不定积分

Table of Contents

1.18. $\int(\csc^2 x)dx = -\cot x + C$

1.19. $\int(\sec x \tan x)dx = \sec x + C$

1.20. $\int(\csc x \cot x)dx = -\csc x + C$

2. 不定积分 的性质

2.1. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2.2. $\int(kf(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$, 其中 k 是常数, 且 k ≠ 0. 注意: 如果k是一个变量, 如果该变量与x是无关的(即与"积分变量"无关的), 则可以朝外挪出去; 但如果该变量是与x相关的, 则就不能朝外挪.

2.3. 例题

---

1. 不定积分 indefinite integral → 即"原函数"的别名. 精确的说, "不定积分"就是"原函数的全体".

```
indefinite  /ɪnˈdefɪnət/
adj.
lasting for a period of time that has no fixed end 无限期的; 期限不定的
• She will be away for the indefinite future. 她将离开一段时间, 期限不定。

not clearly defined 模糊不清的; 不明确的
SYN imprecise
• an indefinite science 界定不明的科学


integral  /ˈɪntɪgrəl/
adj.
~ (to sth)being an essential part of sth 必需的; 不可或缺的 +
• Practical experience is integral to the course. 这门课程也包括实践经验。

[ usually before noun] included as part of sth, rather than supplied separately
作为组成部分的
• All models have an integral CD player. 所有型号都有内置的激光唱片机。

[ usually before noun] having all the parts that are necessary for sth to be
complete 完整的; 完备的
• an integral system 完整的系统
```

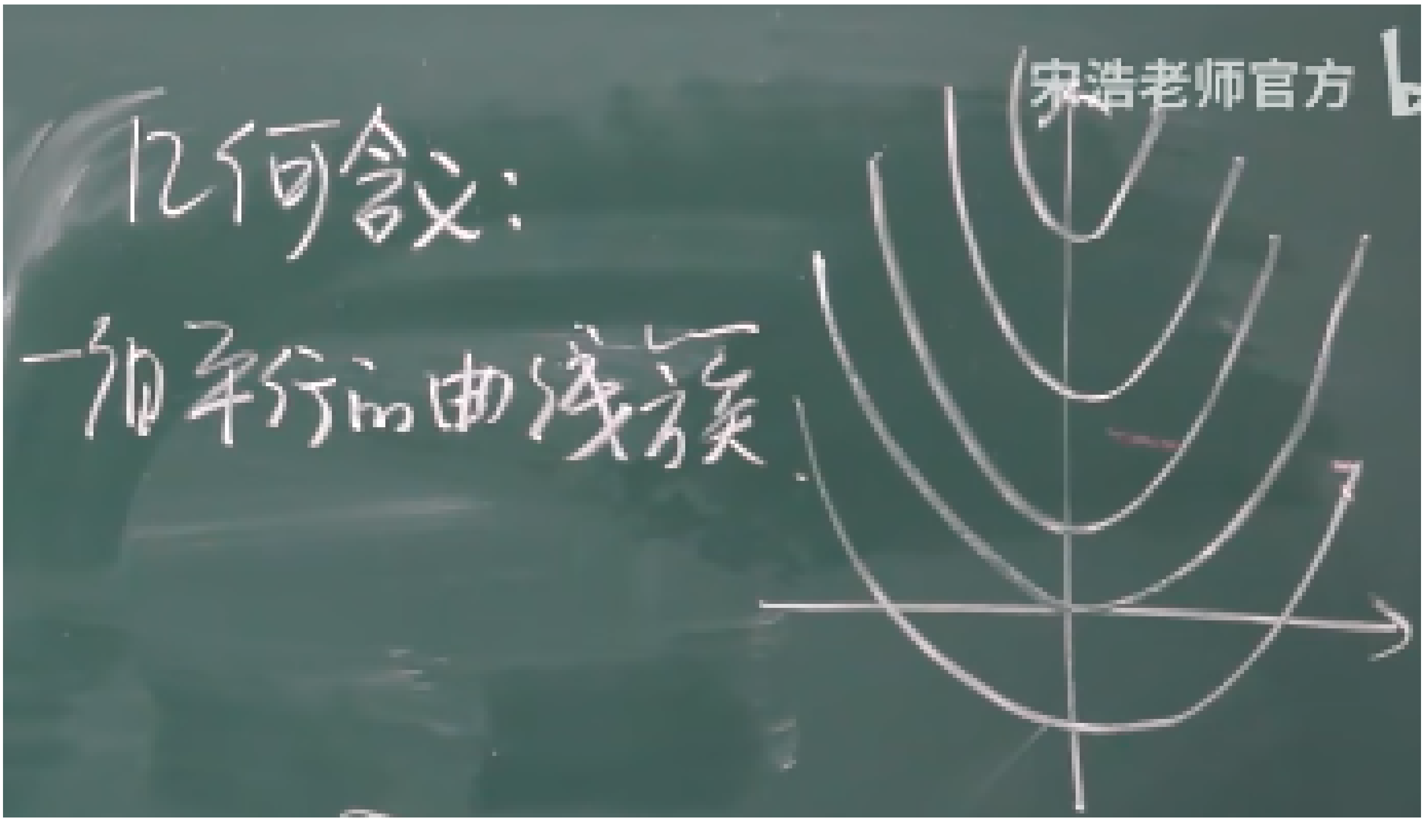
一个原函数, 求其导数, 能得到"导函数". **反过来, 从"导函数"算出其"原函数"的过程, 就是求其"不定积分"**. 换言之, "原函数"的别名就是"不定积分".

