目录

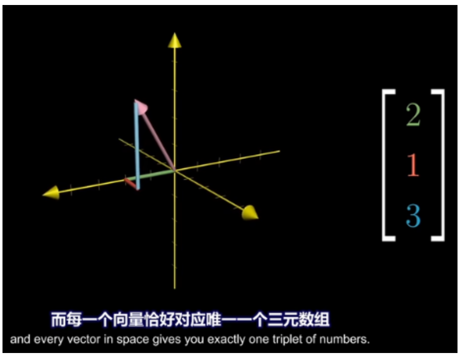
向量组的线性相关性

1　向量 vector 的几何意义

1.1　向量, 就是箭头线段的 “终点” 坐标

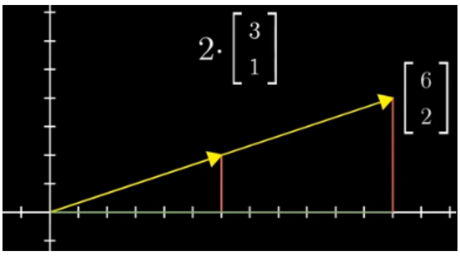
通常, 当你考虑 “一个” 向量时, 就把它看成是 “箭头”.
当你考虑 “多个” 向量时, 就把它看成是 “箭头终点” 的那个点 (point).

注意: 向量的值, 表示的是坐标轴的位置, 而不是该向量线段的长度 (即不是 ‘模” 的概念).



1.2　向量的 “数乘” : 系数 k 的作用, 是把向量伸缩 k 倍

$$2\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix}$$



$$text \quad : \quad k = 0, \text{ 或要么 } \alpha = 0\text{向量}$$

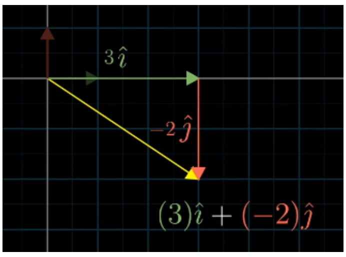
1.3　单位向量: 基 basis

The **basis** of a vector space /is a set of linearly independent vectors /that span the full space.

$$\left.\begin{aligned} \hat{\imath} &= 1 \\ \hat{\jmath} &= 1 \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{称为“单位向量”或“基”}$$

事实上, 每当我们描述一个向量时, 它都依赖于我们正在使用的“基”.

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} = 3\hat{\imath} + (-2)\hat{\jmath}$$

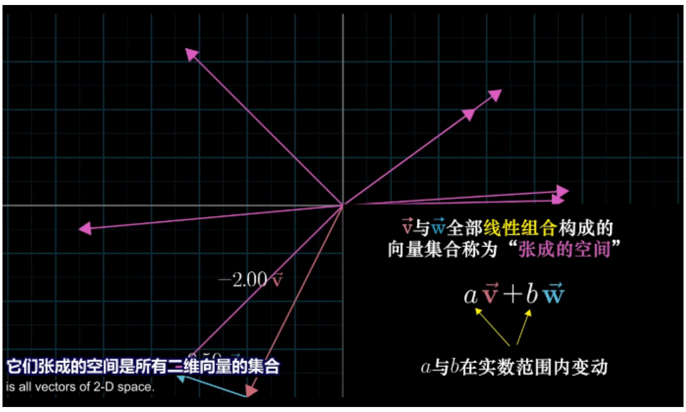


向量的终点坐标, 其实就是系数倍的“基向量”的线性组合.

1.4 张成 span

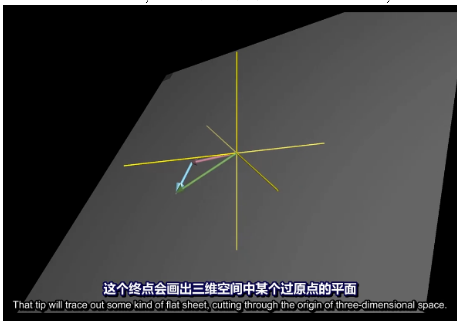
the span of $\vec{v}$ and $\vec{w}$ /is the set of all their linear combinations.
the set of all possible vectors /than you can reach /is called the span of those two vectors. ← 相当于“势力范围”, 就是张成.

