目录

文件名

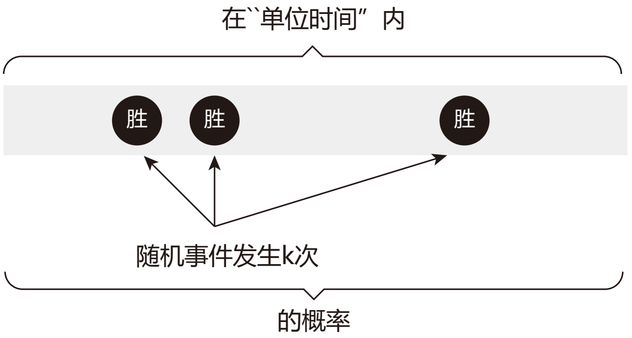
1 离散型：泊松分布 (poisson distribution)：

$$P\left(事X=想\right)=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}$$

“泊松分布”研究的是：在“单位时间(或空间)”内，“随机事件发生任意次数”的概率.

即，“泊松分布”是为了解决这样的问题的：单位时间内，随机事件发生的次数，即：一件事发生的概率P是已知的，但它的发生与否是随机的. 我们想要求它(即该随机事件)发生k次(或$\geq k$次, $\leq k$次 等问题）的概率.

当一个随机事件，以固定的“平均瞬时速率λ”（或称“密度”）随机且独立地出现时，那么这个事件在“单位时间(面积或体积)”内出现的次数或个数，就近似地服从“泊松分布”.
泊松分布的参数λ：是单位时间(或单位面积)内，随机事件的平均发生次数.



“泊松分布” 的期望和方差，均为λ.

$$P\{X=你希望“随机事件A”发生的次数k\}$$
$$=\frac{(单位时间内,A的平均发生次数\lambda)^{你希望A发生的次数k}}{(你希望A发生的次数k)!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,...,n$$
$$即=\frac{\lambda^{k}\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

上面的公式中:
- λ：是单位时间内，随机事件A的**平均发生次数**.
- k：是**你希望的，想要的** 随机事件A 发生的次数.

所以，泊松分布的“概率函数”就是: $\boxed{P\left(X=你想要发生的次数\right)=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}}$

记作：$\boxed{X\sim P(\lambda)}$ $\leftarrow$ 即：我们用 $Po(\lambda)$ 来表示“泊松分布”. 比如，我们将$Y\sim Po(4)$ 读作: “变量Y” 遵循 “λ等于4” 的泊松分布.

例

“50年一遇”的大雨, 结果三年中下了两场, 这是怎么回事?
其实“50年一遇”是个数学语言, 它是指: “长期来看”, 这样的大暴雨是平均50年发生一次. 注意关键词“长期”. 长期是多长? 在数学中, 是指“很长很长”的时间段.
所以对“长期”的理解不到位, 就是概率问题的结果“反直觉”的原因.

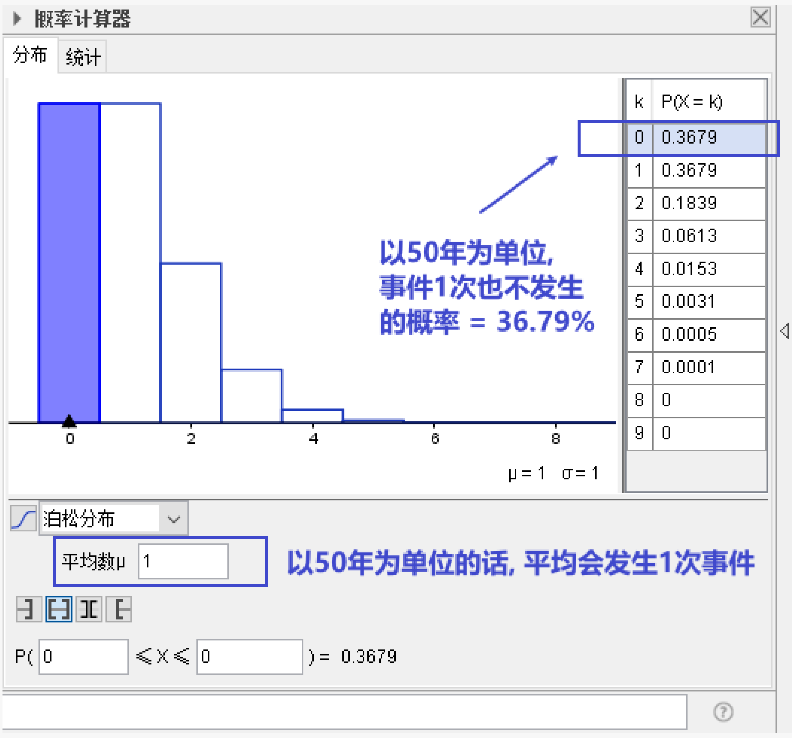
平均50年发生一次, 可以是: 前4年, 每年都发生一次; 之后的196年一次都没发生. 200除以4，还是50年一次.

