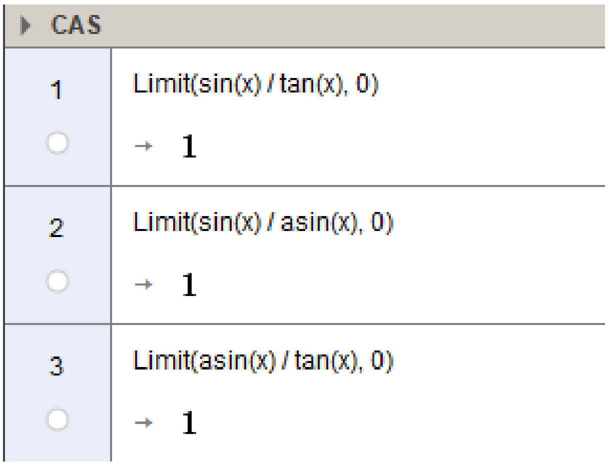


如图, 既然在 x→0 点处, sin x, 反sin x, tan x, 都是一样大的, 所以这三个中, 任意取两个, 分别放在分子和分母上, (在 x→0 点处时,)它们的比值都=1.

即如:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\arcsin x} = 1$$

还可以用 geogebra 来求极限. 方法是 : Limit(函数, x趋向的值)



Example 7. 标题

例如:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) \leftarrow \text{套用公式}, \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

跟着上例,

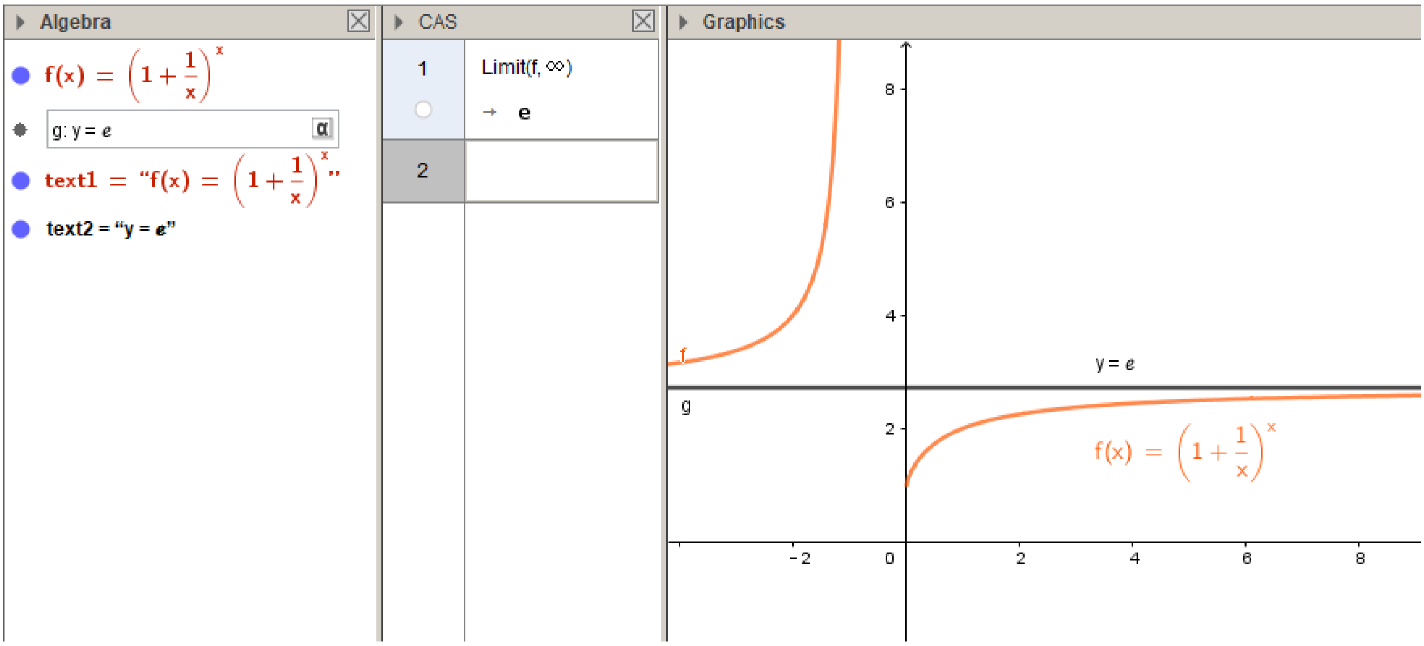
$$\begin{aligned}
&\text{既然} \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \\
&\text{那么} \lim_{x \to 0} 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 \\
&\text{同样}, \lim_{x \to 0} \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

