目录

第一部分 积分 integral 2

第二部分 不定积分 indefinite integral：即"原函数" 2

1 不定积分公式 3

1.1 $\int(0)dx = C$ 3

1.2 $\int(k)dx = kx + C$ 3

1.3 $\int(x^n)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$ 3

1.4 $\int(\frac{1}{x})dx = ln|x| + C$ 3

1.5 $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$ 3

1.6 $\int(e^x)dx = e^x + C$ 3

1.7 $\int(a^x)dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 3

1.8 $\int(\frac{1}{1+x^2})dx = \arctan x + C, ^- = -\operatorname{arccot} x + C$ 3

1.9 $\int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx = \arcsin x + C, ^- = -\arccos x + C$ 3

1.10 $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a} \cdot arctan\frac{x}{a} + C$ 3

1.11 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$ 3

1.12 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$ 3

1.13 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$ 4

1.14 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a} + C$ 4

1.15 $\int(\sin x)dx = -\cos x + C$ 4

1.16 $\int(\cos x)dx = \sin x + C$ 4

1.17 $\int(\tan x)dx = -\ln|cosx| + C$ 4

1.18 $\int(\cot x)dx = \ln|sinx| + C$ 4

1.19 $\int(\sec x)dx = \ln|secx + tanx| + C$ 4

1.20 $\int(\csc x)dx = \ln|cscx - cotx| + C$ 4

1.21 $\int(\ln x)dx = x\ln x - x + C$ 4

1.22 $\int(\sec^2 x)dx = \tan x + C$ 4

1.23 $\int(\csc^2 x)dx = -\cot x + C$ 4

1.24 $\int(\sec x \tan x)dx = \sec x + C$ 4

1.25 $\int(\csc x \cot x)dx = -\csc x + C$ 4

2 不定积分的性质 4

2.1 $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 4

2.2 $\int(kf(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$ 4

第三部分 求不定积分的方法 4

3 凑微分法 4

4 分部积分法：$\to \int$ 前 d(后) = 前 · 后 $- \int$ 后 d(前) 5

5 换元法 6

积分

第一部分　积分 integral

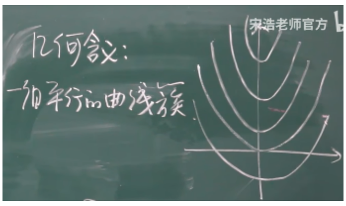
对于曲线f 下的面积, 如果我们能找到一个函数I 来表示它, 那么这个函数I, 就叫做f的“积分”. 积分很有用, 是因为很多生活中实际的问题, 都能近似成“大量很小的东西加起来”. 而这样的问题都能转化成求某图像下的面积. 所以, 我们要找的, 就是这个能表示面积的”积分函数”.

第二部分　不定积分 indefinite integral：即“原函数”

一个原函数, 求其导数, 能得到”导函数”. **反过来, 从“导函数”算出其“原函数”的过程, 就是求其“不定积分”. 换言之, “原函数”的别名就是”不定积分”.**
如: “原函数”是 F(x), 其“导函数”是 D(x), 即: $F'(x) = D(x)$, 则原函数 F(x) 就是 D(x) 的其中一个原函数.

为什么是“其中一个”原函数? 因为可以有无穷多个原函数, 它们都能得到同一个导函数. 比如, 这些原函数: x^2, x^2+3, 它们都能得到同一个导函数 $2x$.

其规律就是: $\left(\underbrace{F(x)}_{原函数} + \underbrace{C}_{常数}\right)' = \underbrace{D(x)}_{导函数}$



所以, 从“导函数”来反求其“原函数”, 就是求“不定积分”. 因此, “原函数”的别名就是“不定积分”.
即: $\int \underbrace{D(x)}_{导函数} dx = \underbrace{F(x)}_{原函数} + \underbrace{C}_{常数}$

我们也就有: $\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{导函数} dx}_{原函数}\right] = \underbrace{f(x)}_{导函数}$ ← 相当于先ctrl+z (恢复到原函数), 再 ctrl+y (重做下一步的求导操作)

也可写作: $d\left[\underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{导函数} dx}_{原函数}\right] = \underbrace{f(x)}_{导函数} dx$

符号 $\int$ 是英文 sum 的首字母s 变形.

