导数

Table of Contents

6.6. $(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$

7. 反函数 的求导法则 → 反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈"倒数关系".

7.1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7.2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7.3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

7.4. $(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

8. 复合函数的求导 (链式法则)

8.1. ★ 重要的公式: $a^b = e^{b \cdot \ln a}$ ← 把指数, 化为以e为底的表达式子.

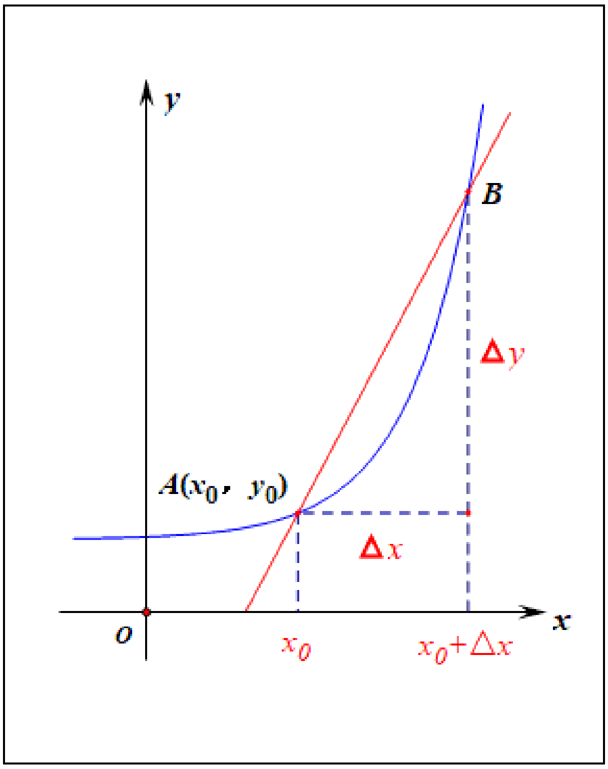
---

1. 导数 Derivative /dɪˈrɪvətɪv/ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

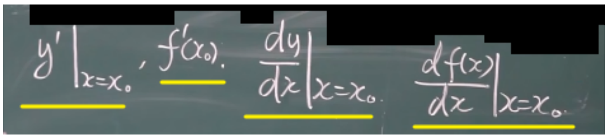
```
derivative /dɪˈrɪvətɪv/
n. a word or thing that has been developed or produced from another word or thing
派生词；  衍生字 ； 派生物；衍生物
• ‘Happiness’ is a derivative of ‘happy’. happiness是happy的派生词。
•Crack is a highly potent and addictive derivative of cocaine. 强效纯可卡因是一种药效极强、容易使人上瘾的可卡因制剂。
```

导数, 就是一个"极限值", 比如, y 在 点 x_0处的导数, 就是

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



x_0点处的导数,其实可以有下面4种写法来表示:

