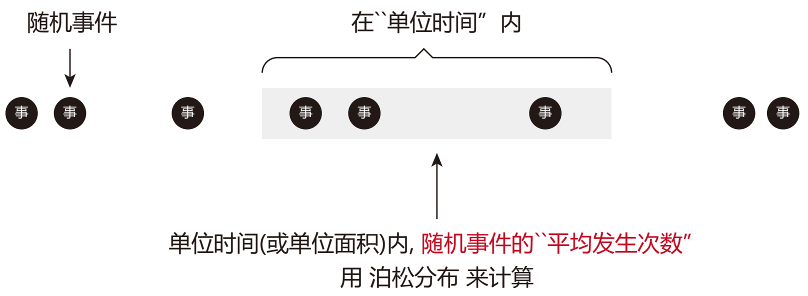
目录

文件名

1 离散型：泊松分布 (poisson distribution) :

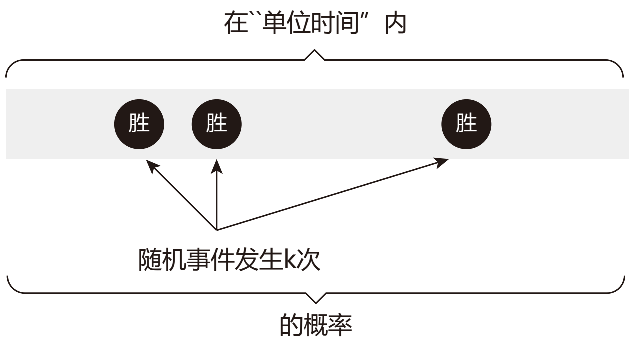
$$P\left(\text{事}X=\text{想}\right)=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}$$

“泊松分布” 研究的是：在 “单位时间 (或空间)” 内, “随机事件发生任意次数” 的概率.



即, “泊松分布” 是为了解决这样的问题的：单位时间内, 随机事件发生的次数, 即：一件事发生的概率 P 是已知的, 但它的发生与否是随机的. 我们想要求它 (即该随机事件) 发生 k 次 (或 $\geq k$次, $\leq k$次 等问题）的概率.

当一个随机事件, 以固定的 “平均瞬时速率 λ”（或称 “密度”）随机且独立地出现时，那么这个事件在 “单位时间 (面积或体积)” 内出现的次数或个数, 就近似地服从 “泊松分布”.
泊松分布的参数 λ ：是单位时间 (或单位面积) 内, 随机事件的平均发生次数.



“泊松分布” 的期望和方差, 均为 λ.

$$P\{X=\text{你希望“随机事件}A\text{”发生的次数}k\}$$
$$=\frac{\left(\text{单位时间内}, A\text{ 的平均发生次数 }\lambda\right)^{\text{你希望 }A\text{ 发生的次数}k}}{\left(\text{你希望 }A\text{ 发生的次数}k\right)!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

$$\text{即}=\frac{\lambda^{k}\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

上面的公式中:
- λ : 是单位时间内, 随机事件 A 的**平均发生次数**.
- k : 是**你希望的, 想要的**随机事件 A 发生的次数.

所以, 泊松分布的 “概率函数” 就是: $\boxed{P\left(X=你想要发生的次数\right)=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}}$

记作: $\boxed{X\sim P(\lambda)}$ ← 即: 我们用 $Po(\lambda)$ 来表示 “泊松分布”. 比如, 我们将 $Y\sim Po(4)$ 读作: “变量 Y” 遵循 “λ 等于 4” 的泊松分布.

例

“50 年一遇” 的大雨, 结果三年中下了两场, 这是怎么回事?
其实 “50 年一遇” 是个数学语言, 它是指: “长期来看”, 这样的大暴雨是平均 50 年发生一次. 注意关键词 “长期”. 长期是多长? 在数学中, 是指 “很长很长” 的时间段.
所以对 “长期” 的理解不到位, 就是概率问题的结果 “反直觉” 的原因.

