目录

文件名

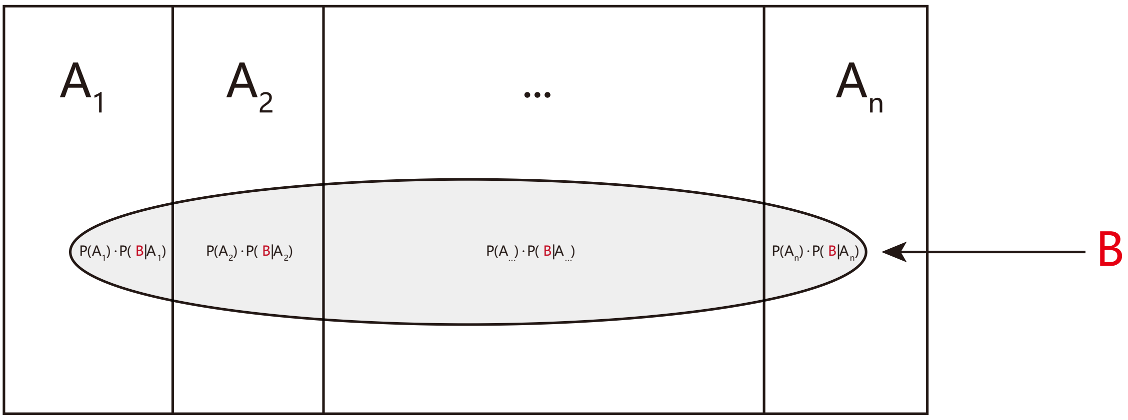
第一部分　全概率公式：

$$\boxed{P\left(B\right)=\underbrace{P\left(A_1\right)\cdot P\left(B|A_1\right)}+\underbrace{P\left(A_2\right)\cdot P\left(B|A_2\right)}+\ldots+\underbrace{P\left(A_n\right)\cdot P\left(B|A_n\right)}}$$

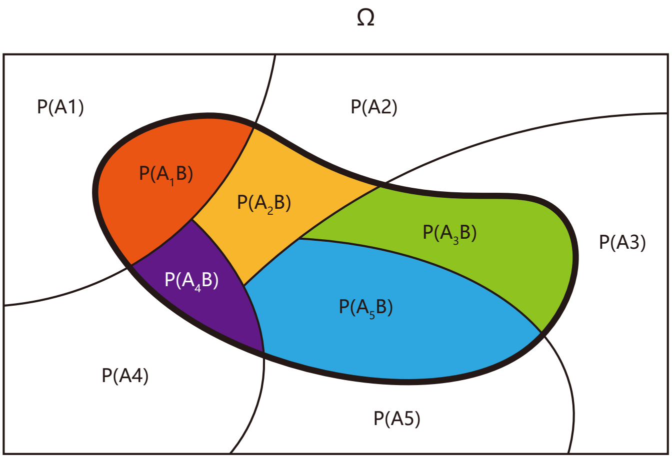
全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 构成一个“完备事件组”，即：(1) 这些事件两两互不相容，(2)其“和”(或“并集”)为全集 Ω，(3) $P(A_i) > 0$.

则有：$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(A_i\right)\cdot P\left(B|A_i\right)\right]=P\left(B\right)}$

即有：$P\left(B\right)=\underbrace{P\left(A_1\right)\cdot P\left(B|A_1\right)}+\underbrace{P\left(A_2\right)\cdot P\left(B|A_2\right)}+\ldots+\underbrace{P\left(A_n\right)\cdot P\left(B|A_n\right)}$



Total Probability Theorem
全概率公式



上图，粗线部分围起来的整块有彩色区域，就是B.
B的概率，就等于= 每一个彩色块的概率，加总起来.

比如第1块，橙色的概率，就是 A1 和 B 的交集，即 $= P(A_1 \cap B)$

P(B) = 所有5块彩色的概率加起来. 即得到下图中的“全概率公式”.