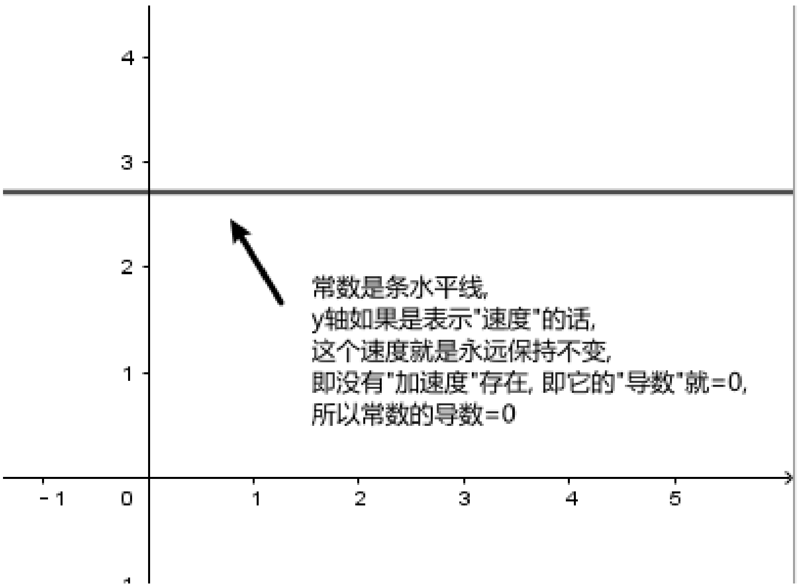


---

2. 常用的导数

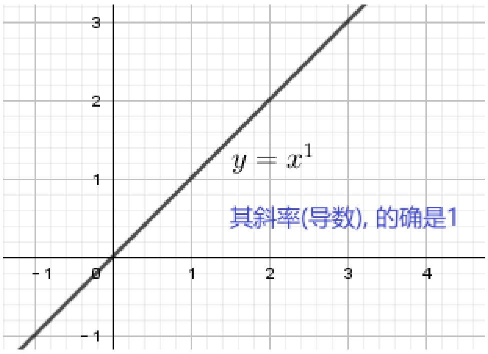
2.1. 常数的导数=0, 即 $f(x) = C, \ \rightarrow (C)' = 0$

导数, 可以理解为速度的变化率, 即"加速度". 常数, 是一条水平线, 就是说"速度永远保持不变"的, 它自然也就没有"加速度"存在了. 所以导数就=0, 所以常数的导数就=0.



2.2. $f(x) = x^n$, $n \in N^+$, → ① 当指数n = 1 时, $(x^n)' = 1$, ② n>1时, $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
& f(x)=x^n, \quad n\text{是正整数} \\
& ①\text{当指数}n=1\text{时}, \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)^1-f(x^1)}{h}=\frac{h}{h}=1 \\
& \text{即}: n=1\text{时}, (x^n)'=1 \\
& ②\text{当指数}n>1\text{时}, \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)^n-f(x^n)}{h}=nx^{n-1} \\
& \text{即}: n>1\text{时}, (x^n)'=nx^{n-1}
\end{aligned}
$$



例如:

$$(x^3)' = 3x^2$$

2.3. $f(x) = x^\mu$, $\mu \in R$, $\rightarrow (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

例:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

例:

$$(x^{-3})' = -3x^{-4}$$

Example 1. 标题

例如： 求 ① y = 1/x 在点 (1/2, 2) 处的切线的斜率(即导数). ② 求该切线的方程.

$$
\begin{aligned}
& y=x^{-1}, \text{它的导数}y'=-1x^{-1-1}=-x^{-2}. \\
& \text{然后把点}(\frac{1}{2},2)\text{的}x\text{具体坐标值代入进去}: \\
& y'|_{x=\frac{1}{2}}=-(\frac{1}{2})^{-2}=-4
\end{aligned}
$$

所以, 该切线的方程就是 (用点斜式): $y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$

同样, 法线方程就是 : $y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

2.4. $f(x)=\sin x, \rightarrow (\sin x)'=\cos x$

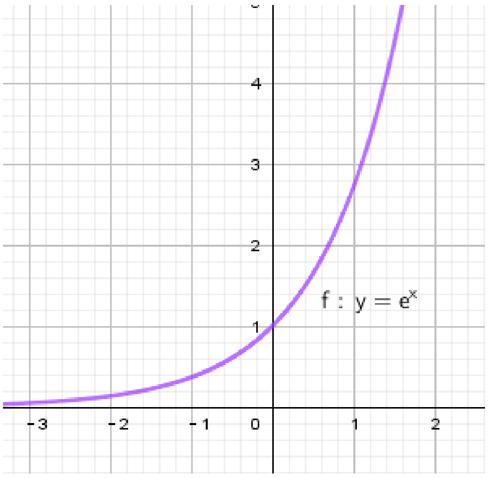
2.5. $f(x)=\cos x, \rightarrow (\cos x)'=-\sin x$

2.6. $(a^x)'=a^x \ln a$

如:

$$(2^x)'=2^x \ln 2$$

2.7. $(e^x)'=e^x \ln e=e^x$



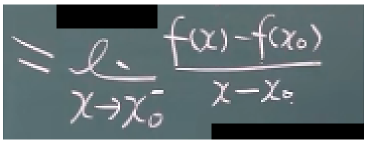
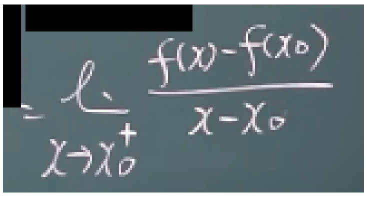
2.8. $(\log_a x)'=\frac{1}{x \ln a}$

