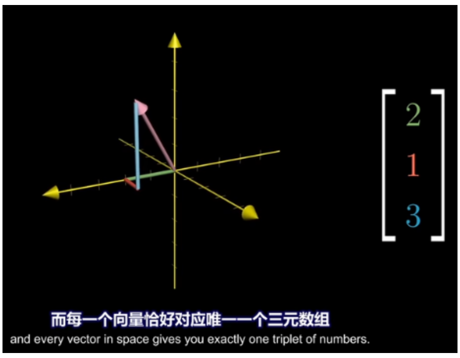
目录

向量组的线性相关性

1 向量 vector

通常, 当你考虑 “一个” 向量时, 就把它看成是 “箭头”.
当你考虑 “多个” 向量时, 就把它看成是 “箭头终点” 的那个点 (point).

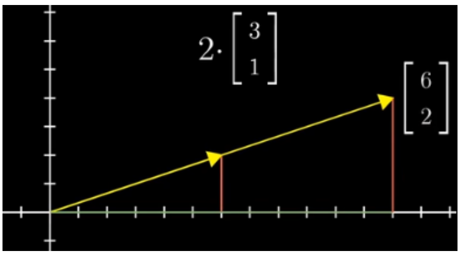
注意: 向量的值, 表示的是坐标轴的位置, 而不是该向量线段的长度 (即不是 ‘模” 的概念).



---

2 向量的 “数乘” : 系数 k 的作用, 是把向量伸缩 k 倍

$$2\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix}$$



系数 k 为负数的话, 就是把向量朝 “反方向” 伸缩 k 倍.

---

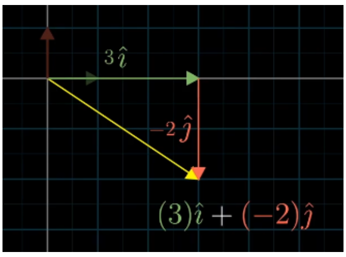
3 单位向量: 基 basis

The **basis** of a vector space /is a set of linearly independent vectors /that span the full space.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\imath}=1\\ \hat{\jmath}=1\end{array}\right\}\leftarrow \text{称为“单位向量”或“基”}$$

事实上，每当我们描述一个向量时，它都依赖于我们正在使用的“基”.

$$\vec{v}=\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right|=3\hat{\imath}+(-2)\hat{\jmath}$$



向量的终点坐标，其实就是系数倍的“基向量”的线性组合.

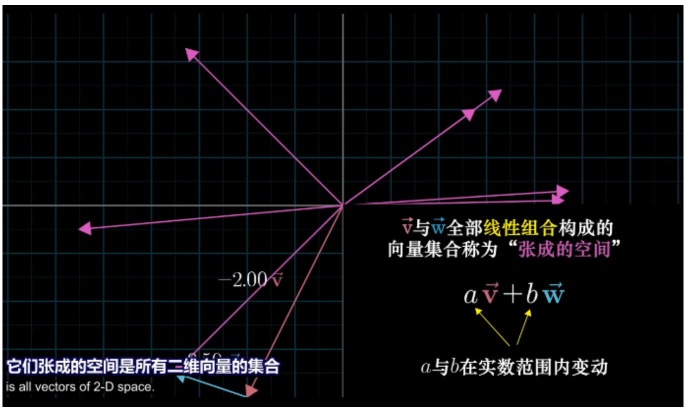
---

4 张成 span

the span of $\vec{v}$ and $\vec{w}$ /is the set of all their linear combinations.

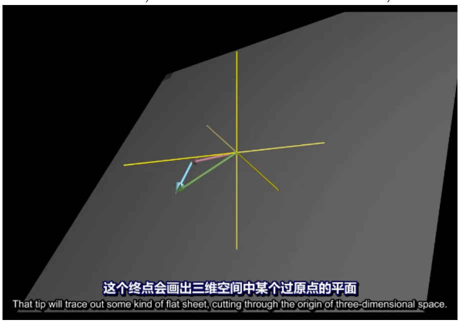
the set of all possible vectors /than you can reach /is called the span of those two vectors. ← 相当于“势力范围”，就是张成.

两个斜率不同的向量 (a,b)，自由伸缩，它们的和 (即 a+b=c)，即新向量 c 的终点，能遍及二维平面上的任何点处.

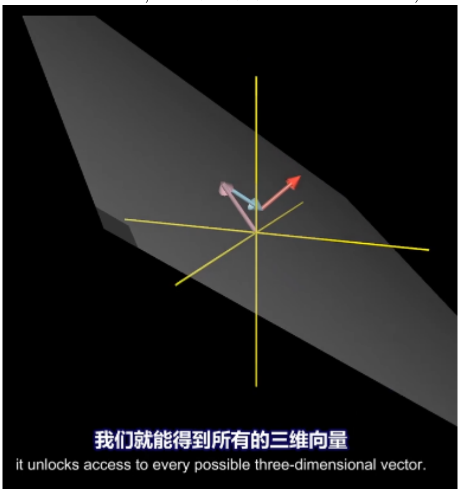


但如果两个向量都是“零向量”的话，它们的系数倍的和，也永远被束缚在原点 (0,0) 了. $k_1\vec{0}+k_2\vec{0}=0$

三维空间中, 两个斜率同的向量, 能 “张成” 出 “过原点” 的一个平面.



三维空间中, 三个斜率不同的向量, 它们的和, 能张成出三维空间中所有的地方.