Σ 和 $\int$ 的区别:

Σ	通常是对“有限个”, 或者“离散的量”求和。
$\int$	是对“无穷个”连续的“无穷小量”的求和

类似的:

Δ	表示“有限小”的变量.
dx	表示“无穷小”变量. 有 x →0 这个“极限”的概念在里面.

1 不定积分公式

1.1 $\int(0)dx = C$

1.2 $\int(k)dx = kx + C$

1.3 $\int(x^n)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

1.4 $\int(\frac{1}{x})dx = ln|x| + C$

1.5 $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$

1.6 $\int(e^x)dx = e^x + C$

1.7 $\int(a^x)dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

1.8 $\int(\frac{1}{1+x^2})dx = \arctan x + C, ^- = -\operatorname{arccot} x + C$

1.9 $\int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx = \arcsin x + C, ^- = -\arccos x + C$

1.10 $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a} \cdot arctan\frac{x}{a} + C$

1.11 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$

1.12 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

例

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}d\left(2x\right) = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{(2x)^2+3^2}\right| + C$$

1.13 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

1.14 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsin\frac{x}{a} + C$

1.15 $\int (\sin x) dx = -\cos x + C$

1.16 $\int (\cos x) dx = \sin x + C$

1.17 $\int (\tan x) dx = -\ln|cosx| + C$

1.18 $\int (\cot x) dx = \ln|sinx| + C$

1.19 $\int (\sec x) dx = \ln|secx + tanx| + C$

1.20 $\int (\csc x) dx = \ln|cscx - cotx| + C$

1.21 $\int (\ln x) dx = x\ln x - x + C$

1.22 $\int (\sec^2 x) dx = \tan x + C$

1.23 $\int (\csc^2 x) dx = -\cot x + C$

1.24 $\int (\sec x \tan x) dx = \sec x + C$

1.25 $\int (\csc x \cot x) dx = -\csc x + C$

2 不定积分的性质

2.1 $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

例

$$\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2} dx = \int \left(\mathrm{x} - 3 + 3\frac{1}{\mathrm{x}} - \frac{1}{\mathrm{x}^2}\right) dx$$
$$= \underbrace{\int (\mathrm{x}) dx}_{\frac{1}{2}x^2} - \underbrace{\int (3) dx}_{3x} + \underbrace{3\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) dx}_{\ln —x|} - \underbrace{\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right) dx}_{=\int (x^{-2})dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3\ln —x| + x^{-1} + C$$

2.2 $\int (kf(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx$

其中 k 是常数, 且 $k \neq 0$. 注意: 如果k是一个变量, 如果该变量与x是无关的 (即与“积分变量”无关的), 则可以朝外挪出去; 但如果该变量是与x相关的, 则就不能朝外挪.

第三部分 求不定积分的方法

3 凑微分法

求微分, 可以写成(变换成)下面三种形式:

	例如，求 $\ln x$ 的微分
$\underbrace{d\,(\text{原函数})}_{\text{求微分}} = \text{导函数}\ dx$	$d\,(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$ 从等号右边往左看， 就是d外面的导函数(如本例的 $1/x$)， 拿到d里面，要变成原函数($\ln x$)的形式.
$\dfrac{d\,(\text{原函数})}{dx} = \text{导函数}$	$\dfrac{d\,(\ln x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$
$\dfrac{d}{dx}(\text{原函数}) = \text{导函数}$	$\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

4 分部积分法 : $\to \int$ 前 d(后) = 前 · 后 − $\int$ 后 d(前)

