目录

行列式

1　二阶与三阶行列式

1.1　二阶行列式

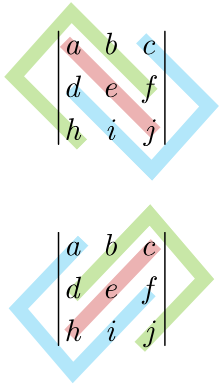
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad}_{\text{主对角线}} - \underbrace{bc}_{\text{副对角线}}$$

1.2　三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} = (aej + bfh + cdi) - (ceh + dbj + aif)$$

即:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} = (aej + bfh + cdi) - (ceh + dbj + aif)$$



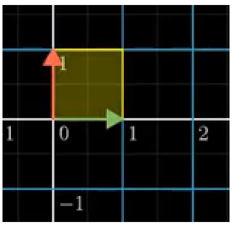
2　行列式的几何意义

2.1　行列式的值, 表示的是 “新基” 的面积 $(\hat{i}\times\hat{j})$, 比原基的面积 $(i\times j)$ 大多少倍

即: $\boxed{|D| = \dfrac{\hat{i}\times\hat{j}}{i\times j} = \dfrac{\text{新基的面积}}{\text{原基的面积}}}$

【原基矩阵” 的行列式的值】:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{i} & \underbrace{1}_{j} \end{vmatrix} = 1 * 1 \ - \ 0 * 0 \ = \underbrace{1}_{=i*j}$$



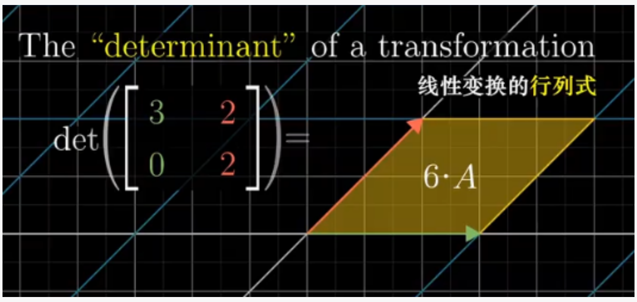
【新基矩阵” 的行列式的值】:

例

如:

$$\left| \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}}_{i} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}}_{j} \right| = 3 * 2 \ - \ 2 * 0 \ = \underbrace{6}_{=i*j}$$

即, 由 “新基” 中的两个基向量, 组成的平行四边形的面积 = 6.

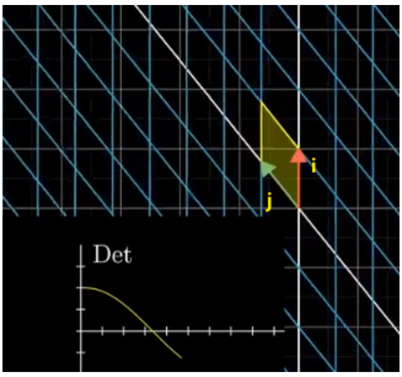


所以, 行列式的值, 其几何意义, 本质就是表示: 把原基 $(i \cdot j)$ 这个单元面积, 缩放了多少倍.

→ $|D| = 3$: 就意味着, 新基坐标系下, 它已将 “原基” 的面积 $(i \times j)$, 缩放为了原来的 3 倍. 即: $\hat{i} \cdot \hat{j} = 3(i \cdot j)$.

→ $|D| = 0$: 新基矩阵 A 里面, 存放的是新基的坐标. 只要 $|A| \neq 0$, 就说明原坐标系空间, 还没有被压缩降维. 那么它就存在 A^{-1}.
如果 $|D| = 0$ 了, 就意味着, “原基” 已被压缩到一条直线上, 甚至一个点上. 被降维了.

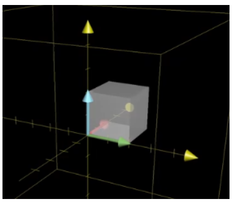
→ $|D| =$: 这意味着, 原坐标系已经被翻转了, 正反面翻转 (invert the orientation of space). 这就被称为 “空间定向” 发生了改变. 此时, 行列式的值, 就会变成负值.



