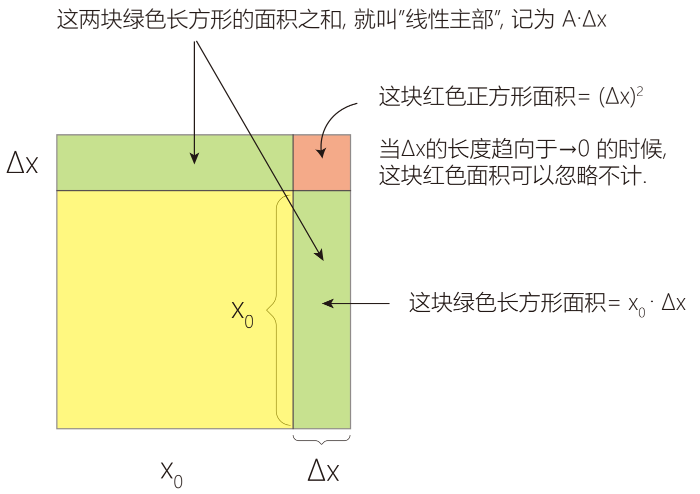
目录

微分

1　线性主部 $dy = A \cdot \Delta x$



黄色的矩形面积, 往外扩充增加的面积 $\Delta S = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2}_{\text{整个大矩形面积}} - \underbrace{(x_0)^2}_{\text{原先的黄色矩形面积}}$

当Δx的距离→0 时, 红色小矩形面积 $(\Delta x)^2$ 的值可以忽略不计.

即:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\Delta S}_{\substack{\text{增加的面积,} \\ \text{即 } \Delta y}} = \underbrace{2(x_0 \cdot \Delta x)}_{\substack{\text{两块绿色的长方形面积,} \\ \text{即 } A \cdot \Delta x, \\ \text{这块就称为“线性主部”}}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\substack{\text{红色小矩形面积,} \\ \text{随着 } \Delta x \to 0\text{, 其面积值可以忽略不计,} \\ \text{即 } o(\Delta x)}}$$

所以原始黄色矩形增加的面积, 主要取决于 AΔx (即两块绿色长方形面积之和) 这块"线性主部"的变化值.

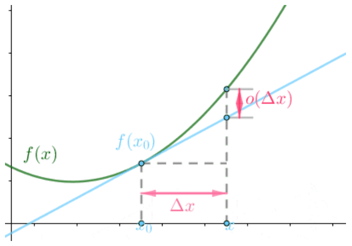
所以:

→ 函数变化的"精确值"是: $\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{\text{线性主部}} + o(\Delta x)$ ← 其中 o(Δx) 是比Δx 高阶的无穷小.

→ 函数变化的"近似值"是: $dy = \underbrace{A\Delta x}_{\text{线性主部}}$

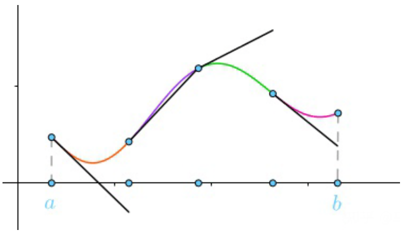
$A\Delta x$: 这里面, 变化的只是Δx, 而A可以看成是一个"常数".

$o(\Delta x)$: 它是比Δx 高阶的无穷小. 即它比Δx 趋近于0的速度更快. 如下图所示:



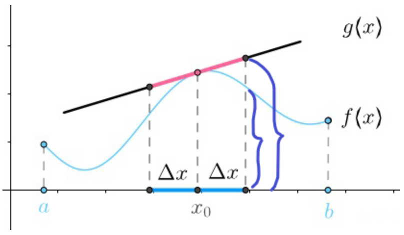
2 当$\Delta x \to 0$ 时, 我们可以用切线的高度 dy (即“微分”), 来代替曲线的高度Δy.

