目录

文件名

第一部分　条件概率:

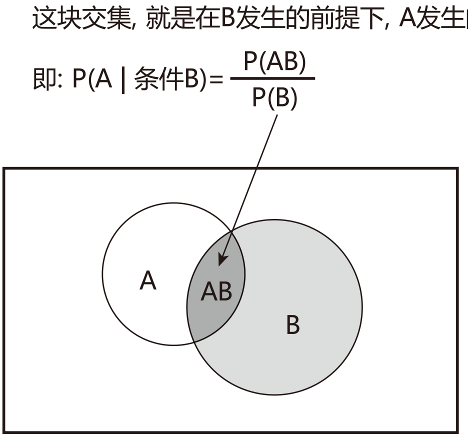
$$P(A|\text{条件}B) = \frac{P(A\cap B)}{P(\text{条件}B)} = \frac{\text{事件}A,B\text{同时发生的概率}}{\text{事件}B\text{发生的概率}}$$

1　“条件概率” 的意思

条件概率是: 有 A, B 两个事件, 和样本空间 Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则, 在 B 已经发生的条件下, A 发生的概率, 就叫做 A 对 B 的 “条件概率”. 记作: P(A| 条件 B), 读作 “在 B 发生的条件下, A 发生的概率” .

即, 条件概率公式是: $P(A\ |conditionB) = \frac{\overbrace{\text{在 B 发生条件下,A 发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB 同时发生了}}}{\text{B 里面有多少个样本点}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成: $P(A\ |conditionB) = \frac{\mathrm{P\,(A\cap B)}}{\mathrm{P\,(B)}} = \frac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数 (分母) 去比.

上面公式中, P(AB) (← 也可写作 $P(A\cap B)$) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件 A, 和事件 B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$
- 如果事件 A, 和事件 B 不相互独立, 则只能用 “条件概率” 公式, 来求 P(AB), 即:

$$\boxed{P(AB) = P(B)\cdot P(A|B) = P(A)\cdot P(B|A)}$$

注意: “条件概率”, 和 “分步骤法” 的区别:
- 分步骤法 (用乘法): 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率 (里面也有用到乘法): 前面的事件, 有可能会 (但并不一定) 影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.

会影响的例子: 比如一共有 100 个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有 6 个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到 1 号球
- A_2: 取到 2 号球
- A_5: 取到大于 4 号的球

则:

- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到 1 号球的概率}} = \dfrac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全 6 选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \dfrac{\text{在 B 条件里面, 取到 }\mathrm{A}_1\text{(即 1 号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \dfrac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = 0$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \dfrac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号 2 的球里面, 取 1 个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = \frac{1}{3}$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \dfrac{\text{在 B 条件里面, 取到大于 4 号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \dfrac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有 6 号一个球}}}{3}$

例

某地 10 万人, 其中平均有 40 人患甲病; 有 34 人患乙病; 两种病都患的有 32 人. 则, 我们设:

→ 事件 A : 是一个人得甲病

→ 事件 B : 是一个人得乙病

即有:

$P(A) = \frac{40}{100000} = 0.0004$

$P(B) = \frac{34}{100000} = 0.00034$

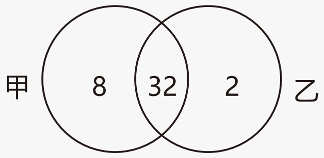
$P(AB) = \frac{32}{100000} = 0.00032$

根据公式: $P(AB) = P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{=\frac{P(AB)}{P(A)}} = P(A) \cdot \dfrac{P(AB)}{P(A)}$,

$$\leftarrow \text{即 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{32}{100000}}{\frac{40}{100000}} = 0.8$$

根据公式: $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

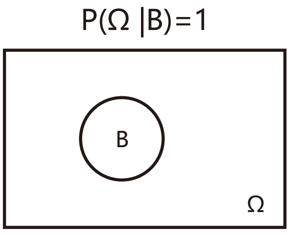
$$\leftarrow \text{即 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{32}{100000}}{\frac{34}{100000}} = 0.941176$$



2 条件概率的性质

2.1 性质：$P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质：$P(\Omega|\text{条件}B) = 1$



2.3 性质：$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \ |\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B})$

2.4 性质：$\mathbf{P}(\mathbf{A} \ |\mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}} \ |\mathbf{B})$

2.5 性质：可列可加性：若 $A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是“互不相容”的事件，则有：$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ ← 即：“和的概率”，等于“概率的和”

3 “条件概率”的乘法公式：

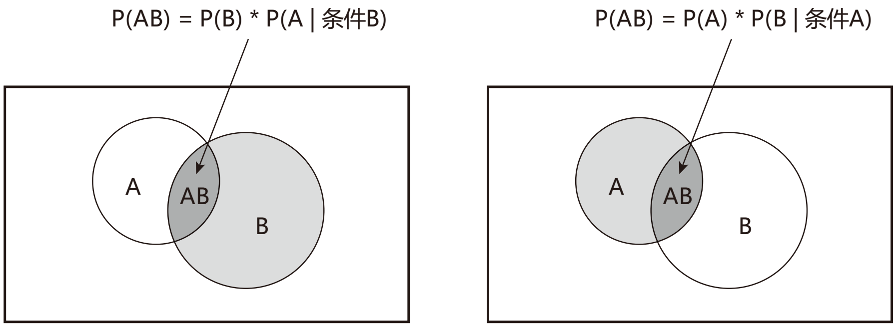
$$\boxed{P(\text{前后}) = P(\text{后}) \cdot P(\text{前}|\text{后}) = P(\text{前}) \cdot P(\text{后}|\text{前})}$$