所以, 我们更想知道的是: 在任何一段具体的、有限的时间内, 比如5年之内，发生1次大暴雨的概率是多少? 发生2次大暴雨的概率是多少?

即: 当我们知道了一个随机事件A发生的概率，也知道A发生的概率符合“正态分布”之后, 那么在某一段时间或者空间间隔内,这个随机事件“发生的次数”的概率分布, 是怎样的呢? 这个问题, 就能用“泊松分布”来解决.

泊松分布的公式是: $\boxed{P(X=\text{你希望发生k次})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$
其中,
→ **k：为你希望“随机事件”发生的次数.**
→ **λ：为单位时间内, 随机事件的平均发生次数.** 比如, 50年一遇的大雨：
- 如果以50年为“单位时间”的话, 发生次数就是: 1次. (进一步, 我们可以算出即：每年发生$\frac{1}{50}$ 次).
- 如果以100年为单位的话, 发生次数就是：100年× 每年$\frac{1}{50}$次 $=$ 2次
- 如果以5年为单位的话, 发生次数就是：5年× 每年$\frac{1}{50}$次 $=$ 1/10次.

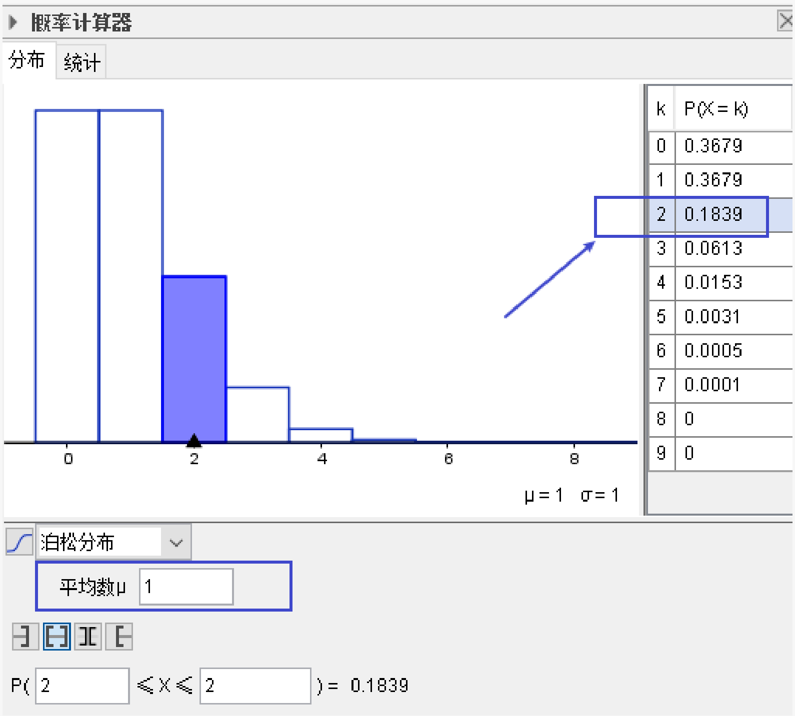
那么套用“泊松分布公式”, 来算一下, 50年中, 一次上面的大雨也不发生的概率: 即 k=0次 ：



k	P(X = k)
0	0.3679
1	0.3679
2	0.1839
3	0.0613
4	0.0153
5	0.0031
6	0.0005
7	0.0001
8	0
9	0

