目录

第一部分　条件概率 **2**

1 “条件概率”的意思 **2**

2 条件概率的性质 **3**

2.1 性质: $P(A|条件B)>=0$ 3

2.2 性质: $P(\Omega|条件B)=1$ 3

2.3 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \mid \mathrm{B}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right)-\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right)$ 4

2.4 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\text{ —}\mathrm{B}\right)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \mid \mathrm{B}\right)$ 4

2.5 性质: 可列可加性: 若$A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于“概率的和” 4

3 “条件概率”的乘法公式： $\boxed{P(\text{前后})=P(\text{后})\cdot P(\text{前}|\text{后})=P(\text{前})\cdot P(\text{后}|\text{前})}$ **4**

4 传染病模型 **7**

5 全概率公式： $P\left(B\right)=\underbrace{P\left(A_1\right)\cdot P\left(B|A_1\right)}+\underbrace{P\left(A_2\right)\cdot P\left(B|A_2\right)}+...+\underbrace{P\left(A_n\right)\cdot P\left(B|A_n\right)}$ **8**

6 贝叶斯公式 **11**

文件名

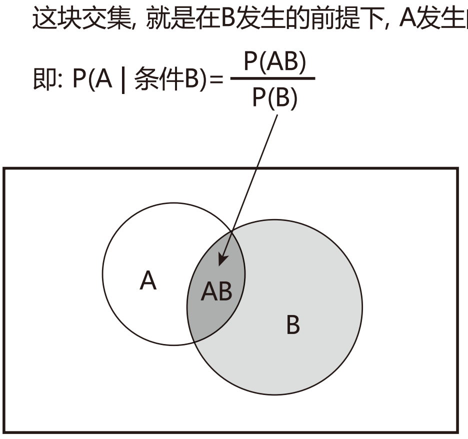
第一部分　条件概率

1　“条件概率”的意思

条件概率是：有A, B 两个事件，和样本空间Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则，在B已经发生的条件下，A发生的概率，就叫做A对B 的“条件概率”. 记作：P(A— 条件B), 读作“在B发生的条件下，A发生的概率”.

即, 条件概率公式是：$P(A\ |conditionB) = \dfrac{\overbrace{\text{在B发生条件下,A发生的样本点数}}^{\text{这个分子即：AB同时发生了}}}{\text{B里面有多少个样本点}} = \dfrac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成：$P(A\ |conditionB) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)} = \dfrac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \dfrac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示, 注意：概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数(分母)去比.

上面公式中, P(AB) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件A, 和事件B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件A, 和事件B 不相互独立, 则只能用“条件概率”公式, 来求P(AB), 即：$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意：“条件概率”, 和“分步骤法”的区别:
- 分步骤法 (用乘法): 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率 (里面也有用到乘法): 前面的事件, 有可能会(但并不一定)影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有100个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有6个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到1号球
- A_2: 取到2号球
- A_5: 取到大于4号的球

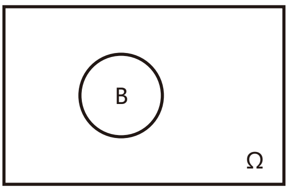
则:
- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到1号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全6选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{\text{在B条件里面,取到}\mathrm{A}_1\text{(即1号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = 0$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号2的球里面,取1个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \frac{\text{在B条件里面,取到大于4号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有6号一个球}}}{3}$

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$

P(Ω |B)=1



2.3 性质： $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\,|\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\,|\mathbf{B})+\mathbf{P}(\mathbf{A}_2\,|\mathbf{B})-\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\,|\mathbf{B})$

2.4 性质： $\mathbf{P}(\mathbf{A}\text{ —}\mathbf{B})=1-\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}\,|\mathbf{B})$

2.5 性质：可列可加性：若$A_1,A_2,...A_n,...$ **是“互不相容”的事件，则有：** $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)\leftarrow$ **即：“和的概率”，等于“概率的和”**