推导过程：

$$\text{因为}\begin{cases} \mathrm{P(A|B)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} \rightarrow \text{即 } \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)}}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} & ① \\ \mathrm{P(B|A)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}} \rightarrow \text{即 } \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} & ② \end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”． 即 $\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}$

其中 $\mathrm{P(A)} > 0$，$\mathrm{P(B)} > 0$



同理，多个事件的乘法公式就是：

$\rightarrow \boxed{\mathrm{P(ABC)} = \underbrace{\mathrm{P(A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(B|A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(C|BA)}}}$

↑ 上面“从右往左”看，就是按 A,B,C 的顺序

$$\to \mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(\overbrace{\mathrm{A}_n}^{\text{即最后一个数字n 写在前面.}}\mid\overbrace{\mathrm{A}_{n-1}}^{\text{后面的条件, 最后一个数字是: n少一位}}\ldots\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)$$

↑ 上面 “从右往左” 看, 就是按 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的顺序

例

有 100 件产品, 次品率 =10%, 即有 10 件次品. 做不放回抽样, 问: 第 3 次才取到合格品的概率是?

我们先令:

- A_1 表示第 1 次取, 就取到了合格品
- A_2 表示第 2 次取, 取到了合格品
- A_3 表示第 3 次取, 取到了合格品

那么第 3 次才取到合格品, 就是:

$$\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}_2}\mathrm{A}_3\right)}_{\text{分步骤来做}}=\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{第1次取,取到次品}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_2}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{在第1次取到次品的条件下, 第2次取到也是次品}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\mid\overline{\mathrm{A}_2}\,\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{在第1,2次取到次品的条件下, 第3次取到正品}}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{10}^1}^{\text{第一步, 10次品里面取1}}}{\mathrm{C}_{100}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_9^1}^{\text{第二步, 因为第一步已经拿走1件次品, 这第二步就只能在9件次品里面取1件次品了}}}{\mathrm{C}_{99}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{90}^1}^{\text{既然第三步要拿到正品, 我们就从90件正品里面取1了}}}{\mathrm{C}_{98}^1}$$

$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=0.00834879$$

例

某产品:

- 甲公司占 60% 市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占 40% 市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:

- J: 表示产品是甲的
- $\bar{\mathrm{J}}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified) : 表示产品是 “合格” 的
- $\overline{\mathrm{Q}}$: 表示产品是 “不合格” 的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{JQ})=\underbrace{\mathrm{P}\,(\mathrm{J})}_{=0.6}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\,(Q\mid J)}_{\text{甲的合格率}=0.9}=0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}\,(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{Q})=\underbrace{\mathrm{P}\,(\bar{\mathrm{J}})}_{=0.4}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\,(Q\mid\bar{\mathrm{J}})}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8}=0.32$$

例

抽签, 共 10 签, 其中有 4 个为 “成功上岸” 的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.

我们先设定事件:

- A: 表示甲抽到 “成功”
- B: 表示乙抽到 “成功”
- C: 表示丙抽到 “成功”

问, (1) 甲抽到 “成功” 的概率? $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} = \frac{4}{10} = 0.4$

(2) 甲乙都抽到 “成功” 的概率?

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\text{第 1 步: 甲先成功}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{第 2 步: 在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$
$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}-1}}^{\text{乙就只能从剩下的 3 张好签中来抽了}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P\left(\overline{A}B\right) = \underbrace{P\left(\overline{A}\right)}_{\text{第 1 步: 甲先失败}} \cdot \underbrace{P\left(B\ |\overline{A}\right)}_{\text{第 2 步: 在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$
$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{6\text{坏签}}}^{\text{甲先从共 6 张坏签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{乙从共 4 张好签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到 “成功” 的概率?

$$P(ABC) = \underbrace{P(A)}_{\text{第 1 步: 甲先成功}} \cdot \underbrace{P(B\ |A)}_{\text{第 2 步: 在甲成功的前提下, 乙再成功}} \cdot \underbrace{P(C|BA)}_{\text{第 3 步: 在甲乙都成功的前提下, 丙再成功}}$$
$$= \frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩 3 好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩 9 签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩 2 好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩 8 签}}}$$
$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0.0333333$$

例

你的新邻居, 是个 is very shy and withdrawn, invariably helpful but with very little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, ant a passion for detail.
你觉得他更可能是 – 图书管理员, 还是农民?
大多数人会认为他是图书馆管理员. 其实, 这种判断是” 非理性” 的. 问题的关键在于 – 你没有把这两种职业的” 人数比例” 考虑进去.