1.2. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \text{自然常数}e = 2.718$$

如果用跟常见的"利息结算期限n"代替x,其实就是:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$



注意: 使用该极限公式时, 中间必须是加号 +. 如果题目给出的不是加号, 你也要把它先变换成加号. 如:

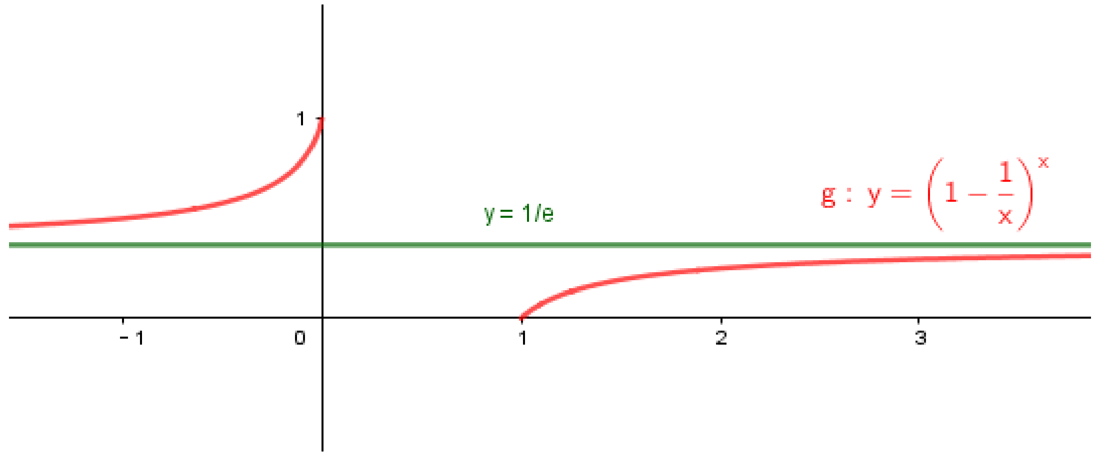
Example 8. 标题

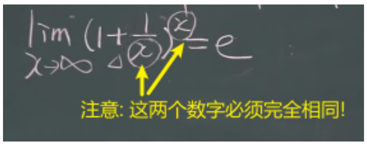
这里必须是加号, 如果题目不是,
就把它变换成加号, 再来套用该极限公式

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

如:

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\cdot -1} = e^{-1}$$





Example 9. 标题

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

这里的两个值必须完全相同，如果题目不是，
就把它变换成相同的，再来套用该极限公式

例：

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3x})^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{3x})^{3x}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$$