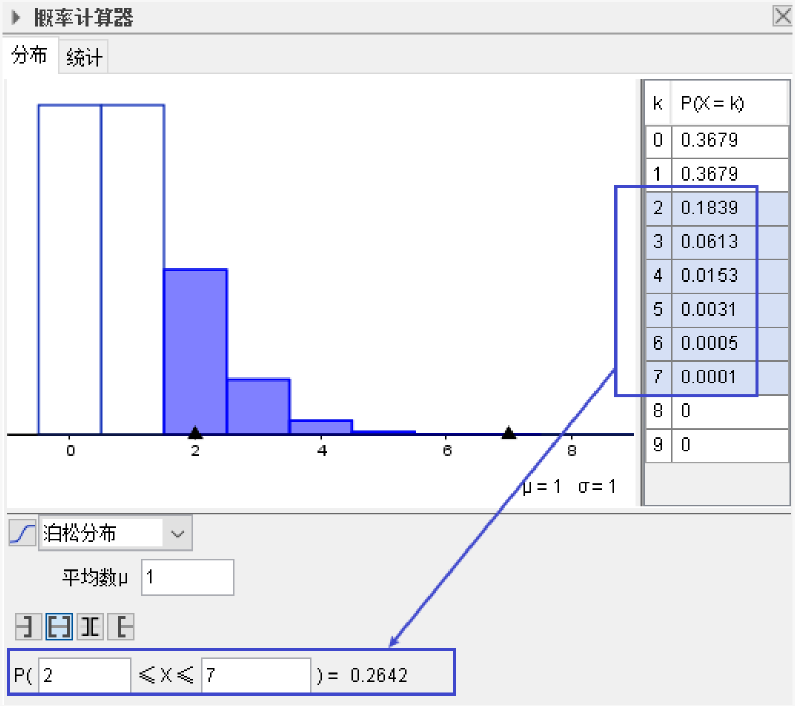
再算一下 K=2, 就是接下来的“50年为单位”的话, 其中发生2次大暴雨的概率, 答案

是18%. (下图)



上图的右表中，表示的就是：50年一遇的大雨．你就以50年为“单位时间段”（即平均会发生一次这种大雨，即 μ 或 λ =1)，在这50年中，你遇到0次，1次，2次，... 这种大雨的真实概率，是多少？