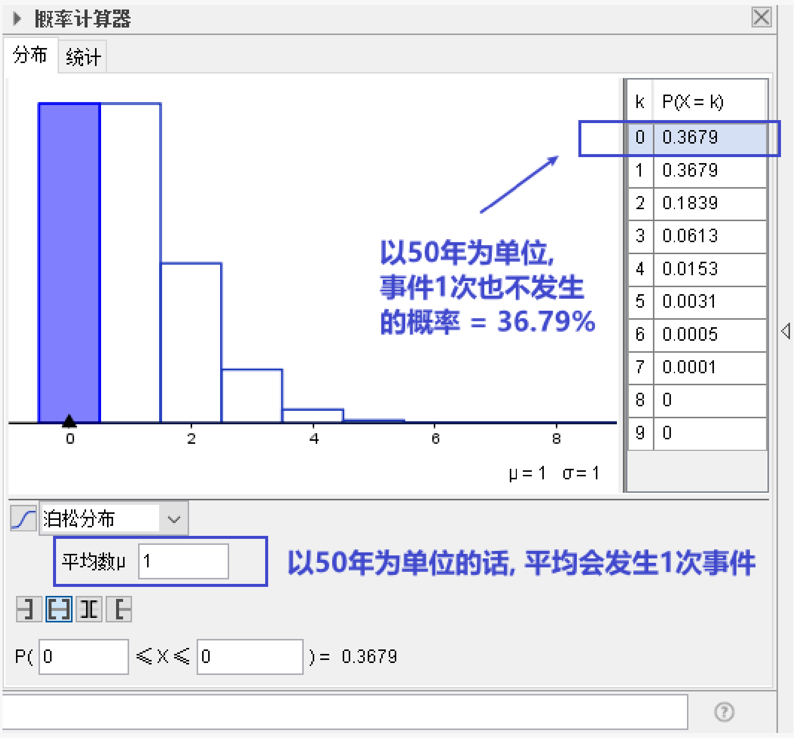
平均 50 年发生一次, 可以是: 前 4 年, 每年都发生一次; 之后的 196 年一次都没发生. 200 除以 4，还是 50 年一次.

所以, 我们更想知道的是: 在任何一段具体的、有限的时间内, 比如 5 年之内，发生 1 次大暴雨的概率是多少? 发生 2 次大暴雨的概率是多少?

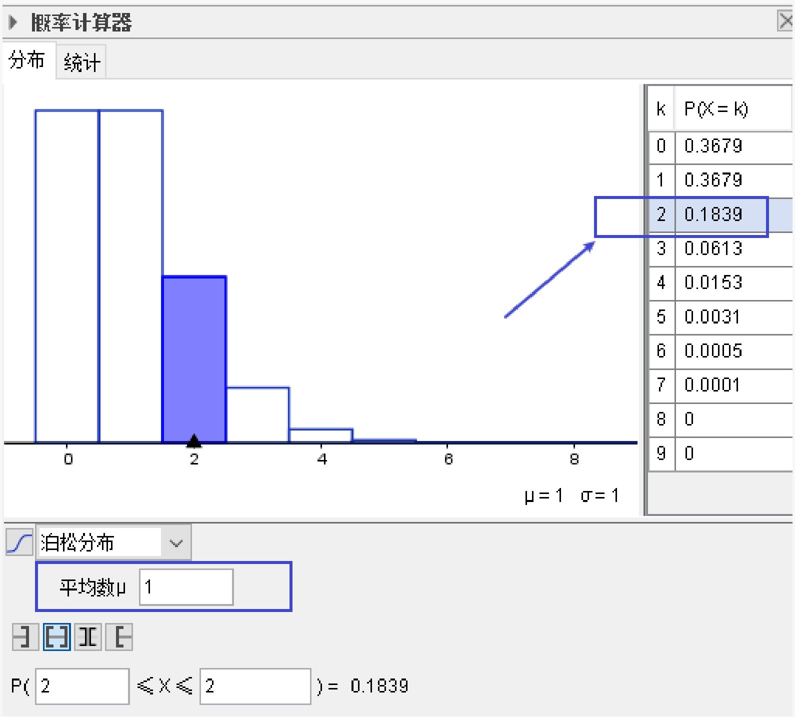
即: 当我们知道了一个随机事件 A 发生的概率，也知道 A 发生的概率符合 “正态分布” 之后, 那么在某一段时间或者空间间隔内, 这个随机事件 “发生的次数” 的概率分布, 是怎样的呢? 这个问题, 就能用 “泊松分布” 来解决.