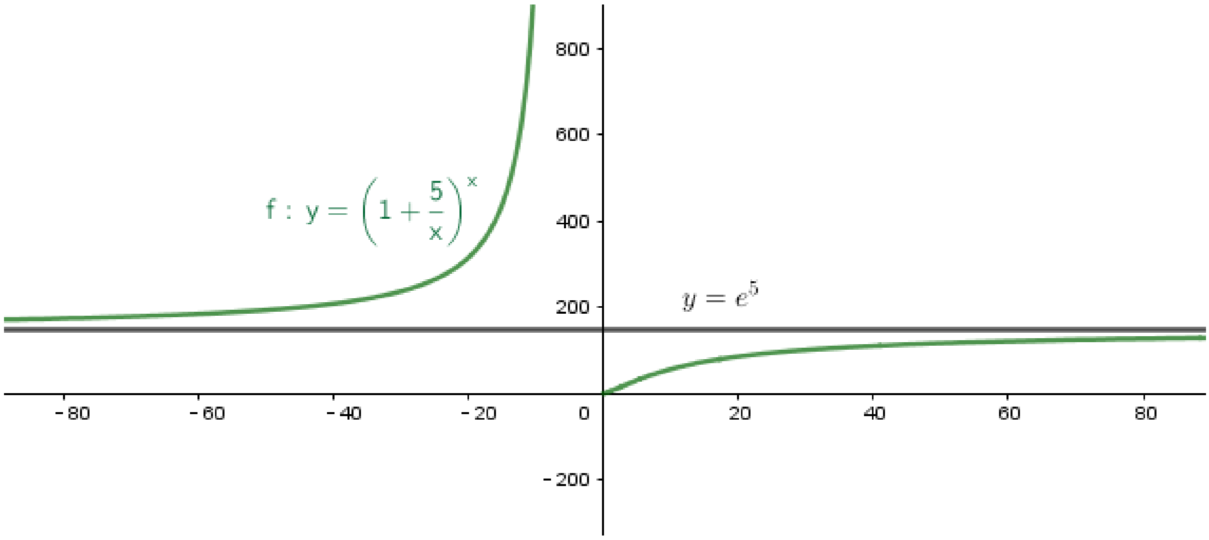
Example 10. 标题

这个值必须是1，如果题目不是，
就把它变换成1，再来套用该极限公式

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

例：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^x\\&=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{5}})^x\\&=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{5}})^{\frac{x}{5}\cdot 5}\\&=e^5\end{aligned}$$