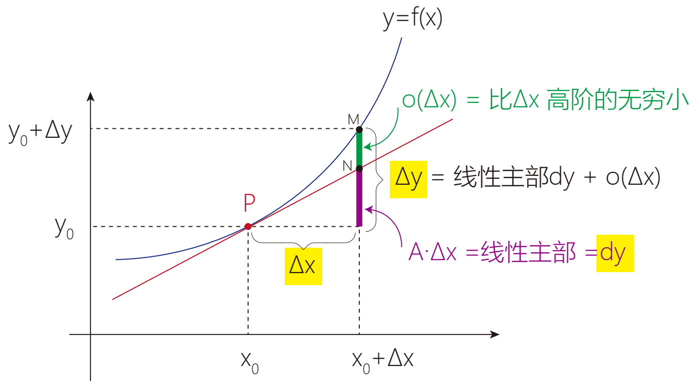
我们可能想去求曲线的长度、曲线下的面积. 解决思路是这样的：比如, 求曲线长度，我们就将曲线分为一小段一小段，每一小段, 都用切线来近似该段曲线：



分段的越细，直到划分为无穷多份，这些切线的长度加起来, 就是曲线的长度.

对于每一段的“曲线”本身, 和该段区间中的“切线”, 可以看到, 在Δx尽可能小的距离内 (即在 $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$ **的区间内), 曲线 f(x)的高度, 和其切线(直线)g(x)的高度, 相差很小.** 所以, 当 $\Delta x \to 0$ 时, 我们就可以用 dy, 来代替 Δ y.





所以: 如果函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可表示为Δy = AΔx + o(Δx) (其中A是不随Δx 改变的常量, 但A可以随 x 改变), 而o(Δx)是比Δx高阶的无穷小 (注: o 是希腊字母omicron). 我们就能称: y=f(x) 在 x_0点处“可微”.

把 dy, 称作y=f(x) 在 x_0点处的“微分”. $dy = A\Delta x$. 换言之, **函数的“微分”, 就是函数增量(即Δy)的主要部分(即“线性主部”部分, 即 dy部分).** 记作: $dy\mid_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$

即:
- “函数f 的自变量x” 的微分, 就是dx. 其值是: dx = Δx. ← 这两个是精确相等的, 就是一回事.
- “函数f 的y值”的微分, 就是 dy. 其值是: dy = Δy的“线性主部”部分 = AΔx = 函数 f(x) 在 x_0 点处的“微分”. ← dy 只是Δy 的近似.

所以, “微分”dy 的本质, 就是用一个“线性函数”(即切线) 作为“原函数”变化的逼近。即用dy(近似值) 来代替Δy(精确值).

进一步:

$\to$ 根据$\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{\text{微分}\,dy} + o(\Delta x)$,

有: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{A\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ ① $\leftarrow$ 两边同时除以Δx

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\substack{\text{这块不就是}f(x)\text{的导数嘛!} \\ =f'(x_0)}} = \lim_{x\to 0}\underbrace{A}_{\text{常数}} + \lim_{x\to 0} o \quad \leftarrow \text{两边同时求极限}$$

$$= A$$

$\to$ 然后把 $A = f'(x_0)$ 代入上面的①式中

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overbrace{A}^{=f'(x_0)}\ \Delta x}{\Delta x} + \overbrace{\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}^{\substack{\text{这一块整体,} \\ \text{下面用}\alpha\text{代替}}}$$

$$= f'(x_0) + \alpha$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{就是}A}\Delta x}_{\text{这块就是}dy} + \underbrace{\alpha\Delta x}_{\substack{\text{即}\Delta x\text{的高阶无穷小} \\ o(\Delta x)}}$$

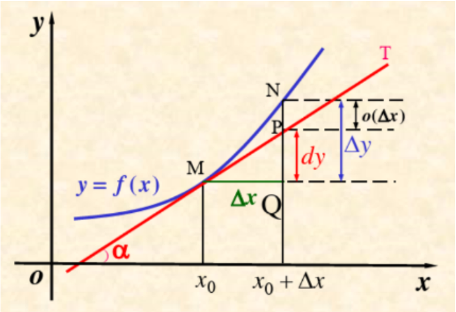
所以, $dy = \underbrace{A}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{\Delta x}_{=dx} = f'(x_0)\,dx$

即: $\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0) \leftarrow$ 所以,x的导数, 可以看做是dy和dx这两个"微分"的商, 叫"微商".

即有: $dy = f'(x) \cdot dx$

所以, 我们就得到了求"微分 dy 或 df(x)"这个值的公式: $\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$

微分 dy 的几何意义: $dy = f'(x)\,\Delta x$ 就是函数 f(x) 在x点处的 "切线纵坐标"的改变量. 随着Δx 的距离趋向于(缩小为)0, dy=Δy.