泊松分布的公式是: $\boxed{P(X=你希望发生\text{ k }次)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$
其中,
→ **k : 为你希望 “随机事件” 发生的次数.**
→ λ **: 为单位时间内, 随机事件的平均发生次数.** 比如, 50 年一遇的大雨:
- 如果以 50 年为 “单位时间” 的话, 发生次数就是: 1 次. (进一步, 我们可以算出即: 每年发生 $\frac{1}{50}$ 次).
- 如果以 100 年为单位的话, 发生次数就是: 100 年 × 每年 $\frac{1}{50}$ 次 = 2 次
- 如果以 5 年为单位的话, 发生次数就是: 5 年 × 每年 $\frac{1}{50}$ 次 = 1/10 次.

那么套用 “泊松分布公式”, 来算一下, 50 年中, 一次上面的大雨也不发生的概率: 即 k=0 次:

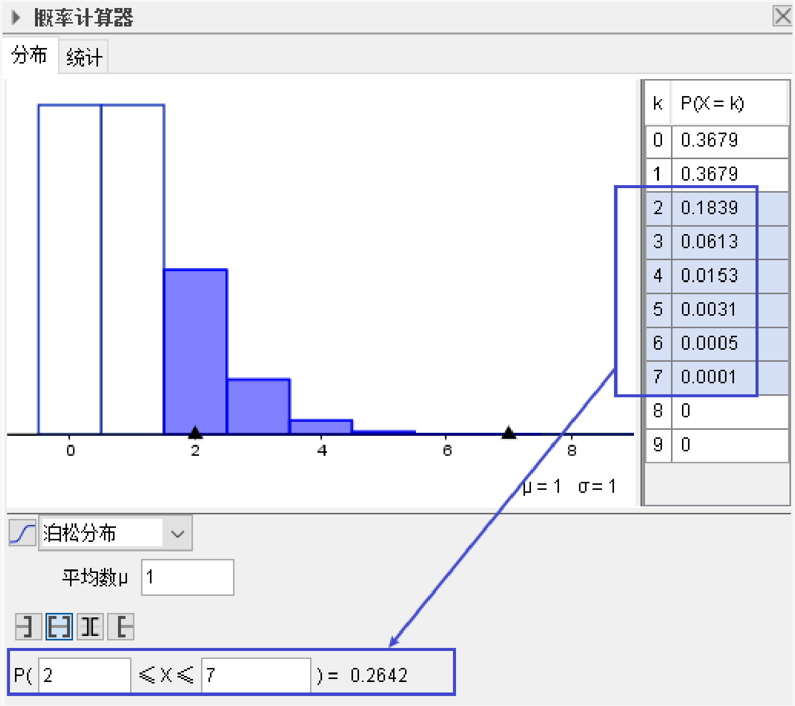


再算一下 K=2, 就是接下来的 “50 年为单位” 的话, 其中发生 2 次大暴雨的概率, 答案是 18%. (下图)



上图的右表中, 表示的就是: 50 年一遇的大雨. 你就以 50 年为 “单位时间段” (即平均会发生一次这种大雨, 即 μ 或 λ =1), 在这 50 年中, 你遇到 0 次, 1 次, 2 次, ... 这种大雨的真实概率, 是多少?

50 年中, 发生 2 次和 2 次以上的概率是: 用 1 减去发生 0 次和发生 1 次的概率. = 1 - (0.3679 × 2) = 26%, 说明这并不是很小的概率事件.



例

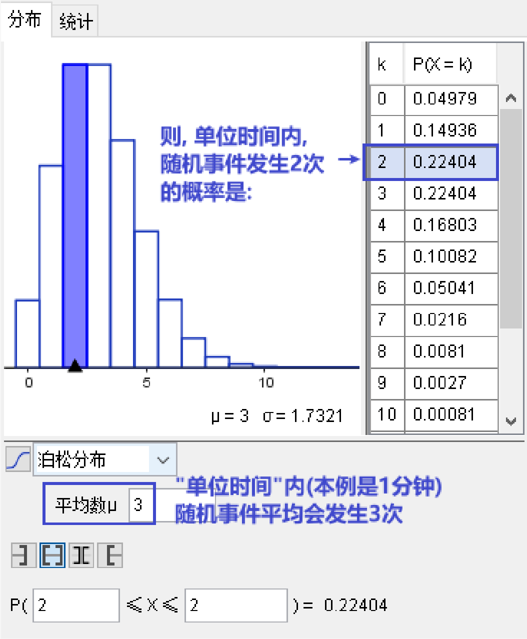
某收费站, 平均每分钟通过的车辆为 3 辆. 问: 1 分钟内, 恰有 2 辆车经过的概率, 是多少?