→ 在美国,农民与图书馆管理员,两者的数量之比是 $20:1$.
根据这个比例,我们可以假设他们人数的概率分别为:

$$\begin{cases} P(农民职业)=\dfrac{20}{100} \\ P(图书管理员职业)=\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

→ 假如你听到"彬彬有礼"这类描述,你的直觉是:
40%的图书馆管理员符合这个描述,而只有10%的农民符合这个描述.
如果这是你的估计,那就意味着:

$$\begin{cases} 在100\%的纯粹农民群体中,彬彬有礼者的占比概率是: \\ \qquad P(彬彬有礼\ |农民职业)=0.1 \\ 在100\%的纯粹图书管理员群体中,彬彬有礼者的占比概率是: \\ \qquad P(彬彬有礼\ |图书管理员职业)=0.4 \end{cases}$$

→ 在既有农民,又有图书管理员的混合群体中:

$$\begin{cases} 在属于农民职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是: \\ P(农民职业\cap 彬彬有礼)=\underbrace{P(农民职业)}_{第一步,是农民的概率}\cdot\underbrace{P(彬彬有礼\ |农民职业)}_{第二步,在是农民前提下,彬彬有礼者的概率} \\ \qquad =0.2\cdot 0.1=0.02 \\ 在属于图书管理员职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是: \\ P(图书管理员职业\cap 彬彬有礼)=P(图书管理员职业)\cdot P(彬彬有礼\ |图书管理员职业) \\ \qquad =0.01\cdot 0.4=0.004 \end{cases}$$

→ P(在彬彬有礼者中,取1人为图书管理员的概率)

$$=\frac{P(图书管理员职业\cap彬彬有礼)}{P(农民职业\cap彬彬有礼)+P(图书管理员职业\cap彬彬有礼)}$$

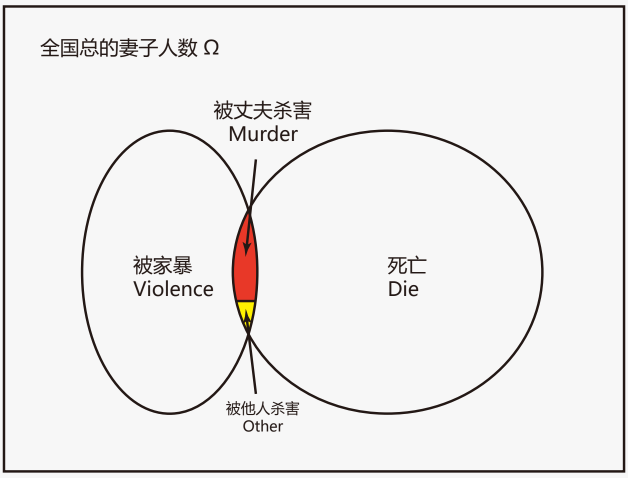
$$=\frac{0.004}{0.02+0.004}=0.166667$$

所以, 即使你认为“符合这个描述的人是一个图书馆管理员的可能性, 是一个农民的 4 倍”, 也抵不过农民的数量很多.

例

辛普森杀妻案, 原告证明辛普森常常家暴前妻. 他们认为, 长期家暴说明辛普森有杀妻的动机. 被告律师则举出数据反驳说, 美国有 400 万被家暴的妻子, 但只有 1432 名被丈夫杀害, 这个概率只有 $\frac{1432}{400万}$ = 比 1/2500 还低. 所以家暴证明不了辛普森谋杀.
被告想表达的是: 在“家暴”这个事件前提条件下, 丈夫谋杀妻子的概率不高. 即 P(丈夫家暴 丈夫杀妻) = 概率值很低.

你怎么看? 事实上, 被告举出的概率, 不适用于这个案子上. 因为本案的妻子已经死亡, “妻子已死”也变成了一个已经存在的前提条件. 所以现在我们要看的概率就是: P(丈夫家暴 妻子已死亡 是丈夫杀妻)=? 即: 在“被家暴”且“死亡”的妻子数量里面 (这里就有两个前提条件了, 而不是仅一个前提条件), 有多少是被丈夫杀害的?



即:

- 辛普森律师一方的概率公式是: $\frac{红色}{Violence} < \frac{1}{2500}$
- 妻子一方律师的概率公式是: $\frac{红色}{红色+黄色} = 93\%$

根据美国 1992 年发布的数据推算: 每 10 万个被家暴的妇女中, 有 43 个会被谋杀. 其中 40 个是被丈夫谋杀, 其他 3 个是被丈夫以外的人谋杀. 那么, 条件概率就是:

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P\left(丈夫杀 \mid 家暴 \cap 妻死\right) = \frac{P\left(家暴 \cap 妻死 \cap 丈夫杀\right)}{P\left(家暴 \cap 妻死\right)} = \frac{\frac{40}{100000}}{\frac{43}{100000}} = 0.930233$$

你仔细体会一下两者的不同:

- 辛普森方, 是说: 在所有 "之后活着和死去" 的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大. 即 $\frac{丈夫杀害}{条件:\ 1.\ 被家暴}$
- 妻子方, 是说: 在所有 "死去" 的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大? 即 $\frac{丈夫杀害}{条件:\ 1.\ 被家暴\ \&\ 2.\ 死亡}$

不过, 即使概率高达 93%，也不能绝对证明辛普森杀了妻子. 因为**"条件概率" 只表示统计意义上的 "相关性", 并不代表 "因果关系".** 即只说明: 家暴和谋杀妻子之间有很强的相关性。

4 传染病模型

例

有红球 a 个, 黑球 b 个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入 c 个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续 3 次都是取出红球的概率?

