微分_三个中值定理

Table of Contents

"导数=0" 的点, 就叫"驻点" 或 "临界点".

微分学中, 有三个"中值定理" :

- 罗尔（Rolle）中值定理
- 拉格朗日（Lagrange）中值定理
- 柯西（Cauchy）中值定理

1. 罗尔中值定理 Rolle’s theorem → x轴上, 如果 a,b 两点的高度相同(即y值相同), 则 a,b范围内, 必能找到至少一个点c, 它(c)的切线的斜率=0, 即是水平的切线.

Rolle 中值定理是说: 如果 R 上的函数 f(x) , 满足以下3个条件:

1.在闭区间 [a,b] 上连续 (连续, 就是必须一笔画出)
2.在开区间 (a,b) 内可导 (可导, 就是曲线必须光滑, 不能有锐角)
3. a,b点处的 y 值相等, 即 f(a)=f(b)

则有: 在 x轴上至少会存在一个点 ξ, 它∈(a,b)，并且它的y值, 即 f'(ξ)=0 ← 它的导数为0, 就是它切线的斜率=0, 是水平的切线

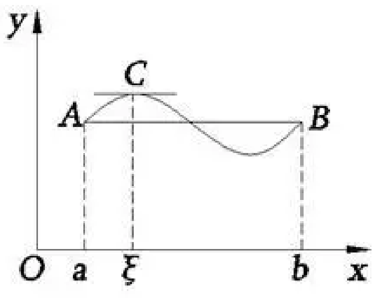


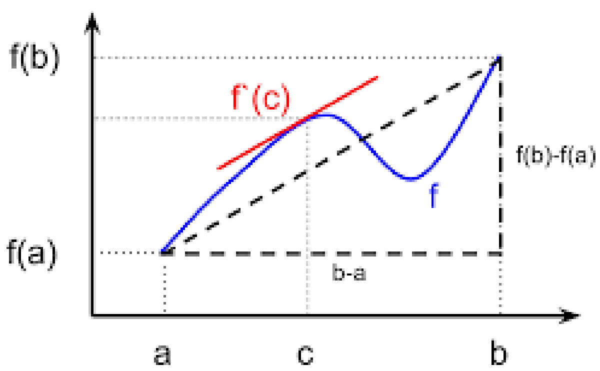
图 1

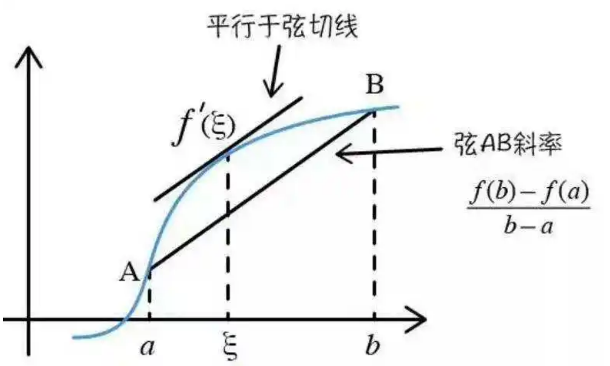
2. 拉格朗日（Lagrange）中值定理 Lagrange mean value theorem → x轴上 a,b范围内的曲线, 一定能找到至少一个点c, 它(c)的切斜的斜率, 就等于 ab直线的切斜的斜率.

"拉格朗日（Lagrange）中值定理", 只不过是"罗尔（Rolle）中值定理"的一种特殊形式而已.

该定理是说, 如果函数f(x)满足:
1.在闭区间[a,b]上连续
2.在开区间(a,b)上可导

那么: 在x轴上的开区间(a,b)内, 至少存在一点c, 它的导数, 即 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ← 也就是说, 在 a-b 的范围内, 一定会存在至少一个点(如点c), 它的切斜的斜率, 和 ab直线的切斜的斜率, 完全相等.
它反映了可导函数 在闭区间上的"整体的平均变化率", 与区间内"某点的局部变化率"的关系。