3 “条件概率”的乘法公式：

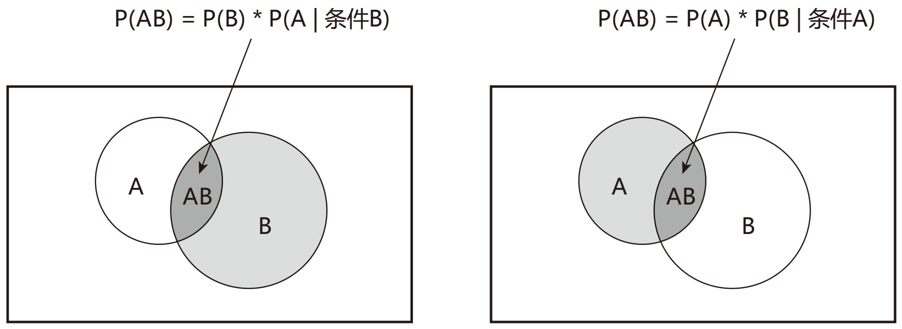
$$\boxed{P(前后)=P(后)\cdot P(前|后)=P(前)\cdot P(后|前)}$$

推导过程：

$$因为\begin{cases}\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{AB})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}\rightarrow 即\ \mathrm{P}(\mathrm{AB})=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})}_{乘法，是交集\cap的概念} & ①\\ \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{AB})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\rightarrow 即\ \mathrm{P}(\mathrm{AB})=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})}_{乘法，是交集\cap的概念} & ②\end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”．即 $\mathrm{P}(\mathrm{AB})=\mathrm{P}(\mathrm{B})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})$

其中 $\mathrm{P}(\mathrm{A})>0$，$\mathrm{P}(\mathrm{B})>0$



同理, 多个事件的乘法公式就是:

$\rightarrow\ \boxed{\mathrm{P}(\mathrm{ABC})=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}\text{—}\mathrm{A})}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{C}\text{—}\mathrm{BA})}}$

$\uparrow$ 上面“从右往左”看, 就是按 A,B,C 的顺序

$$\rightarrow\ \mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)\cdot...\cdot\mathrm{P}(\overbrace{\mathrm{A}_n}^{即最后一个数字n写在前面.}\ |\ \overbrace{\mathrm{A}_{n-1}}^{后面的条件，最后一个数字是：n少一位}\ ...\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)$$

$\uparrow$ 上面“从右往左”看, 就是按$A_1,A_2,...,A_n$的顺序

例

有100件产品，次品率=10%，即有10件次品．做不放回抽样，问：第3次才取到合格品的概率是?

我们先令:

- A_1 表示第1次取, 就取到了合格品
- A_2 表示第2次取, 取到了合格品
- A_3 表示第3次取, 取到了合格品

那么第3次才取到合格品, 就是:

$$\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}_2}\mathrm{A}_3\right)}_{\text{分步骤来做}}=\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{第1次取,取到次品}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_2}\,|\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\substack{\text{在第1次取到次品的条件下,}\\ \text{第2次取到也是次品}}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\,|\overline{\mathrm{A}_2}\,\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\substack{\text{在第1,2次取到次品的条件下,}\\ \text{第3次取到正品}}}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{10}^1}^{\text{第一步,10次品里面取1}}}{\mathrm{C}_{100}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_9^1}^{\substack{\text{第二步,因为第一步}\\ \text{已经拿走1件次品,}\\ \text{这第二步就只能在9件次品}\\ \text{里面取1件次品了}}}}{\mathrm{C}_{99}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{90}^1}^{\substack{\text{既然第三步要拿到正品,}\\ \text{我们就从90件正品里面取1了}}}}{\mathrm{C}_{98}^1}$$