先设定事件:

- A_1 : 表示你第 1 次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第 1 次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第 3 次, 取出的是红球

$$\underbrace{P(A_1A_2A_3)}_{\text{连续3次取到红球}} = \underbrace{P(A_1)}_{\substack{\text{第一步:}\\ \text{第一次就取到红球}}} \cdot \underbrace{P(A_2|A_1)}_{\substack{\text{第二步:}\\ \text{在第一次取到红球的前提下,}\\ \text{第二次也取到红球}}} \cdot \underbrace{P(A_3|A_2A_1)}_{\substack{\text{第三步:}\\ \text{再前两次都取到红球的前提下,}\\ \text{第三次也取到红球}}}$$

$$= \frac{C^1_{a红}}{C^1_{a红+b黑}} \cdot \frac{\overbrace{C^1_{a红+c红}}^{\substack{\text{在第一次取到红球后,}\\ \text{又放入c个红球.}\\ \text{所以第二次取时,}\\ \text{红球就一共有a+c个}}}}{\underbrace{C^1_{a红+b黑+c红}}_{\substack{\text{为什么总数没有减1个?}\\ \text{因为是“放回抽样”.}\\ \text{总数不变}}}} \cdot \frac{C^1_{a红+2c红}}{C^1_{a红+b黑+2c红}}$$

上面可以看出:
- 当 c 红 = 0 时, 就是正常的 “放回抽样”.
- 当 c 红 = -1 时, 就是 “不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c 红 >0 时, 就是本例的 “传染病模型”.

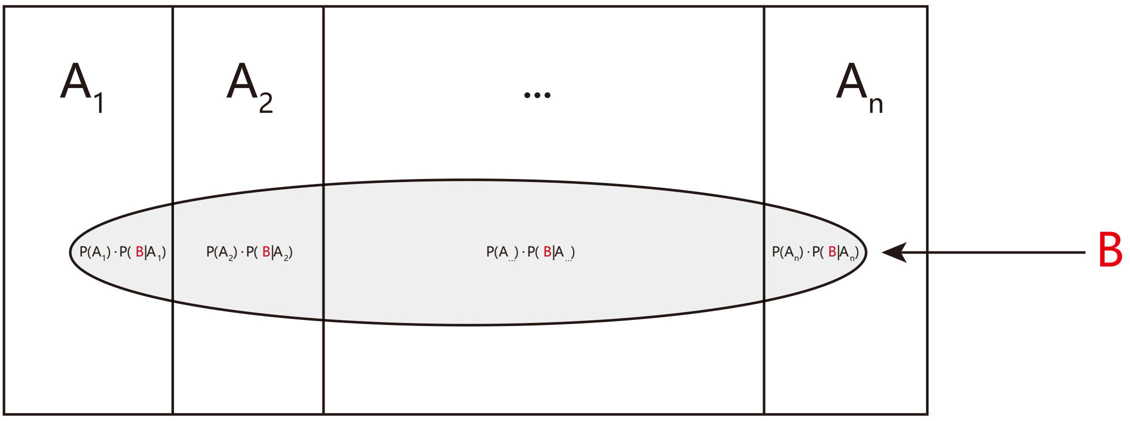
---

5 全概率公式: $P(B) = \underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$

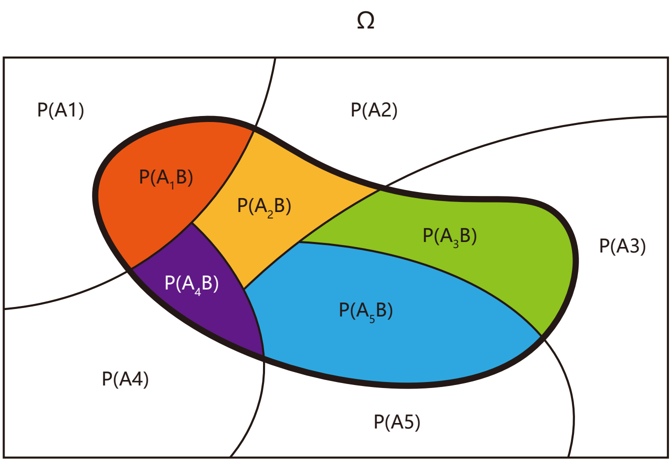
全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, ..., A_n$ 构成一个 “完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2) 其 “和”(或 “并集”) 为全集 Ω, (3) $P(A_i) > 0$.

则有: $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left[P(A_i)\cdot P(B|A_i)\right] = P(B)}$

即有: $P(B) = \underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$



Total Probability Theorem
全概率公式



上图, 粗线部分围起来的整块有彩色区域, 就是 B.
B 的概率, 就等于 = 每一个彩色块的概率, 加总起来.

比如第 1 块, 橙色的概率, 就是 A1 和 B 的交集, 即 $= P(A_1 \cap B)$
P(B) = 所有 5 块彩色的概率加起来. 即得到下图中的 "全概率公式".

全概率公式:

$$\begin{aligned}
P(B) &= \text{第 1 块的概率} + \text{第 2 块的概率} + ... + \text{第}n\text{块的概率} \\
&= P(A_1B) + P(A_2B) + ... + P(A_nB) \\
&= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B|A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[P(A_i)\cdot P(B|A_i)\right]
\end{aligned}$$

并有: $P(B) = \underbrace{P(A)\cdot P(B|A)}_{A\text{中},B\text{的概率的具体值}} + \underbrace{P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$

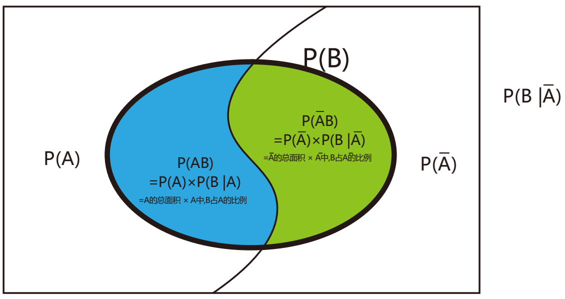
注意: 上式中, P(B|A) 这块只是个比例而已. 即 B 在 A 中的比例. 即 $\frac{B}{A}$. 但单纯的比例是没用的. 比如, alice 说她的收入只有 bob 的 1/10, 但 1/10 依然没有告诉你 alice 的收入到底是多少? 所以, 比例值还需要乘上一个基数. 这个 "基数" 就是 bob 本身的收入, 比如是 10000 元, 你才能知道 alice 的收入是 $10000\cdot\frac{1}{10} = 1000$ 元.