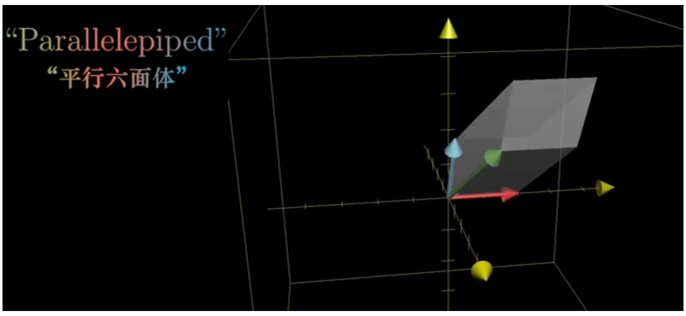
当 i 与 j 越来越靠近, 它们围成的平行四边形的面积, 就越来越小. 即坐标系空间, 被压缩得越来越严重. 当 i 与 j 完全重合时, 它们就共线了, |D| = 0.

2.2 在三维空间中, 行列式的值, 表示的就是: 体积的缩放倍数.

三维空间中, 原基的行列式的值 $= i \cdot j \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$



在做了变换后, $|D| = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} \cdot \hat{k}$ 会从原立方体, 变为一个斜不拉几的立方体 (即 "平行六面体").
after the transformation, the cube might get wrapped into some kind of slanty cube.



三维空间中:
→ $|D| = 0$, 就意味着整个空间被压缩成 0 体积的东西, 即一个平面, 或一条线, 甚至是一个点. 换言之, 此时的新基 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ 线性相关了.
→ 若 |D| 是负值, 就意味着整个坐标系的 "定向" 发生了改变.

你可以用 "右手螺旋法则" 来确定坐标系的 "定向" 是否发生了改变.

---

3 全排列和对换

【排列】:
由 1,2,...,n 组成的一个 "有序" 数组, 叫 "n 级排列".
注意: (1) 它是有" 顺序" 的. 比如: **1**23, 132, **2**13, 231, **3**12, 321. ← 这个就叫 "3 级排列".

(2) 它中间不能缺数, 必须是包含 1,2,3... 到 n 的全部这 n 个数字, 中间不能缺少任何一个数字.
那么 n 个数字, 它的全排列 (就是排列组合中的排列), 有多少种可能性呢? 那就是: 第 1 个数字的位置上, 可以从这种 n 个数字中任取一个出来放. 第二个位置上, 就是从 n-1 的数字中, 任取一个出来摆放..., 一共就有: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 种排列方式.

【逆序】:
"大的数字" 排在 "小的数字" 的前面, 就叫 "逆序". 比如: 4213, 4 这个大数字, 排在了 2 这个

小数字的前面.

【逆序数 negative】:
就是逆序的总数, 你只要数一数有多少个 “逆序” 存在, 这个总数就是 “逆序数”.
比如, 4213, 它的逆序有:
- 4 后面, 有 3 个数字比它小 (即 2, 1, 3)
- 2 后面, 有一个比它小 (即数字 1).
- 1 后面, 没有比它小的.
- 3 后面, 没有比它小的.
所以, 逆序的总数, 就是 3+1+0+0=4

我们用 N 来代表 “逆序数”. 即写成: N(4213)=4
又如: N(1,2,3,...,n)=0 ← 它也叫 “n 级标准排列”, 或 “n 级自然排列”

> 例
>
> 求逆序数: $N\left(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\right)=?$
> 数一数: $\underbrace{n}_{\text{后面有}n-1\text{个比它小的}}\cdot\underbrace{(n-1)}_{\text{后面有}n-2\text{个比它小的}}\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot\underbrace{2}_{\text{后面有 1 个比它小的}}\cdot 1$
> 全加起来就是: $(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ 个

【偶排列】:
如果 “逆序数 N” 是偶数, 就是 “偶排列”.

【奇排列】:
如果 “逆序数 N” 是奇数, 就是 “奇排列”.