$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=0.00834879$$

例

某产品:
- 甲公司占60%市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占40%市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{\mathrm{J}}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified)：表示产品是“合格”的
- $\overline{\mathrm{Q}}$：表示产品是“不合格”的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{JQ}\right)=\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{J}\right)}_{=0.6}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(Q\mid J\right)}_{\text{甲的合格率}=0.9}=0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{Q}\right)=\underbrace{\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{J}}\right)}_{=0.4}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(Q\mid\bar{\mathrm{J}}\right)}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8}=0.32$$

例

抽签, 共10签, 其中有4个为“成功上岸”的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.
我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到“成功”
- B: 表示乙抽到“成功”
- C: 表示丙抽到“成功”

问, (1) 甲抽到“成功”的概率? $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=\frac{\mathrm{C}_{4\text{好签}}^1}{\mathrm{C}_{10\text{签}}^1}=\frac{4}{10}=0.4$

(2) 甲乙都抽到“成功”的概率?

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{AB}\right)=\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)}_{\text{第1步:甲先成功}}\cdot\underbrace{P(B|A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4\text{好签}}^1}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{\mathrm{C}_{10\text{签}}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4\text{好签}-1}^1}^{\text{乙就只能从剩下的3张好签中来抽了}}}{\mathrm{C}_{10\text{签}-1}^1}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P\left(\overline{A}B\right) = \underbrace{P\left(\overline{A}\right)}_{\text{第1步:甲先失败}} \cdot \underbrace{P\left(B\left|\overline{A}\right.\right)}_{\text{第2步:在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$

$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{6\text{坏签}}}^{\text{甲先从共6张坏签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{乙从共4张好签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到“成功”的概率?

$$P\left(ABC\right) = \underbrace{P\left(A\right)}_{\text{第1步:甲先成功}} \cdot \underbrace{P\left(B\left|A\right.\right)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}} \cdot \underbrace{P\left(C|BA\right)}_{\text{第3步:在甲乙都成功的前提下,丙再成功}}$$

$$= \frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩3好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩9签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩2好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩8签}}}$$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0.0333333$$

例

你的新邻居, 是个 is very shy and withdrawn, invariably helpful but with very little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, ant a passion for detail.

你觉得他更可能是 – 图书管理员, 还是农民?

大多数人会认为他是图书馆管理员. 其实, 这种判断是”非理性”的. 问题的关键在于 – 你没有把这两种职业的”人数比例”考虑进去.

→ 在美国,农民与图书馆管理员,两者的数量之比是$20:1$.
根据这个比例,我们可以假设他们人数的概率分别为:

$$\begin{cases} P(\text{农民职业}) = \dfrac{20}{100} \\ P(\text{图书管理员职业}) = \dfrac{1}{100} \end{cases}$$

→ 假如你听到"彬彬有礼"这类描述,你的直觉是:
40%的图书馆管理员符合这个描述,而只有10%的农民符合这个描述.
如果这是你的估计,那就意味着:

$$\begin{cases} \text{在}100\%\text{的纯粹农民群体中,彬彬有礼者的占比概率是:} \\ \qquad P(\text{彬彬有礼 }|\text{农民职业}) = 0.1 \\ \text{在}100\%\text{的纯粹图书管理员群体中,彬彬有礼者的占比概率是:} \\ \qquad P(\text{彬彬有礼 }|\text{图书管理员职业}) = 0.4 \end{cases}$$

→ 在既有农民,又有图书管理员的混合群体中:

$$\begin{cases} \text{在属于农民职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是:} \\ P(\text{农民职业} \cap \text{彬彬有礼}) = \underbrace{P(\text{农民职业})}_{\text{第一步,是农民的概率}} \cdot \underbrace{P(\text{彬彬有礼 }|\text{农民职业})}_{\text{第二步,在是农民前提下,彬彬有礼者的概率}} \\ \qquad = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02 \\ \text{在属于图书管理员职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是:} \\ P(\text{图书管理员职业} \cap \text{彬彬有礼}) = P(\text{图书管理员职业}) \cdot P(\text{彬彬有礼 }|\text{图书管理员职业}) \\ \qquad = 0.01 \cdot 0.4 = 0.004 \end{cases}$$