同理, 本处的公式, P(B|A) 这个比例, 还要乘上 "P(A) 本身的值" 作为基数, 我们才能最终知道 P(AB) 的具体值到底是多少.
事实上, P(B|A) 就是 B 占 A 的比例. 即 $\frac{B}{A}$.
而 $P(A)\cdot P(B|A)$ 就是 AB 的交集面积占整个全集 Ω 的比例, 即 $\frac{A\cap B}{\Omega}$

如果我们把全集分为两部分: A 和 $\overline{A}$, 则, B 的部分, 就是:

$$\boxed{P(B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$$

如下图:



比如, 全集 Ω (亚欧板块) 被分成两部分: 一块是 A(亚洲), 另一块是 $\overline{A}$ (欧洲). 全集中有子集 B(俄罗斯), 被 A 和 $\overline{A}$ 各自分割了一部分土地. 那么:

$$\begin{aligned}\underbrace{P(B)}_{\text{俄罗斯占亚欧板块的面积比例}} &= \underbrace{P(A)}_{\text{亚洲占亚欧板块的比例}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{亚洲中的俄罗斯部分, 占亚洲的比例}} \\ &+ \underbrace{P(\overline{A})}_{\text{欧洲占亚欧板块的比例}} \cdot \underbrace{P(B|\overline{A})}_{\text{欧洲中的俄罗斯部分, 占欧洲的比例}}\end{aligned}$$

例

一个工厂, 有 4 条生产线, 情况如下:

	生产线 1	生产线 2	生产线 3	生产线 4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是 "不合格品" 的概率?

我们先设定事件:
- A_1 : 表示是生产线 1 中的产品
- A_2 : 表示是生产线 2 中的产品
- A_3 : 表示是生产线 3 中的产品
- A_4 : 表示是生产线 4 中的产品
- B : 表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$\begin{aligned}&P(B)\\ &=\underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线 1 的概率}}\cdot\overbrace{P(B|A_1)}^{\text{生产线 1 中的次品率}}}_{\text{第 1 条生产线中(的条件下), 不合格品的概率}}+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)+P(A_4)\cdot P(B|A_4)\\ &=(15\%\cdot 0.05)+(20\%\cdot 0.04)+(30\%\cdot 0.03)+(35\%\cdot 0.02)\\ &=0.0315\end{aligned}$$

例

有 10 台机器人, 3 台是次品. 已经卖出去了 2 台 (是正品还是次品未知).
问: 再取 1 台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:
- B_{00} : B(bad), 表示前两次取, 都是次品 (用 0 表示)
- B_{10} : 表示前两次取, 是一正 (用 1 表示), 一次 (用 0 表示). 至于顺序是 "正, 次" 还是 "次, 正", 都行
- B_{11} : 表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3} : G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第 3 次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这 3 种可能性:
- (第 1 次取到) 次, (第 2 次取到) 次, (第 4 次取到) 正.

即 $\rightarrow = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})}_{\text{前两次取到次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}\,|\mathrm{B}_{00})}_{\text{在前两次取到次品的条件下, 第 3 次取到正品}}$

- 次, 正, 正. 即 $\rightarrow = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{10})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}\,|\mathrm{B}_{10})$

- 正, 正, 正. 即 $\rightarrow = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{11})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{11})$

上面这三种可能性并存, 就是 “和”(并集) 的概念. 用加法:

$$\mathrm{G}_{xx3} = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{00})}_{\text{第1种情况:2次,1正}} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{10})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{10})}_{\text{第2种情况:1次1正, 再正}} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{11})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{11})}_{\text{第3种情况:前2正,再1正}}$$

$$= \underbrace{\frac{\mathrm{C}^{\text{取2次}}_{\text{总3次}}}{\mathrm{C}^2_{\text{总10}}}\cdot\frac{\mathrm{C}^{\text{取1正}}_{\text{总7正}}}{\mathrm{C}^1_{10-2}}}_{\text{第1种情况:2次,1正}} + \underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{\mathrm{C}^1_{\text{总7正}}}^{\text{取1正}}\cdot\overbrace{\mathrm{C}^1_{\text{总3次}}}^{\text{取1次}}}^{\text{分步骤,用乘法}}}{\mathrm{C}^2_{\text{总10}}}\cdot\frac{\mathrm{C}^{\text{1正}}_{\text{还剩总6正}}}{\mathrm{C}^1_{10-2}}}_{\text{第2种情况:1次1正, 再1正}} + \underbrace{\frac{\mathrm{C}^2_{\text{总7正}}}{\mathrm{C}^2_{10}}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩总5正}}}{\mathrm{C}^1_8}}_{\text{第3种情况:前2正,再1正}}$$

$$= \underbrace{\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_8^1}} + \underbrace{\frac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{10}^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_6^1}{\mathrm{C}_8^1}} + \underbrace{\frac{\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_8^1}} = 0.7$$