两个斜率不同的向量 (a,b), 自由伸缩, 它们的和 (即 a+b=c), 即新向量 c 的终点, 能遍及二维平面上的任何点处.

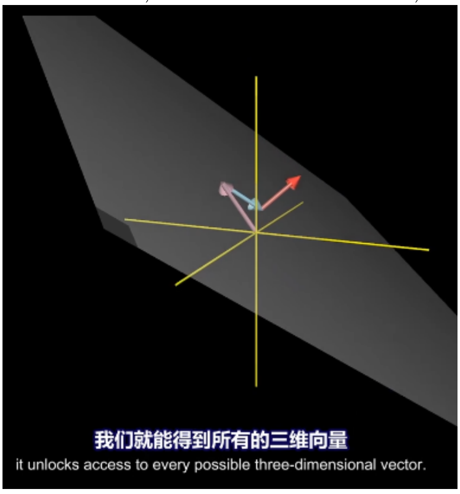


但如果两个向量都是“零向量”的话, 它们的系数倍的和, 也永远被束缚在原点 (0,0) 了. $k_1\vec{0} + k_2\vec{0} = 0$

三维空间中, 两个斜率同的向量, 能“张成”出“过原点”的一个平面.



三维空间中, 三个斜率不同的向量, 它们的和, 能张成出三维空间中所有的地方.



---

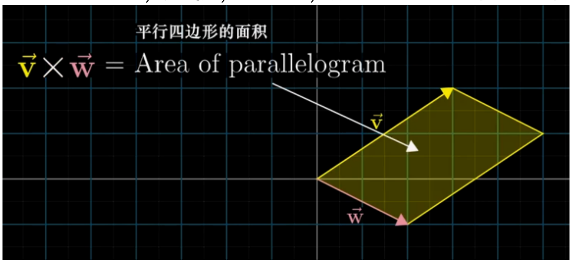
2 向量的叉积 (外积) : $\vec{v} \times \vec{w}$

向量的叉积 (外积) exterior product 或 cross product

2.1 叉积 (外积) 的几何意义: (1) 在二维空间中, 是由这两个向量围成的“平行四边形”的面积, 即是一个数值. (2) 在三维空间中, 是一个垂直于这个“平行四边形”平面的“新向量”.

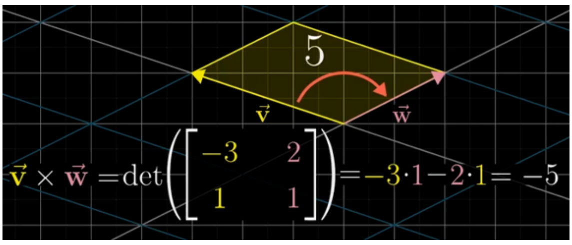
【在二维空间中】:

几何意义上, 叉积, $\vec{v} \times \vec{w}$, 就是由这两个向量围成的“平行四边形”的面积.

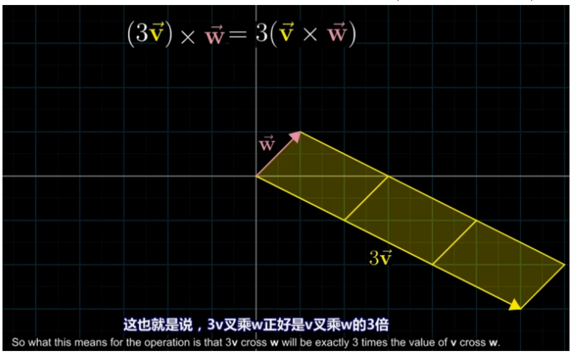


注意: 顺序会对“叉积”有影响: 如果 $\vec{v} \times \vec{w}$ 是正数, 则 $\vec{w} \times \vec{v}$ 就是负数. 即: 交换叉乘时的顺序, 值要变号.

之前说过, 行列式的值, 就是表示的是: 将基 $i \times j$ 的面积, 缩放多少倍.