【对换】:
即交换两个数. 如: 把 $54\underline{12}3$ 中的 12 交换一下, 就变成了 $54\underline{21}3$
那么我们来看看它们的逆序数:
- $N\left(\underbrace{5}_{\text{后面有 4 个比它小的.}}\ 4\ \underbrace{1}\ \underbrace{2}\ 3\right)=4+3+0+0+0=7$ ← 是奇排列
- $N\left(54\ \underbrace{2}_{\text{后面有 1 个比它小的}}\ \underbrace{1}\ 3\right)=4+3+1+0+0=8$ ← 是偶排列

所以我们就有定理: **一个排列中的任意两个元素, 做一次 “对换”, 排列会改变其 “奇偶性”.**
那么做两次对换呢? 奇偶性又回来了, 即奇偶性就不变了.

定理: 在所有的 n 级排列中 (一个 “n 级排列” 的排列数 = n!), 奇排列和偶排列, 各占一半, 即 $=\dfrac{n!}{2}$.

---

4 n 阶行列式

4.1 三阶行列式

首先看这个三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

等号右边:
- 每一项的 “行标”(六项各自的行标, 分别是: 123, 123, 123, 123, 123, 123), 取的是 “标准排列”.
- **“列标”: 取 “排列的所有可能”(即所有可能的排列顺序, 都取到了). 比如, 4 阶行列式, 有 4 列, 那么 4 个数字的全排列的总数 = 4!=24 种不同的排序. 即这个 4 阶行列式展开后, 共有 24 项.** 即:

	列标是	逆序数是	
$+a_{11}a_{22}a_{33}$	123	$0+0+0=0$	偶排列
$+a_{12}a_{23}a_{31}$	231	$1+1+0=2$	偶排列
$+a_{13}a_{21}a_{32}$	312	$2+0+0=2$	偶排列
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	321	$2+1+0=3$	奇排列
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	213	$1+0+0=1$	奇排列
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	132	$0+1+0=1$	奇排列

可以看出: 各项前的正负符号, 是由 “列标” 的奇偶性 (奇排列还是偶排列) 决定的 (奇负, 偶正).
- 每一项, 就是从这个行列式的 “不同行, 不同列” 中, 取出 3 个元素, 来相乘.

上面这个, 即 “n 阶行列式” 的第一种定义方式. 也就是 “按行展开”.

4.2 n 阶行列式 – 按行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{j_1 j_2 \dots j_n}}_{\text{把所有项, 即共}n!\text{项, 全加起来}} \underbrace{(-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)}}_{\text{每一项前的正负号, 由列标排列, 即 } j_1 j_2 \dots j_n \text{ 的奇偶性决定}} \underbrace{a_1 j_1 \cdot a_2 j_2 \cdot \dots \cdot a_n j_n}_{\text{这个整体, 就是每一项.}}$$

这每一项的行标, 取 “标准排列” $1, 2, 3 \dots n$.
这每一项的列标, 取 $n!$ 的全排列.

注意: 本处公式中这个列标,
看上去好像是按 $1, 2, 3, \dots, n$ 的顺序来排的,
其实不是这样!
而是我们并不知道这每一项的列标到底是怎么排的,
我们只知道它一定是 $n!$ 中的一种排列顺序而已.
即这每一项的列标的数字顺序, 是不固定的.

n 阶行列式的展开, 一共有多少项呢? 共有 n! 项.

行列式, 用 D (determinant) 来表示. 写成: $D = |a_{ij}|$

> 例
>
> determinant : n. (formal) a thing that decides whether or how sth happens 决定因素; 决定条件

只有一个元素的行列式, 就等于该元素本身, 即: $|a_{11}| = a_{11}$
|8|=8
|-1|=-1

例

$$\begin{vmatrix} & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{N(2341)}\ 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1 = -24$$

4.2.1 下三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{下三角行列式}} = \underbrace{a_{11}\cdot a_{22}\cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

4.2.2 上三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{上三角行列式}} = \underbrace{a_{11}\cdot a_{22}\cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

4.2.3 对角形行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{对角形行列式}} = \underbrace{a_{11}\cdot a_{22}\cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

