目录

第一部分　条件概率 **2**

1 “条件概率”的意思 **2**

2 条件概率的性质 **3**

2.1 性质: $P(A|条件B) >= 0$ 3

2.2 性质: $P(\Omega|条件B) = 1$ 3

2.3 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \mid \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right)$ 3

2.4 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \text{—} \mathrm{B}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \mid \mathrm{B}\right)$ 3

2.5 性质: 可列可加性: 若$A_1, A_2, ...A_n, ...$是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于“概率的和” 3

3 “条件概率”的乘法公式 : $P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)$ **4**

4 传染病模型 **6**

文件名

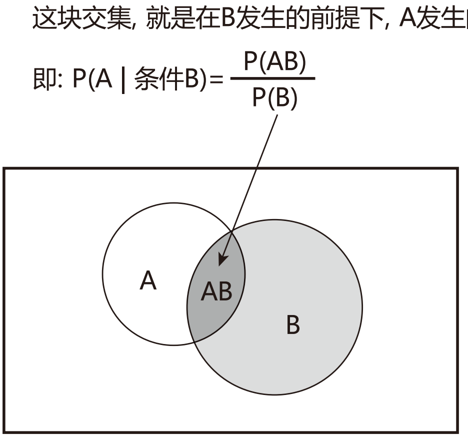
第一部分　条件概率

1　“条件概率”的意思

条件概率是: 有A, B 两个事件, 和样本空间Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则, 在B已经发生的条件下, A发生的概率, 就叫做A对B 的“条件概率”. 记作: P(A— 条件B), 读作“在B发生的条件下, A发生的概率”.

$$\text{即, 条件概率公式是: } \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\text{— 条件B}\right) = \frac{\overbrace{\text{在B发生条件下,A发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB同时发生了}}}{\text{B里面有多少个样本点}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$$

$$\text{还可写成: } \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\text{— 条件B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)} = \frac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数(分母)去比.

上面公式中, P(AB) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件A, 和事件B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件A, 和事件B 不相互独立, 则只能用“条件概率”公式, 来求P(AB), 即: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意: “条件概率”, 和“分步骤法”的区别:
- 分步骤法: 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率: 前面的事件, 有可能会(但并不一定)影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有100个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有6个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到1号球
- A_2: 取到2号球
- A_5: 取到大于4号的球

则:

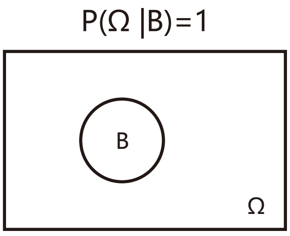
- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到1号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全6选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{\text{在B条件里面,取到}\mathrm{A}_1\text{(即1号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = 0$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号2的球里面,取1个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \frac{\text{在B条件里面,取到大于4号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有6号一个球}}}{3}$

---

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$



2.3 性质: $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2\ |\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1\ |\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2\ |\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ |\mathbf{B})$

2.4 性质: $\mathbf{P}(\mathbf{A}\ \text{—}\mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}}\ |\mathbf{B}\right)$

2.5 性质: 可列可加性: 若$A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是"互不相容"的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: "和的概率", 等于"概率的和"

---

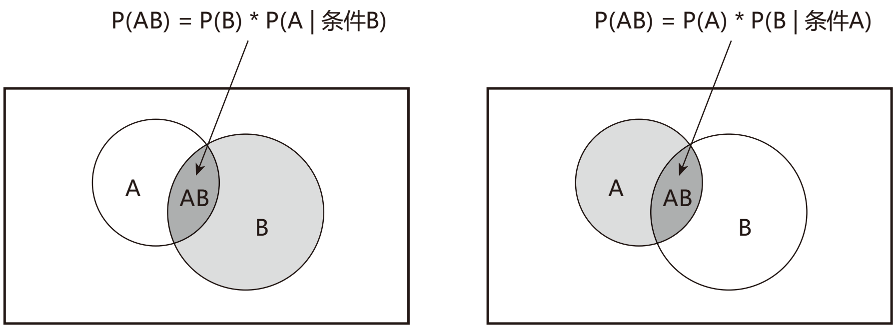
3 “条件概率”的乘法公式：$P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)$