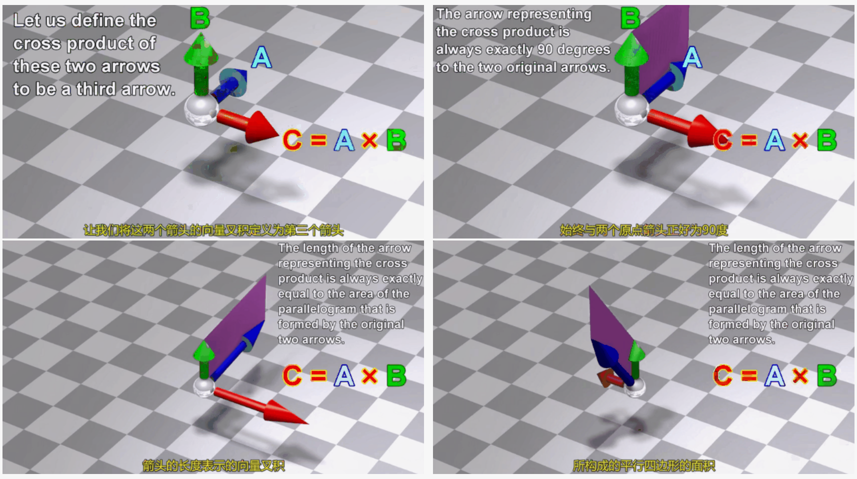
面积的概念, 也就证明了: $3(\vec{v} \times \vec{w}) = 3\vec{v} \times \vec{w}$
把平行四边形其中的任一一条边, 延长 3 倍, 变成 $3\vec{v}$ 或 $3\vec{w}$, 面积也就是 $= 3(\vec{v} \times \vec{w})$



【在三维空间中】:
其实, 真正的 "叉积", 是通过两个三维向量, 来生成一个新的三维向量. **注意: 在三维空间中, 叉积的结果不是一个数, 而是一个向量!**

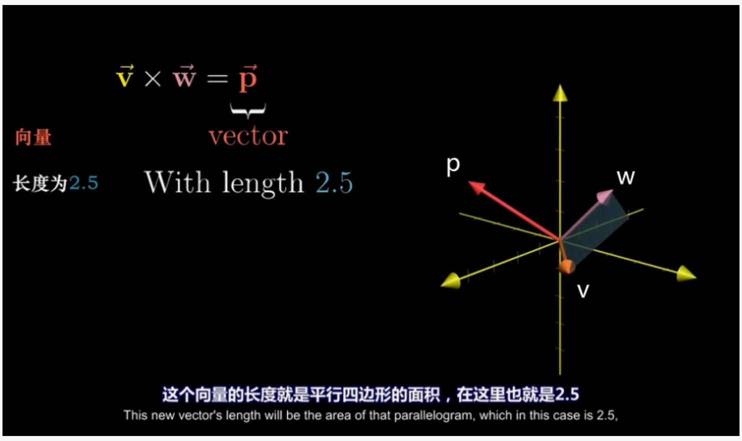
例

如下面的图中所示, A,B 两个箭头的向量的 "叉积", 就是第三个向量 C. 这个 C 向量, 始终与两个原点箭头 (即 A,B) 正好为 90 度. C 向量箭头的长度, 就表示 A,B 向量的叉积, 它总是完全等于 A,B 所构成的平行四边形的面积.



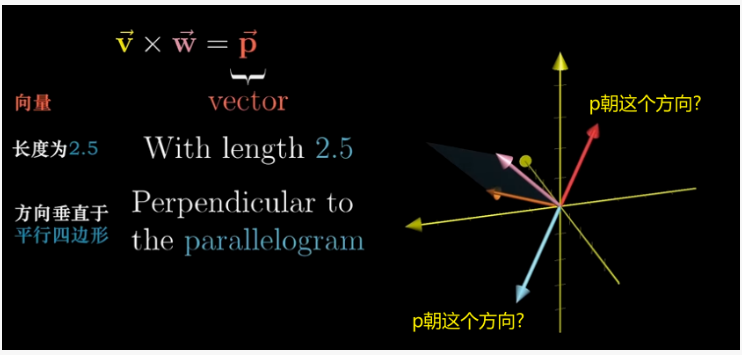
例

又如: 假设 $\vec{v} \times \vec{w} = 2.5$, 在三维空间中, 这两个向量构成一个平面 (平行四边形). 它们的 "叉积" 构成一个新向量 $\vec{p} = 2.5$, 它与 "平行四边形" 所在的面 "垂直".