即:

- 随机事件 A : 收费站有车经过.
- λ (单位时间内, 随机事件平均发生的次数. 一般用 λ 或 mean 来表示.) : 本例, 单位时间就是 "每分钟", 随机事件 A 发生 3 次.
- k (你希望随机事件发生的次数. 一般用 k 或 x 来表示.) : 本例, 就是 2. (收费站有车经过, 发生 2 次)

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P\{X=\text{想}\}=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}=\frac{3^{2}e^{-3}}{2!}=0.224042$$



例

你创建了一个关于概率的在线课程. 通常，你的学生每天问你大约 4 个问题, 但昨天他们问了 7 个. 你想知道昨天这件事, 事实上发生的可能性算多大?

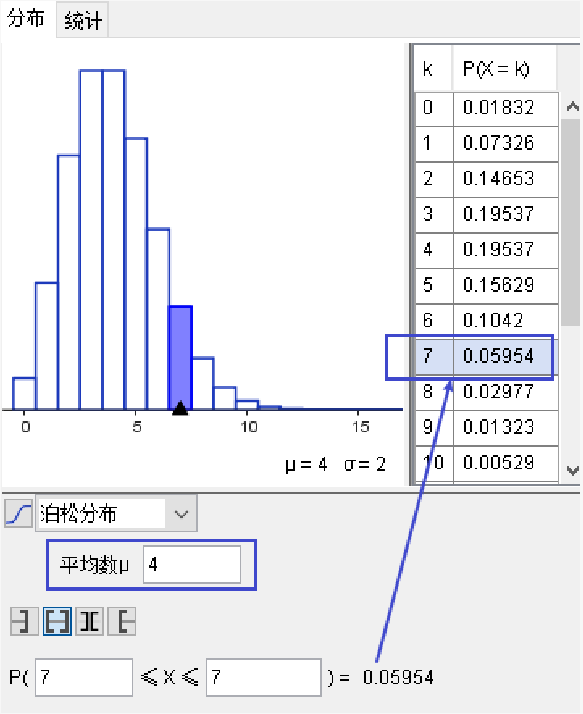
即:

- 随机事件 A : 是学生提问.
- λ : 表示在单位时间内, 随机事件发生的平均次数. 本例就是 =4 (单位时间 1 天里面, 平均上, 学生提问会发生 4 次).
- k : 你感兴趣的 “随机事件发生次数”. 本例就是 k=7.

即:

$$P\{X=想\}=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}$$
$$P\{X=7\}=\frac{4^{7}\cdot e^{-4}}{7!}=0.0595404$$

因此, 你收到 7 个问题的几率, 只有 6%.



例

某航空公司, 发生事故 (即随机事件 A) 的平均值为: 每月 0.05 次.

问:

→ 1 年内, 发生 “0 事故” 的概率是?

随机事件, 平均每月发生 0.05 次, 这里的 “单位时间” 是以 “月” 为时间段的. 而问题问的是 “1 年内”, 是以 “年” 为 “单位时间段” 的. 所以我们要统一两者的 “单位时间” 段. 把 “月” 换算成 “年” 来做.

即: 事故的 “月概率” 是 0.05 次, 则事故的 “年概率”= 0.05 × 12 =0.6.

$$P\{X=想\}=\frac{均^{想}\cdot e^{-均}}{想!}$$
$$P\{X=\underbrace{0}_{随机事件在单位时间内, 发生 0 次}\}=\frac{\overbrace{0.6}^{事故的年概率}{}^{0}\cdot e^{-0.6}}{0!}=0.548812$$

→ 1 年内, 发生了 “1 次事故” 的概率是?