2.9. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

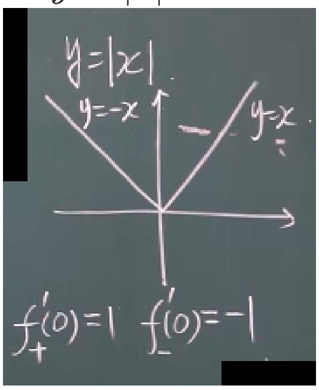
3. 单侧导数

单侧导数, 就是从"某一侧"逼近某一x点时, 该点的切斜斜率.

所以, 左导数, 就是"从左侧向右"逼近了. 右导数, 就是"从右边向左"逼近了.

Header 1	Header 2
左导数	写作: $f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ 也可写作: 
右导数	写作: $f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ 也可写作: 

如: $y = \lvert x \rvert$ 在 x=0 点处的导数, 左导数和右导数, 就不一样.



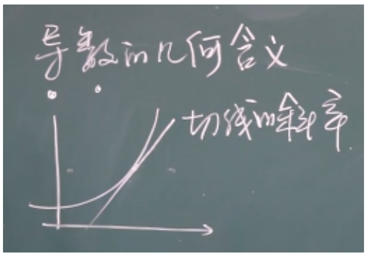
如果某x点处, 它的左右导数不相等, 则改点处"不可导".
换言之, **某点出"可导"的充要条件是 ⟷ 它的左,右导数均存在, 且相等.**

---

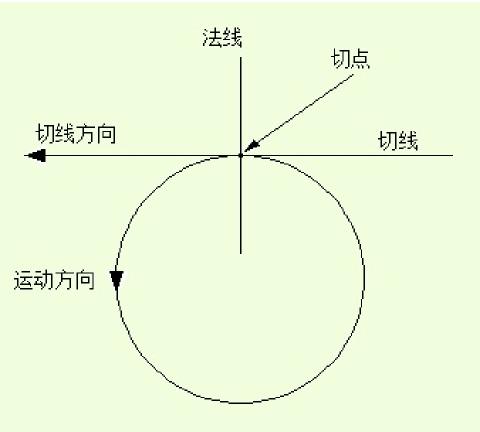
4. 导数的几何意义

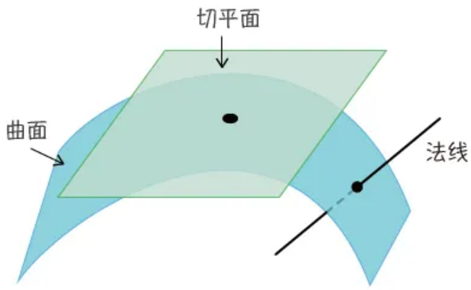
可导, 就意味着图像很"光滑". 即图像没有"尖角"存在 (因为尖角处的左右导数不相等). 并且还要满足: 切线不能垂直于x轴. 如果切线是垂直于x轴的, 它的斜率就会是 $+\infty$ 或 $-\infty$了.

某点处的"导数", 就是该点处"切线的斜率".



4.1. 法线 normal line: 和切线垂直的线, 就叫"法线".