即: **三维叉积, 得到一个三维矢量.**
$\vec{v} \times \vec{w}$ 得到新的向量 $\vec{p}$，新向量 $\vec{p}$ 的长度, 等于向 $\vec{v}$ 与向量 $\vec{w}$ 组成的平行四边形的面积，并且向量 $\vec{p}$, 与向量 $\vec{v}$ 和向量 $\vec{w}$ 所在平面垂直.
所以 "三维叉积" 很容易拿来算平面的 "法向量".

但垂直于一个平面的向量, 可以有正反两个方向, $\vec{p}$ 到底是朝哪个方向呢? 这就要用到" 右手螺旋法则".

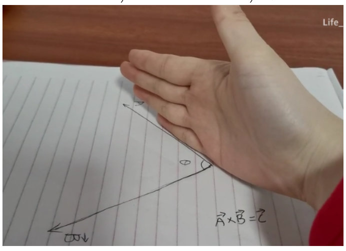


2.2 右手螺旋法则

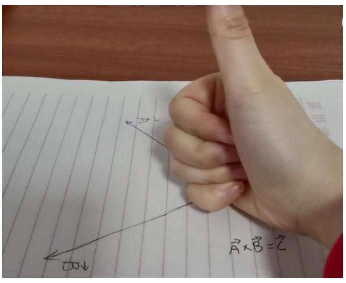
注意顺序: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, 和 $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$, $\leftarrow$ $\vec{c}$ 的方向朝向是不同的.

2.2.1 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

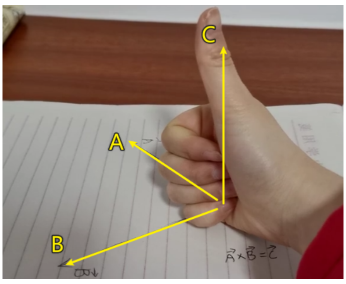
1. 用右手, 伸展手指, 朝向 $\vec{a}$

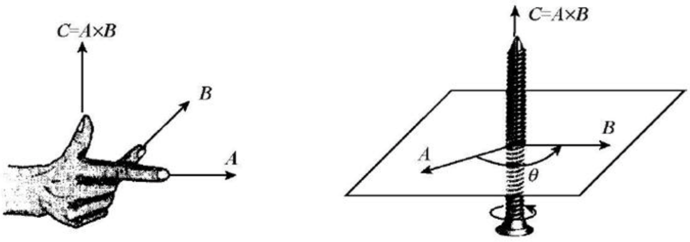


2. 然后, 握拳, 手指收回, 朝向 $\vec{b}$ 的方向.



3. 则, 大拇指朝向的方向, 就是 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ 中, $\vec{c}$ 的朝向.



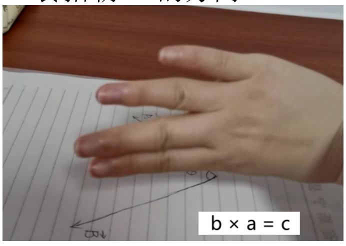


(a) 右手定则 (b) 右手螺旋法则

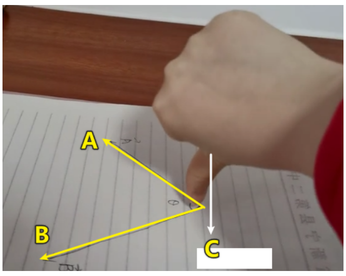
图 1.1.8 右手定则和右手螺旋法则

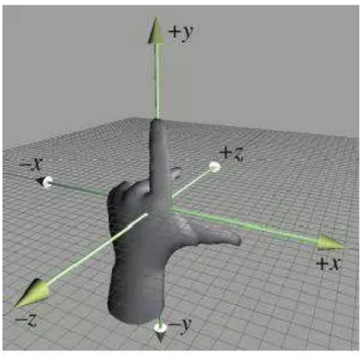
2.2.2 $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$

1. 食指朝 $\vec{b}$ 的方向.