注意：上面的第2种情况，先取1正1次，或1次1正的情况，就是:

$$= \overbrace{\frac{\overbrace{\mathrm{C}_7^1}^{\text{先取1正}}}{\mathrm{C}_{10}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_3^1}^{\text{再取1次}}}{\mathrm{C}_9^1}}^{\text{分步骤,用乘法}} + \overbrace{\frac{\overbrace{\mathrm{C}_3^1}^{\text{先取1次}}}{\mathrm{C}_{10}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_7^1}^{\text{再取1正}}}{\mathrm{C}_9^1}}^{\text{分步骤,用乘法}} = 0.466667$$

$$= \underbrace{\frac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{10}^2}}_{\substack{\text{总10个里面取2个,}\\ \text{其中1个从正品里面取,}\\ \text{1个从次品里面取}}} = 0.466667$$

一件事是"分步骤"来做的, 用乘法 →

	第 1 次取到	第 2 次取到	第 3 次取到
情况1	次	次	正
情况2	次	正	正
情况3	正	正	正

"或"的情况
用加法

例

有 10 件产品, 其中次品的数量, 有三种可能性: 0 件 /1 件 /2 件, 即这三种可能性中的每一种, 发生的概率是 1/3.
同时, 检验时也存在 “误检” 情况:

	→ 被检验成 →		的概率是
正品		次品	0.02
正品	→	正品	0.98
次品	→	正品	0.05
次品		次品	0.96

问: 这批产品能通过检验 (即事件 S_2) 的可能性是多少? 即本题要求 $\mathrm{P}(S_2)$=?
这要分两种情况来讨论 (“和” 的概念, 用加法):
- 1. 正品被误检 (成 “假”) 时的情况
- 2. 次品被误检 (成 “真”) 时的情况

我们先定义各种事件:
- B_0 : B(bad). 表示总的 10 件产品中, 存在 0 件次品. 该事件的概率, 题目已经告诉我们: $\mathrm{P}(\mathrm{B}_0) = \frac{1}{3}$

- B_1 : 表示总的 10 件产品中, 存在 1 件次品. $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)=\frac{1}{3}$
- B_2 : 表示总的 10 件产品中, 存在 2 件次品. $\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)=\frac{1}{3}$
- S_1 : S(sample. (v.) 抽样检验；取样；采样) 表示任意抽检一次, 抽到了正品. (但这里还有个问题不清晰, 就是说这个正品, 到底是它本身就是 "正品"; 还是说只是抽验认为它是 "正品"?)
- $\overline{S_1}$: 表示任意抽检一次, 抽到了次品.
- S_2 : 表示再次检验, 并 "通过验证" (注意: 有误检率存在. 所以通过检验的, 未必是 "正品"; 反之亦然).

本题要求的 $\mathrm{P}(S_2)$, 实际上就是: "无论第一次抽, 认为是正是次; 在第二次检验时, 都认为是正品" 的东西. 即: $\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\,|\mathrm{S}_1)}_{\text{第一次抽为正品, 第二次检验为正}}+\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\,|\overline{\mathrm{S}_1}\right)}_{\text{第一次抽为次品, 第二次检验为正}}$

那么我们先考算 $\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$ 和 $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)$.

$\rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$: 是在具体 "次品" 数量未知的情况下, 抽 1 次就得到 "正品" 的概率.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_0)}^{\text{总数中有 0 次品}}\cdot\mathrm{P}\left(\overbrace{\mathrm{S}_1}^{\text{第 1 次抽得到正品}}|\mathrm{B}_0\right)}_{\text{在总数中有 0 次品的条件下, 抽 1 次得到正品的概率}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_1)}_{\text{总数中含有 1 次品, 抽 1 次取到正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_2)}_{\text{总数中含有 2 次品, 抽 1 次取到正}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总 10 正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总 10 中含有 0 次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总 9 正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总 10 中含有 1 次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总 8 正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总 10 中含有 2 次品}}$$

