目录

积分

第一部分　定积分 definite integral

1　“定积分” 的定义

1. 曲线函数 f(x), 在 x 轴上有界, 比如端点是 [a,b].
2. 然后, 我们在 [a,b] 这段区间上, 任意插入 n 个分点, 分成 n 个小区间. 它们不要求等分. 每个小区间的长度就是 $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.
3. 在每个 Δ 小区间上, 任取一点 ξ_i. 这点的函数值 (即 y 轴上的高度), 就是 $y = f(\xi_i)$.
4. 这样, 我们就能得到每一个 Δ 小区间, 所在的 “长方形细条的面积” 了, 即 = 宽$\Delta x_i \cdot$高$f(\xi_i)$
5. 把所有这些 Δ 小区间的 “长方形细条面积”, 全加起来, 就是该曲线到 x 轴间的面积的近似值. $= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(\xi_i)$
6. 我们令其中 x 轴宽度最大的那个 Δx 小区间 (假设起名为 , 即 $\lambda = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\}$), 我们让这个 , 极限趋向于 0. 这样, 既然最大的 Δx 小区间都趋近于 0 了, 其他比它更小的 Δx 小区间, 就都统统被约束, 也都趋向于 0 了. 这样, 它们的 “长方形细条的面积之和”, 就能精确的等于 “函数曲线到 x 轴之间的面积” 了, 而不仅仅是 “近似” 了.

即: $\lim_{x\to0}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{高}} \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\text{宽}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{定积分}}$

各部分的名字是: $\int_{\text{下限}a}^{\text{上限}b} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}}\ d\ \underbrace{(x)}_{\text{积分变量}}}_{\text{被积表达式}}$

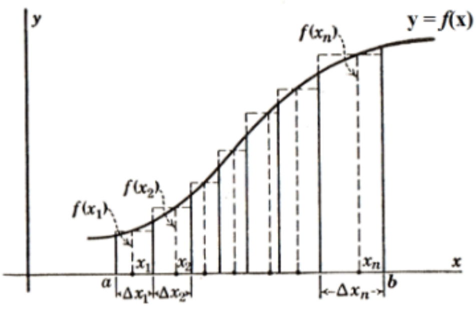


Fig. 1

2 定积分的性质

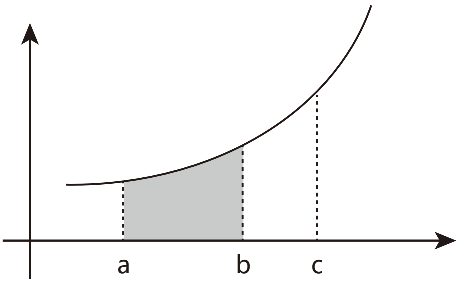
2.1 若 b=a, 则 $\int_a^a f(x) = 0$

2.2 $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) \leftarrow$ 交换上下限, 定积分的值要变号

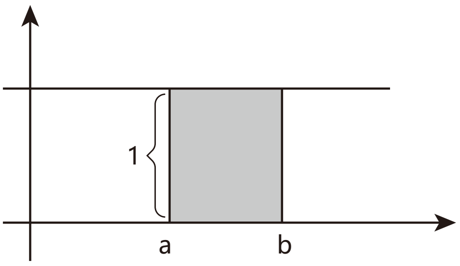
2.3 $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \leftarrow$ 即, 积分可以拆开, 常数可以提到外面去

2.4 若 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leftarrow$ 其实就是原先的一步走, 分成两步走而已.

2.5 若 $a < b < c$, 则: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$



2.6 若 f(x) 恒等于 1, 即该函数是条 “水平直线”, 它与 x 轴之间就形成一个矩形了. 则 $\int_a^b 1dx =$ 高$1 \cdot$宽$(b-a) = b-a$

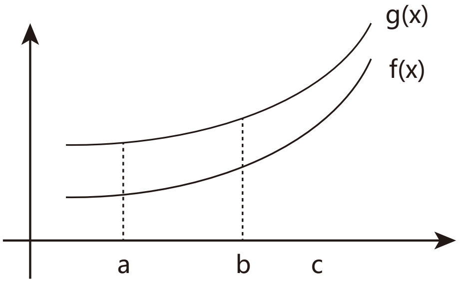


2.7 $\int_a^b kdx = k\int_a^b 1dx = k(b-a) \leftarrow$ k 是常数, 可以提到积分外面

2.8 若 $f(x) >= 0$, 即 “函数曲线” 都在 x 轴上方. 则 $\int_a^b f(x)dx >= 0$

2.9 若 $f(x) <= 0$, 即 “函数曲线” 都在 x 轴下方. 则 $\int_a^b f(x)dx <= 0$

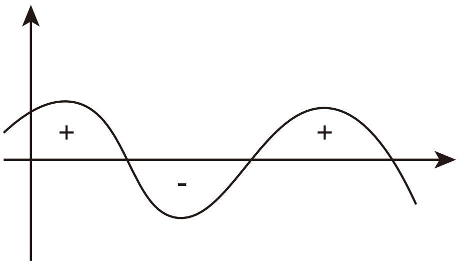
2.10 若 $f(x) <= g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx <= \int_a^b g(x)dx$