4.2.4 伪下三角行列式 $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1,n}\cdot a_{2,n-1}\cdot a_{n,1}$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \dots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n\cdot (n-1)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\ \underbrace{a_{1,n}\cdot a_{2,n-1}\cdot a_{n,1}}_{\text{“右上”到“左下”的对角线上元素的乘积}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1,n}\cdot a_{2,n-1}\cdot a_{n,1}$$

4.2.5 伪上三角行列式 $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & a_{2,n-1} & \\ \dots & \dots & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} \underbrace{a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n,1}}_{\text{“右上”到“左下”的对角线上元素的乘积}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$$

4.3 n 阶行列式 – 按列展开

【行列式, 按列展开】:
- “列标” 取自然排列 1,2,3,...,n.
- “行标” 取 n 个数的 “全排列” 的所有排序可能.
- 从不同行, 不同列, 取 n 个元素来相乘, 就得到每一项.
- 每一项前的正负号, 由 “行标排列” 的 “奇偶性” 来决定.

行列式 “按列展开” 的公式即:

$$n\text{阶行列式, 按列展开} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \left[\underbrace{(-1)^{N(i_1 i_2 \ldots i_n)}}_{\substack{\text{每一项的正负号,} \\ \text{由“行标排列”的奇偶性决定.}}} \underbrace{a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}}_{\substack{\text{取不同行, 不同列的}n\text{个元素相乘,} \\ \text{相乘的结果, 就是每一项的值.} \\ \text{注意: 这里面, 所取出的每个元素} \\ \text{的列标, 是取自然排列.} \\ \text{行标, 是}n\text{个数的全排列的排序所有可能性.}}} \right]$$

---

5 行列式的性质

【行列式的转置 transpose】:
转置, 就是, 行变列, 或列变行. 如:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}, \quad \underbrace{D^T}_{\substack{\text{也可写成}D'\text{,} \\ \text{但容易和微积分中} \\ \text{的导数相混淆,} \\ \text{所以一般都写}D^T}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

5.1 性质: $\left(D^T\right)^T = D$

5.2 性质: $D^T = D$

行列式转置与否, 其值不变.
对 “行” 成立的性质, 对 “列” 也成立.

5.3 性质: 行列式中两行 (两列也行) 互换, 行列式的值, 就改变正负号

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}, \text{ 则 } D_1=\underbrace{\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}}_{\text{对}D\text{做}1,3\text{行互换得来}}=-D$$

5.4 性质: 行列式, 若两行 (或两列) 的元素相等, 则该行列式的值 =0

有这个行列式, 其第 1,3 行上的元素, 完全相同.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

我们对它的 1,3 行做交换, 得到的 $D_1=-D$ (因为交换两行, 行列式的值要变号). 而新的 D_1 的内容, 和老 D 依然是完全一样的. 于是我们就有: D=-D, 即 2D=0, 即 D=0.

于是我们就得到了这个性质: 行列式, **若两行 (或两列) 的元素相等, 则该行列式的值 =0.**

5.5 性质: 某一行都乘以 k, 等于用 k 乘以这个行列式 D

即:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

换言之就是: **如果行列式中的某行, 有公因子 k, 则 k 可以提到行列式外面去.**

如果每行都有 k, 则每行都要提一次 k. 比如一共有 3 行, 就提 3 次 k.

$$\begin{vmatrix} 1k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{vmatrix}=k^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

即: 如果一个 n 阶行列式的所有元素, 均有公因子 k, 则 k 就向外提 n 次 (因为有 n 行, 每行只需提一次, 就是提 n 行次).

5.6 性质: 行列式的两行 (或两列) 元素, 对应成比例, 则该行列式的值 =0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} \leftarrow \text{第}2,3\text{行元素对应成比例. 第}3\text{行, 可以把公因子}8\text{提出去.}$$

$$=8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow \text{现在, 有两行元素对应相等. 该行列式的值}=0$$

$$=0$$

5.7 性质: 某一行全为 0, 则 D=0

现在, 我们就有了:

$$\left.\begin{array}{r}\text{两行上的元素, 对应成比例}\\ \text{某一行元素, 全为0}\\ \text{两行相等}\end{array}\right\} \rightarrow \text{则 } D=0$$

上面, 左边可以推导出右边. 但反过来, 右边是无法推导出左边的. 即 D=0 的行列式, 未必是属于左边的三种情况之一.