→ $P(\text{在彬彬有礼者中,取}1\text{人为图书管理员的概率})$

$$= \frac{P(\text{图书管理员职业} \cap \text{彬彬有礼})}{P(\text{农民职业} \cap \text{彬彬有礼}) + P(\text{图书管理员职业} \cap \text{彬彬有礼})}$$

$$= \frac{0.004}{0.02 + 0.004} = 0.166667$$

所以, 即使你认为"符合这个描述的人是一个图书馆管理员的可能性, 是一个农民的4倍", 也抵不过农民的数量很多.

例

辛普森杀妻案,

4 传染病模型

例

有红球a个, 黑球b个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入c个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续3次都是取出红球的概率?
先设定事件:
- A_1 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第3次, 取出的是红球

$$\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)}_{\text{连续3次取到红球}} = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第一步:}\\\text{第一次就取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\ |\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第二步:}\\\text{在第一次取到红球的前提下,}\\\text{第二次也取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\ |\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第三步:}\\\text{再前两次都取到红球的前提下,}\\\text{第三次也取到红球}}}$$

$$= \frac{\mathrm{C}^1_{\text{a红}}}{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{b黑}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{c红}}}^{\substack{\text{在第一次取到红球后,}\\\text{又放入c个红球.}\\\text{所以第二次取时,}\\\text{红球就一共有a+c个}}}}{\underbrace{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{b黑}+\text{c红}}}_{\substack{\text{为什么总数没有减1个?}\\\text{因为是“放回抽样”.}\\\text{总数不变}}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+2\text{c红}}}{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{b黑}+2\text{c红}}}$$

上面可以看出:
- 当 c红= 0 时, 就是正常的“放回抽样”.
- 当 c红= -1 时, 就是“不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c红¿0 时, 就是本例的“传染病模型”.

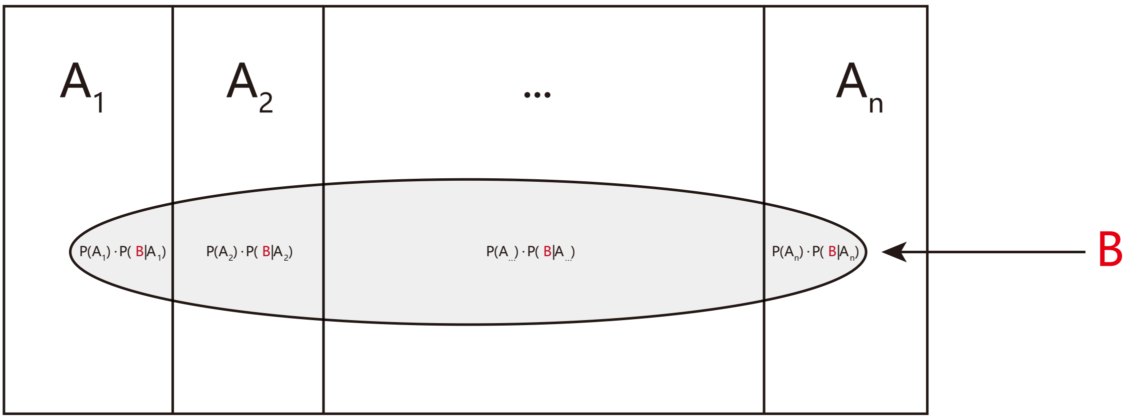
---

5 全概率公式：$P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B|A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$

全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, ..., A_n$ 构成一个“完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2)其“和”(或“并集”)为全集 Ω, (3) $P(A_i) > 0$.

则有: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} [P(A_i) \cdot P(B|A_i)] = P(B)}$

即有: $P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B|A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$



Total Probability Theorem
全概率公式

例

一个工厂, 有4条生产线, 情况如下:

	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是"不合格品"的概率?