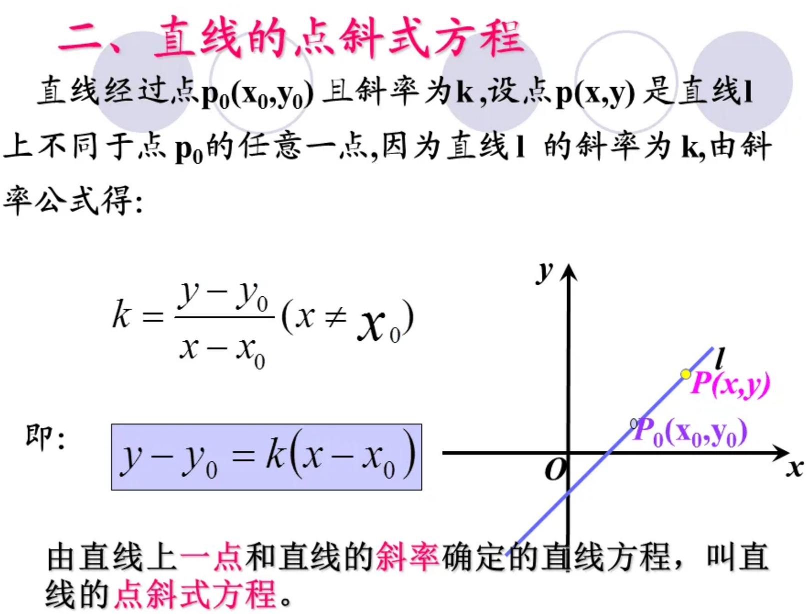


法线与切线垂直, 两者的斜率乘积 = -1.

所以, 既然切线的斜率是 $f'(x_0)$, 所以法线的斜率就是 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$

根据直线的"点斜式"公式, 就有:

- 切线的方程: $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
- 法线的方程: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$



5. 求导法则: 和差积商

5.1. $(a+b)' = a' + b'$

如:

$(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x$

5.2. $(a+b+c)' = a' + b' + c'$

$y=2x^3-5x^2+3x-7 \quad y'=6x^2-10x+3$

5.3. $(a-b)' = a' - b'$

5.4. $(ab)' = a'b + ab'$

如:

$(x^3e^x)'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'=3x^2e^x+x^3e^x$

例:

$$
\begin{aligned}
y &= e^x(\sin x + \cos x) \\
&= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\
&= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\
&= e^x\sin x + e^x\cos x + e^x\cos x - e^x\sin x \\
&= 2e^x\cos x
\end{aligned}
$$

5.5. $(abc)' = a'bc + ab'c + abc'$

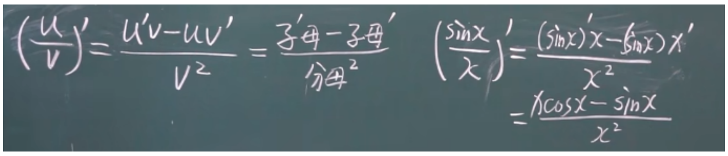
5.6. C是常数, 则 $(Ca)' = C \cdot a'$ ← 直接把常数提出去就行了

如:

$(5\sin x)'=5(\sin x)'=5\cos x$

5.7. $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$

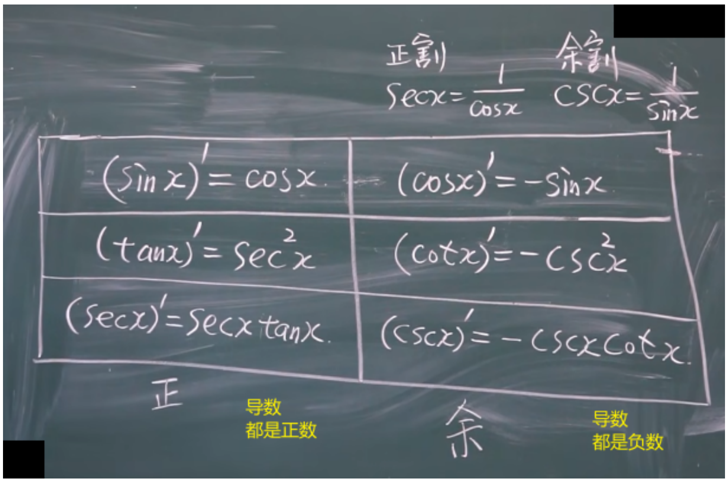
如:



---

6. 三角函数的导数

总结表



6.1. $(\sin x)' = \cos x$

6.2. $(\cos x)' = -\sin x$

6.3. $(\tan x)' = \sec^2 x$

$$y = \tan x$$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6.4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

6.5. $(\sec x)' = \tan x \cdot \sec x$

$$y = \sec x$$

$$y' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{1' \cos x - 1 \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{0 + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

6.6. $(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$

---

7. 反函数 的求导法则 → 反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈"倒数关系".