5.8 性质: 某一行上的元素, 是两个元素的和的话, 则该行列式就可以拆成这两个行列式相加

即:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 7+8 & 2+3 & 9+10\\ 8 & 8 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 2 & 9\\ 8 & 8 & 9\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & 3 & 10\\ 8 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

注意: 拆分的时候, 只能拆 “是和那一行”, 其他行的元素要保持不变! 如:

$$\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ a+b & b+c & c+a\\ c+a & a+b & b+c\end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix}b & c & a\\ a & b & c\\ c & a & b\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c & a & b\\ b & c & a\\ a & b & c\end{vmatrix} \leftarrow \text{这种拆分是错的!}$$

正确的拆分是如下 (比如拆第一行的话):

$$\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ a+b & b+c & c+a\\ c+a & a+b & b+c\end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix}b & c & a\\ a+b & b+c & c+a\\ c+a & a+b & b+c\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c & a & b\\ a+b & b+c & c+a\\ c+a & a+b & b+c\end{vmatrix}$$

5.9 ★ 性质: 某一行乘以一个数, 加到另一行上去, 行列式 D 的值不变

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 9 & 9 & 10\end{vmatrix} \leftarrow \text{将第一行}\times 5\text{, 加到第二行上去}\\
&= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1+(1\cdot 5) & 1+(2\cdot 5) & 0+(3\cdot 5)\\ 9 & 9 & 10\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1+5 & 1+10 & 0+15\\ 9 & 9 & 10\end{vmatrix} \leftarrow \text{第二行的元素是两个数的和, 可以拆分成两个行列式}\\
&= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 9 & 9 & 10\end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 10 & 15\\ 9 & 9 & 10\end{vmatrix}}_{\text{第 1,2 行成比例, 这个行列式的值=0}}\\
&= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 9 & 9 & 10\end{vmatrix} = D
\end{aligned}$$

---

6 行列式值的计算

6.1 方法是: 把行列式, 先化成 "上三角行列式"

方法论: 一般, 我们要把行列式, 化成 "上三角行列式". 则该行列式的值, 就是 "主对角线" 上元素的乘积了.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\2&3&10&0\\0&3&5&18\\5&10&15&4\end{vmatrix}$$

←为了化成上三角行列式, 先把第二行的第一个元素 2, 化成 0, 我们把第一行 $\times(-2)$, 加到第二行上去

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\ \underbrace{2+(1\cdot-2)}_{=0}&\underbrace{3+(2\cdot-2)}_{=-1}&\underbrace{10+(0\cdot-2)}_{=10}&\underbrace{0+(1\cdot-2)}_{=-2}\\0&3&5&18\\5&10&15&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&3&5&18\\5&10&15&4\end{vmatrix}$$

←为了把第四行的第一个元素 5 化成 0, 我们把第一行 $\times(-5)$, 加到第四行上去

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&3&5&18\\ \underbrace{5+(1\cdot-5)}_{=0}&\underbrace{10+(2\cdot-5)}_{=0}&\underbrace{15+(0\cdot-5)}_{=15}&\underbrace{4+(1\cdot-5)}_{=-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&3&5&18\\0&0&15&-1\end{vmatrix}$$

←为了把第三行的第二个元素 3 化成 0, 我们把第二行 $\times(3)$, 加到第三行上去

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&\underbrace{3+(-1\cdot3)}_{=0}&\underbrace{5+(10\cdot3)}_{=35}&\underbrace{18+(-2\cdot3)}_{=12}\\0&0&15&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&35&12\\0&0&15&-1\end{vmatrix}$$