我们先设定事件:
- A_1：表示是生产线1 中的产品
- A_2：表示是生产线2 中的产品
- A_3：表示是生产线3 中的产品
- A_4：表示是生产线4 中的产品
- B：表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$
\begin{aligned}
&P(B)\\
&=\underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线1的概率}}\cdot\overbrace{P(B|A_1)}^{\text{生产线1中的次品率}}}_{\text{第1条生产线中(的条件下), 不合格品的概率}}+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)+P(A_4)\cdot P(B|A_4)\\
&=(15\%\cdot 0.05)+(20\%\cdot 0.04)+(30\%\cdot 0.03)+(35\%\cdot 0.02)\\
&=0.0315
\end{aligned}
$$

例

有10台机器人, 3台是次品. 已经卖出去了2台(是正品还是次品未知).
问: 再取1台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:
- B_{00}：B(bad), 表示前两次取, 都是次品(用0表示)
- B_{10}：表示前两次取, 是一正(用1表示), 一次(用0表示). 至于顺序是"正,次" 还是"次,正", 都行
- B_{11}：表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3}：G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第3次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这3种可能性:
- (第1次取到)次, (第2次取到)次, (第4次取到)正.

即→ $=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})}_{\text{前两次取到次品}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}|\mathrm{B}_{00})}_{\text{在前两次取到次品的条件下, 第3次取到正品}}$

- 次,正,正. 即→ $=\mathrm{P}(\mathrm{B}_{10})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}|\mathrm{B}_{10})$
- 正,正,正. 即→ $=\mathrm{P}(\mathrm{B}_{11})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}|\mathrm{B}_{11})$

上面这三种可能性并存, 就是"和"(并集)的概念. 用加法:

$$\mathrm{G}_{xx3}=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{00})}_{\text{第1种情况:2次,1正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{10})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{10})}_{\text{第2种情况:1次1正，再正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{11})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{xx3}\ |\mathrm{B}_{11})}_{\text{第3种情况:前2正,再1正}}$$

$$=\underbrace{\frac{\mathrm{C}_{\text{总3次}}^{\text{取2次}}}{\mathrm{C}_{\text{总10}}^{2}}\cdot\frac{\mathrm{C}_{\text{总7正}}^{\text{取1正}}}{\mathrm{C}_{10-2}^{1}}}_{\text{第1种情况:2次,1正}}+\underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总7正}}^{1}}^{\text{取1正}}\cdot\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总3次}}^{1}}^{\text{取1次}}}^{\text{分步骤,用乘法}}}{\mathrm{C}_{\text{总10}}^{2}}\cdot\frac{\mathrm{C}_{\text{还剩总6正}}^{1\text{正}}}{\mathrm{C}_{10-2}^{1}}}_{\text{第2种情况:1次1正，再1正}}+\underbrace{\frac{\mathrm{C}_{\text{总7正}}^{2}}{\mathrm{C}_{10}^{2}}\cdot\frac{\mathrm{C}_{\text{还剩总5正}}^{1}}{\mathrm{C}_{8}^{1}}}_{\text{第3种情况:前2正,再1正}}$$

$$=\underbrace{\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_8^1}}+\underbrace{\frac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{10}^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_6^1}{\mathrm{C}_8^1}}+\underbrace{\frac{\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_8^1}}=0.7$$

注意：上面的第2种情况，先取1正1次，或1次1正的情况，就是：

$$=\overbrace{\frac{\overbrace{\mathrm{C}_7^1}^{\text{先取1正}}}{\mathrm{C}_{10}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_3^1}^{\text{再取1次}}}{\mathrm{C}_9^1}}^{\text{分步骤,用乘法}}+\overbrace{\frac{\overbrace{\mathrm{C}_3^1}^{\text{先取1次}}}{\mathrm{C}_{10}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_7^1}^{\text{再取1正}}}{\mathrm{C}_9^1}}^{\text{分步骤,用乘法}}=0.466667$$