全概率公式：

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \text{第1块的概率} + \text{第2块的概率} + \ldots + \text{第}n\text{块的概率} \\
&= P(A_1B) + P(A_2B) + \ldots + P(A_nB) \\
&= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)\cdot P(B|A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[P(A_i)\cdot P(B|A_i)\right]
\end{aligned}
$$

并有: $P(B) = \underbrace{P(A)\cdot P(B|A)}_{A\text{中},B\text{的概率的具体值}} + \underbrace{P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$

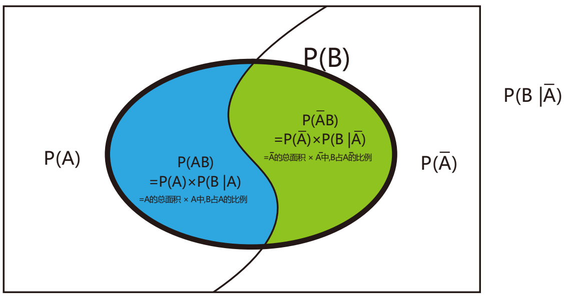
注意: 上式中, P(B—A) 这块只是个比例而已. 即 B在A中的比例. 即 $\frac{B}{A}$. 但单纯的比例是没用的. 比如, alice说她的收入只有 bob 的 1/10, 但 1/10 依然没有告诉你 alice的收入到底是多少? 所以, 比例值还需要乘上一个基数. 这个“基数”就是 bob 本身的收入, 比如是 10000元, 你才能知道 alice的收入是 $10000\cdot\frac{1}{10} = 1000$元.

同理, 本处的公式, P(B—A) 这个比例, 还要乘上“P(A) 本身的值”作为基数, 我们才能最终知道 P(AB)的具体值到底是多少.
事实上, P(B—A) 就是 B占A的比例. 即 $\frac{B}{A}$.
而 $P(A)\cdot P(B|A)$ 就是 AB 的交集面积占整个全集Ω 的比例, 即$\frac{A\cap B}{\Omega}$

如果我们把全集分为两部分: A 和 $\overline{A}$, 则, B的部分, 就是:

$$\boxed{P(B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$$

如下图:



比如, 全集 Ω (亚欧板块)被分成两部分: 一块是A(亚洲), 另一块是$\overline{A}$ (欧洲). 全集中有子集B(俄罗斯), 被A 和$\overline{A}$各自分割了一部分土地. 那么:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{P(B)}_{\text{俄罗斯占亚欧板块的面积比例}} &= \underbrace{P(A)}_{\text{亚洲占亚欧板块的比例}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{亚洲中的俄罗斯部分,占亚洲的比例}} \\
&+ \underbrace{P(\overline{A})}_{\text{欧洲占亚欧板块的比例}} \cdot \underbrace{P(B|\overline{A})}_{\text{欧洲中的俄罗斯部分,占欧洲的比例}}
\end{aligned}
$$

例

一个工厂, 有4条生产线, 情况如下:

	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是“不合格品”的概率?

我们先设定事件:

- A_1：表示是生产线1 中的产品
- A_2：表示是生产线2 中的产品
- A_3：表示是生产线3 中的产品
- A_4：表示是生产线4 中的产品
- B：表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$P(B)$$
$$= \underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线1的概率}} \cdot \overbrace{P(B|A_1)}^{\text{生产线1中的次品率}}}_{\text{第1条生产线中(的条件下), 不合格品的概率}} + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + P(A_4) \cdot P(B|A_4)$$
$$= (15\% \cdot 0.05) + (20\% \cdot 0.04) + (30\% \cdot 0.03) + (35\% \cdot 0.02)$$
$$= 0.0315$$

例

有10台机器人, 3台是次品. 已经卖出去了2台(是正品还是次品未知).
问: 再取1台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:
- B_{00}：B(bad), 表示前两次取, 都是次品(用0表示)
- B_{10}： 表示前两次取, 是一正(用1表示), 一次(用0表示). 至于顺序是“正,次” 还是“次,正”, 都行
- B_{11}：表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3}：G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第3次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这3种可能性:
- (第1次取到)次, (第2次取到)次, (第4次取到)正.