如: "原函数"是 F(x), 其"导函数"是 f(x), 即: $F'(x) = f(x)$, 则 F(x) 就是 f(x) 的其中一个原函数.

注意: 能得到相同"导函数"的原函数, 可以不止一个. 比如: 2x 是导函数, 其原函数可以是 x^2, 也可以是 x^2+3 等等.
所以, 我们从"导函数"来反求其"原函数", 只要求出一个"原函数" $f(x)$ 即可, 其他的的"原函数"可以表示为: $f(x)+C$, C是常数.

即:

$$(\text{原函数}F(x)+\text{常数}C)' = \text{导函数}f(x)$$



原函数什么时候会存在呢? → 连续(即能一笔画)的导函数, 一定有"原函数".

"原函数"的别名就是"不定积分", 求原函数, 就是求"不定积分". 即写作:

$$\int f(x)dx = \text{原函数}F(x)+C$$
$$\rightarrow \text{其中}, f(x)\text{叫做"被积函数"}, \text{也即"导函数"}.$$
$$\rightarrow dx\text{叫做"积分变量"}$$

符号 $\int$ 是英文 sum 的 首字母s 变形.

$\int$ 和 Σ 的区别是:

Header 1	Header 2
$\int$	$\rightarrow$ 是对"无穷个"连续的"无穷小量"的求和
Σ	$\rightarrow$ 通常是对"有限个, 或者离散的量"求和。

类似的:

Header 1	Header 2
dx	$\rightarrow$ 表示"无穷小"变量. 有"极限"的概念在里面.
Δ	$\rightarrow$ 表示"有限小"的变量.

Header 1	Header 2
Column 1, row 1	$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}}dx}_{\text{原函数}}\right] = \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}} \leftarrow$ 对原函数(不定积分)求导，依然回到导函数 该式子也可写成: $d\left[\underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}}dx}_{\text{原函数}}\right] = \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}}\ dx$
	$\int \underbrace{F'(x)}_{\text{原函数的导数}} \underbrace{dx}_{\text{积分变量}} = \underbrace{F(x)}_{\text{原函数}} + C \leftarrow$ 原函数$F(x)$对x求导，得到$F'(x)$ 注意比较：“积分变量”部分(即$d?$部分)的意义： $\int \underbrace{1}_{\text{原函数的导数}} \underbrace{dF(x)}_{\text{积分变量}} = \underbrace{F(x)}_{\text{原函数}} + C \leftarrow$原函数$F(x)$对$F(x)$求导，得到1

所以:

$$\int 1dx = x + C$$

$$\int 1du = u + C$$

$$\int 1d(x^2 - 3) = x^2 - 3 + C = x^2 + C$$

$$\int 1dF(u) = F(u) + C$$

对照表	
不定积分	基本初等函数的导数
1. $\int kdx = kx + C$(k常数)	$(C)' = 0$(C为常数)
2. $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha+1}$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$ $((\log_a{}^{x})' = \frac{1}{x\ln a})$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $((arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2})$
5. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \arcsin x + C$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $((\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$(\cos x)' = -\sin x$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + C$	$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x = -\cot x + C$	$(\cot x)' = \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
12. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$(e^{x})' = e^{x}$
13. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{[illegible]} + C$	$(a^{x})' = a^{x}\ln a$

$\ln a$	
14. $\int shxdx = chx + C$	$(chx)' = shx$
15. $\int chxdx = shx + C$	$(shx)' = chx$
16. $\int \tan xdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	
17. $\int \cot xdx = -\ln\lvert\sin x\rvert + C$	
18. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a} + C$	
19. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C$	
20. $\int \csc xdx = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	
21. $\int \sec xdx = \ln\lvert\csc x + \tan x\rvert + C$	

1.1. 公式表

三、不定积分基本公式：

1. $\int kdx = kx + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + c$

5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$

8. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

9. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

10. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

11. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

12. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int cs\,c^2\, x dx = -\cot x + c$

13. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

16. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

17. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

18. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

19. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

1.2. $\int (0)dx = C$

1.3. $\int (k)dx = kx + C$

1.4. $\int (x^n)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ \ n \neq -1$

Example 1. 标题

例如：

$$\int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + C$$

Example 2. 标题

例如：

$$\int 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{1+1} 2x^{1+1} + C$$

$$= x^{2} + C$$

1.5. $\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln|x| + C$

1.6. $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

1.7. $\int (e^x)dx = e^x + C$

1.8. $\int (a^x)dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

1.9. $\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \arctan x + C$, 或 $= -arc\cot x + C$

1.10. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \arcsin x + C$, 或 $= -\arccos x + C$

1.11. $\int (\sin x)dx = -\cos x + C$

1.12. $\int (\cos x)dx = \sin x + C$

1.13. $\int (\tan x)dx = -\ln|\cos x| + C$

1.14. $\int (\cot x)dx = \ln|\sin x| + C$

1.15. $\int (\sec x)dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

1.16. $\int (\csc x)dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

1.17. $\int (\sec^2 x)dx = \tan x + C$

1.18. $\int (\csc^2 x)dx = -\cot x + C$

1.19. $\int (\sec x \tan x)dx = \sec x + C$

1.20. $\int (\csc x \cot x)dx = -\csc x + C$

---

2. 不定积分 的性质

2.1. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2.2. $\int (kf(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$, 其中 k 是常数, 且 k ≠ 0. 注意: 如果k是一个变量, 如果该变量与x是无关的(即与"积分变量"无关的), 则可以朝外挪出去; 但如果该变量是与x相关的, 则就不能朝外挪.

2.3. 例题

Example 3. 标题

例如：

$$\int \sqrt{x}\,(x^2-5)dx$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}(x^2-5)dx$$

$$=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}dx \;-\; \int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}-5\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

Example 4. 标题

例如：

$$\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2} dx \leftarrow \text{根据公式：} (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

←“分母的次数”比“分子的次数小”，我们就能把该分式拆分成“和”的形式，就能利用“不定积分”的性质公式了

$$= \int \left(x-3+3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x| - \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+x^{-1}+C$$

Example 5. 标题

例如：

$$\int 2^x e^x dx$$

$$= \int (2e)^x dx \leftarrow \text{根据公式：} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$= \frac{(2e)^x}{\ln\ 2e} + C \leftarrow \text{分母上根据公式} \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$= \frac{2^x e^x}{\ln 2 + \ln e} + C$$

$$= \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$$

Example 6. 标题

例如:

$$\int\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)dx \leftarrow \text{根据三角函数的“倍角公式”:}\ \cos(2A)=\cos^2A-\sin^2A$$

$$=2\cos^2A-1$$

$$=1-2\sin^2A$$

$$\text{就有:}\ \sin^2A=\frac{\cos(2A)-1}{-2}=\frac{1-\cos(2A)}{2}$$

$$\text{所以}\ \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{2}\right)$$

$$=\int\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{2}dx - \int\frac{\cos x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x+C$$

Example 7. 标题

例如：

$$\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx \leftarrow \text{分母上，根据三角函数“倍角公式”：} \sin(2A)=2\sin A\cdot\cos A$$

即 左右倒过来：$2\sin A\cdot\cos A=\ \sin(2A)$

就有：$2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin\left(2\frac{x}{2}\right)$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{x}{2}\right)$$

$$(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2})^2=(\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{x}{2}\right))^2 \leftarrow \text{根据指数公式：} (ab)^n=a^n b^n \quad (a,b>0)$$

$$(\sin\frac{x}{2})^2(\cos\frac{x}{2})^2=\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2$$

所以原式 $=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2}dx$

$$=\int \frac{1}{\frac{1}{4}\ \sin^2 x}dx \quad =4\int \frac{1}{\sin^2 x}dx \quad =4\int (\sin x)^{-2}dx \leftarrow \text{根据三角函数 } \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

所以 $\sin x \ = \ \frac{1}{\csc x}=\csc^{-1}x$

$$(\sin x)^{-2}=\csc^2 x$$

$$=4\int(\csc x)^2 dx \leftarrow \text{ 根据不定积分公式：} \int(\csc^2 x)\,dx=-\cot x+C$$

$$=4\cdot(-\cot x+C) \ = \ -4\cot x+ \underbrace{4C}_{\text{就是常数}C}$$

Example 8. 标题

例如：

$$\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}dx \leftarrow \text{利用多项式的除法来做}$$

$$=\int(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1})\,dx$$

$$=2\int x^2-\int 1+4\int \frac{1}{x^2+1}\ dx \leftarrow \text{ 根据公式 } \int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$$

$$=2\cdot\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}-x+4\arctan x+C$$

$$=\frac{2}{3}x^3-x+4\arctan x+C$$