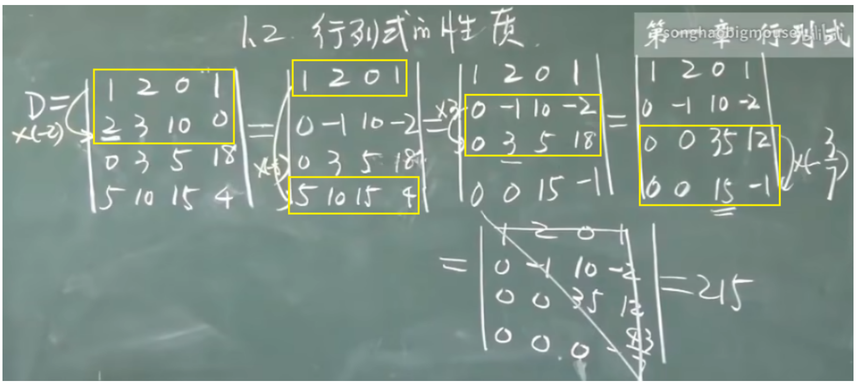
←为了把第四行的第三个元素 15 化成 0, 我们把第三行 $\times(-\frac{15}{35})$, 加到第四行上去

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&35&12\\ \underbrace{0+\left(0\cdot-\frac{3}{7}\right)}&\underbrace{0+\left(0\cdot-\frac{3}{7}\right)}&\underbrace{15+\left(35\cdot-\frac{3}{7}\right)}&\underbrace{-1+\left(12\cdot-\frac{3}{7}\right)}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&35&12\\0&0&0&-\frac{43}{7}\end{vmatrix}$$

←这个就化成了 "上三角行列式" 了, 其行列式的值 $=$ 主对角线元素相乘

$$=1\cdot-1\cdot35\cdot-\frac{43}{7}=215$$



总结:

1. 先处理第 1 列, 再处理第 2 列, 再处理第 3 列.
2. 第 1 列处理完后, 第 1 行就不再参与运算.

6.2 如果某一行的首元素是 1, 就把该行移到第一行上去

比如:

$$\begin{vmatrix} 8 & \\ 1 & ... \\ 3 & \end{vmatrix}$$

第二行的首元素是 1, 就把这第二行, 移到第 1 行上去. 变成:

$$\begin{vmatrix} 1 & ... \\ 8 & \\ 3 & \end{vmatrix}$$

这样, 能更方便的用第一行元素乘以某个数, 来消去下面行上的数字, 以变成 0. 化成 "上三角行列式".

注意: 在交换两行时, 行列式的值要变号.

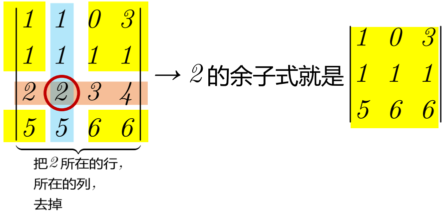
---

7 行列式按行（列）展开

7.1 余子式 minor : M_{ij}

你选定某个元素 x, 把它所在的行去掉, 所在的列去掉, 将剩下的元素按原位置排好, 这个新的行列式, 就是 x 的 "余子式".

比如:



某个元素的余子式, 用 M_{ij} 表示. 如, 上例中的 2, 在 i= 第 3 行, j= 第 2 列, 所以它的 "余子式" 就是:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

7.2 代数余子式 Algebraic cofactor : $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

在余子式的前面, 加一个负号, 即 $(-1)^{i+j}$, 就是 “代数余子式”.
某个元素 x 的 “代数余子式”, 用符号 A_{ij} 来表示. i 是 x 的行号, j 是 x 的列号.

比如上例的 “余子式” 是:

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}$$

那么其 “代数余子式” 就是:

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&1\\5&6&6\end{vmatrix}$$

7.3 按某一行（列）展开的展开公式:

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ \ (j=1,2,...,n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ \ (i=1,2,...,n)$$

有定理: **行列式的值等于: 随便选一行, 把这行上所有的元素, 各自乘以它们的 “代数余子式”, 再求和, 所得到的结果, 就是这个行列式的值了.**

$$\boxed{D=\underbrace{a_{i1}}_{\text{某一行的元素}}\cdot\underbrace{A_{i1}}_{\text{该元素的 代数余子式}}+a_{i2}\cdot A_{i2}+...+a_{in}\cdot A_{in}}$$

用列来做, 也是一样.