即$\rightarrow = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})}_{\text{前两次取到次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}} | \mathrm{B}_{00})}_{\text{在前两次取到次品的条件下, 第3次取到正品}}$
- 次,正,正. 即$\rightarrow = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{10}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}} | \mathrm{B}_{10})$
- 正,正,正. 即$\rightarrow = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{11}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}} | \mathrm{B}_{11})$

上面这三种可能性并存, 就是“和”(并集)的概念. 用加法:

$$G_{xx3} = \underbrace{P(B_{00}) \cdot P(G_{xx3}\ |B_{00})}_{\text{第1种情况: 2次, 1正}} + \underbrace{P(B_{10}) \cdot P(G_{xx3}\ |B_{10})}_{\text{第2种情况: 1次1正，再正}} + \underbrace{P(B_{11}) \cdot P(G_{xx3}\ |B_{11})}_{\text{第3种情况: 前2正, 再1正}}$$

$$= \underbrace{\frac{C^{\text{取2次}}_{\text{总3次}}}{C^2_{\text{总10}}} \cdot \frac{C^{\text{取1正}}_{\text{总7正}}}{C^1_{10-2}}}_{\text{第1种情况: 2次, 1正}} + \underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{C^1_{\text{总7正}}}^{\text{取1正}} \cdot \overbrace{C^1_{\text{总3次}}}^{\text{取1次}}}^{\text{分步骤, 用乘法}}}{C^2_{\text{总10}}} \cdot \frac{C^{\text{1正}}_{\text{还剩总6正}}}{C^1_{10-2}}}_{\text{第2种情况: 1次1正，再1正}} + \underbrace{\frac{C^2_{\text{总7正}}}{C^2_{10}} \cdot \frac{C^1_{\text{还剩总5正}}}{C^1_8}}_{\text{第3种情况: 前2正, 再1正}}$$

$$= \underbrace{\frac{C^2_3}{C^2_{10}} \cdot \frac{C^1_7}{C^1_8}} + \underbrace{\frac{\color{green}{C^1_7 C^1_3}}{\color{green}{C^2_{10}}} \cdot \frac{C^1_6}{C^1_8}} + \underbrace{\frac{C^2_7}{C^2_{10}} \cdot \frac{C^1_5}{C^1_8}} = 0.7$$

注意：上面的第2种情况，先取1正1次，或1次1正的情况，就是：

$$= \overbrace{\overbrace{\frac{C^1_7}{C^1_{10}}}^{\text{先取1正}} \cdot \overbrace{\frac{C^1_3}{C^1_9}}^{\text{再取1次}}}^{\text{分步骤, 用乘法}} + \overbrace{\overbrace{\frac{C^1_3}{C^1_{10}}}^{\text{先取1次}} \cdot \overbrace{\frac{C^1_7}{C^1_9}}^{\text{再取1正}}}^{\text{分步骤, 用乘法}} = 0.466667$$

$$= \underbrace{\frac{\color{green}{C^1_7 C^1_3}}{\color{green}{C^2_{10}}}}_{\substack{\text{总10个里面取2个,} \\ \text{其中1个从正品里面取,} \\ \text{1个从次品里面取}}} = 0.466667$$

一件事是"分步骤"来做的, 用乘法 →

"或"的情况用加法

	第 1 次取到	第 2 次取到	第 3 次取到
情况1	次	次	正
情况2	次	正	正
情况3	正	正	正

例

有10件产品, 其中次品的数量, 有三种可能性: 0件 /1件 /2件, 即这三种可能性中的每一种, 发生的概率是1/3.