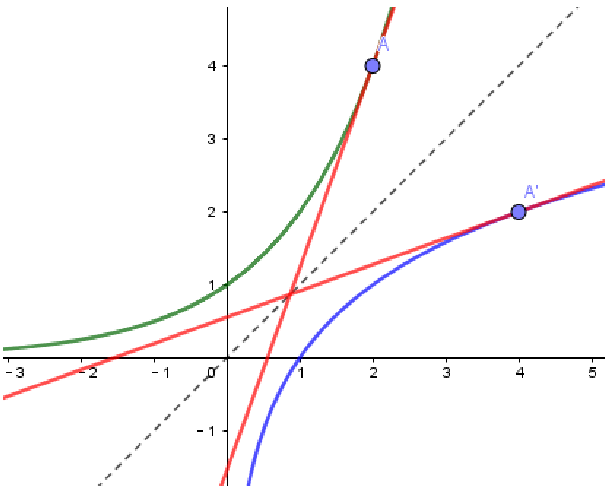
原函数是 $y = f(x)$, 其反函数是 $x = f(y)$, 则, 反函数的导数, 就是"原函数导数"的倒数. 即:

$$\text{反函数的导数}[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数}f'(x)}$$

换言之, 原函数的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 则其反函数的导数就是 $\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$

换言之, 就是 关于 y=x 对称的 两条曲线上的镜像点, 它们的斜率之积 = 1. "函数"与其"反函数"的图像, 就是关于 y=x 对称的.

即如下图, 绿线与蓝线, 关于 y=x对称, 它们上面的镜像点 A 和 A' 点, 它们的斜率, 即两条红线的斜率, 相乘 = 1.



7.1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

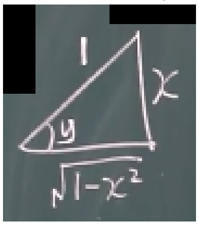
证明过程:

原函数 $\mathrm{x}=\sin\ \mathrm{y}$，其反函数就是 $\mathrm{y}=\arcsin\ \mathrm{x}$

$$(\arcsin\ \mathrm{x})' = \frac{1}{\text{原函数的导数}} = \frac{1}{(\sin\ \mathrm{y})'} = \frac{1}{\cos\ \mathrm{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[2]{1-\mathrm{x}^2}}$$

为什么 $\cos y = \sqrt{1-x^2}$? 因为:



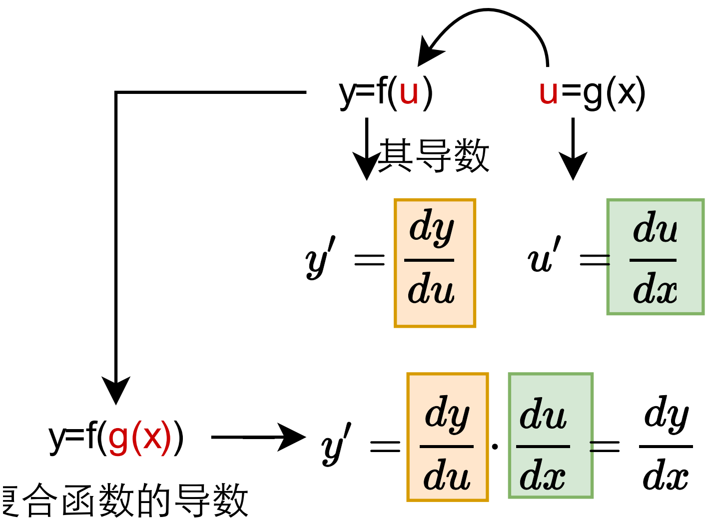
7.2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7.3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

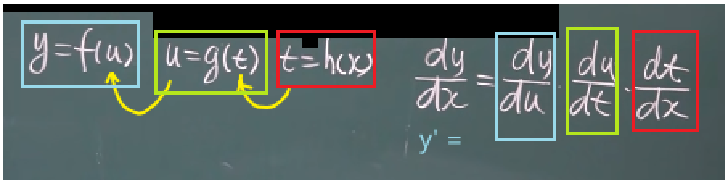
7.4. $(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

