目录

文件名

第一部分　排列 and 组合

1　加法原理, 乘法原理

- 一件事, 只需“一步”就能完成. 但这一步中有几种不同的方案可供选择, 就用“加法”原理.
- 一件事, 要分成“几步骤”才能完成. 每一步, 又有几种不同的选择方案. 就用“乘法”原理.

例

上海汽车摇号, 成功率是 5%.
有灰产称: 能帮你将中签率从5% 提高到 50%, 只要三次就能保证你中签.
→ 若成功 : 你车20的话, 他们就收你 10% (即2万.)
→ 若失败: 代理费全部返还你, 并再陪你 800元.
问: 1.他们真的有内部资源吗? 2. 他们会亏还是赚?

正常人, 摇号三次, 每月一次. 即三个月后中签的概率是多少呢?
→ 错误的算法: $0.05^3 = 0.000125$. ← 这算的是“连续3个月, 每个月都能中奖的概率”!
→ 正确的算法: 先算连续三个月, 每个月都没中奖的概率 ($= 0.95^3 = 0.857375$), 然后再1减去这个概率值 ($1 - 0.95^3 = 0.142625$). 这个结果, 就是“至少有一个月能中奖的概率”, 即 14.2%.

现在, 我们就用正常人三个月中的中一次奖的概率 14.2 %, 来算算灰产的收益.
灰产找来100人, 三个月后:
→ 其中会有平均14%个人中签. 每人收2万, 就是总收入 14×2=28万.
→ 还有平均86个人没中签, 每人赔偿800元, 灰产支出 = 86×800 =68800元.
→ 即灰产的总收入 = 收入28万 - 支出 6.88万 = 21.12万.
显然, 灰产根本不需要什么内部资源, 直接普通人的中签概率, 就能在100人中, 净赚21.12万元.

那么, 我们继续来算一下, 对于没中签的客户, 灰产要陪他们每人多少钱, 灰产才能不赚不亏呢? 即灰产能赚到的钱, 要全部赔出去.
即:

$$280000\text{元总收入} = 86\text{人} \cdot x\text{元}$$

$$x = \frac{280000}{86} = 3255.81\text{元}/\text{人}$$

所以如果你是客户, 要让灰产赔 3255元/人, 如果他们能够接受, 你才能相信他们的确可能有内部资源.

2 排列 permutation

2.1 不重复排列：$\boxed{\mathbf{P}_{\text{总数}\mathbf{n}}^{\text{选出的数量}\mathbf{m}} = \dfrac{\text{总数}!}{(\text{总数}-\text{选数})!}}$

不重复排列: 就是从n个不同的元素中, 取出m个来排列, 排过的元素不放回, 没有下次排列资格了.

则, 所有可能的排列(Permutation)方案, 就是:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数n}}^{\text{选出的数量m}} = \mathrm{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n-m})!} = \frac{\text{总数}!}{(\text{总数}-\text{选数})!}}$$

例

10人选5人上岸, 共有多少种选择?

$\mathrm{P}_{\text{总}10}^{\text{取}5} = \frac{\text{总}!}{(\text{总}-\text{选})!} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$

2.2 全排列：$\boxed{\mathbf{P}_{\text{总数}\mathbf{n}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{n}!}$

全排列, 就是从n个里面, 取出全部n个来排列, 即所有的元素都参与了排列.

$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数n}}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}}$

例如:

- $\mathrm{P}_2^2 = 2! = 2$
- $\mathrm{P}_1^1 = 1! = 1$

例

一套书,共5本, 排在一起. 问: 自左向右, 或自右向左, 是按着1,2,3,4,5编号顺序的概率是?

即 $= \dfrac{\text{顺序排是1种情况} + \text{倒序排是1种情况}}{\mathrm{P}_{\text{总}5}^{\text{选}5}} = \dfrac{2}{\mathrm{P}_5^5} = \dfrac{1}{60} = 0.0166667$

- $0! = 1$. 因为:

(1) 解释1: $\mathrm{m! = m(m-1)!}$, 如 $10! = 10 \cdot 9!$. 所以 $1! = 1 \cdot 0!$, 即得到 $0! = 1$

(2) 解释2: P_0^0 就是从0个元素里面, 取出0个元素来排列. 这只有一种情况: 即 "不选". 因为不存在任何元素, 所以没法选. 所以 $P_0^0 = 0! = 1$

- $5^0 = 1 \leftarrow$ 因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
- 0^0 无意义. $\leftarrow$ 因为 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 而分母不能为0, 所以该式子无意义.

