

目录

第一部分	积分 integral	2
第二部分	不定积分 indefinite integral : 即“原函数”	2
1	不定积分公式	3
1.1	$\int(0)dx = C$	3
1.2	$\int(k)dx = kx + C$	3
1.3	$\int(x^n)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$	3
1.4	$\int(\frac{1}{x})dx = \ln x  + C$	3
1.5	$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$	3
1.6	$\int(e^x)dx = e^x + C$	3
1.7	$\int(a^x)dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	3
1.8	$\int(\frac{1}{1+x^2})dx = \arctan x + C, \quad ^{-} = -\operatorname{arccot} x + C$	3
1.9	$\int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx = \arcsin x + C, \quad ^{-} = -\arccos x + C$	3
1.10	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C$	3
1.11	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \frac{x-a}{x+a}  + C$	3
1.12	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln x + \sqrt{x^2+a^2}  + C$	3
1.13	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln x + \sqrt{x^2-a^2}  + C$	4
1.14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	4
1.15	$\int(\sin x)dx = -\cos x + C$	4
1.16	$\int(\cos x)dx = \sin x + C$	4
1.17	$\int(\tan x)dx = -\ln \cos x  + C$	4
1.18	$\int(\cot x)dx = \ln \sin x  + C$	4
1.19	$\int(\sec x)dx = \ln \sec x + \tan x  + C$	4
1.20	$\int(\csc x)dx = \ln \csc x - \cot x  + C$	4
1.21	$\int(\ln x)dx = x \ln x - x + C$	4
1.22	$\int(\sec^2 x)dx = \tan x + C$	4
1.23	$\int(\csc^2 x)dx = -\cot x + C$	4
1.24	$\int(\sec x \tan x)dx = \sec x + C$	4
1.25	$\int(\csc x \cot x)dx = -\csc x + C$	4
2	不定积分的性质	4
2.1	$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	4
2.2	$\int(kf(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$	4
第三部分	求不定积分的方法	4
3	凑微分法	4
4	分部积分法 : $\rightarrow \int \text{前} d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后} d(\text{前})$	5
5	换元法	6

# 积分

## 第一部分 积分 integral

对于曲线 $f$ 下的面积, 如果我们能找到一个函数 $I$ 来表示它, 那么这个函数 $I$ , 就叫做 $f$ 的“积分”. 积分很有用, 是因为很多生活中实际的问题, 都能近似成“大量很小的东西加起来”. 而这样的问题都能转化成求某图像下的面积. 所以, 我们要找的, 就是这个能表示面积的“积分函数”.

## 第二部分 不定积分 indefinite integral : 即“原函数”

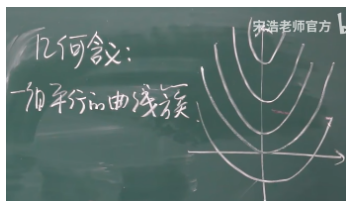
一个原函数, 求其导数, 能得到“导函数”. 反过来, 从“导函数”算出其“原函数”的过程, 就是求其“不定积分”. 换言之, “原函数”的别名就是“不定积分”.

如: “原函数”是  $F(x)$ , 其“导函数”是  $D(x)$ , 即:  $F'(x) = D(x)$ , 则原函数  $F(x)$  就是  $D(x)$  的其中一个原函数.

为什么是“其中一个”原函数? 因为可以有无穷多个原函数, 它们都能得到同一个导函数. 比如, 这些原函数:  $x^2, x^2 + 3$ , 它们都能得到同一个导函数  $2x$ .

其规律就是:

$$\left( \underbrace{F(x)}_{\text{原函数}} + \underbrace{C}_{\text{常数}} \right)' = \underbrace{D(x)}_{\text{导函数}}$$



所以, 从“导函数”来反求其“原函数”, 就是求“不定积分”. 因此, “原函数”的别名就是“不定积分”.