分部积分法 Integration by parts

因为：$(\text{前后})' = \text{前}' \cdot \text{后} + \text{前} \cdot \text{后}'$

即：$\text{前} \cdot \text{后}' = (\text{前后})' - \text{前}' \cdot \text{后}$

两边积分，即：
$$\int (\text{前} \cdot \text{后}')dx = \int [(\text{前后})' - \text{前}' \cdot \text{后}]dx$$
$$= \underbrace{\int \left[\underbrace{(\text{前后})'}_{\text{导函数}}\right]dx}_{\text{原函数，就}=\text{前后}} - \int [\text{前}' \cdot \text{后}]dx$$
$$= \text{前后} - \int [\text{前}' \cdot \text{后}]dx \quad ①$$
$$\int \text{前} \cdot \underbrace{\text{后}'\ dx}_{=d\,(\text{后})} = \text{前后} - \int \text{后} \cdot \underbrace{\text{前}'\ dx}_{=d\,(\text{前})}$$
即：
$$\int \text{前}\ d\,(\text{后}) = \text{前后} - \int \text{后}\ d\,(\text{前}) \quad ②$$

上面①和②式，就是“分部积分法”公式

即, 分部积分公式是:

$$\to \int (\text{前} \cdot \text{后'})\, dx = \text{前} \cdot \text{后} - \int [\text{前'} \cdot \text{后}]dx$$
$$\to \int \text{前}\ d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后}\ d(\text{前})$$

别忘了关系是: $\boxed{\int \text{导函数的世界}\ d(\text{原函数的世界})}$

分部积分法的目的, 将是将“不易直接求结果的积分形式”，转化为等价的“容易求出结果的积分形式”.

“分部积分”的要点是：谁做“前”，谁做“后”？ 即：(1) 谁放d的后面？ (2) 往d里面拿时，哪个的优先级最高?

把前面的什么东西, 朝d里面拿? 优先顺序是: $e^x > \sin x > \cos x > x^n$

例

$$\int \underbrace{xe^x\ dx}_{\text{先做}} = \int \underbrace{x}_{\text{前}}\ \underbrace{d(e^x)}_{\text{后}} \quad \leftarrow \text{一前一后两个函数, 就用分部积分法}$$

$$\int \text{前}\ d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后}\ d(\text{前})$$

本例就是: $\int \underbrace{x}_{\text{前}}\ \underbrace{d(e^x)}_{\text{后}} = \underbrace{x}_{\text{前}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{后}} - \int \underbrace{e^x}_{\text{后}}\ d(\underbrace{x}_{\text{前}}) = xe^x - e^x + C$

例

$$\int x \cdot \underbrace{\overbrace{\cos x}^{\text{导函数}}\ d(\overbrace{x}^{\text{原函数}})}_{\text{先做}} \leftarrow \text{把}\cos x\text{拿到}d\text{里面，就变成}\ d(\sin x)$$

其实倒过来想，就是一个“求微分”的操作: $d(\overbrace{\sin x}^{\text{原函数}}) = \overbrace{\cos x}^{\text{导函数}}\ dx$

$$= \int \underbrace{x}_{\text{前}}\ d(\underbrace{\sin x}_{\text{后}}) \leftarrow \text{根据分部积分法} \int \text{前}\ d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后}\ d(\text{前})$$

$$= x\sin x - \underbrace{\int \overbrace{\sin x}^{\text{导函数}}\ d(x)}_{= -\cos x + C} = x\sin x + \cos x + C$$

5 换元法

例

$$\int e^{-pt} dt \quad \leftarrow \text{令} u = -pt, \text{（}p\text{是常数）}$$

$$\frac{d}{dt}(u) = (-pt)' = -p$$

$$\text{即}\ dt = \frac{du}{-p} = -\frac{1}{p} du$$

$$= \int e^u \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) du$$

$$= -\frac{1}{p} \underbrace{\int e^u du}_{= e^u + C} \quad \leftarrow \text{然后把}u\text{换回}t\text{，因为}u = -pt$$

$$= -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} + C$$

上面的换元法, 策略其实就是把一个复杂的数(比如 -pt) 换成(打包成)一个单一的数 (比如u), 然后把原来的dt 也换成用u 表示的du, 先来做u的积分. 做出来后, 再把u 换回(解包)成原来的复杂的数 -pt.