

## 目录

|      |  |   |
|------|--|---|
| 第一部分 | 什么是导数?   | 2 |
| 第二部分 | 导数公式   | 3 |
| 1    | 常用的导数  | 3 |
| 1.1  | $(\text{常数 } C)' = 0$                                    | 3 |
| 1.2  | $(x^n)' = nx^{n-1}$                                      | 3 |
| 1.3  | $(a^x)' = a^x \ln a$                                     | 3 |
| 1.4  | $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$                               | 4 |
| 1.5  | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$                        | 4 |
| 1.6  | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$                                 | 4 |
| 2    | 反函数的导数 : $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数 } f'(x)}$ | 4 |
| 3    | 三角函数的导数  | 5 |
| 3.1  | $(\sin x)' = \cos x$                                     | 5 |
| 3.2  | $(\cos x)' = -\sin x$                                    | 5 |
| 3.3  | $(\tan x)' = \sec^2 x$                                   | 5 |
| 3.4  | $(\cot x)' = -\csc^2 x$                                  | 5 |
| 3.5  | $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$                        | 5 |
| 3.6  | $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$                       | 5 |
| 4    | 反三角函数的导数   | 5 |
| 4.1  | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                  | 5 |
| 4.2  | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                 | 5 |
| 4.3  | $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$                         | 5 |
| 4.4  | $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$                 | 5 |
| 第三部分 | 求导的各种方法, 方法论   | 5 |
| 5    | 求导法则 : 和差积商  | 5 |

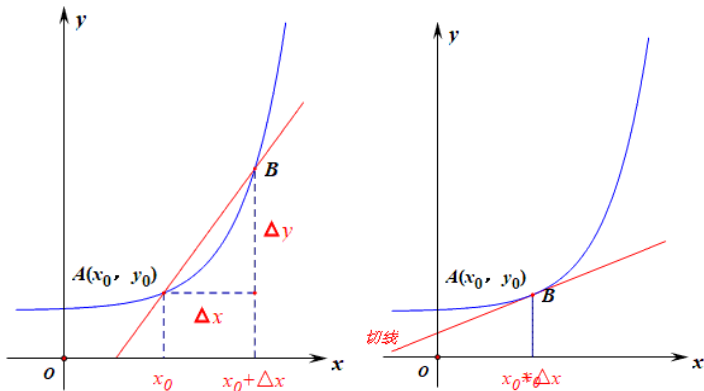
# 导数 Derivative

2022 年 12 月 8 日

## 第一部分 什么是导数？

某点处的“导数”，就是该点处“切线的斜率”。

导数，就是一个“极限值”，比如，y 在点  $x_0$  处的导数，就是： $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



可导，就意味着图像很“光滑”。即图像没有“尖角”存在（因为尖角处的左右导数不相等）。

并且，切线不能垂直于x轴。如果切线是垂直于x轴的，它的斜率就会是  $+\infty$  或  $-\infty$  了。

$x_0$  点处的导数，其实可以有下面4种写法来表示：

- (1)  $y'|_{x=x_0}$
- (2)  $f'(x_0)$
- (3)  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$
- (4)  $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

“位置”的瞬时变化率(变换趋势，能预测未来)，就是“速度”。所以速度是位置的导数。

“速度”的瞬时变化率，就是“加速度”。所以“加速度”是“速度”的导数。“加速度”就是“位置”的二阶导。

单侧导数，就是从“某一侧”逼近某一x点时，该点的切斜斜率。

所以，左导数，就是“从左侧向右”逼近了。右导数，就是“从右边向左”逼近了。

$$\begin{aligned} \text{- 左导数: } f_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{- 右导数: } f_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

## 第二部分 导数公式

### 1 常用的导数

#### 1.1 (常数 $C$ )' = 0

常数不会变化, 自然没有“瞬时变化率”存在, 所以常数的导数就=0.

#### 1.2 $(x^n)' = nx^{n-1}$

(1) 当指数  $n=1$  时, 其导数=1.

(2) 当  $n>1$  时, 其导数是  $(x^n)' = nx^{n-1}$

例

求  $y = \frac{1}{x}$  在点(1/2, 2)处的切线的斜率(即导数), 并求出该切线的方程.

其导数是:  $y' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2}$

然后把点(x=1/2, y=2) 代入进去, 得到:  $y' |_{x=\frac{1}{2}} = -1 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -4 \leftarrow$  这个数值, 就是函数在点(1/2, 2)处的切线的斜率.

然后再套用直线的“点斜式方程”  $y - y_1 = k(x - x_1)$

本例的切线即:  $y - \underbrace{y_1}_{=2} = \underbrace{k}_{\text{即 } y' = -4} \left( x - \underbrace{x_1}_{=\frac{1}{2}} \right)$

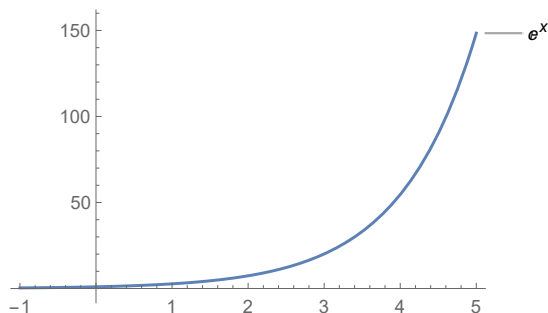
#### 1.3 $(a^x)' = a^x \ln a$

即直接后面跟个尾巴:  $\ln a$

例如,  $(2^x)' = 2^x \ln 2$

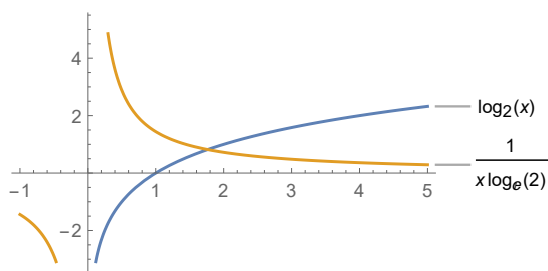
2 反函数的导数 : 
$$[F^{-1}(Y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数 } F'(X)}$$

1.4  $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$



1.5  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

即把  $x$  提到前面去, 把  $\log$  变成  $\ln$ , 整体再放在分母上. 分子为1.



1.6  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

例如:  $(\log_e x)' = \frac{1}{x \underbrace{\ln e}_{=\log_e e=1}} = \frac{1}{x}$

2 反函数的导数 : 
$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数 } f'(x)}$$

反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈“倒数关系”.

原函数是  $y=f(x)$ , 其反函数是  $x=f(y)$ , 则, 反函数的导数, 就是“原函数导数”的倒数.

换言之, 原函数的导数是  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , 则其反函数的导数就是  $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ .

“原函数”和“反函数”, 它们“导数”的乘积  $=1$ .

“原函数”与其“反函数”的图像, 是关于  $y=x$  对称的.

### 3 三角函数的导数

$$3.1 \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$3.2 \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$3.3 \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$3.4 \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$3.5 \quad (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$3.6 \quad (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

### 4 反三角函数的导数

$$4.1 \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4.2 \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4.3 \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4.4 \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

---

## 第三部分 求导的各种方法, 方法论

### 5 求导法则：和差积商