---

8. 复合函数的求导 (链式法则)



又例:



Example 2. 标题

例如:

$y=e^{x^3}$，对其求导

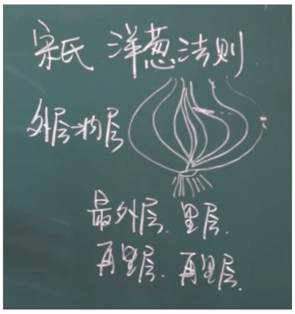
我们就用'链式法则'来拆分成：$y=e^u$，$u=x^3$

则 $y'=(e^u)'\cdot(x^3)' \;=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$=e^u\cdot 3x^2 \leftarrow$ 把$u=x^3$重新代入进去

$=e^{x^3}\cdot 3x^2$

更好的方法,是从外层向内层,一层层求导进去就行了.



Example 3. 标题

例如:

$y=\ln(\sin\ x)$，求y'

从外层向内层，一层层求导.

第1步:先对最外层的求导，即 $\ln(\sin\ x)$ 的导数 $=\dfrac{1}{\sin\ x}$ ①

第2步：再对内层求导，即 $\sin\ x$ 的导数 $=\cos\ x$ ②

第3步：然后把① 和②直接连接起来就行了:

即 $y' \;=\dfrac{1}{\sin\ x}\ \cos\ x \;=\; \text{ctan}\ x$

Example 4. 标题

例如:

$y=(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}$，求y'

从外层向内层，一层层求导.

第1步:先对最外层的求导，即 $(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}$ 的导数 $=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{1}{3}-1}$ ①

第2步：再对内层求导，即 $1-2x^2$ 的导数 $=-2\cdot 2x$ ②

第3步：然后把① 和②直接连接起来就行了:

即 $y' =\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-4x)$

Example 5. 标题

例如:

$y=\ln\ \cos(e^x)$，求y'

从外层向内层，一层层求导.

第1步:先对最外层的求导，即 $\ln\ \cos(e^x)$的导数 $=\frac{1}{\cos(e^x)}$ ①

第2步：再对内层求导，即 $\cos(e^x)$ 的导数 $=-\sin(e^x)$ ②

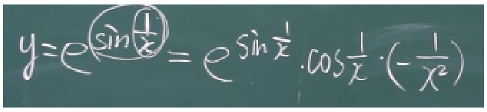
第3步：再对最内求导，即e^x的导数 $=e^x$ ③

第4步：然后把① ,②,③直接连接起来(连乘)就行了:

即 $y' =-\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot\sin(e^x)\cdot e^x$

Example 6. 标题

例如:



Example 7. 标题

例如：

$y=e^{\sin(\ln(\cos\ e^x))}$，求$y'$

从外层向内层，一层层求导.

第1步：先对最外层的求导，即 $e^{\sin(\ln(\cos\ e^x))}$的导数 $=e^{\sin(\ln(\cos\ e^x))}$ ①

第2步：再对内层求导，即 $\sin(\ln(\cos\ e^x))$的导数 $=\cos(\ln(\cos\ e^x))$ ②

第3步：再对更内求导，即 $\ln(\cos\ e^x)$的导数 $=\dfrac{1}{\cos\ e^x}$ ③

第4步：再对更内求导，即 $\cos\ e^x$的导数 $=\ -\sin\ e^x$ ④

第5步：再对更内求导，即 e^x的导数 $=e^x$ ⑤

最后一步：然后把①,②,③,④,⑤ 直接连接起来(连乘)就行了：

即 $y'\ =e^{\sin(\ln(\cos\ e^x))}\cdot\cos(\ln(\cos\ e^x))\cdot\dfrac{1}{\cos\ e^x}\cdot(-\sin\ e^x)\cdot e^x$

8.1. ★ 重要的公式: $a^b = e^{b\cdot\ln a}$ ← 把指数, 化为以e为底的表达式子.

重要公式：将指数，变换成以e为底的数

$a^b=e^{\ln\ a^b}$

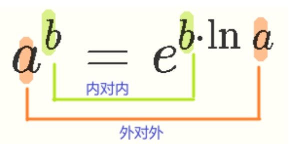
← 等号右边,指数上 $\ln\ a^b$ 就是问，e的多少次方 $=a^b$? 得到的是那个"多少次方".