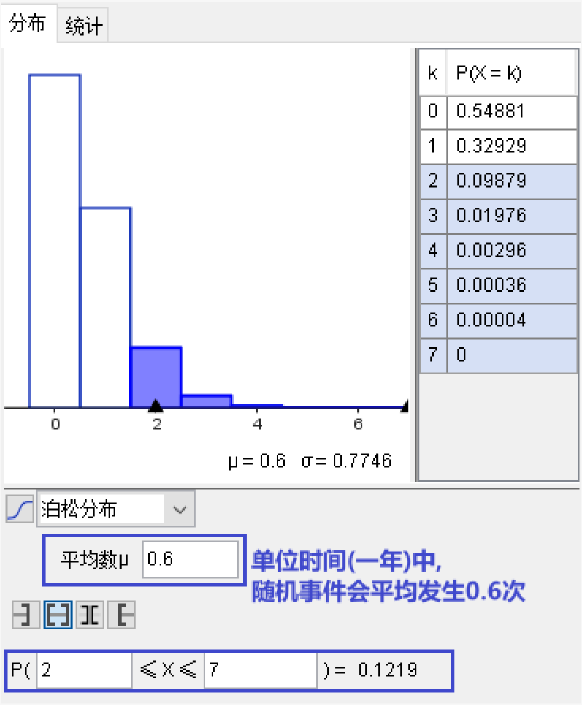
$$P\{X=1\}=\frac{0.6^{1}\cdot e^{-0.6}}{1!}=0.329287$$

→ 1 年内, 发生事故 ≥ 1 次的概率是?

$$=P\{X=2\}+P\{X=3\}+...$$
$$=1-[P\{X=0\}+P\{X=1\}]$$

把随机事件发生 0 次和 1 次的情况, 扣除掉后, 剩下的就是超过 1 次的所有情况了.

$$=1-\frac{0.6^{0}\cdot e^{-0.6}}{0!}-\frac{0.6^{1}\cdot e^{-0.6}}{1!}=0.121901$$



例

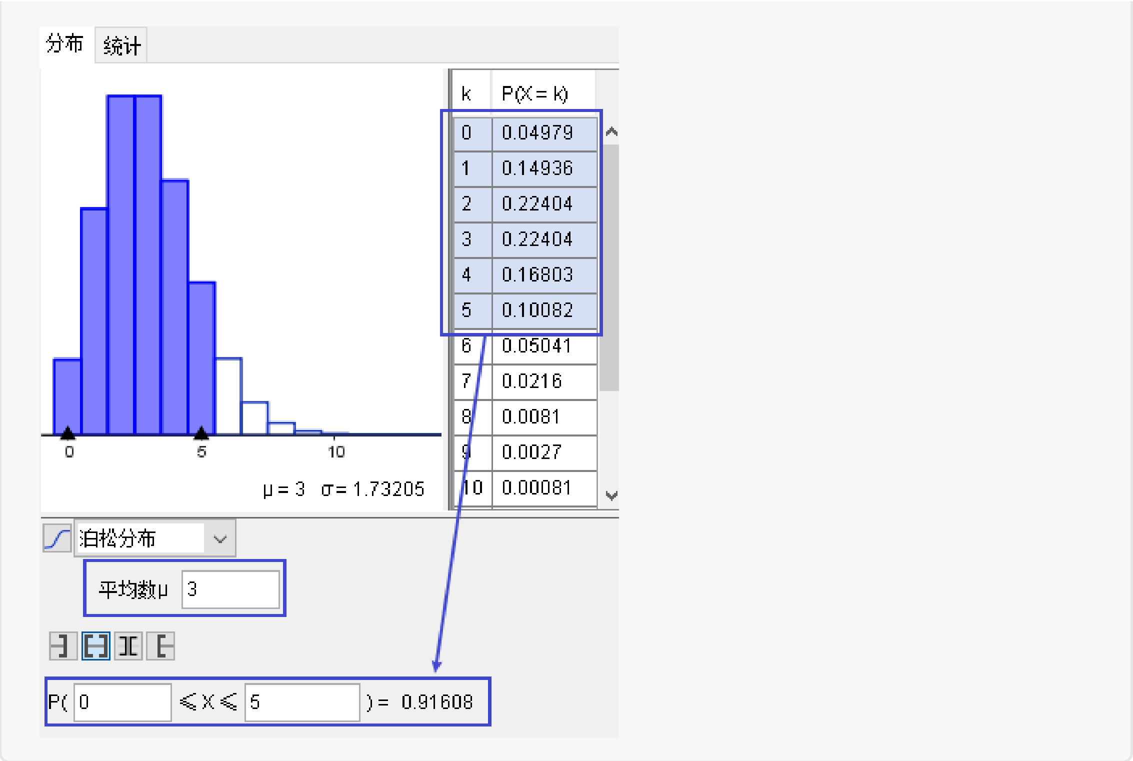
某客服工作, 每分钟收到客户来电的次数, 满足 $X\sim P\left(\underbrace{3}_{\text{即}\lambda}\right)$

问: 你 “每分钟收到来电不超过 5 次” 的概率.