同时, 检验时也存在"误检"情况：

	→被检验成→		的概率是
正品		次品	0.02
正品	→	正品	0.98
次品	→	正品	0.05
次品		次品	0.96

问: 这批产品能通过检验(即事件S_2)的可能性是多少？即本题要求 $P(S_2)$=?

这要分两种情况来讨论 ("和"的概念, 用加法):

- 1. 正品被误检(成"假")时的情况
- 2. 次品被误检(成"真")时的情况

我们先定义各种事件:

- B_0 : B(bad). 表示总的10件产品中, 存在0件次品. 该事件的概率, 题目已经告诉我们: $P(B_0) = \frac{1}{3}$
- B_1 : 表示总的10件产品中, 存在1件次品. $P(B_1) = \frac{1}{3}$
- B_2 : 表示总的10件产品中, 存在2件次品. $P(B_2) = \frac{1}{3}$
- S_1 : S(sample. (v.) 抽样检验；取样；采样) 表示任意抽检一次, 抽到了正品. (但这

里还有个问题不清晰, 就是说这个正品, 到底是它本身就是“正品”; 还是说只是抽验认为它是“正品”?)

- $\overline{S_1}$: 表示任意抽检一次, 抽到了次品.
- S_2 : 表示再次检验, 并“通过验证” (注意: 有误检率存在. 所以通过检验的, 未必是“正品”; 反之亦然).

本题要求的 $\mathrm{P}(S_2)$, 实际上就是: “无论第一次抽, 认为是正是次; 在第二次检验时, 都认为是正品”的东西. 即: $\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\right)=\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\mid\mathrm{S}_1\right)}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\mid\overline{\mathrm{S}_1}\right)}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$

那么我们先考算 $\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)$ 和 $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)$.

$\rightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)$: 是在具体“次品”数量未知的情况下, 抽1次就得到“正品”的概率.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_0\right)}^{\text{总数中有0次品}}\cdot\mathrm{P}\left(\overbrace{\mathrm{S}_1}^{\text{第1次抽得到正品}}\mid\mathrm{B}_0\right)}_{\text{在总数中有0次品的条件下, 抽1次得到正品的概率}}+\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_1\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\mid\mathrm{B}_1\right)}_{\text{总数中含有1次品, 抽1次取到正}}+\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_2\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\mid\mathrm{B}_2\right)}_{\text{总数中含有2次品, 抽1次取到正}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}_{\text{总}10\text{正}}^1}{\mathrm{C}_{\text{总}10}^1}}_{\text{总10中含有0次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}_{\text{总}9\text{正}}^1}{\mathrm{C}_{\text{总}10}^1}}_{\text{总10中含有1次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}_{\text{总}8\text{正}}^1}{\mathrm{C}_{\text{总}10}^1}}_{\text{总10中含有2次品}}$$