50年中，发生2次和2次以上的概率是：用1 减去发生0次和发生1次的概率．= 1 - (0.3679 × 2) = 26%，说明这并不是很小的概率事件．

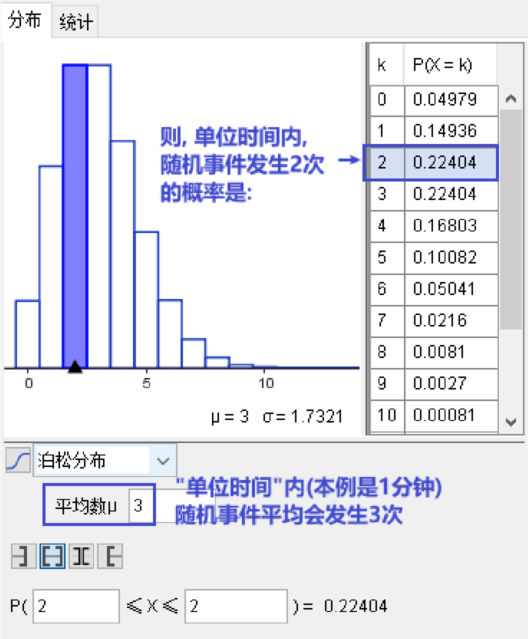


例

某收费站，平均每分钟通过的车辆为3辆．问：1分钟内，恰有2辆车经过的概率，是多少？即：

- 随机事件A：收费站有车经过.
- λ (单位时间内, 随机事件平均发生的次数. 一般用 λ 或 mean 来表示.)：本例, 单位时间就是“每分钟”, 随机事件A 发生3次.
- k (你希望随机事件发生的次数. 一般用 k 或 x 来表示.)：本例, 就是 2. (收费站有车经过, 发生2次)

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$
$$P\{X=\text{想}\}=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}=\frac{3^2e^{-3}}{2!}=0.224042$$



例

你创建了一个关于概率的在线课程. 通常，你的学生每天问你大约4个问题, 但昨天他们问了7个. 你想知道昨天这件事, 事实上发生的可能性算多大?

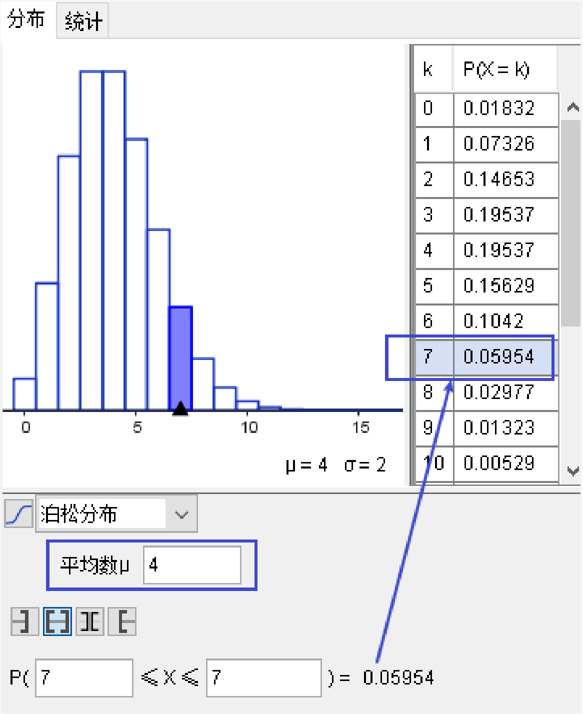
即：

- 随机事件A：是学生提问.
- λ：表示在单位时间内, 随机事件发生的平均次数. 本例就是 =4 (单位时间1天里面, 平均上, 学生提问会发生4次).
- k：你感兴趣的“随机事件发生次数”. 本例就是 k=7.

即:

$$P\{X=\text{想}\}=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}$$
$$P\{X=7\}=\frac{4^7\cdot e^{-4}}{7!}=0.0595404$$

因此, 你收到7个问题的几率, 只有6%.



例

某航空公司, 发生事故(即随机事件A) 的平均值为: 每月 0.05次.

问:

→ 1年内, 发生“0事故”的概率是?

随机事件, 平均每月发生0.05次, 这里的“单位时间”是以“月”为时间段的. 而问题问的是“1年内”, 是以“年”为“单位时间段”的. 所以我们要统一两者的“单位时间”段. 把“月”换算成“年”来做.

即: 事故的“月概率”是 0.05次, 则事故的“年概率”$=0.05\times12=0.6$.

$$P\{X=想\}=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}$$

$$P\{X=\underbrace{0}_{随机事件在单位时间内,发生0次}\}=\frac{\underbrace{0.6}_{事故的年概率}{}^{0}\cdot e^{-0.6}}{0!}=0.548812$$

→ 1年内, 发生了“1次事故”的概率是?