2.3 重复排列

即: 排过队的元素, 可以拿回去, 重复参加后面的排队. (但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。)

重复排列: $\underbrace{\mathrm{n \cdot n \cdot ... \cdot n}}_{\text{共取了m次的n}} = \mathrm{n^m}$

2.4 "送利益"模型 (放球模型)

将$n_{benefit}$种利益, 随机投送给N_{man}个人 ($N_{man} \geq n_{benefit}$). 问: 每个人中, 最多只拿到1种利益的概率?

→ 先看样本空间: 第1种利益, 有N_{man}个人的去向可供选择; 第2种利益, 同样如此, ... 所以, 根据"分步骤"法, 全部$n_{benefit}$种利益, 它们的所有去向, 就共有: $\underbrace{N_{man}\cdot N_{man}\cdot ...\cdot N_{man}}_{共n_{benefit}个}=N^n$ 个.

→ 再来看"每个人中, 最多只拿到1种利益": 第1个人,

未完待续... 这里没看懂

3 组合 combination : $\boxed{C_{总}^{选}=\frac{总!}{选!(总-选!)}=C_{总}^{总-选}}$

组合: 是从n个不同元素中, 每次取出m个不同元素 $(0\le m\le n)$, 合成一组, 而不需要管排队顺序, 就称为: 从n个元素中不重复地选取m个元素的一个组合.

即: 有顺序, 就用排列; 无顺序, 就用组合.

组合的公式是:

$$\boxed{\mathrm{C}_{总数}^{选数}=\frac{\mathrm{P}_{总}^{选}}{选!}=\frac{总!}{选!(总-选!)}}$$

$$\boxed{\mathrm{C}_{总}^{选}=\mathrm{C}_{总}^{总-选}}$$

上面第二个公式的意思是: 比如你有100人, 选其中10人上岸, 就相当于是选90人不上岸. 即: $\mathrm{C}_{100}^{10}=\mathrm{C}_{100}^{100-10}=\mathrm{C}_{100}^{90}$

同理, 有 : $\boxed{\mathrm{C}_{总}^{0}=\mathrm{C}_{总}^{总-0}=\mathrm{C}_{总}^{总}}$

例

有共N人, 其中有w个女, 你任抽n人, 其中恰好有x个女人 $(x\le w)$ (记为事件A) 的概率是?

我们用"分步骤法"来做: 第一步, 先取x个女人. 第二步, 再取男人(数量就是= n-x).

$$\mathrm{P(A)}=\frac{取到x女}{从总N人中取n人}=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{总w女}^{取x女}}^{第一步:先从全部女人里面,取x个女人}\cdot\overbrace{\mathrm{C}_{总N人-总w女=总男人数}^{总取n人-x女}}^{第二步:再从总男人里,取剩下的男人数量}}{\mathrm{C}_{总N人}^{取n人}}$$

上面这个公式, 其实就是"古典概型"里面的"超几何分布".

例

有共9球, 5白, 4黑. 任取3球, 问:

(1) 是 2白1黑的概率: $\mathrm{P}(2白1黑)=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^2}^{第一步:5白取2}\cdot\overbrace{\mathrm{C}_4^1}^{第二步:4黑取1}}{\underbrace{\mathrm{C}_9^3}_{总9取3}}=0.47619$

(2) 取到的3球中, 无黑球 : $\mathrm{P}(3白)=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^3}^{5白取3}}{\underbrace{\mathrm{C}_9^3}_{总9取3}}=0.119048$

(3) 取到的3球中, 颜色相同 : $\mathrm{P}(3球同色)=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^3}^{5白取3}\overbrace{+}^{或}\overbrace{\mathrm{C}_4^3}^{4黑取3}}{\underbrace{\mathrm{C}_9^3}_{总9取3}}=0.166667$

或, 也可用第二种思路来解:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(3\text{球同色}) = 1 - \mathrm{P}(3\text{球存在不同色}) \\
&= 1 - \frac{1\text{白}2\text{黑}, \text{或}2\text{白}1\text{黑}}{9\text{取}3} \\
&= 1 - \frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^1}^{5\text{白取}1;} \overbrace{\mathrm{C}_4^2}^{4\text{黑取}2} \overbrace{+}^{\text{或}} \overbrace{\mathrm{C}_5^2}^{5\text{白取}2;} \overbrace{\mathrm{C}_4^1}^{4\text{黑取}1}}{\mathrm{C}_9^3} \\
&= 0.166667
\end{aligned}
$$