即:

- 随机事件 A : 你收到客户来电.
- λ : 表示在单位时间 (本例是 1 分钟) 内, 随机事件发生的平均次数. 本例就是 =3.
- k : 你感兴趣的 “随机事件发生次数”. 本例就是 $k\leq 5$.

$$P\{X=\text{想}\}=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}$$
$$P\{X=k\leq 5\}=\sum_{k=0}^{5}[P\{X=k\}]$$
$$=\frac{3^{0}}{0!}e^{-3}+\frac{3^{1}}{1!}e^{-3}+...+\frac{3^{5}}{5!}e^{-3}=0.916$$



1.1 泊松分布的意义 — 为我们开启了 “统计推断” 的大门

连续 2 年下大暴雨, 这个现象是否正常? 这个问题的困难在哪儿呢? — 数据太少. 我们没有 1000 年的降雨资料. 即便有，在长期、无限面前也是个渣渣, 还是太少.

同样，物理学家要研究放射性物质的半衰期, 可绝大多数物质, 衰变期极长, 长到我们没法直接测量. 连一个完整的衰变周期都观测不到, 那怎么办呢? 用 “泊松分布” 解决.
找一堆铋 209 原子，统计一下在几个确定的时间间隔中，这堆原子中有多少个发生了衰变? 只要这个数字服从 “泊松分布”, 反过来就证明铋 209 原子的衰变, 也服从 “正态分布”. 就可以用 “正态分布” 来直接计算.

在这些问题的解决中, 统计数据, 和概率论的 “概率分布 f(x)”, 就被连在了一起.
而在 “泊松分布” 之前, 概率和统计是两个不同的学科. “概率” 研究 “未发生” 的随机事件; “统计” 描述 “已发生” 的现实. 那会儿只有描述统计, 没有推断统计. 泊松分布开启了 “推断统计” 的大门, 第一次把概率和统计连接在一起.

1.2 泊松分布, 其实就是 “二项分布” 的一种特殊情况. 当二项分布中的 n $\to\infty$; p$\to$ 0 时, 我们就能用 “泊松分布”, 来近似该 “二项分布”.

当 “二项分布” 的 n 很大, 而 p 很小时, 我们就适合用 “泊松分布”, 来作为 “二项分布” 的近似. 其中　为 np.
通常当 $n\geq 20$, $p\leq 0.05$ 时，就可以用 “泊松公式” 近似的计算.

即: 当二项分布中的 n $\to\infty$; p$\to$ 0 时, 我们就能用 “泊松分布”, 来近似该 “二项分布”.
二项分布的 “期望值”, 是 $E(X)=np=\lambda$, 所以也就是泊松分布中, $\lambda=np$.

例

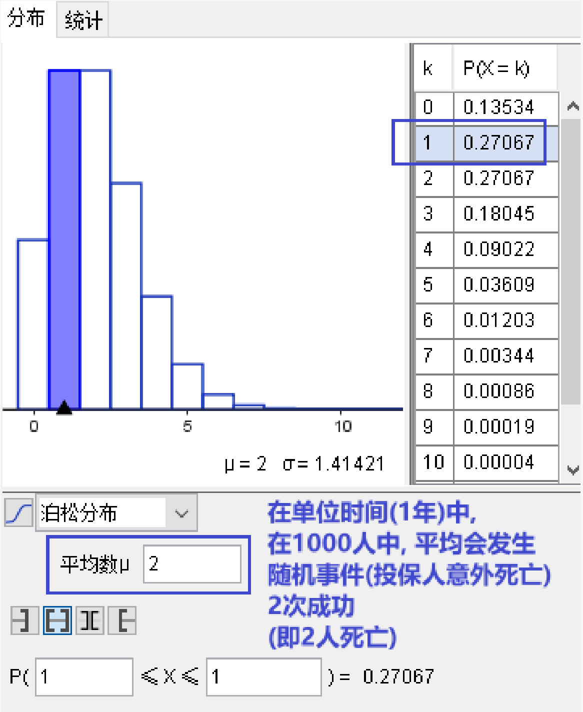
某保险公司统计, 其单位时间 (1 年) 内, 随机事件 (每位投保人发生意外死亡) 的平均发生概率是 0.002.
现从投保者中抽出 1000 人 (即单位时间 (1 年) 内, 这 1000 人里面, 会平均死亡: 1000 人 × 0.002 的概率/人 = 2 人).
问: 下一年度, 会有 1 人死亡 (而获理赔) 的概率?