$$P\{X=1\}=\frac{0.6^{1}\cdot e^{-0.6}}{1!}=0.329287$$

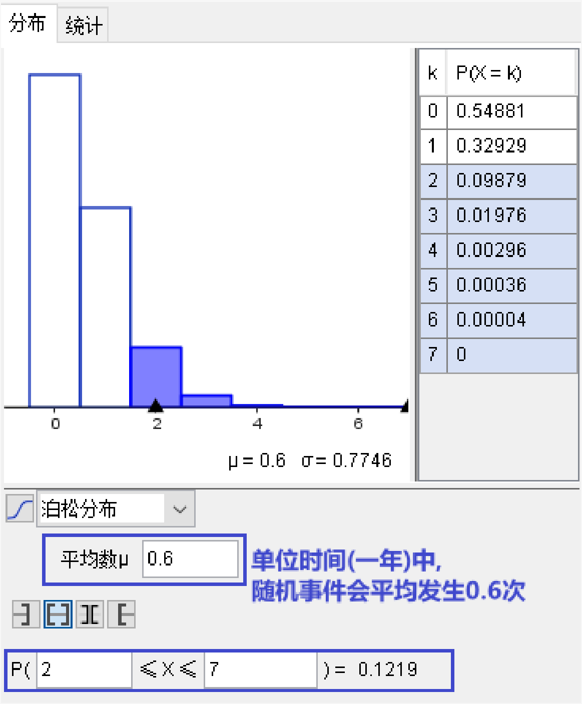
→ 1年内, 发生事故 ≥1次的概率是?

$$=P\{X=2\}+P\{X=3\}+...$$

$$=1-[P\{X=0\}+P\{X=1\}]$$

把随机事件发生0次和1次的情况, 扣除掉后, 剩下的就是超过1次的所有情况了.

$$=1-\frac{0.6^{0}\cdot e^{-0.6}}{0!}-\frac{0.6^{1}\cdot e^{-0.6}}{1!}=0.121901$$



例

某客服工作, 每分钟收到客户来电的次数, 满足 $X \sim P\left(\underbrace{3}_{即\lambda}\right)$

问: 你“每分钟收到来电不超过5次”的概率.

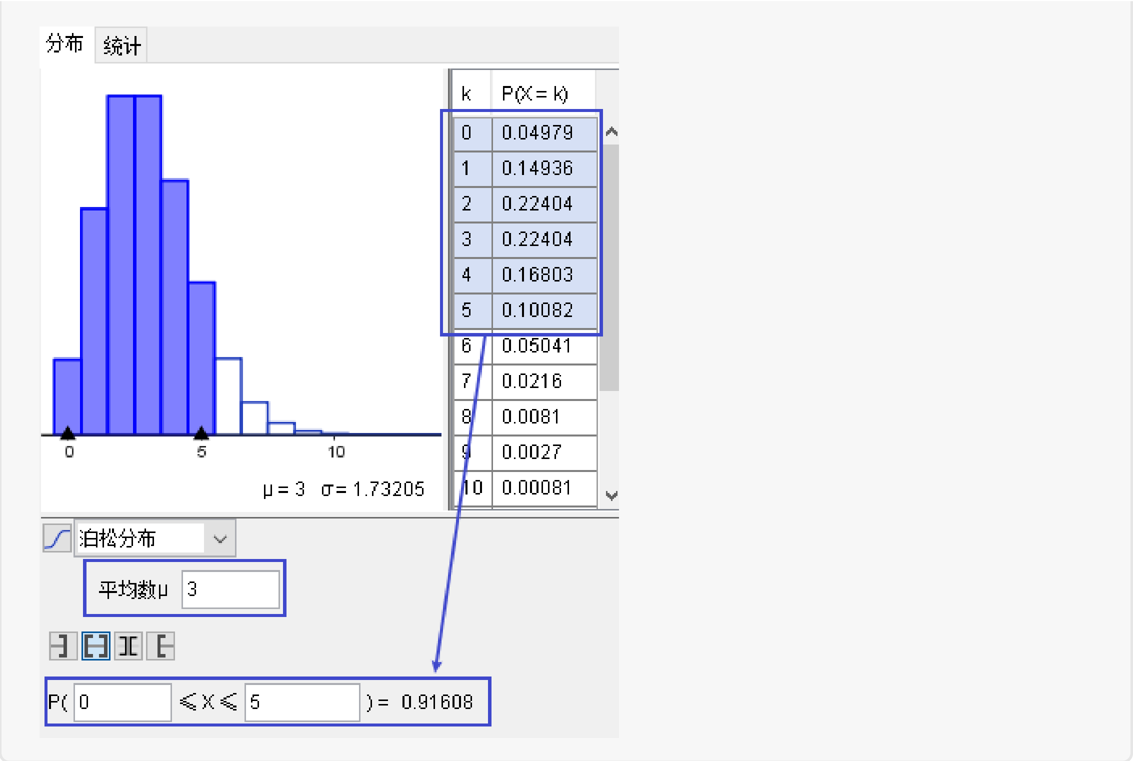
即:

- 随机事件A：你收到客户来电.
- λ：表示在单位时间(本例是1分钟)内, 随机事件发生的平均次数. 本例就是 =3.
- k：你感兴趣的“随机事件发生次数”. 本例就是 $k \leq 5$.

$$P\{X=想\}=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}$$

$$P\{X=k\leq 5\}=\sum_{k=0}^{5}\left[P\left\{X=k\right\}\right]$$

$$=\frac{3^0}{0!}e^{-3}+\frac{3^1}{1!}e^{-3}+...+\frac{3^5}{5!}e^{-3}=0.916$$



1.1 泊松分布的意义 — 为我们开启了“统计推断”的大门

连续2年下大暴雨，这个现象是否正常？ 这个问题的困难在哪儿呢？ — 数据太少． 我们没有1000年的降雨资料．即便有，在长期、无限面前也是个渣渣，还是太少．

同样，物理学家要研究放射性物质的半衰期，可绝大多数物质，衰变期极长，长到我们没法直接测量．连一个完整的衰变周期都观测不到，那怎么办呢？用“泊松分布”解决．
找一堆铋209原子，统计一下在几个确定的时间间隔中，这堆原子中有多少个发生了衰变？只要这个数字服从“泊松分布”，反过来就证明铋209原子的衰变，也服从“正态分布”． 就可以用“正态分布”来直接计算．

在这些问题的解决中，统计数据，和概率论的“概率分布 f(x)”，就被连在了一起．
而在“泊松分布”之前，概率和统计是两个不同的学科．“概率”研究“未发生”的随机事件；“统计”描述“已发生”的现实． 那会儿只有描述统计，没有推断统计． 泊松分布开启了“推断统计”的大门，第一次把概率和统计连接在一起．

1.2 泊松分布，其实就是“二项分布”的一种特殊情况．当二项分布中的 n → ∞; p→ 0 时，我们就能用“泊松分布”，来近似该“二项分布”．

当“二项分布”的n很大，而p很小时，我们就适合用 “泊松分布”，来作为“二项分布”的近似． 其中 λ 为np．
通常当$n \geq 20$，$p \leq 0.05$时，就可以用“泊松公式”近似的计算．

即：当二项分布中的 n → ∞; p→ 0 时，我们就能用“泊松分布”，来近似该“二项分布”．
二项分布的“期望值”，是 $E(X)=np=\lambda$，所以也就是泊松分布中，$\lambda=np$．