$$=\underbrace{\frac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{10}^2}}_{\substack{\text{总10个里面取2个,}\\\text{其中1个从正品里面取,}\\\text{1个从次品里面取}}}=0.466667$$

$$\xrightarrow{\text{一件事是"分步骤"来做的, 用乘法}}$$

		第 1 次取到	第 2 次取到	第 3 次取到
"或"的情况用加法	情况1	次	次	正
	情况2	次	正	正
	情况3	正	正	正

例

有10件产品, 其中次品的数量, 有三种可能性: 0件 /1件 /2件, 即这三种可能性中的每一种, 发生的概率是1/3.
同时, 检验时也存在"误检"情况：

	→被检验成→		的概率是
正品		次品	0.02
正品	→	正品	0.98
次品	→	正品	0.05
次品		次品	0.96

问: 这批产品能通过检验(即事件S_2)的可能性是多少? 即本题要求 P(S_2)=?
这要分两种情况来讨论 ("和"的概念, 用加法):
- 1. 正品被误检(成"假")时的情况
- 2. 次品被误检(成"真")时的情况

我们先定义各种事件:
- B_0 : B(bad). 表示总的10件产品中, 存在0件次品. 该事件的概率, 题目已经告诉我们: $\mathrm{P}(\mathrm{B}_0)=\frac{1}{3}$
- B_1 : 表示总的10件产品中, 存在1件次品. $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)=\frac{1}{3}$
- B_2 : 表示总的10件产品中, 存在2件次品. $\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)=\frac{1}{3}$
- S_1 : S(sample. (v.) 抽样检验；取样；采样) 表示任意抽检一次, 抽到了正品. (但这

里还有个问题不清晰，就是说这个正品，到底是它本身就是“正品”；还是说只是抽验认为它是“正品”?)

- $\overline{S_1}$：表示任意抽检一次，抽到了次品.
- S_2：表示再次检验，并“通过验证”(注意：有误检率存在. 所以通过检验的，未必是“正品”；反之亦然).

本题要求的 P(S_2)，实际上就是：“无论第一次抽，认为是正是次；在第二次检验时，都认为是正品”的东西. 即：$\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_2|\mathrm{S}_1)}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_2|\overline{\mathrm{S}_1})}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$

那么我们先考算 $\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$ 和 $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})$.

$\rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$：是在具体“次品”数量未知的情况下，抽1次就得到“正品”的概率.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_0)}^{\text{总数中有0次品}}\cdot\mathrm{P}\left(\overbrace{\mathrm{S}_1}^{\text{第1次抽得到正品}}|\mathrm{B}_0\right)}_{\text{在总数中有0次品的条件下, 抽1次得到正品的概率}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_1)}_{\text{总数中含有1次品, 抽1次取到正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_2)}_{\text{总数中含有2次品, 抽1次取到正}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总}10\text{正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总10中含有0次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总}9\text{正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总10中含有1次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总}8\text{正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总10中含有2次品}}$$