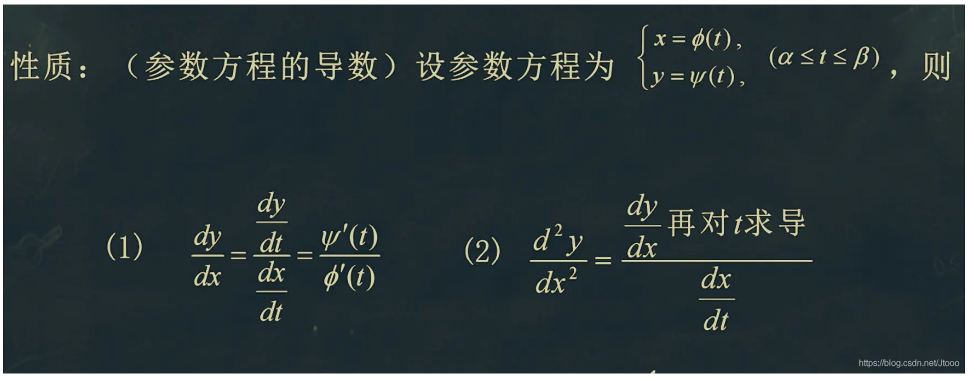




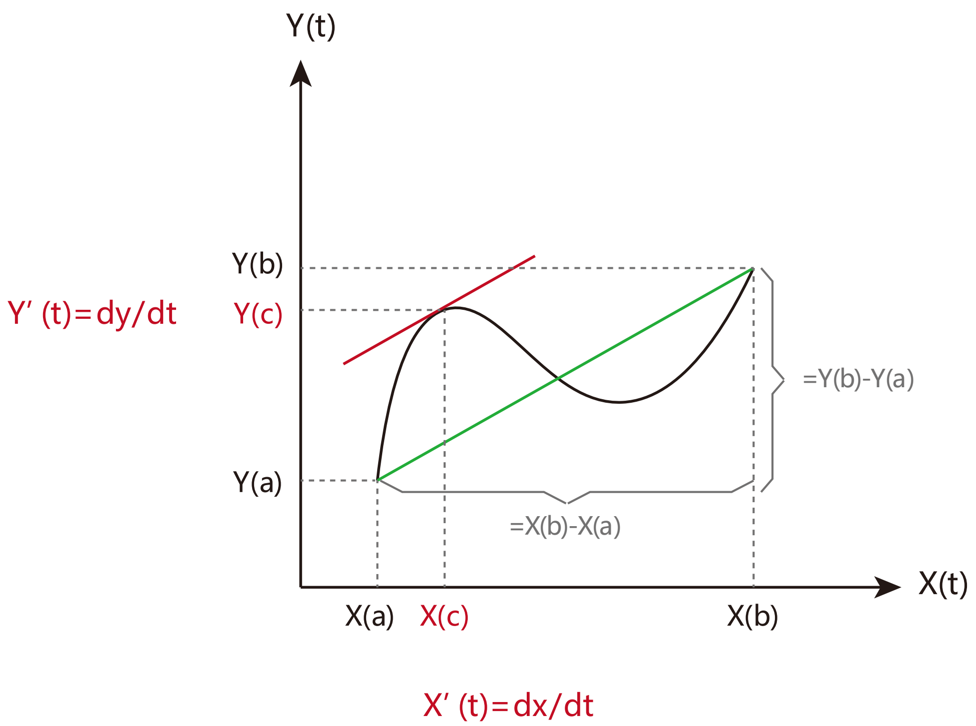
3. 柯西（Cauchy）中值定理 Cauchy mean value theorem → 在x轴的 ab 区间中, 存在某点c, 它的切线的斜率 $\frac{Y'(c)}{X'(c)}$ = AB 直线的切线的斜率

柯西中值定理, 是把拉格朗日（Lagrange）中值定理中的曲线方程, 改成了"参数方程"的形式来做了. 换言之, 柯西中值定理, 可看作是"拉格朗日中值定理"的推广。

首先, "参数方程"的求导公式为:



下面就是"柯西中值定理"的具体内容:



拉格朗日（Lagrange）中值定理说:
x轴上a, b范围内的曲线,一定能找到至少一个点c,
它(c)的切斜的斜率,就等于ab直线的切斜的斜率.

如果我们把曲线方程，改由“参数方程”来做定义，比如:

$$\begin{cases} x = fnX(t) \\ y = fnY(t) \end{cases}$$

并且，$X(t)$ 和 $Y(t)$ 满足:
1.在闭区间$[a,b]$上连续
2.在开区间(a,b)上可导
3.对 $\forall t \in (a,b)$，并且$X'(t) \neq 0$

则有：AB 直线的切线的斜率 $= \dfrac{Y(b)-Y(a)}{X(b)-X(a)}$
ab 间,必有至少一点c的切线的斜率，与AB直线的斜率相等.

点c的切线的斜率 $= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{Y'(t)}{X'(t)}$

既然存在c点的切线的斜率，与AB直线的切线的斜率 相等的情况，就有:

$$\frac{Y(b)-Y(a)}{X(b)-X(a)} = \frac{Y'(t)}{X'(t)}$$