$$D=\underbrace{a_{1j}}_{\text{某一列的元素}}\cdot\underbrace{A_{1j}}_{\text{该元素的 代数余子式}}+a_{2j}\cdot A_{2j}+...+a_{nj}\cdot A_{nj}$$

例

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}\leftarrow\text{我们若按第一行展开}$$

$$=\underbrace{1}_{a_{11}\text{元素}}\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix}}_{a_{11}\text{元素的代数余子式}}+\underbrace{1}_{a_{12}\text{元素}}\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&5\end{vmatrix}}_{a_{12}\text{元素的代数余子式}}+\underbrace{2}_{a_{13}\text{元素}}\cdot\underbrace{(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}}_{a_{13}\text{元素的代数余子式}}$$

从上例, 你就能发现, “行列式” 按行或列展开后, 它的每一个元素的代数余子式, 都 “降阶” 了. 即原行列式是 3 阶的, 现在展开后, 你只要计算 2 阶的行列式 (即代数余子式) 了. 大大减轻了我们的计算负担.

其实, 上面的这个例子, 我们按第二行展开更方便, 因为它有 0 元素存在啊, 0 元素和其代数余子式相乘, 就是 0. 根本就不需要我们去计算了. 所以, **我们要选 0 元素最多的那一行来展开**:

例

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix}\leftarrow\text{要选 0 元素最多的那一行来展开, 本例即第二行}$$

$$=0+\underset{a_{22}\text{元素}}{1}\cdot\underbrace{(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}}_{a_{22}\text{元素的代数余子式}}+0$$

---

8 异乘变零定理

即: **某行上的元素, 与另一行 (即别人的行) 上对应元素的" 代数余子式" 相乘, 将所有的乘积值, 再全加起来, 其和 =0.**

如: (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

用第 4 行, 与第 1 行元素的 "代数余子式" 相乘, 再把相乘后的值, 全加起来, 则:
$D = a_{41}A_{11} + a_{42}A_{12} + a_{43}A_{13} + a_{44}A_{14} = 0$

"异乘变零定理" 的证明过程:
比如这个行列式 (2):

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

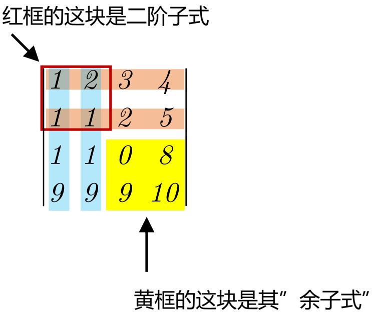
其中, 1,4 行相同. 即两行相同, 则该行列式的值 =0.
若用第 1 行展开, 你会发现, 展开的式子, 与上面的行列式 (1), 完全相同. 既然这边的 (2) 是 0, 那么上面的 (1) 也是 0 了. 证毕.

---

9 拉普拉斯定理

9.1 k 阶子式

就是从一个 n 阶行列式中, 随便取 k 行, 取 k 列, 组成的新的行列式, 就是 k 阶子式.
比如:



我们取出它一个 2 阶子式 (即 2*2 区域的子集). 比如, 就取第 1,2 行, 和第 1,2 列交叉点, 所组成的子式, 即: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 这个就是一个 "二阶子式".

那么这个二阶子式的 "余子式", 就是: $\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$

这个二阶子式的 "代数余子式", 就是:

$$(-1)^{\overbrace{(1+2)}^{\text{行 1, 行2}}\overbrace{(1+2)}^{\text{列 1, 列2}}}\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$$

注意: 上面 -1 的指数, 两个括号的意思是:

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$$

9.2 拉普拉斯展开定理

拉普拉斯展开定理 Laplace expansion : 在 n 阶行列式中, 任意取定 k 行 (而不仅仅是只取一行展开), 由 k 行元素组成的所有 "k 阶子式" 与 "代数余子式" 的乘积之和, 就等于该行列式的值.

