导数_参数方程求导

Table of Contents

1. 如果要求"一阶导数", 只需做这个操作就行了: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

2. 如果要求"二阶导数", 就: ①先求一阶导 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, ② 然后再求二阶导.

3. 总结:

比如, 有这个参数方程:

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

t 是参数.

要求 "y 对 x求导":

1. 如果要求"一阶导数", 只需做这个操作就行了: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

Example 1. 标题

例如:

$$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$$

求y对x的导数.

我们就来做:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(e^t\sin t)'}{(e^t\cos t)'}=\frac{e^t\sin t+e^t\cos t}{e^t\cos t-e^t\sin t}$$

Example 2. 标题

例如:

$$\begin{cases}x=1+t^2\\y=t^3\end{cases}$$

求y对x的导数.

我们就来做:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(t^3)'}{(1+t^2)'}=\frac{3t^2}{0+2t}=\frac{3}{2}t$$

---

2. 如果要求"二阶导数", 就: ①先求一阶导 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, ② 然后再求二阶导.

即: 有参数方程

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$$

第1步: 先求y对x的一阶导:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

第2步: 再对一阶导, 再求一次导, 即二阶导:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Example 3. 标题

例如：

有参数方程$\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$

求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

第1步，先求一阶导：

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t^3+t^2)'}{(t-\ln(1+t))'} = \frac{3t^2+2t}{t' - \frac{1}{1+t}(1+t)'} = \frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}$$

$$= t(3t+2)\frac{1+t}{1+t-1} = (3t+2)(1+t) = 3t+3t^2+2+2t$$

$$= 3t^2+5t+2$$

第2步，先求2阶导：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y\text{对}x\text{的导数}}{x\text{对}t\text{的导数}}$$

$$= \frac{(3t^2+5t+2)'}{(t-\ln(1+t))'} = \frac{6t \;+\; 5 \;+0}{1-\frac{1}{1+t}}$$

3. 总结:

参数方程确定的函数的导数公式：（其中 y 是因变量，x 是自变量，t 为参

一阶导数$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\text{ 对 }t\text{ 的导数}}{x\text{ 对 }t\text{ 的导数}}$.

二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy}{dx}\text{对 }t\text{ 的导数}}{x\text{ 对 }t\text{ 的导数}}$.

三阶、四阶导数…的求导公式依此类推.