即:  $\int \underbrace{D(x)}_{\text{导函数}} dx = \underbrace{F(x)}_{\text{原函数}} + \underbrace{C}_{\text{常数}}$

我们也就有:  $\frac{d}{dx} \left[ \underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}} dx}_{\text{原函数}} \right] = \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}} \leftarrow$  相当于先ctrl+z (恢复到原函数), 再 ctrl+y (重做下一步的求导操作)

也可写作:  $d \left[ \underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}} dx}_{\text{原函数}} \right] = \underbrace{f(x)}_{\text{导函数}} dx$

符号  $\int$  是英文 sum 的首字母s 变形.

$\Sigma$  和  $\int$  的区别:

$\Sigma$	通常是对“有限个”, 或者“离散的量”求和。
$\int$	是对“无穷个”连续的“无穷小量”的求和

类似的:

$\Delta$	表示“有限小”的变量.
$dx$	表示“无穷小”变量. 有 $x \rightarrow 0$ 这个“极限”的概念在里面.

1 不定积分公式

- 1.1  $\int(0)dx = C$
- 1.2  $\int(k)dx = kx + C$
- 1.3  $\int(x^n)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- 1.4  $\int(\frac{1}{x})dx = \ln|x| + C$
- 1.5  $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$
- 1.6  $\int(e^x)dx = e^x + C$
- 1.7  $\int(a^x)dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 1.8  $\int(\frac{1}{1+x^2})dx = \arctan x + C, \quad ^- = -\operatorname{arccot} x + C$
- 1.9  $\int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx = \arcsin x + C, \quad ^- = -\arccos x + C$
- 1.10  $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C$
- 1.11  $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$
- 1.12  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$

例

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3^2}}dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}d(2x) = \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{(2x)^2+3^2} \right| + C$$

- 1.13  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$
- 1.14  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a} + C$
- 1.15  $\int (\sin x)dx = -\cos x + C$
- 1.16  $\int (\cos x)dx = \sin x + C$
- 1.17  $\int (\tan x)dx = -\ln|\cos x| + C$
- 1.18  $\int (\cot x)dx = \ln|\sin x| + C$
- 1.19  $\int (\sec x)dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- 1.20  $\int (\csc x)dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
- 1.21  $\int (\ln x)dx = x \ln x - x + C$
- 1.22  $\int (\sec^2 x)dx = \tan x + C$
- 1.23  $\int (\csc^2 x)dx = -\cot x + C$
- 1.24  $\int (\sec x \tan x)dx = \sec x + C$
- 1.25  $\int (\csc x \cot x)dx = -\csc x + C$

2 不定积分的性质

2.1  $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

例

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx &= \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx = \int \left(x-3+3\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \underbrace{\int (x)dx}_{\frac{1}{2}x^2} - \underbrace{\int (3)dx}_{3x} + 3 \underbrace{\int \left(\frac{1}{x}\right)dx}_{\ln|x|} - \underbrace{\int \left(\frac{1}{x^2}\right)dx}_{=\int (x^{-2})dx = \frac{-1}{-2+1}x^{-2+1}} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3\ln|x| + x^{-1} + C \end{aligned}$$

2.2  $\int (kf(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$

其中 k 是常数, 且  $k \neq 0$ . 注意: 如果k是一个变量, 如果该变量与x是无关的 (即与“积分变量”无关的), 则可以朝外挪出去; 但如果该变量是与x相关的, 则就不能朝外挪.

第三部分 求不定积分的方法

3 凑微分法

求微分, 可以写成(变换成)下面三种形式:

	例如，求 $\ln x$ 的微分
$\underbrace{d(\text{原函数})}_{\text{求微分}} = \text{导函数} \, dx$	$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$ 从等号右边往左看， 就是 $d$ 外面的导函数(如本例的 $1/x$ )， 拿到 $d$ 里面，要变成原函数( $\ln x$ )的形式.
$\frac{d(\text{原函数})}{dx} = \text{导函数}$	$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(\text{原函数}) = \text{导函数}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

4 分部积分法：→ ∫ 前 d(后) = 前 · 后 - ∫ 后 d(前)