例

$y = x^2$, 求$x = 1, x = 3$这两处的微分.

根据微分公式: $dy = f'(x)\,dx$, 我们先要知道$f'(x)$和dx这两个数值

$\to$ $y = x^2$的导数, 即$y' = 2x$

$\to$ $dx = \Delta x$

所以,微分$dy = \underbrace{f'(x)}_{=2x}\underbrace{dx}_{=\Delta x}$

当$x = 1$时, $dy = 2 \cdot (1) \cdot \Delta x = 2\Delta x$

当$x = 3$时, $dy = 2 \cdot (3) \cdot \Delta x = 6\Delta x$

例

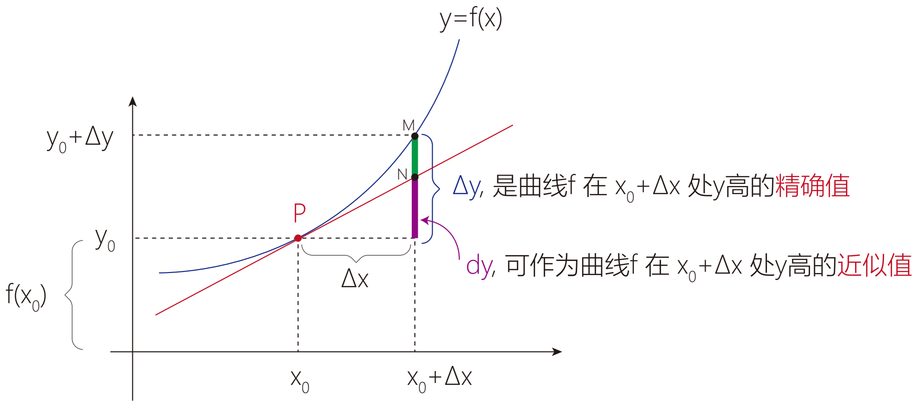
$$y=x^3,\ \text{已知}\Delta x=0.02,\ \text{求}x=2\text{处的微分}dy$$
$$\text{根据微分公式: } dy=f'(x)\,dx$$
$$\text{本例就是 } dy=\left(x^3\right)'\underbrace{dx}_{=\Delta x}=3x^2\underbrace{\Delta x}_{=0.02}\ \leftarrow \text{把}x=2\text{代入进去}$$
$$dy=3\,(2)^2\cdot 0.02=0.24$$

注意: 因为这里Δx有个具体的值0.02, 所以Δx没有趋近于0. 即这里求得的dy, 就是"切线"的y值增量, 而非"函数曲线本身"的y值增量.

所以:
- 函数曲线 y的变化量的 "精确值"是 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
- y的变化量的 "近似值"是 $dy=f'(x_0)\cdot\underbrace{dx}_{=\Delta x}$

即, dy ≈ Δy, 所以, 曲线变化后的y高, 即:

$$f(x_0+\Delta x)\approx\underbrace{f(x_0)}_{\text{曲线在}x_0\text{处的}y\text{高}}+\underbrace{\text{微分}dy}_{\text{切线的}y\text{值增加量}}=f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)\cdot\Delta x}_{\text{即微分}dy}$$



例

有一个半径为 1cm 的球, 在表面镀铜 0.01cm 厚, 问: 所镀的铜的体积是多少?
球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, 我们要求的就是ΔV. 那我们就用 dy 来近似Δy :

$$\text{根据微分公式 } dy=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{本例函数的}y\text{, 即体积}V'}\cdot\underbrace{dx}_{\text{本例函数的自变量}x\text{,即球体的半径}r}$$
$$dy=\left(\frac{4}{3}\pi\underbrace{r^3}_{\text{本例的}r=1cm}\right)'\cdot\underbrace{\Delta x}_{=\text{增加了}0.01cm\text{半径}}$$
$$=\frac{4}{3}\pi\cdot 3\,(1)^2\cdot 0.01=0.125664\ cm^3$$

例

角度中的"度分秒制"是: 1度=60分, 1分=60秒 (度°, 分', 秒")