2.11 $|\int_a^b f(x)dx| <= \int_a^b |f(x)|dx$

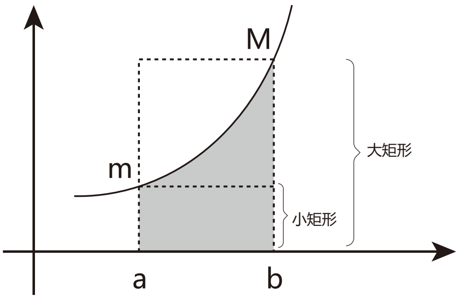
因为 “函数曲线” 的定积分 (面积), 在 x 轴上方是正面积的, 在 x 轴下方是负面积的, 如果一个曲线既有正 y 值的部分, 又有负 y 值的部分, 那它的总面积, 肯定会有” 正负相互抵消掉” 的一部分.

而先把“函数曲线”取绝对值, 它的 y 值就都在 x 轴上方了, 面积就不存在负数的一块, 就不会抵消掉总面积.



2.12 一个曲线, 在 [a,b] 区间上, 若 m 是它的最小 y 值高度, M 是它的最大 y 值高度, 则有: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

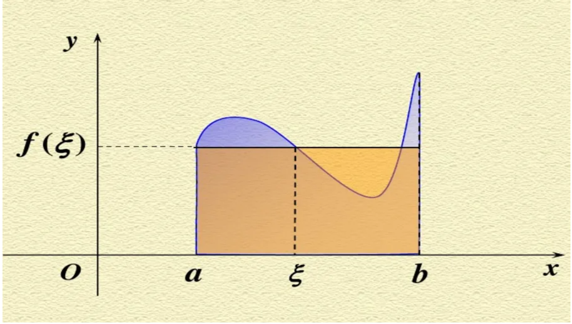
如下图, “高 m” 乘以 “宽 (b-a)”, 就是 abm 这个小矩形的面积.
‘高 M” 乘以 ‘宽 (b-a)”, 就是 abM 这个大矩形的面积.
曲线 mM 的定积分, 这个面积大小, 肯定是夹在上面两个矩形的面积之间的.



使用该方法, 就可以让我们来对曲线的定积分值, 进行估计.

2.13 定积分“中值定理”: 如果 f(x) 是连续的, $\exists \xi \in [a,b]$, 则必然有 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

定积分中值定理 Mean value theorems for definite integrals 的意思就是说: 在函数曲线的 [a,b] 区间上, 一定能找到一个点 ξ, 该 ξ 点的 y 值高度 (即 f(ξ)), 乘上 “b-a 这个宽度”, 所形成的的矩形面积, 能恰好等于函数曲线的定积分值. 你找吧, 一定能找到这个点 ξ 存在.



第二部分 求定积分的方法

3 分部积分法

比较一下:

“不定积分” 的 “分部积分法” 公式是: $\boxed{\int 前\cdot d(后)=前\cdot 后-\int 后\ d(前)}$

‘定积分” 的 “分部积分法” 公式是: $\boxed{\int_a^b 前\cdot d(后)=(前\cdot 后)\ |_a^b-\int_a^b 后\ d(前)}$

例

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\arcsin x}_{前}\ \underbrace{dx}_{后} \leftarrow \text{根据定积分“分部积分法”公式}$$

$$\int_a^b 前\cdot d(后)=(前\cdot 后)\Big|_a^b-\int_a^b 后\ d(前)$$

$$=(\arcsin x\cdot x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}} x\ \underbrace{d(\arcsin x)}_{\text{求}\arcsin x\text{的微分}}$$

← 注意，减号后面的积分部分，这里的$[0,\frac{1}{2}]$是x的积分区间，

而现在d后面是$\arcsin x$了，即求的是 $\arcsin x$ 的微分，

所以，你应该把$\arcsin x$这个“原函数”，朝外提出去变成“导函数”，

让d后面是x才行.

微分 $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\underbrace{\arcsin\frac{1}{2}}_{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \leftarrow \text{右边部分的}\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ \text{把导函数}x\text{拿到}d\text{里面，变成原函数}$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ d\ \underbrace{(x^2-1)}_{\substack{\text{原函数，加常数后，}\\ \text{其导函数的值是不变的}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}+C\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{\pi}{12}-\left[-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C\right]\Bigg|_0^{2^{-1}}$$

$$=\frac{\pi}{12}-\left[-(1-(2^{-1})^2)^{\frac{1}{2}}-\left(-(1-0^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$