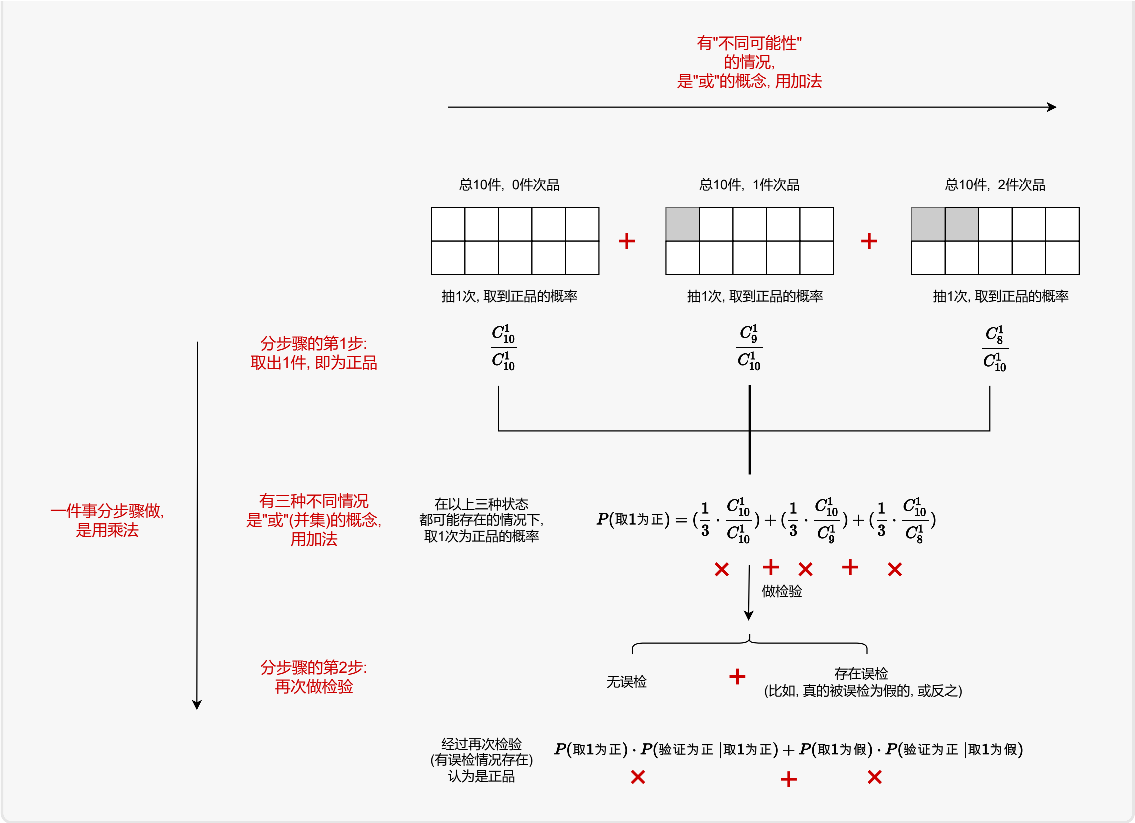
$$=0.9$$

所以: $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)=1-\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=1-0.9=0.1$

于是, 我们就能得到:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)}^{=0.9}\cdot\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\,|\mathrm{S}_1)}^{\text{从上面的表格中可知, 正品被检验为正品, 概率为0.98}}}_{\text{第一次抽为正品, 第二次检验为正}}+\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)}^{=0.1}\cdot\overbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\,|\overline{\mathrm{S}_1}\right)}^{\text{次品被检验为正品, 概率是0.05}}}_{\text{第一次抽为次品, 第二次检验为正}}$$

$$=(0.9\cdot 0.98)+(0.1\cdot 0.05)=0.887$$



---

6 贝叶斯公式 Bayes' theorem :

$$\boxed{P\left(A_k|B\right)=\frac{P\left(A_k\right)\cdot P\left(B|A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(A_i\right)\cdot P\left(B|A_i\right)\right]}=\frac{P\left(A_kB\right)}{P\left(B\right)}}$$

6.1 先验概率 (从经验来推后果) & 后验概率 (更新迭代经验)

先验概率: 是指根据以往经验和分析得到的概率，它往往作为 "由因求果" 问题中的 "因" 出现.	"先验概率" 的计算比较简单，没有使用 "贝叶斯公式".
后验概率: 是基于新的信息, 修正原来的 "先验概率" 后, 所获得的更接近实际情况的概率估计.	"后验概率" 的计算，要使用 "贝叶斯公式".

6.2 贝叶斯公式

根据新信息, 不断调整对一个随机事件发生概率的判断, 这就是 "贝叶斯推理"。即反复迭代, 不断逼近真相 (即人工智能的原理).

通常, "事件 A, 在事件 B(发生) 的条件下的概率", 与 "事件 B, 在事件 A 的条件下的概率", 是不一样的. 然而, 这两者是有确定的关系, "贝叶斯法则" 就是对这种关系的陈述。

推导 1 :

“条件概率”的公式是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ ①

可进一步变换为：$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

改变 A 和 B 的顺序，就得到：$\underbrace{P(BA)}_{\substack{P(AB)\\ \text{是 }AB\text{ 同时发生的概率，}\\ \text{其实就}=P(BA)}} = P(B)\cdot P(A|B)$ ②