这是一个二项分布 (用来描述 "n 次试验中, 事件 A 恰好发生 k 次" 的概率. 即 $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$). 本例中, n=1000, p=0.002. 即:
$P\{X = \underbrace{1}_{\text{成功发生死亡事件 1 人}}\} = C_{1000}^1 \cdot 0.002^1 \cdot (1-0.002)^{1000-1} = 0.27067$

但, 由于 n 很大, p 很小, $np = 1000 \times 0.002 = 2 = \lambda$, np 的值适中, 我们就能用 "泊松分布", 来近似 "二项分布".
即:

$$P\{X = \text{想}\} = \frac{\text{均}^{\text{想}} \cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{\underbrace{2}_{\text{均值是 2 人死亡}}{}^{1} \cdot e^{-2}}{\underbrace{1}_{\text{你想发生 1 人死亡}}!} = 0.270671$$



例

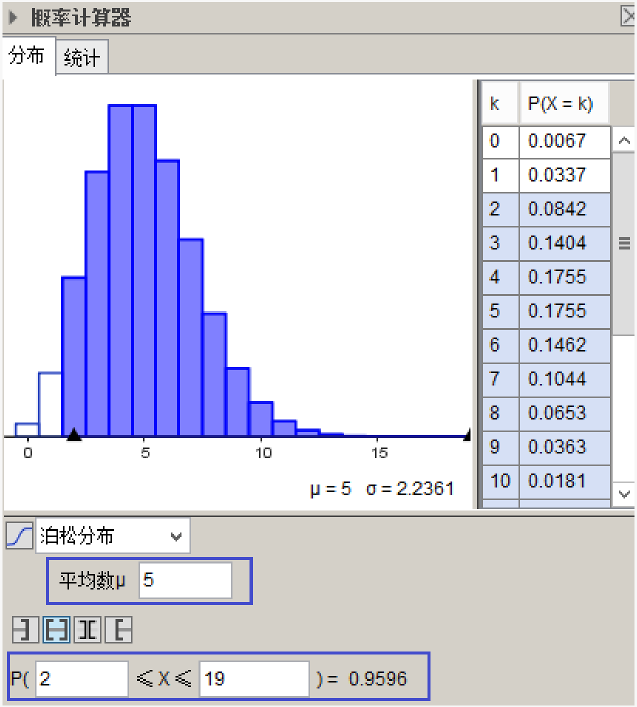
某病 (非传染病), 发病率是 $\frac{1}{1000}$, 某地区有 5000 人, 问至少 2 人得病的概率?
即:
- 随机事件 A : 有人得病.
- λ : 表示在单位空间 (本例是某地区) 内, 随机事件发生的平均次数. 本例就是 = 5000 人 × 1/1000 = 5 人.

- k : 你感兴趣的 "随机事件发生次数". 本例就是 2 人 (得病).

$$
P\{X=\text{想}\}=\frac{\text{均}^{\text{想}}\cdot e^{-\text{均}}}{\text{想}!}
$$

$$
P\{X=k\geq 2\}=1-[P(X=0)+P(X=1)]
$$

$$
=1-\frac{5^0}{0!}e^{-5}-\frac{5^1}{1!}e^{-5}=0.959572
$$



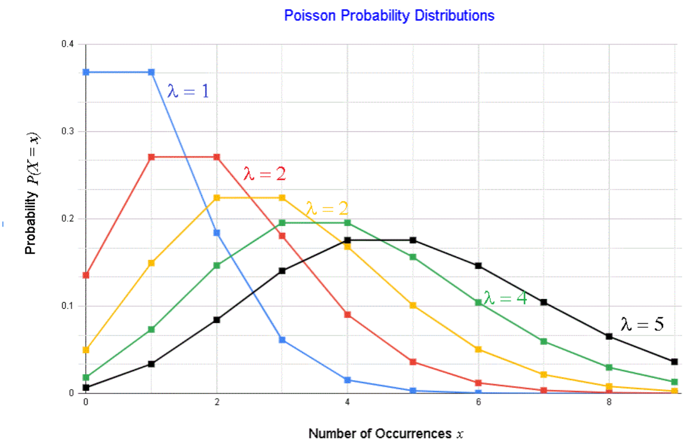
1.3 λ 值越大, "泊松分布" 的曲线越对称, 越接近 "正态分布"

泊松分布所依赖的唯一参数 λ, 其值越小, 分布越偏倚.