例

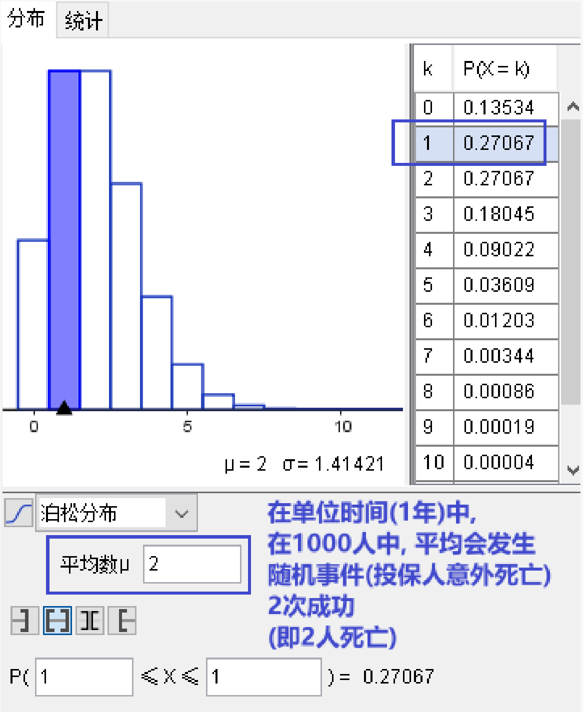
某保险公司统计，其单位时间 (1年)内，随机事件(每位投保人发生意外死亡)的平均发生概率是 0.002.
现从投保者中抽出1000人 (即单位时间(1年)内，这1000人里面，会平均死亡：1000人× 0.002的概率/人 = 2人).
问：下一年度，会有1人死亡(而获理赔)的概率?

这是一个二项分布 (用来描述 "n次试验中，事件A恰好发生k次"的概率. 即 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$). 本例中，n=1000，p=0.002. 即:
$P\{X=\underbrace{1}_{成功发生死亡事件\ 1人}\}=C_{1000}^{1}\cdot 0.002^{1}\cdot(1-0.002)^{1000-1}=0.27067$

但，由于 n很大，p很小，$np=1000\times 0.002=2=\lambda$，np的值适中，我们就能用"泊松分布"，来近似"二项分布".
即:

$$P\{X=想\}=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}$$

$$P\{X=1\}=\frac{\underbrace{2}_{均值是2人死亡}{}^{1}\cdot e^{-2}}{\underbrace{1}_{你想发生1人死亡}!}=0.270671$$



例

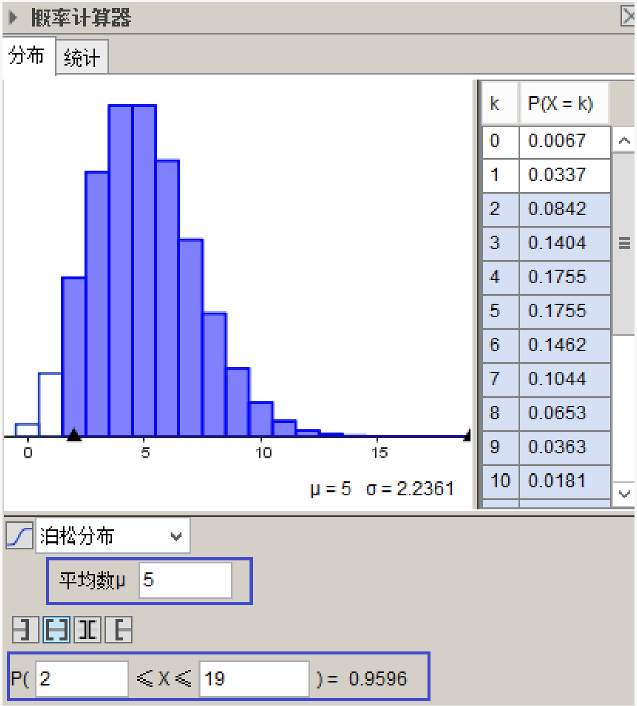
某病(非传染病)，发病率是 $\frac{1}{1000}$，某地区有5000人，问至少2人得病的概率?
即:
- 随机事件A：有人得病.
- λ： 表示在单位空间(本例是某地区)内，随机事件发生的平均次数. 本例就是 = 5000人× 1/1000 = 5人.