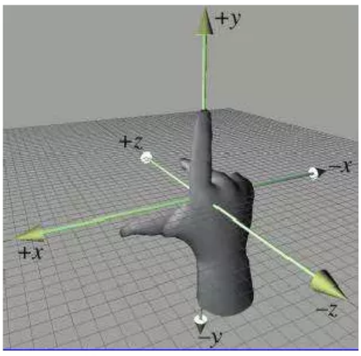


2. 握拳, 食指等收回. 此时大拇指的方向, 就是 $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$ 中 $\vec{c}$ 的朝向.



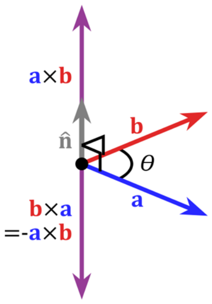


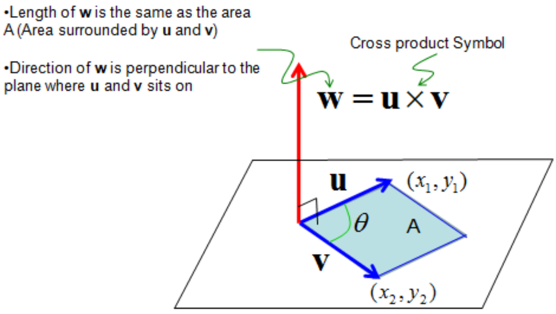
左手坐标系



右手坐标系

所以, 在 3D 图像学中，叉乘的概念非常有用，可以通过两个向量的 “叉乘”，生成第三个垂直于 a，b 的 “法向量”，从而构建 X、Y、Z 坐标系.



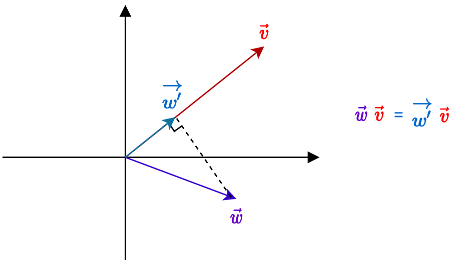


3 向量的点积 (内积) : $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots$

3.1 点积的几何意义: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}'$ ← 其中,$\vec{w}'$ 是 $\vec{w}$ 在 $\vec{v}$ 上的投影长度.

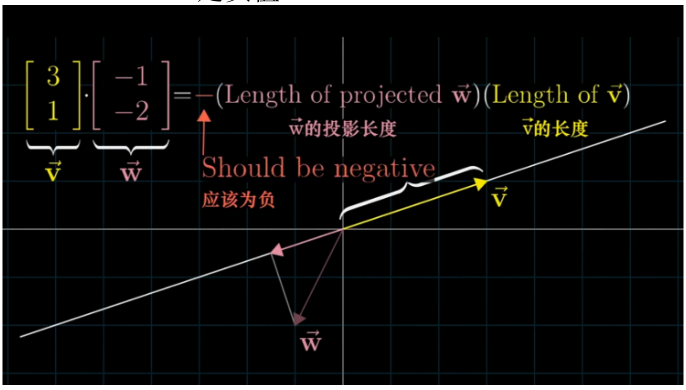
→ 如果 $\vec{w}'$ 是 $\vec{w}$ 在 $\vec{v}$ 上的投影长度.

则: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}'$

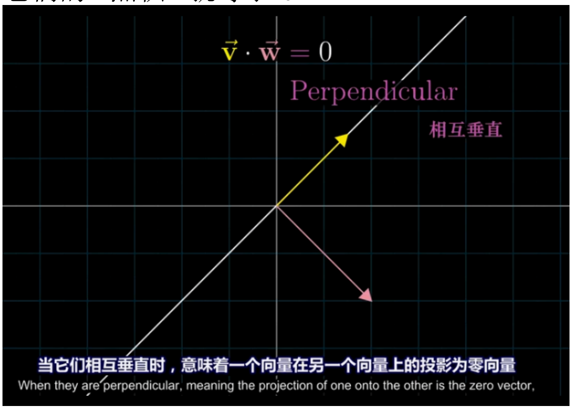


→ 如果 $\vec{w}$ 的投影, 是在 $\vec{v}$ 的反方向延长线上, 则此时:

