目录

文件名

第一部分 数学期望 mathematic expectation

1 “期望”：是对长期价值的数字化衡量.

各个股票的价格有涨有跌, 那你怎么判断它们各自的价值, 到底几何? 方法就是 — 数学期望.
“期望”是对长期价值的数字化衡量.

2 “离散型”随机变量的“数学期望”: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k P_k)$

该公式的意思就是: 将该随机变量的一切可能的“取值”, 各自乘以其对应的“概率”, 然后将这些乘积“求总和”. 如果该求和, 能得到一个“绝对收敛”的数, 那么这个收敛数, 就是该“离散型随机变量”的”数学期望 E”. 记为 $E(x)$.
它其实是简单算术平均的一种推广，类似“加权平均”。

具体就是:
离散型随机变量 X 的取值为: $X_1, X_2, ...X_n$, 其每个 X 的取值, 对应的概率为 $p(X_1), p(X_2), ..., p(X_n)$.
这些概率, 也可理解为数据 $X_1, X_2, ...X_n$ 出现的频率 $f(X_i)$. 则：

$$\boxed{X_1 \cdot p(x_1) + X_2 \cdot p(x_2) + ... + X_n \cdot p(x_n) = \sum_{k=1}^{n}(x_k \cdot p_k) = \underbrace{E(X)}_{\text{随机变量}X\text{的期望}}}$$

← 这个公式和“加权平均数”的公式很像, 只不过是把“权重”换成了“概率”.

例

某城市, 家庭中拥有孩子的数量, 是一个随机变量 X, 取值为 0,1,2,3.

	孩子数量 X=0	x=1	x=2	x=3
概率	P=0.01	P=0.9	P=0.06	P=0.03

该城市的家庭, 孩子数量的期望就是:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k \cdot p_k) = (0 \cdot 0.01) + (\underbrace{1}_{1\text{个孩子}} \cdot \underbrace{0.9}_{\text{概率是}0.9}) + (2 \cdot 0.06) + (3 \cdot 0.03) = 1.11$$

例

有甲乙两人,
- 甲会生产出“次品的数量”和“相应概率”的数据为:

次品数量 X_1	0	1	2	3
概率 P	0.3	0.3	0.2	0.2

- 乙会生产出“次品的数量”和“相应概率”的数据为:

次品数量 X_2	0	1	2	3
概率 P	0.2	0.5	0.3	0

问: 两人谁的技术水平高? 那么我们就来看他们两人各自的“期望”:
- “甲生产出次品的数量”的期望是:
$E(X_1)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.3)+(1\cdot 0.3)+(2\cdot 0.2)+(3\cdot 0.2)=1.3$

- “乙生产出次品的数量”的期望是:
$E(X_2)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.2)+(1\cdot 0.5)+(2\cdot 0.3)+(3\cdot 0)=1.1$

所以, 甲的次品期望 > 乙的. 即乙的水平高.

3 “连续型”随机变量的“数学期望”: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x\cdot f(x)]\,dx \leftarrow$ 其中的 f(x) 是“概率 (密度) 函数”.

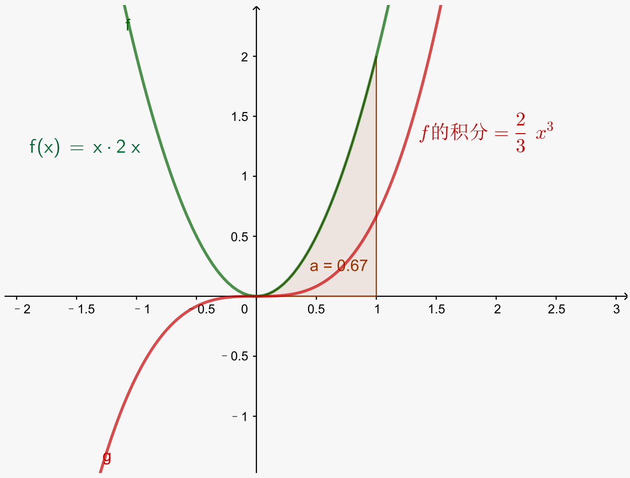
如果这个积分: $\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\cdot\underbrace{f(x)}_{\text{概率函数}}\right]dx}$ 的值, 是绝对收敛的. 则, 该积分的值, 就是“连续型”随机变量的“数学期望”.

例

求概率函数 $f(x)=\begin{cases}2x\ (0<x<1)\\ 0\ (else)\end{cases}$ 的期望值.

$$
\begin{aligned}
&E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\cdot\underbrace{f(x)}_{\text{概率函数}}\right]dx\\
&=\int_{x\text{的下限}=0}^{x\text{的上限}=1}\left[x\cdot\underbrace{2x}_{\text{即本例的概率函数}f(x)}\right]dx\\
&=\int_0^1 2x^2dx=2\int_0^1 x^2dx \leftarrow \text{根据公式:}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\\
&=2\cdot\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\Big|_0^1\\
&=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

3 “连续型”随机变量的“数学期望”: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[X\cdot F(X)]\,DX \leftarrow$ 其中的 $F(X)$ 是“概率 (密度) 函



例

某产品, 根据寿命长短 (用随机变量 X 表示), 分为三档, 每档有不同的定价.
该随机变量 X(寿命), 符合 $\lambda=\frac{1}{10}$ 的 “指数分布”.