推导过程:

$$
因为\begin{cases}
P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow 即\ P(AB) = \underbrace{P(B) \cdot P(A|B)}_{乘法，是交集\cap的概念} & ① \\
P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow 即\ P(AB) = \underbrace{P(A) \cdot P(B|A)}_{乘法，是交集\cap的概念} & ②
\end{cases}
$$

①和②，就是“乘法公式”. 即 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

其中 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$



同理, 多个事件的乘法公式就是:

$\rightarrow \boxed{P(ABC) = \underbrace{P(A)} \cdot \underbrace{P(B—A)} \cdot \underbrace{P(C—BA)}}$

↑ 上面“从右往左”看, 就是按 A,B,C 的顺序

$$\rightarrow P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2A_1) \cdot P(A_3A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(\overbrace{A_n}^{即最后一个数字n写在前面.} \mid \overbrace{A_{n-1}}^{后面的条件，最后一个数字是：n少一位} \ldots A_2A_1)$$

↑ 上面“从右往左”看, 就是按$A_1, A_2, ..., A_n$的顺序

例

有100件产品, 次品率=10%, 即有10件次品. 做不放回抽样, 问: 第3次才取到合格品的概率是?

我们先令:

- A_1 表示第1次取, 就取到了合格品
- A_2 表示第2次取, 取到了合格品
- A_3 表示第3次取, 取到了合格品

那么第3次才取到合格品, 就是:

$$\underbrace{P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)}_{分步骤来做} = \underbrace{P\left(\overline{A_1}\right)}_{第1次取，取到次品} \cdot \underbrace{P\left(\overline{A_2}\ |\overline{A_1}\right)}_{在第1次取到次品的条件下，第2次取到也是次品} \cdot \underbrace{P\left(A_3\ |\overline{A_2}\,\overline{A_1}\right)}_{在第1,2次取到次品的条件下，第3次取到正品}$$

$$= \frac{\overbrace{C_{10}^1}^{第一步，10次品里面取1}}{C_{100}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_9^1}^{第二步，因为第一步已经拿走1件次品，这第二步就只能在9件次品里面取1件次品了}}{C_{99}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_{90}^1}^{既然第三步要拿到正品，我们就从90件正品里面取1了}}{C_{98}^1}$$

$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0.00834879$$

例

某产品:
- 甲公司占60%市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占40%市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{\mathrm{J}}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified)：表示产品是“合格”的
- $\overline{\mathrm{Q}}$：表示产品是“不合格”的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}(\mathrm{JQ})=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{J})}_{=0.6}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(Q\mid J)}_{\text{甲的合格率}=0.9}=0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{Q})=\underbrace{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{J}})}_{=0.4}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(Q\mid\bar{\mathrm{J}})}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8}=0.32$$

例

抽签, 共10签, 其中有4个为“成功上岸”的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.
我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到“成功”
- B: 表示乙抽到“成功”
- C: 表示丙抽到“成功”

问, (1) 甲抽到“成功”的概率? $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}}=\frac{4}{10}=0.4$

(2) 甲乙都抽到“成功”的概率?

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB})=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\text{第1步:甲先成功}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}—\mathrm{A})}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}-1}}^{\text{乙就只能从剩下的3张好签中来抽了}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B})=\underbrace{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})}_{\text{第1步:甲先失败}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}—\overline{\mathrm{A}})}_{\text{第2步:在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{6\text{坏签}}}^{\text{甲先从共6张坏签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{乙从共4张好签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}}=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到“成功”的概率?

$$\mathrm{P}(\mathrm{ABC})=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\text{第1步:甲先成功}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}—\mathrm{A})}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩3好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩9签}}}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩2好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩8签}}}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=0.0333333$$

4 传染病模型