随着 λ 的增大, 分布越对称.

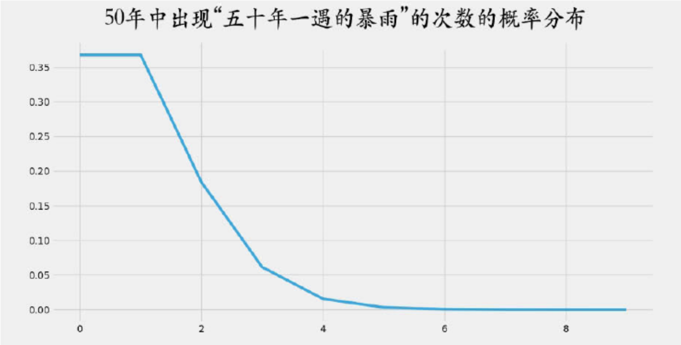
当 $\lambda=20$ 时, 接近正态分布 Normal distribution.

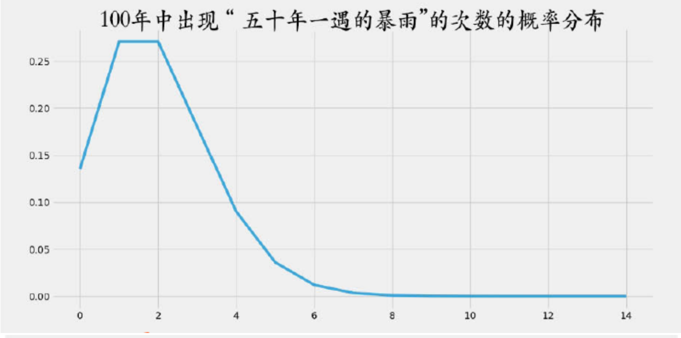
当 $\lambda\geq 50$ 时, 可用 "正态分布" 来近似处理 "泊松分布" 问题.

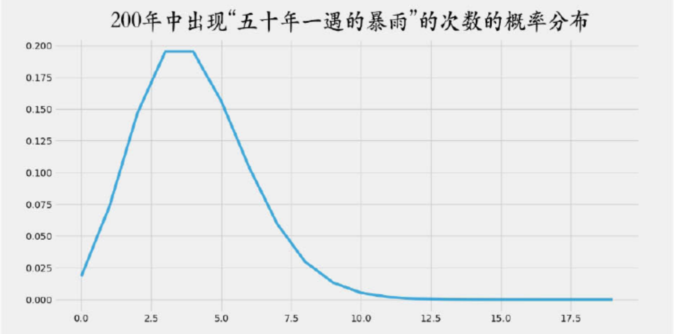


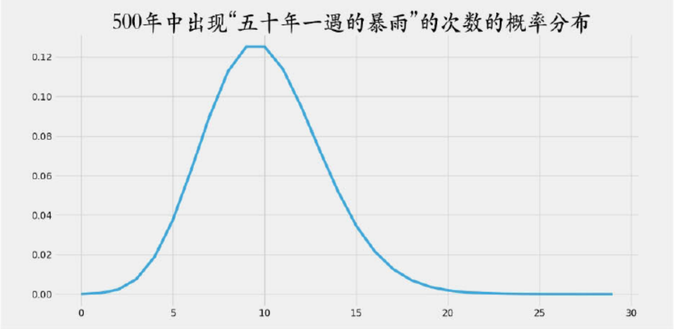
1.4 性质: 单位时间段越长, "泊松分布" 会向 "正态分布" 看齐

随着我们把 "时间单位" 拉长, 我们会发现: "泊松分布" 的曲线越来越像 "正态分布".









1.5 性质：前后两次事件的“发生时间间隔”，无“记忆性”

泊松分布中，事件对两次发生的时间间隔，是无”记忆性”的.
即：后一次事件不会记得“距离它前一次发生，时间隔了多久”. 换言之，事件之间是相互“独立”的关系.
正因此，就一定存在一些“短间隔”和“长间隔”，而很难有“一长一短、一长一短”这样有规律的出现. 否则就不叫”无记忆”了.