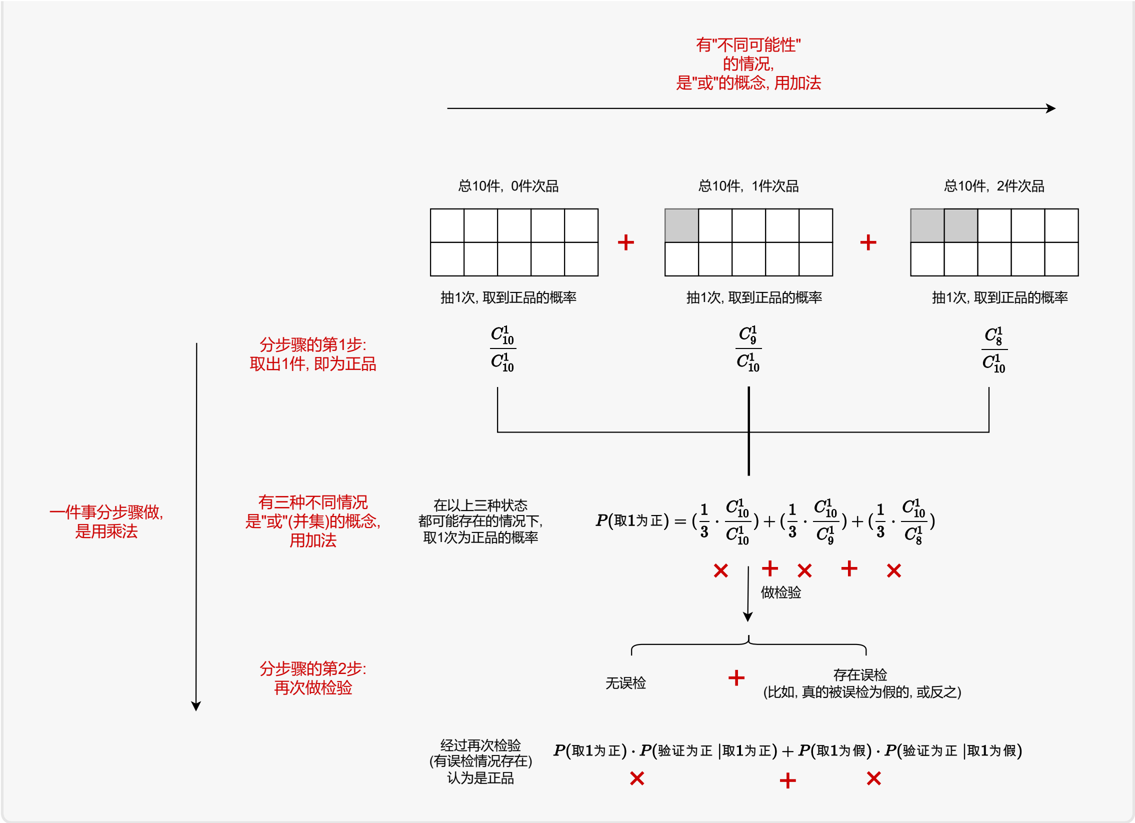
$$=0.9$$

所以 : $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)=1-\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)=1-0.9=0.1$

于是, 我们就能得到 :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\right)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_1\right)}^{=0.9}\cdot\overbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\mid\mathrm{S}_1\right)}^{\text{从上面的表格中可知, 正品被检验为正品,概率为0.98}}}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)}^{=0.1}\cdot\overbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\mid\overline{\mathrm{S}_1}\right)}^{\text{次品被检验为正品, 概率是0.05}}}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$$

$$=(0.9\cdot0.98)+(0.1\cdot0.05)=0.887$$


有"不同可能性"
的情况,
是"或"的概念, 用加法
总10件，0件次品
总10件，1件次品
总10件，2件次品
抽1次, 取到正品的概率
抽1次, 取到正品的概率
抽1次, 取到正品的概率
分步骤的第1步:
取出1件, 即为正品
$\frac{C_{10}^1}{C_{10}^1}$
$\frac{C_9^1}{C_{10}^1}$
$\frac{C_8^1}{C_{10}^1}$
一件事分步骤做,
是用乘法
有三种不同情况
是"或"(并集)的概念,
用加法
在以上三种状态
都可能存在的情况下,
取1次为正品的概率
$P(\text{取1为正}) = (\frac{1}{3} \cdot \frac{C_{10}^1}{C_{10}^1}) + (\frac{1}{3} \cdot \frac{C_{10}^1}{C_9^1}) + (\frac{1}{3} \cdot \frac{C_{10}^1}{C_8^1})$
做检验
分步骤的第2步:
再次做检验
无误检
存在误检
(比如, 真的被误检为假的, 或反之)
经过再次检验
(有误检情况存在)
认为是正品
$P(\text{取1为正}) \cdot P(\text{验证为正} \mid \text{取1为正}) + P(\text{取1为假}) \cdot P(\text{验证为正} \mid \text{取1为假})$