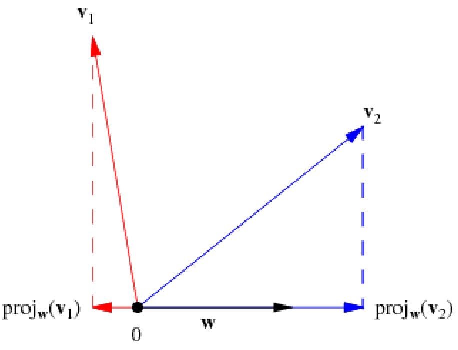
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}' =$ 是负值



→ 如果这两个向量, 本身就互相垂直, 则一个向量在另一个向量上的投影长度, 就为 0. 这时它们的 “点积” 就等于 0.



所以，注意："点积"(inner product) 运算的结果，是一个 "数"(投影的长度，就是一个数呀). 这和向量的其他操作是有区别的. 比如:
→ 两个向量做 "加法", 结果依然是个 "向量".
→ 向量的 "数乘", 结果也依然是个 "向量".



若两个向量 $\vec{x}, \vec{y}$ 间的夹角 $< 90°$	$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0$
若 $\vec{x}, \vec{y}$ 间的夹角 $> 90°$	$\vec{x} \cdot \vec{y} < 0$, 即是个负值.
若 $\vec{x}, \vec{y}$ 间的夹角 $= 90°$	$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

3.2 点积的做法公式 1 : $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

两个向量的" 点积" (inner product 或 dot product 或 scalar product) : $\vec{x} \cdot \vec{y}$, 也有写作 <x,y> 的形式.
点积的做法公式就是:

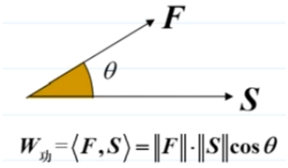
$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}, \; y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix},$$

$$\text{则} : \boxed{x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}$$

即: $x \cdot y = x^T \cdot y \leftarrow$ 即把 $\vec{x}$ 横过来, 变成一行, 再和 $\vec{y}$ 的一列相乘. 规则和矩阵的乘法完全一样.
其实: $x \cdot y = x^T \cdot y = y^T \cdot x$

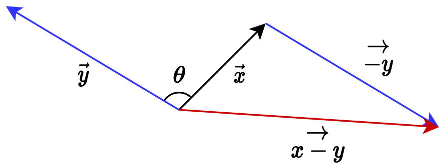
3.3 点积的做法公式 2: $x \cdot y =$ x 的模 $\cdot$ y 的模 $\cdot \, cos\theta$

两个向量的点积 = 每个向量 "模长" 的乘积, 再乘以它们的夹角的 cos 值.



根据" 余弦定理", 有: $a^2 = b^2 + c^2 - 2(bc \cdot \cos A)$
或: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

那么对于由两个向量组成的三角形, 如下图, 就有:



证明过程:

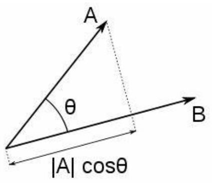
余弦定理:$|x-y|^2 = x^2 + y^2 - 2|x||y|\cos\theta$

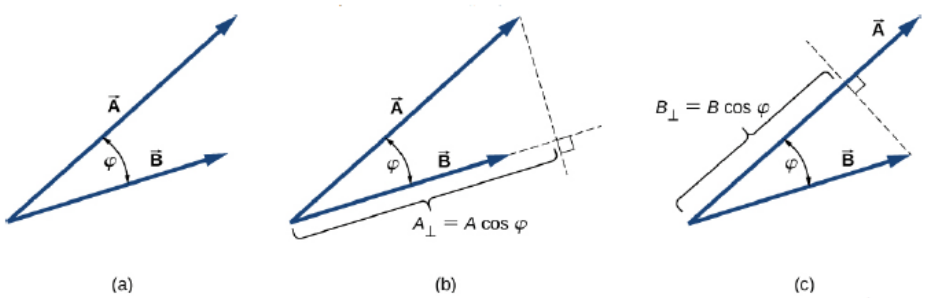
经过变换…, 就有: $\boxed{x \cdot y = |x||y|\cos\theta}$

若向量x和y 都不是零向量的话, 则有:

$\boxed{\theta = \arccos\frac{x \cdot y}{|x||y|}}$ ←这就是 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的夹角公式.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$





The scalar product of two vectors. (a) The angle between the two vectors. (b) The orthogonal projection $A_\perp$ of vector $\vec{A}$ onto the direction of vector $\vec{B}$. (c) The orthogonal projection $B_\perp$ of vector $\vec{B}$ onto the direction of vector $\vec{A}$.