Example 11. 标题

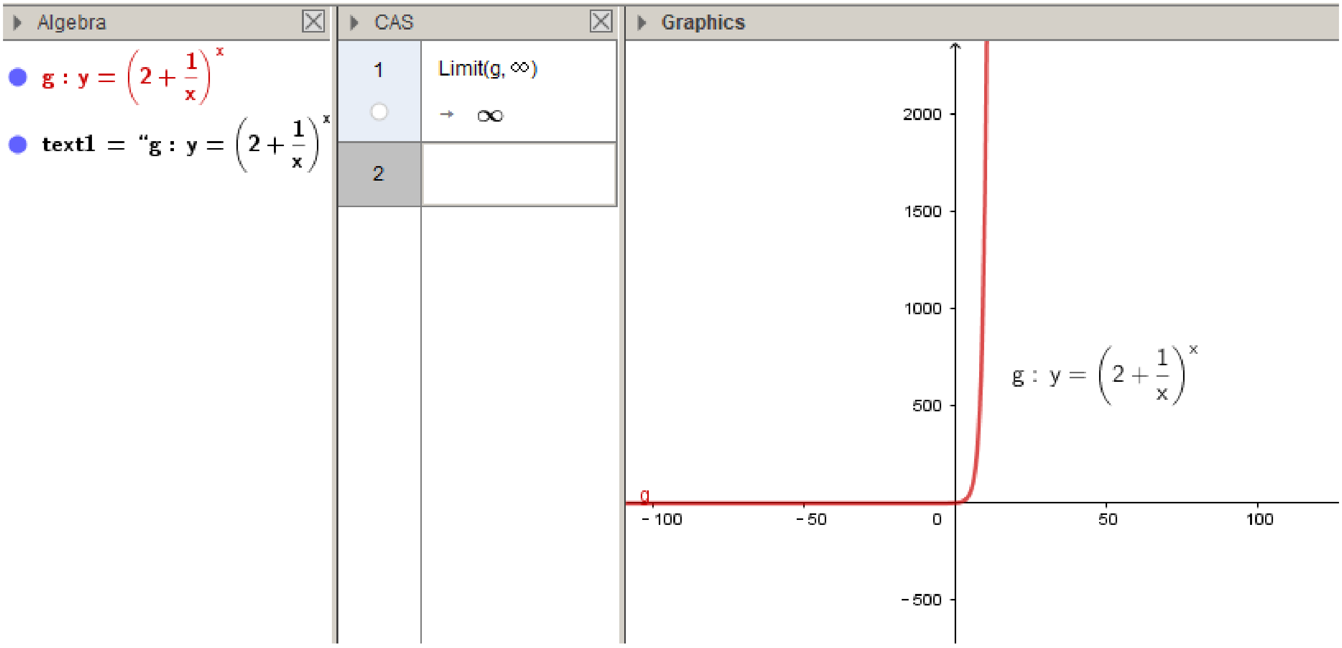
这个值必须是1, 如果题目不是,
就把它变换成1, 再来套用该极限公式

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

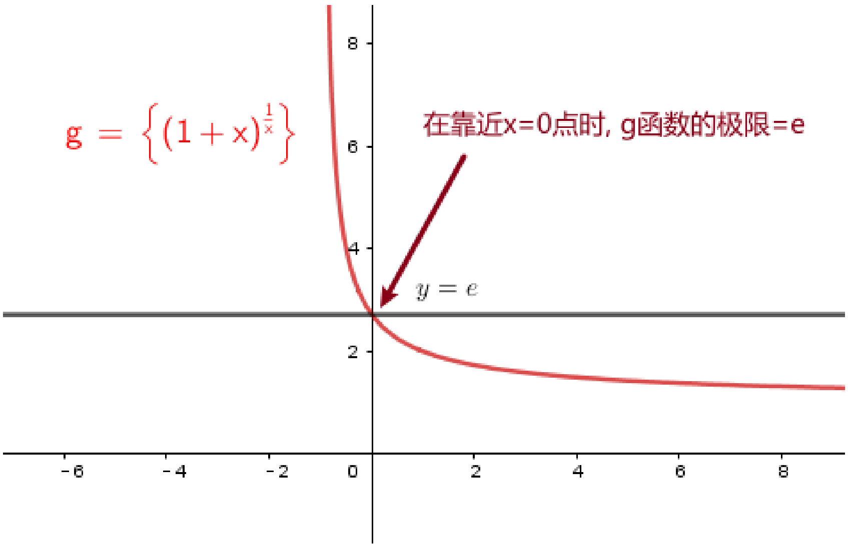
例:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^x=2^x\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=2^x\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}=2^x\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}}_{\text{这一块, 就是}e}\right]^{\frac{1}{2}}=2^xe^{\frac{1}{2}}$$

但这里, 2^x 的极限是什么, 就不确定了. 因为 x→ ∞时, x既可以是"正无穷大", 也可以是"负无穷大".



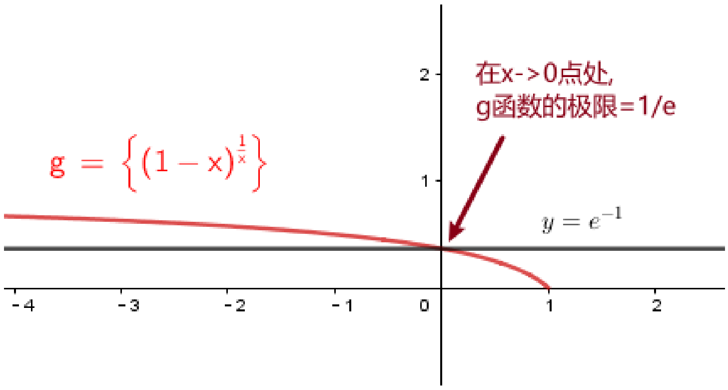
1.3. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$



Example 12. 标题

例:

$$\lim_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = (1+(-x))^{\frac{1}{x}} = (1+(-x))^{\frac{1}{-x} \cdot (-1)} = e^{-1}$$



在x->0点处,
g函数的极限=1/e
$g = \left\{(1-x)^{\frac{1}{x}}\right\}$
$y = e^{-1}$