把公式②代入公式①，就得到：$P(B|A)=\frac{\overbrace{P(AB)}^{=P(BA)=P(B)\cdot P(A|B)}}{P(A)}$

$$=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

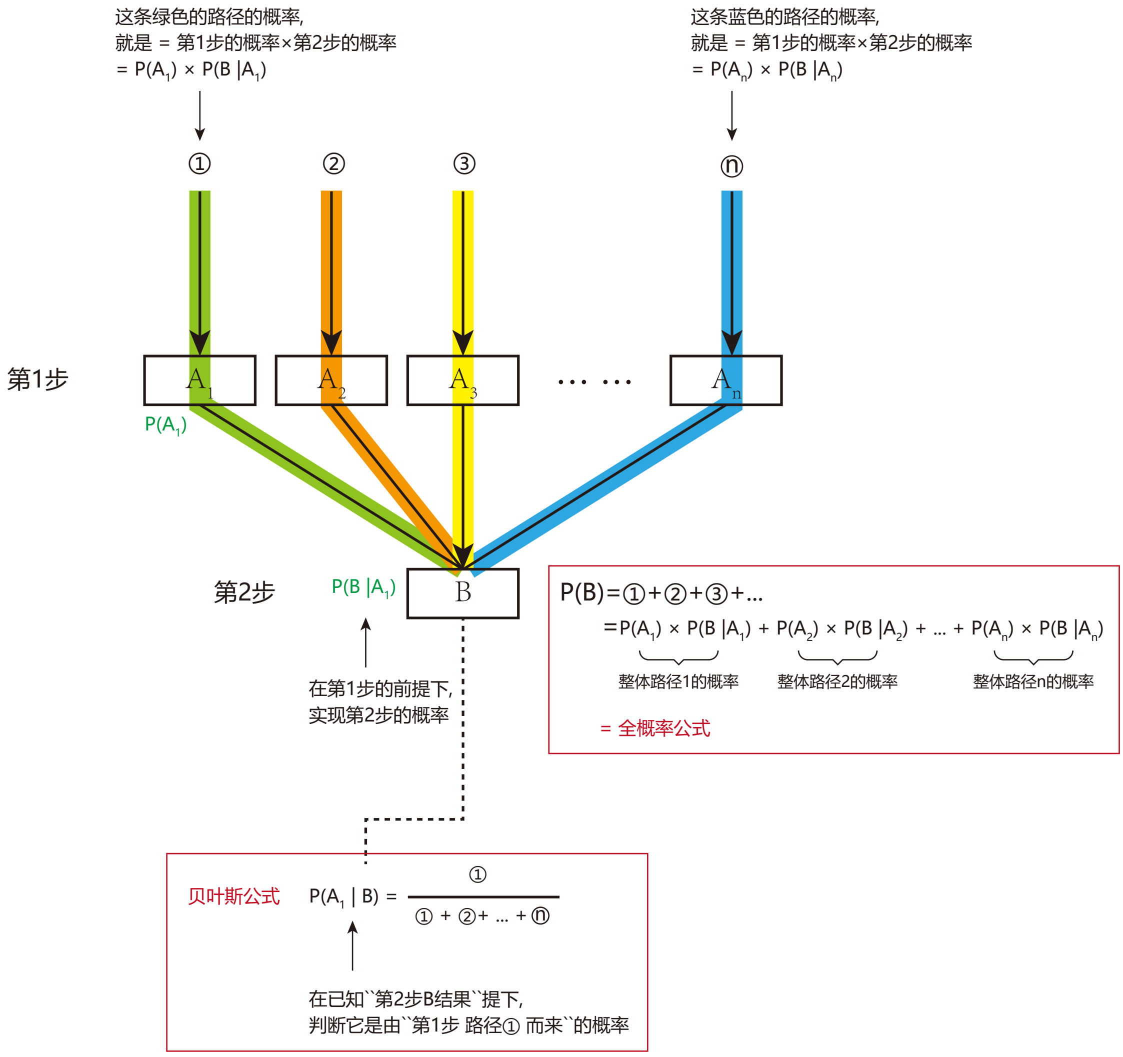
即：$P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}}$ ③ ←这个就是“贝叶斯公式”

上面“贝叶斯公式”的意思就是说：“在现象 B 出现的条件下，事件 A 发生的概率”(即 P(A|B))，就等于“事件 A 发生的概率 (即 P(A))”，乘以“事件 A 发生条件下，事件 B 出现的概率”(即 P(B|A))，再除以“事件 B 出现的概率”(即 P(B))。

推导 2：

推导 3：



→ 到第一步的，其实就是“贝叶斯公式”。即已知第二步的结果 B，我们来倒推推测它到底是从

哪条路径走过来的 (即在第一步中是从哪个路口过来的). 比如, 如果从第 A_1 节点过来, 那么其概率就是:$P\left(A_1|B\right)=\frac{\text{路径 1 的概率}}{\text{路径 1 的概率}+\text{路径 2 的概率}+..+\text{路径}n\text{的概率}}$

即:

$$P\left(A_i|B\right)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\left[P(A_j)\cdot P(B|A_j)\right]}=\frac{\overbrace{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}^{\text{第}i\text{条路径的概率}}}{\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+...+P(A_n)\cdot P(B|A_n)}_{\text{分母上是把所有的路径概率, 都加起来}=P(B)=\text{全概率公式}}}$$

→ 到第二步的, 其实就是 “全概率公式”, 即:

$$P(B)=\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}_{\text{整条路径 1 的概率}}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}_{\text{整条路径 2 的概率}}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}_{\text{整条路径}n\text{的概率}}$$

概率告诉我们: 要相信长期中的期望.$0.99^{365}=0.025518$, 而 $1.01^{365}=37.7834$.

篮球领域有一句名言——“训练时，用正确姿势投丢的球, 比用错误姿势投进的球, 更有价值.”

站在当下，未来任何事都只是一个概率. **所谓坚持，所谓努力，其实就是寻找一个大概率成功的方向, 然后相信系统, 相信长期主义.** 当然，你得坚持活着．等到长期的到来.

但行为经济学家发现，人们在决策过程中, 往往并不遵循 “贝叶斯规律”，而是给予最近发生的事件和最新的经验, 以更多的权重值，更看重近期的事件。面对复杂问题，人们往往会走捷径，依据可能性, 而非概率来做决策. 这种对经典模型的系统性偏离, 称为 “偏差”. 因此, 投资者在决策判断时, 并非绝对理性.

但长期以来，由于缺乏有力的 “能结合人类决策中的理性和感性因素” 的替代工具, 经济学家不得不在分析中坚持 “贝叶斯法则”.