基础_欧拉公式

Table of Contents

1. 欧拉公式 Euler's formula → $e^{ix}=(\cos x+i\sin x)$, e是自然对数的底，i是虚数单位。

根据泰勒公式，有：

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\quad =x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\quad =1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\quad =1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

同理，$e^{ix}=1+(ix)+\dfrac{(ix)^2}{2!}+\dfrac{(ix)^3}{3!}+\dfrac{(ix)^4}{4!}+\cdots$ ← 记住：虚数i的 $i^2=-1$

$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$=\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)}_{=\cos x\text{的泰勒展开}}+i\underbrace{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)}_{=\sin x\text{的泰勒展开}}$$

即：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ①

若$x=-x$，代入①式，就是：

$$e^{i(-x)}=\cos(-x)+i\sin(-x)$$

即 $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ ②

①式$-$②式，就有：

$$e^{ix}-e^{-ix}=\cos x+i\sin x-(\cos x-i\sin x)$$

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad ③$$

①式$+$②式，就有：

$$e^{ix}+e^{-ix}=\cos x+i\sin x+(\cos x-i\sin x)$$

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad ④$$

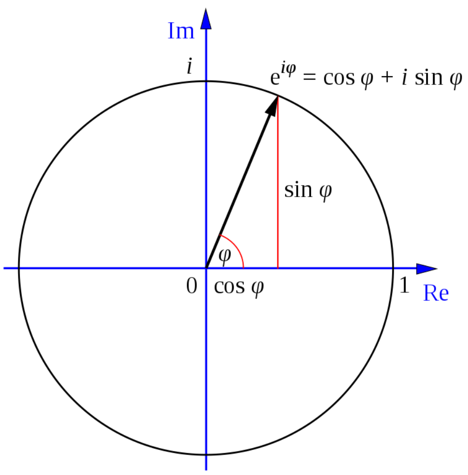
将$x=\pi$ 代入①，就有：

$$e^{i\pi}=\underbrace{\cos\pi}_{-1}+i\underbrace{\sin\pi}_{=0}=-1$$

即 $e^{i\pi}+1=0$ ⑤ ←即“欧拉恒等式”

上面的①,②,③,④，叫“欧拉公式”.

从欧拉公式$e^{ix}=(\cos x+i\sin x)$ 可以知道, $\cos x+i\sin x$ 这部分, 不就是复数的$Z=a+bi$ 的形式吗！说明e^{ix}是个复数.



欧拉公式, 把"复指数函数"与"三角函数"联系起来了. 它将指数函数的定义域, 扩大到复数.

1.1. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

1.2. $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

1.3. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

1.4. $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

1.5. $e^{i\pi} + 1 = 0$

---

2. 欧拉公式的用处

欧拉公式:

$\longrightarrow\ e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\longrightarrow\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$\longrightarrow\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\longrightarrow\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\longrightarrow\ e^{i\pi} + 1 = 0$

2.1. 用处1: 所有的"三角函数"公式, 都可以用"欧拉公式"来证明

Example 1. 标题

例如:

欧拉公式:

$\rightarrow \mathbf{e^{ix} = cosx + isinx}$

$\rightarrow \mathbf{e^{-ix} = cosx - isinx}$

$\rightarrow \mathbf{sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

$\rightarrow \mathbf{cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

$\rightarrow \mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$

比如，$\sin(a+b) = \text{sina}\ \cos b + \ \cos a\ \ \sin b$

我们从等号右边的来开始推导(利用欧拉公式):

$$\begin{aligned}\mathbf{sina\ \ cosb +\ \ cosa\ \ sinb} &= \underbrace{\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}}_{\sin a} \cdot \underbrace{\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}}_{\cos b} + \underbrace{\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}}_{\cos a} \cdot \underbrace{\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}}_{\sin b} \\ &= \frac{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) + (e^{ia} + e^{-ia})(e^{ib} - e^{-ib})}{4i} \\ &= \frac{e^{ia+ib} + e^{ia+(-i)b} - e^{-ia+ib} - e^{-ia+(-ib)} + e^{ia+ib} - e^{ia+(-i)b} + e^{-ia+ib} - e^{-\mathrm{ia}+(-\mathrm{ib})}}{4\mathrm{i}} \\ &= \frac{\color{magenta}{e^{\mathrm{i(a+b)}}} + \color{blue}{\mathrm{e}^{\mathrm{i(a-b)}}} - \color{green}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a-b)}}} - \color{deepskyblue}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a+b)}}} + \color{magenta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i(a+b)}}} - \color{blue}{\mathrm{e}^{\mathrm{i(a-b)}}} + \color{green}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a-b)}}} - \color{deepskyblue}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a+b)}}}}{4\mathrm{i}}\end{aligned}$$

$\leftarrow$ 深蓝色,绿色部分，都消掉了

玫红色，淡蓝色部分，合并起来

$$\begin{aligned}&= \frac{2\color{magenta}{e^{\mathrm{i(a+b)}}} - 2\color{deepskyblue}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a+b)}}}}{4\mathrm{i}} \\ &= \frac{\color{magenta}{e^{\mathrm{i(a+b)}}} - \color{deepskyblue}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a+b)}}}}{2\mathrm{i}} \quad ① \leftarrow \text{根据欧拉公式}\ \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

$$\mathbf{sin(a+b)}\ \text{不就是} = \frac{\color{magenta}{e^{\mathrm{i(a+b)}}} - \color{deepskyblue}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i(a+b)}}}}{2i} \quad ②$$

说明 $\text{sina}\ \cos b + \ \cos a\ \ \sin b$ 的结果(①式)，和 $\sin(\mathrm{a+b})$的结果 (②式)是一样的!

即，我们用欧拉公式，证明了三角函数公式: $\sin(\mathrm{a+b})\ \ = \text{sina}\ \cos b + \ \cos a\ \ \sin b$

2.2. 用处2: 可以用于积分运算. "欧拉公式"是连接"指数函数"和"三角函数"的桥梁, 可以实现"指数函数"和"三角函数"的转换.