(别忘了, 指数分布的 “概率函数” 公式是: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\ (x\geq 0)\\ 0\ (x<0)\end{cases}$)

根据寿命, 分档的价格是:

寿命 (年)	$X\leq 1$	$1\leq X\leq 2$	$2\leq X\leq 3$	$X>3$
价格 (元)	1500	2000	2500	3000

我们要先算出, 产品在 “每个价格区间” 的概率是多少? 因为下面求 “价格期望” 时, 要用到这些概率数值.

$$P\{寿命X\leq 1年\}=\int_{0年寿命}^{1年寿命}\underbrace{\left(\underbrace{\lambda}_{=\frac{1}{10}} e^{-\lambda x}\right)}_{指数分布的概率函数 f(x)} dx=\int_0^1\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.0952$$

$$P\{1<X\leq 2\}=\int_1^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.0861$$

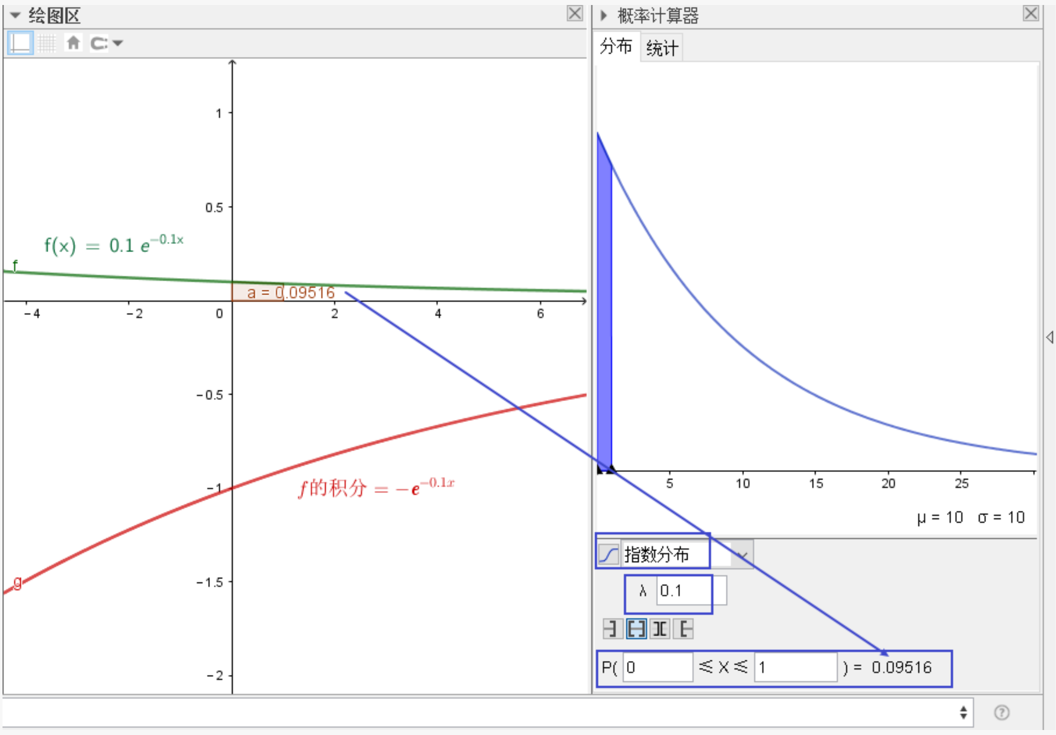
$$P\{2<X\leq 3\}=\int_2^3\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\int_2^3\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.0779$$

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\int_3^{+\infty}\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.7408$$

现在就有:

寿命 X(年)	(0-1]	(1-2]	(2-3]	>3
价格 Y(元)	1500	2000	2500	3000
概率 P	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

3 “连续型”随机变量的“数学期望”: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X \cdot F(X)]\, DX \leftarrow$ 其中的 $F(X)$ 是“概率 (密度) 函



所以, 该产品的价格期望值, 就是:

$$
\begin{aligned}
E(\text{价格}Y) &= \left(\underbrace{1500}_{\text{“属于该寿命段”产品的价格}} \cdot \underbrace{0.0952}_{\text{“会属于该寿命段产品”的概率}} \right) \\
&+ (2000 \cdot 0.0861) \\
&+ (2500 \cdot 0.0779) \\
&+ (3000 \cdot 0.7408) \\
&= 2732.15\text{元}
\end{aligned}
$$