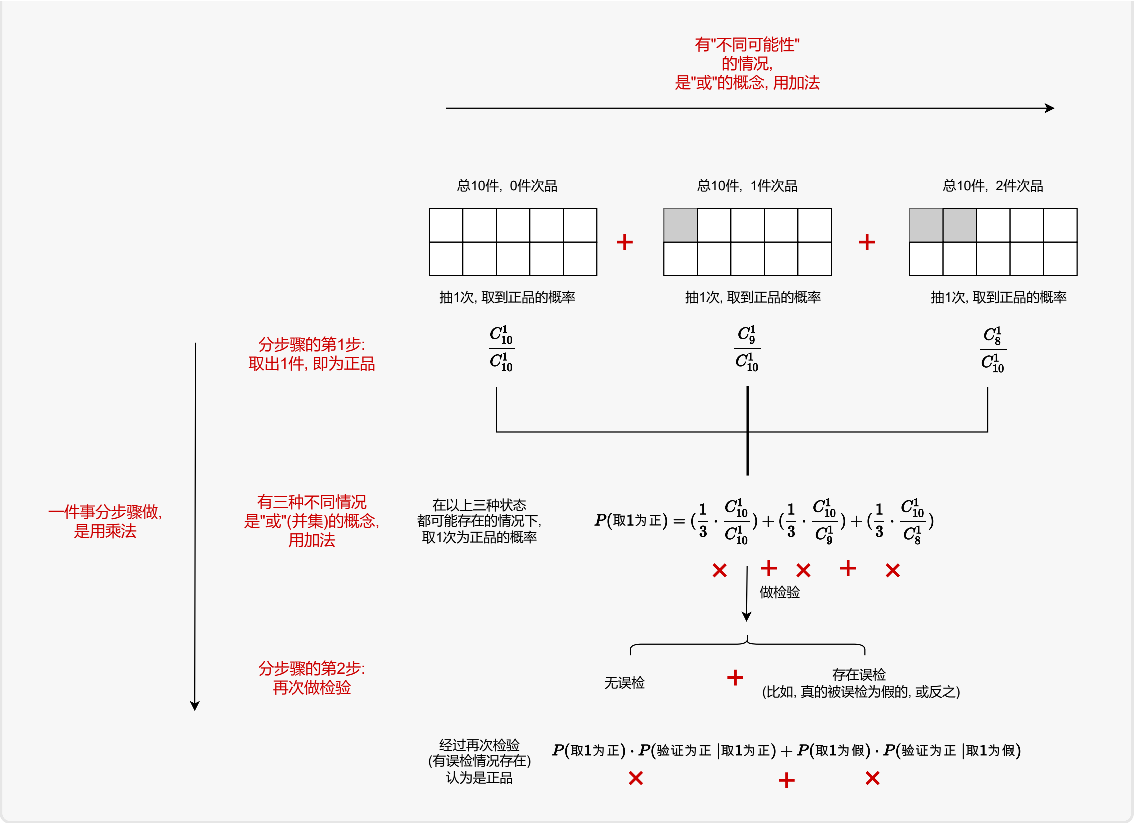
$$=0.9$$

所以：$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})=1-\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=1-0.9=0.1$

于是，我们就能得到：

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)}^{=0.9}\cdot\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_2|\mathrm{S}_1)}^{\text{从上面的表格中可知, 正品被检验为正品,概率为0.98}}}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})}^{=0.1}\cdot\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_2|\overline{\mathrm{S}_1})}^{\text{次品被检验为正品, 概率是0.05}}}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$$

$$=(0.9\cdot0.98)+(0.1\cdot0.05)=0.887$$


有"不同可能性"
的情况,
是"或"的概念, 用加法
总10件，0件次品
总10件，1件次品
总10件，2件次品
抽1次, 取到正品的概率
抽1次, 取到正品的概率
抽1次, 取到正品的概率
分步骤的第1步:
取出1件, 即为正品
$\frac{C_{10}^1}{C_{10}^1}$
$\frac{C_9^1}{C_{10}^1}$
$\frac{C_8^1}{C_{10}^1}$
一件事分步骤做,
是用乘法
有三种不同情况
是"或"(并集)的概念,
用加法
在以上三种状态
都可能存在的情况下,
取1次为正品的概率
$P(\text{取1为正}) = (\frac{1}{3}\cdot\frac{C_{10}^1}{C_{10}^1}) + (\frac{1}{3}\cdot\frac{C_{10}^1}{C_9^1}) + (\frac{1}{3}\cdot\frac{C_{10}^1}{C_8^1})$
做检验
分步骤的第2步:
再次做检验
无误检
存在误检
(比如, 真的被误检为假的, 或反之)
经过再次检验
(有误检情况存在)
认为是正品
$P(\text{取1为正})\cdot P(\text{验证为正}\mid\text{取1为正}) + P(\text{取1为假})\cdot P(\text{验证为正}\mid\text{取1为假})$

---

6 贝叶斯公式