例

如: 下面这个 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

我们任取 k=2 行, 比如就取第 1, 2 行. 它的 k 阶子式, 就是二阶子式. 那么因为这个行列式有 5 列, 在其中取 2 列, 就有 $C_5^2 = 10$ 种取法. 即有 10 个二阶子式存在.
即, **这个 5 阶行列式的值 D= (第 1 个二阶子式的行列式值 $\times$ 其代数余子式) + (第 2 个二阶子式的行列式值 $\times$ 其代数余子式) + ... + (第 10 个二阶子式的行列式值 $\times$ 其代数余子式)**

如果我们取到的是 "列上都是 0 元素" 的那些列的话, 那么这个二阶子式的行列式的值就是 0 了. 其 "二阶子式" 与 "代数余子式" 的乘积之和, 当然也是 0 了.
所以, 在全部 10 个二阶子式中, 唯一行列式值不为零的二阶子式, 就是取第 1 和第 2 列. 它的 "二阶子式" 值 $\times$ 其 "代数余子式" $= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{二阶子式}} \cdot \underbrace{(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{代数余子式}}$

即, 本例的这个 5 阶行列式的值 $= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{二阶子式}} \cdot \underbrace{(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{代数余子式}} + 0 + 0 + \ldots$

---

10 行列式相乘

10.1 两个 “同阶” 行列式相乘

两个同阶行列式, 相乘, 方法是: **前行 $\times$ 后列**

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{按行看}} \times \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}}_{\text{按列看}} = \begin{vmatrix} \overbrace{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{31}}^{a\text{行}1\cdot b\text{列}1} & a\text{行}1\cdot b\text{列}2 & a\text{行}1\cdot b\text{列}3 \\ a\text{行}2\cdot b\text{列}1 & a\text{行}2\cdot b\text{列}2 & a\text{行}2\cdot b\text{列}3 \\ a\text{行}3\cdot b\text{列}1 & a\text{行}3\cdot b\text{列}2 & a\text{行}3\cdot b\text{列}3 \end{vmatrix}$$

10.2 两个 “不同阶” 行列式相乘

那就只能先算出各自行列式的值, 再来相乘了.

例

11 n 阶行列式

12 行列式的性质

12.1 性质 1: 行列互换, 其值不变. 即 $|A| = \left|A^T\right|$

12.2 性质 2: 某行（列）元素全为零, 则行列式为零

12.3 性质 3: 两行（列）元素相等, 或对应成比例, 则行列式为零

12.4 性质 4: 某行（列）元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和

12.5 性质 5: 两行（列）互换，行列式的值反号

12.6 性质 6: 某行（列）元素有公因子 $k\,(k \neq 0)$, 则 k 可提到行列式外面去

12.7 性质 7: 某行（列）的 b, 倍加到另一行（列）上去, 行列式的值不变

13 行列式的展开定理

13.1 余子式 M_{ij}

13.2 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$

13.3 按某一行（列）展开的展开公式:

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \;\; (j = 1, 2, ..., n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \;\; (i = 1, 2, ..., n)$

14 具体型行列式的计算: a_{ij} 已给出

14.1 化为 “12+1” 型行列式

14.1.1 主对角线行列式

14.1.2 副对角线行列式

14.1.3 拉普拉斯展开式

14.1.4 范德蒙德行列式

14.2 加边法

14.3 递推法 (高阶 $\to$ 低阶)

14.3.1 建立递推公式, 即建立 D_n 与 D_{n-1} 的关系

14.3.2 D_n 与 D_{n-1} 要有完全相同的元素分布规律, 只是 D_{n-1} 比 D_n 低了一阶

14.4 数学归纳 (低阶 $\to$ 高阶)

14.4.1 第一数学归纳法

14.4.2 第二数学归纳法

15 抽象型行列式的计算: a_{ij} 未给出

15.1 用行列式性质

15.2 用矩阵知识

15.2.1 设 C=AB, A,B 为同阶方阵, 则 $|C| = |AB| = |A||B|$

15.2.2 设 C=A+B, A,B 为同阶方阵, 则 $|C| = |A + B|$, 作恒等变形, 转化为矩阵乘积的行列式

15.2.3 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$, $|(A^*)^*| = \left||A|^{n-2}\, A\right| = |A|^{(n-1)^2}$