求 $\sin(30°30')$

$$\sin(30°30') = \sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{可看成是}x_0} + \underbrace{\frac{\pi}{360}}_{\text{可看成是}\Delta x}\right)$$

$$\text{根据公式: 曲线新的}y\text{高} \approx \underbrace{f(x_0)}_{\text{曲线在原先点上的高度}} + \underbrace{dy}_{\text{切线的}y\text{值增量}}$$

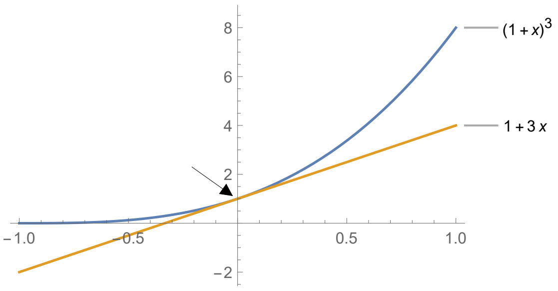
$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \underbrace{\left[\underbrace{f'(x_0)}_{\text{即}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)'} \cdot \underbrace{dx}_{=\Delta x=30'=\frac{\pi}{360}}\right]}_{\text{微分}dy} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)' \cdot \frac{\pi}{360} = 0.5076$$

可以看出, 微分这种方法, 其实就是我们把一个数(比如我们算一个函数值), 分成两块来分别对待, 比如拆分成“整数部分”和“小数部分”. 整数部分(占大头), 就算出它的精确值; 小数部分(占小头, 所以稍微有点误差, 也没关系), 就用”近似值”来代表它. 这样组合后, 算出的结果, 和精确值就相差不大.

---

3 常用近似值

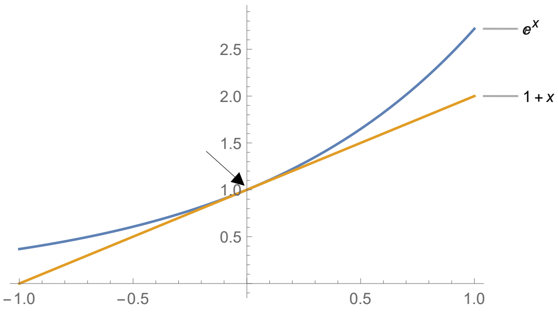
3.0.1 $\lim_{x\to 0}(1+x)^n \approx 1+nx$



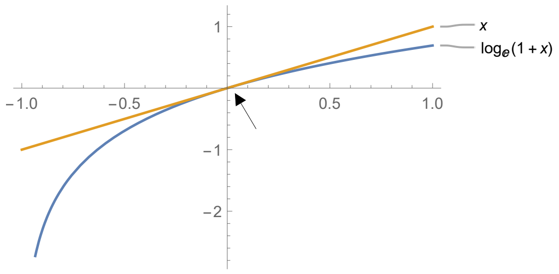
3.0.2 $\lim_{x\to 0}\sin x \approx x$

3.0.3 $\lim_{x\to 0}\tan x \approx x$

3.0.4 $\lim_{x\to 0}e^x \approx 1+x$



3.0.5 $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) \approx x$



上面这些快捷计算公式, 其意义就是: 能帮助我们用(等号右边的) x 的多项式, 来近似计算(等号左边的)复杂的函数.

---

4 基本微分公式与法则：$dy = f'(x)dx$

基本微分公式的核心, 依然是基于这个微分公式: $dy = f'(x)dx$

所以, 我们把各种函数, 代入 dy中的 y部分就行了. 即:

例如, 对于 x^u 这个函数, 它的微分就是: 我们把该函数代入 dy 中的y, 就是: $d\underbrace{y}_{x^u} = \underbrace{f'(x)}_{(x^u)'}dx$,

就得到 $d(x^u) = ux^{u-1}dx$

同样: sin x 的微分就是: $d\underbrace{y}_{\sin x} = \underbrace{f'(x)}_{(\sin x)'}dx$, 就得到 $d(\sin x) = \cos x\ dx$

例

$$\begin{aligned}
&\text{求 } y = \sin(2x+1) \text{ 的微分} dy \\
&\text{根据微分公式 } dy = f'(x)\,dx \\
&\text{本例} dy = \underbrace{[\sin(2x+1)]'}_{\text{复合函数求导, 用剥洋葱法}} dx \\
&= \left[\sin{}'(2x+1)\cdot(2x+1)'\right]dx \\
&= [\cos(2x+1)\cdot 2]\,dx
\end{aligned}$$