---

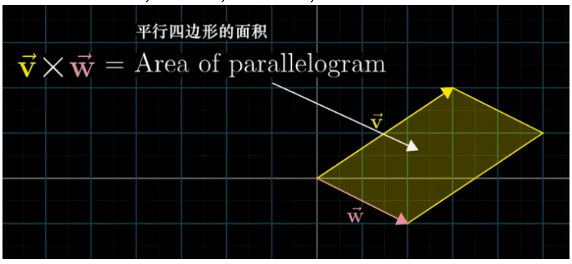
5 向量的叉积 (外积) : $\vec{v} \times \vec{w}$

向量的叉积 (外积) exterior product 或 cross product

5.1 叉积 (外积) 的几何意义: (1) 在二维空间中, 是由这两个向量围成的 “平行四边形” 的面积, 即是一个数值. (2) 在三维空间中, 是一个垂直于这个 “平行四边形” 平面的 “新向量”.

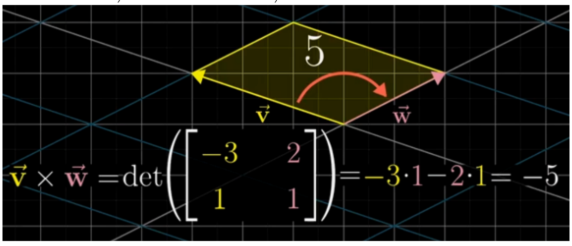
【在二维空间中】:

几何意义上, 叉积, $\vec{v} \times \vec{w}$, 就是由这两个向量围成的 “平行四边形” 的面积.



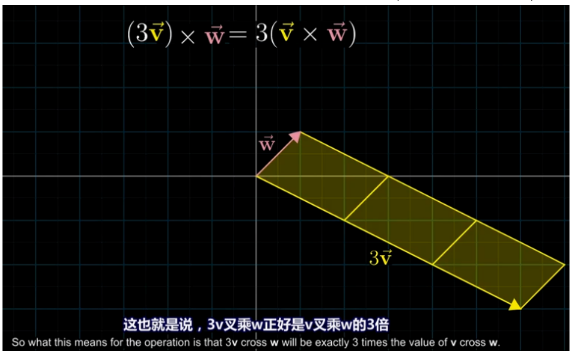
注意: 顺序会对 “叉积” 有影响: 如果 $\vec{v} \times \vec{w}$ 是正数, 则 $\vec{w} \times \vec{v}$ 就是负数. 即: 交换叉乘时的顺序, 值要变号.

之前说过, 行列式的值, 就是表示的是: 将基 $i \times j$ 的面积, 缩放多少倍.



面积的概念, 也就证明了: $3(\vec{v} \times \vec{w}) = 3\vec{v} \times \vec{w}$

把平行四边形其中的任一一条边, 延长 3 倍, 变成 $3\vec{v}$ 或 $3\vec{w}$, 面积也就是 $= 3(\vec{v} \times \vec{w})$

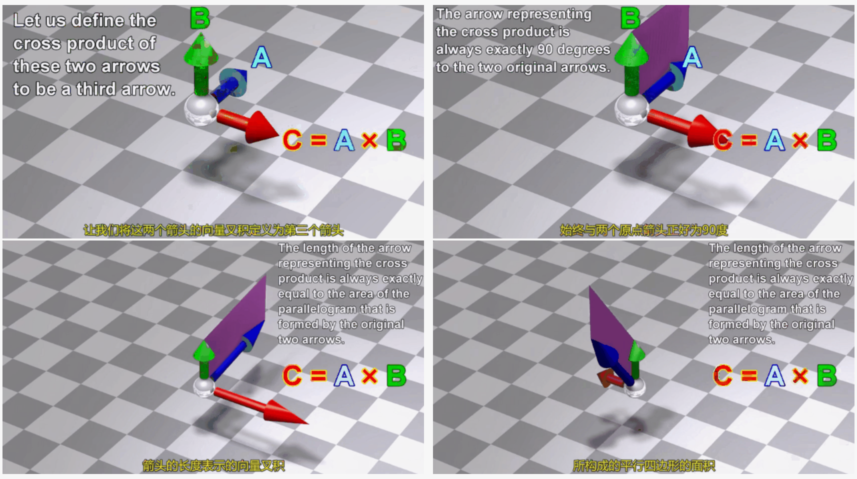


【在三维空间中】:

其实, 真正的 "叉积", 是通过两个三维向量, 来生成一个新的三维向量. **注意: 在三维空间中, 叉积的结果不是一个数, 而是一个向量!**

例

如下面的图中所示, A,B 两个箭头的向量的 "叉积", 就是第三个向量 C. 这个 C 向量, 始终与两个原点箭头 (即 A,B) 正好为 90 度. C 向量箭头的长度, 就表示 A,B 向量的叉积, 它总是完全等于 A,B 所构成的平行四边形的面积.



例

又如: 假设 $\vec{v} \times \vec{w} = 2.5$, 在三维空间中, 这两个向量构成一个平面 (平行四边形). 它们的 "叉积" 构成一个新向量 $\vec{p} = 2.5$, 它与 "平行四边形" 所在的面 "垂直".

第一部分　向量组, 及其线性组合

第二部分　向量组的线性相关性

第三部分　向量组的秩

第四部分　线性方程组的解的结构

第五部分　向量空间