所以，整体的 $e^{\ln\ a^b}\ =\ e^{\text{让 e 得到}a^b\text{的那个次方}}=a^b$

并且，这个整体的 $e^{\ln\ a^b}$ 又 $=e^{b\ \ln\ a}$

所以，$a^b=e^{b\ \ln\ a}$

记忆法:



Example 8. 标题

例如:

$y=(\sin\ x)^{\cos\ x^2}$，求y'

先把等号右边指数形式，变换为以e为底的式子，即，套用公式：$a^b=e^{b\cdot \ln a}$

$y=e^{(\cos\ x^2)\ (\ln\ \sin x)}$ ← 在使用洋葱法则,来一层层由外而内求导

e的指数上，就是用 $(ab)'=a'b+ab'$

$y'=e^{(\cos\ x^2)\ (\ln\ \sin x)}\cdot[\cos' x^2\cdot\ln\ \sin x\ +\ \cos\ x^2\cdot(\ln\ \sin x)']$

$=e^{(\cos\ x^2)\ (\ln\ \sin x)}\cdot\left[(-\sin\ x^2)\cdot\ln\ \sin x\ +\ \cos\ x^2\cdot\frac{1}{\sin\ x}\right]$

←下一步,还要继续对最内层的 x^2和 $\sin x$ 求导

$=e^{(\cos\ x^2)\ (\ln\ \sin x)}\cdot[(-\sin\ x^2)(2x)\cdot\ln\ \sin x\ +\ \cos\ x^2\cdot\frac{1}{\sin\ x}\cdot(\cos\ x)]$

Example 9. 标题

例如:

$y=x^x$，求y'. ←注意，x^x，既不能看做 x^n，也不能看做 a^x

那么我们就把 x^x化作 $e^{\ln\ x^x}$

← 指数上的 $\log_e x^x$就是能得出e的多少次方 $=x^x$，所以整体的 $e^{\ln\ x^x}=$'e的那个次方 $=\ x^x$'

即：$y=e^{\ln\ x^x}=\ e^{x\ \ln\ x}$ ←现在指数上是两个函数相乘，就能用公式 $(ab)'=a'b+ab'$

$y'=(e^{x\ \ln\ x})'\cdot(x'\ \ln x\ +x\ \ln' x)$

$=\underbrace{e^{x\ \ln\ x}}_{\text{这一块我们把它写回 } x^x}\cdot\left(1\cdot\ln x\ +x\frac{1}{x}\right)$

$=x^x(\ln x+1)$

其实本例,还有另一种做法:

$y=x^x$，求y'

先两边同时取ln，就变成：$\ln\ y=\ln\ x^x=x\cdot\ln x$

然后，两边对x求导：$(\ln\ y)\cdot y'\ =\ x'\ \ln x\ +\ x(\ln x)'$

$\frac{1}{y}y'=1\cdot\ln x\ +\ x\frac{1}{x}$

$\frac{1}{y}y'=\ln x+1$

$y'=y(\ln x+1)$ ←因为$y=x^x$，重新代入进去

$y'=x^x(\ln x+1)$

Example 10. 标题

例如：

$y=x^{x^x}$，求y'

同样，两边先取ln，就变成：$\ln\ y\ =\ \ln\left(x^{x^x}\right)=x^x\ \ \ln x$

两边对x求导：$(\ln\ y)'\cdot y'\ =\ (x^x)'\ \ln x\ \ +x^x(\ln x)'$

$\frac{1}{y}y'=x^x(\ln x+1)\cdot\ln x\ \ +x^x\cdot\frac{1}{x}\ \leftarrow(x^x)'$之前的题目我们算过了，$=x^x(\ln x+1)$

$\frac{1}{y}y'=x^x(\ln x+1)\cdot\ln x\ \ +x^{x-1}\ \leftarrow$把$y=x^{x^x}$重新代入进去

$y'=x^{x^x}\cdot\left[x^x(\ln x+1)\cdot\ln x\ \ +x^{x-1}\right]$