4.1 微分法则

4.1.1 $d(\text{常数}C\cdot u) = \text{常数}C\cdot du$

4.1.2 $d(\text{前}\pm\text{后}) = (\text{前}\pm\text{后})'dx = d\text{前}\pm d\text{后}$

4.1.3 $d(\text{前}\cdot\text{后}) = (\text{前}\cdot\text{后})'dx = d\text{前}\cdot\text{后} + \text{前}\cdot d\text{后}$

4.1.4 $d\left(\frac{\text{子}}{\text{母}}\right) = \left(\frac{\text{子}}{\text{母}}\right)'dx = \frac{\text{子'}\cdot\text{母} - \text{子}\cdot\text{母'}}{\text{母}^2}dx = \frac{(d\text{子}\cdot\text{母}) - (\text{子}\cdot d\text{母})}{\text{母}^2}$

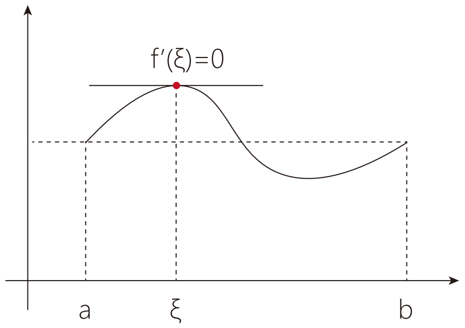
---

5 微分学中, 有三个“中值定理” : Rolle, Lagrange, Cauchy

5.1 罗尔 Rolle 中值定理

Rolle 中值定理就是说: 如果 R 上的函数 f(x) , 满足以下3个条件:
1. 在闭区间 [a,b] 上连续 (连续, 就是必须一笔画出)
2. 在开区间 (a,b) 内可导 (可导, 就是曲线必须光滑, 不能有锐角)
3. a,b点处的 y 值相等, 即 f(a)=f(b)

则有: 在 x轴上至少会有这样一个点 ξ 存在 : 它∈(a,b), 并且它的y值的导数=0, 即 f'(ξ)=0 ← 也就是说, 它切线的斜率=0, 是水平的切线.

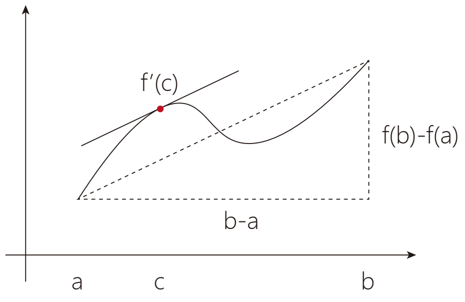


简言之: 罗尔中值定理 Rolle's theorem 就是说 : x轴上, 如果 a,b 两点的高度相同(即y值相同), 则 a,b范围内, 必能找到至少一个点c, 它(c)的切线的斜率=0, 即是水平的切线.

5.2 拉格朗日 Lagrange 中值定理

拉格朗日中值定理, 只不过是“罗尔Rolle中值定理”的一种特殊形式而已.
该定理是说, 如果函数f(x)满足:
1.在闭区间[a,b]上连续
2.在开区间(a,b)上可导

则就有: 在x轴上的开区间(a,b)内, 一定会存在至少一个点(如点c), 它的切线的斜率 $f'(c)$, 会和 ab直线的斜率完全相等. 即也就是有: $\underbrace{f'(c)}_{\text{点}c\text{的切线斜率}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{ab\text{直线的斜率}}$
它反映了“可导函数” 在闭区间上的“整体的平均变化率”与区间内“某点的局部变化率”的关系。



简言之: 拉格朗日中值定理 Lagrange mean value theorem 就是说 : x轴上 a,b范围内的曲线, 一定能找到至少一个点c, 它(c)的切线的斜率, 就等于 ab直线的斜率.

5.3 柯西 Cauchy 中值定理

柯西中值定理, 是把“拉格朗日中值定理”中的曲线方程, 改成了“参数方程”的形式来做了. 换言之, 柯西中值定理, 可看作是“拉格朗日中值定理”的推广.