根据这个公式, 就可以计算向量 a 和向量 b 之间的夹角。从而就可以判断这两个向量是否是同一方向，是否正交 (也就是垂直), 等方向关系. 具体对应关系为:

---

4 线性组合 linear combination

4.1 线性组合: $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$

【线性组合】:

有 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$, 它们都是 n 维向量. 若存在 $k_1, k_2, ..., k_n$ 这些系数 (即权重), 能使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$, 则就称 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ 的一个 "线性组合", 或称 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ 来 "线性表示".

那么这组系数 k, 可不可以全取 0? 可以. 这样的话, $\beta = 0$ 了.

例

有$\beta=\begin{vmatrix}-3\\2\\-4\end{vmatrix}$，问$\beta$能否用 $\alpha_1=\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$，$\alpha_2=\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix}$，$\alpha_3=\begin{vmatrix}-1\\1\\-2\end{vmatrix}$ 来线性表示？

解：设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

即 $\begin{vmatrix}-3\\2\\-4\end{vmatrix}=k_1\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}+k_2\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix}+k_3\begin{vmatrix}-1\\1\\-2\end{vmatrix}$

$$\begin{cases}k_1+2k_2-k_3=-3\\ \quad k_2+k_3=2\\ k_1 \quad -2k_3=-4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k_1=2\\ k_2=-1\\ k_3=3\end{cases}$$

所以 $\beta=2\alpha_1+-\alpha_2+3\alpha_3$

4.2 线性组合的性质

4.2.1 性质：0 向量，可由任意向量组来表示．即：0向量 $=\ 0\alpha_1+0\alpha_2+...+0\alpha_n$

4.2.2 性质：向量组 A 中，任取出其中的一个向量 $_i$ 出来，它可以由这个向量组 A 来表示．如：$\alpha_3=0\alpha_1+0\alpha_2+1\alpha_3...+0\alpha_n$

4.2.3 任意一个向量组，都可由这些个向量 (即 "n 维单位向量") 来表示：$\varepsilon_1=(1,0,...,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,...,0)$，... ，$\varepsilon_n=(0,0,...,1)$

例如: $\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

---

5 线性相关 and 线性无关

【线性相关】：

对于 n 个 m 维的向量 $\vec{v_1},\vec{v_2},...\vec{v_n}$，若存在一组 k (系数，倍数) 不全为 0，使得 $k_1\vec{v_1}+k_2\vec{v_2}+...+k_n\vec{v_n}=0$，则称 $\vec{v_1},\vec{v_2},...\vec{v_n}$ 是 "线性相关" 的.

例

例如：下面这三个向量，是否线性相关?

$$\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}\tag{1}$$

那么就看下面这个式子，是否能存在非零的系数 (只要有一个 k 是不为零的，就满足了我们的条件)

$$k_1\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}+k_2\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}+k_3\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}=0\tag{2}$$

那么显然, 当 k_1 取 2, k_2 取 3, k_3 取 1 时, 该式子能成立. 即, 的确存在一组非零的 k. 这就说明, 这三个向量, 是 "线性相关" 的.

若只能是 k 全为 0 时, 该等式才成立, 那么这些向量 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ...\vec{v_n}$ 就是 "线性无关" 的 (linearly independent).

"线性无关" 就表示, 这组向量中的任何一个, 都无法表示成其他向量的 "线性组合". 即, 它们中每一个向量, 都是 "独当一面" 的, 无法被其他向量所替代.

第一部分　向量组, 及其线性组合

第二部分　向量组的线性相关性

第三部分　向量组的秩

第四部分　线性方程组的解的结构

第五部分　向量空间