分部积分法 Integration by parts

因为：(前后)' = 前' · 后 + 前 · 后'  
即：前 · 后' = (前后)' - 前' · 后

两边积分，即：

$$\begin{aligned} \int (\text{前} \cdot \text{后}') dx &= \int [(\text{前后})' - \text{前}' \cdot \text{后}] dx \\ &= \int \underbrace{\left[ \underbrace{(\text{前后})'}_{\text{导函数}} \right]}_{\text{原函数，就 = 前后}} dx - \int [\text{前}' \cdot \text{后}] dx \\ &= \text{前后} - \int [\text{前}' \cdot \text{后}] dx \quad ① \\ \int \underbrace{\text{前} \cdot \text{后}'}_{= d(\text{后})} dx &= \text{前后} - \int \underbrace{\text{后} \cdot \text{前}'}_{= d(\text{前})} dx \\ \text{即：} \int \text{前} \, d(\text{后}) &= \text{前后} - \int \text{后} \, d(\text{前}) \quad ② \end{aligned}$$

上面 ①和 ②式，就是“分部积分法”公式

即，分部积分公式是：

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int (\text{前} \cdot \text{后}') dx = \text{前} \cdot \text{后} - \int [\text{前}' \cdot \text{后}] dx \\ &\rightarrow \int \text{前} \, d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后} \, d(\text{前}) \end{aligned}$$

别忘了关系是： $\int$  导函数的世界  $d(\text{原函数的世界})$

分部积分法的目的，将是将“不易直接求结果的积分形式”，转化为等价的“容易求出结果的积分形式”。

“分部积分”的要点是：谁做“前”，谁做“后”？ 即：(1) 谁放d的后面？ (2) 往d里面拿时，哪个的优先级最高？  
把前面的什么东西，朝d里面拿？ 优先顺序是： $e^x > \sin x > \cos x > x^n$

例

$$\int \underbrace{xe^x}_{\text{先做}} dx = \int \underbrace{x}_{\text{前}} \underbrace{d(e^x)}_{\text{后}} \leftarrow \text{一前一后两个函数, 就用分部积分法}$$
$$\int \text{前} d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后} d(\text{前})$$

本例就是:  $\int \underbrace{x}_{\text{前}} \underbrace{d(e^x)}_{\text{后}} = \underbrace{x}_{\text{前}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{后}} - \int \underbrace{e^x}_{\text{后}} d(\underbrace{x}_{\text{前}}) = xe^x - e^x + C$

例

$$\int x \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{先做}} \underbrace{d(x)}_{\text{原函数}} \leftarrow \text{把} \cos x \text{ 拿到} d \text{ 里面, 就变成 } d(\sin x)$$

其实倒过来想, 就是一个“求微分”的操作:  $d(\underbrace{\sin x}_{\text{原函数}}) = \underbrace{\cos x}_{\text{导函数}} dx$

$$= \int \underbrace{x}_{\text{前}} \underbrace{d(\sin x)}_{\text{后}} \leftarrow \text{根据分部积分法} \int \text{前} d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后} d(\text{前})$$
$$= x \sin x - \underbrace{\int \underbrace{\sin x}_{\text{导函数}} d(x)}_{= -\cos x + C} = x \sin x + \cos x + C$$

5 换元法

例

$$\int e^{-pt} dt \leftarrow \text{令 } u = -pt, (p \text{ 是常数})$$
$$\frac{d}{dt}(u) = (-pt)' = -p$$

即  $dt = \frac{du}{-p} = -\frac{1}{p} du$

$$= \int e^u \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) du$$
$$= -\frac{1}{p} \underbrace{\int e^u du}_{= e^u + C} \leftarrow \text{然后把} u \text{ 换回} t, \text{ 因为 } u = -pt$$
$$= -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} + C$$

上面的换元法, 策略其实就是把一个复杂的数(比如  $-pt$ ) 换成(打包成)一个单一的数 (比如 $u$ ), 然后把原来的 $dt$  也换成用 $u$  表示的 $du$ , 先来做 $u$ 的积分. 做出来后, 再把 $u$  换回(解包)成原来的复杂的数  $-pt$ .