- k：你感兴趣的“随机事件发生次数”. 本例就是≥2人(得病).

$$P\{X=\text{想}\}=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}$$

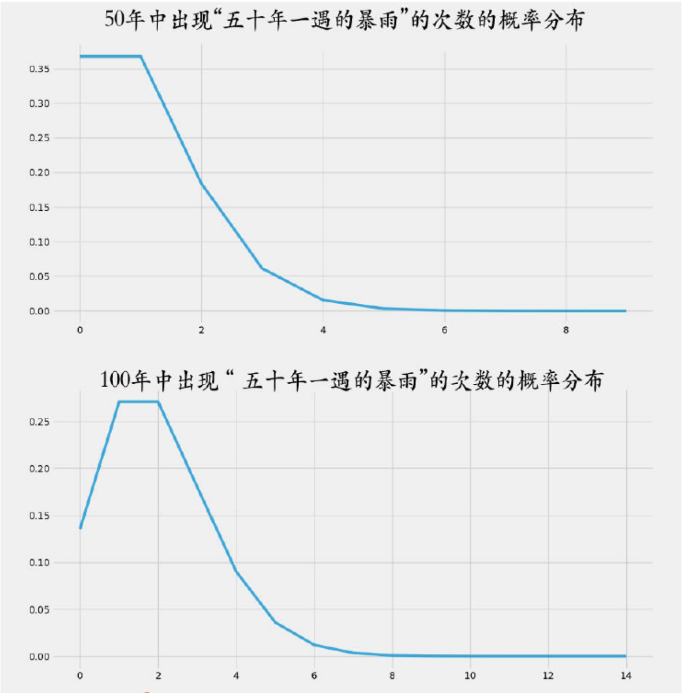
$$P\{X=k\geq 2\}=1-[P\,(X=0)+P\,(X=1)]$$

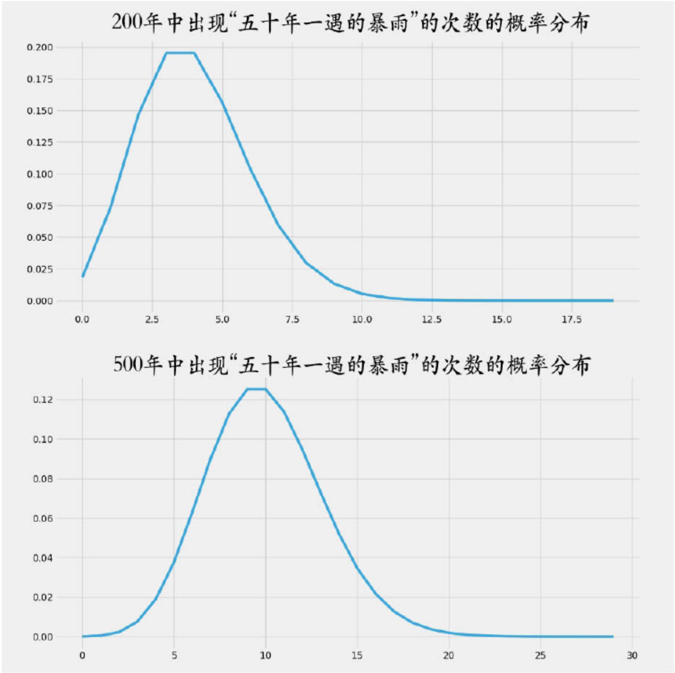
$$=1-\frac{5^0}{0!}e^{-5}-\frac{5^1}{1!}e^{-5}=0.959572$$



1.3 性质：单位时间段越长，“泊松分布”会向“正态分布”看齐

随着我们把“时间单位”拉长，我们会发现：“泊松分布”的曲线越来越像“正态分布”.





1.4 性质：前后两次事件的“发生时间间隔”, 无“记忆性”

泊松分布中, 事件对两次发生的时间间隔, 是无”记忆性”的.
即：后一次事件不会记得“距离它前一次发生, 时间隔了多久”. 换言之, 事件之间是相互“独立”的关系.
正因此, 就一定存在一些“短间隔”和“长间隔”，而很难有“一长一短、一长一短”这样有规律的出现. 否则就不叫”无记忆”了.