目录

文件名

1 事件的独立性

1.1 (1)独立事件, (2)互斥(互不相容)事件, (3)对立事件的区别

独立	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
互斥, 矛盾对立	$P(A \cap B) = 0$, 并且 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1.1 独立事件 (一方对另一方的发生概率, 毫无影响)：$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

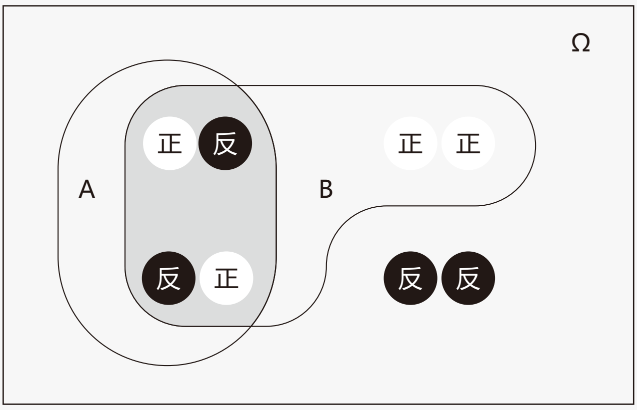
(1)独立:
- **是指一个事件(A)的发生概率, 不受另一个事件(B)发生与否的影响.** 比如, 你抛两个骰子, 两个骰子的结果, 彼此互不影响. 它们可以点数不同, 也可以点数相同.
- 即: $P(A|B) = P(A)$. $\leftarrow$ 意思就是: 即使B发生的条件下, 来看A发生的情况, 其发生概率和A单独自己发生, 没有任何区别. 换言之, 有没有B先发生, 对A的发生概率毫无影响.
- 若 A,B 是互相独立事件, 则:$P(AB) = P(A) \cdot P(B) > 0$
- 反之, **独立事件判断标准就是：若 $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, 则事件A和事件B, 为相互独立事件.**

例

两个事件相互独立性判断的步骤：
(1) 求出样本空间 Ω 的样本点数
(2) 分别求出事件A、B、$A \cap B$的样本点数
(3) 分别求出P(A)、P(B)、P(AB)
(4) 验证：P(A)×P(B)是否等于P(AB)
(5) 如相等则为“独立性”事件, 反之为“非独立性”事件.

换言之：只要满足P(A)×P(B)=P(AB)，则AB 互为独立事件!

例如: 抛两枚硬币:
- 事件A: 抛出一正一反
- 事件B: 抛出至少一个正面
问：AB是否为互为独立事件？



第1步：求样本空间样本点数， Ω {(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)} = 4个样本点

第2步：求A、B、$A \cap B$的样本点数 :
- A抛出：一正一反，即A { (正,反),(反,正) } =2个样本点数
- B抛出：至少一个正面，即B { (正,反),(反,正),(正,正) } =3个样本点数
- $A \cap B$：一正一反，即AB { (正,反),(反,正) } =2个样本点数

第3步：求出P(A)、P(B)、P(AB):
- P(A)=2/4
- P(B)=3/4
- P(AB)=2/4

第4步：看 P(A)×P(B) 是否等于P(AB)?
P(A)×P(B)=(2/4)×(3/4)=3/8，不等于P(AB)=2/4
所以, 事件A与事件B不是相互独立事件.

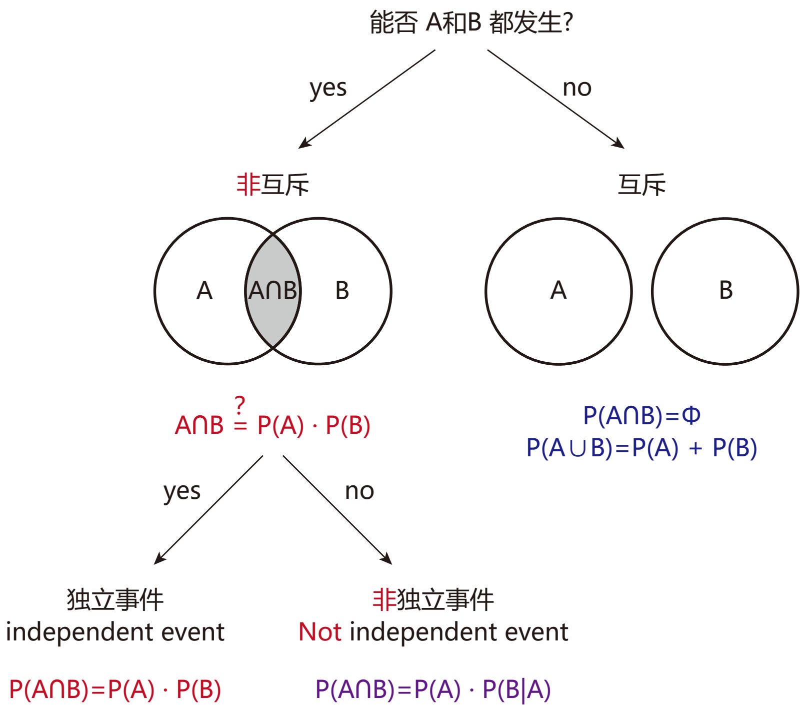
- 多个事件彼此独立 : 若 A,B,C 互相独立, 则有:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(BC) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(AC) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

1.1.2 互斥事件 (曹操,刘备,是“互拆”事件关系. 但它们的并集不构成天下的Ω全集, 还有其他竞争诸侯存在) : $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

(2)互斥(互不相容), 彼此矛盾对立:
- **它指的是：两个事件不可能同时发生** (至多只有一个发生. 它们可能都不发生, 但不会同时发生). 或两个结果不可能同时出现.
- 是指两个事件没有交集.
- 从集合的角度看, 几个事件彼此“互斥”, 就是指各个事件所含的基本事件组成的集合, 彼此互不相交.
- **即 $AB = \Phi$ 空集. 有你没我, 有我没你.** AB同时发生的可能性为0.
- 比如，一个人的性别不是男就是女, 不可能同时既是男又是女.

- 于是可以得到：若AB为互斥事件，A和B发生的概率 P($A \cup B$)=P(A)+P(B)
- 反过来, 就是: 若要证明事件A和事件B为互斥事件，则只需证明 P(A)+P(B)=P(A+B)



“独立”与“互斥”不会同时成立.

注意区别:
→ 事件A的“条件概率” $P(A|B)$:
事件B的发生, 改变了事件A发生的概率, 也即事件B对事件A有某种“影响”.

→ 事件A的“无前提条件的概率” $P(A)$: 这里, 事件B的发生, 对事件A的发生毫无影响，即$P(A|B) = P(A)$.
由此又可推出 $P(B|A) = P(B)$, 即事件A发生对B也无影响. 可见独立性是相互的.

例

已知: $P(A \cup B) = 0.9, P(A) = 0.4$, 问:

- 当A, B 互斥时, P(B)=?
A, B互斥, 即说明 AB的交集=Φ, 即 P(AB)=0.
因为 $\underbrace{P(A+B)}_{=0.9} = \underbrace{P(A)}_{=0.4} + P(B) - \underbrace{P(AB)}_{=0}$
所以 $P(B) = 0.9 - 0.4 - 0 = 0.5$

- 当A, B 独立时, P(B)=?
两个事件彼此独立, 则有公式: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
但注意: 这里的 P(AB) 不能直接搬用上面的值0. 因为这里的A,B是独立事件, 而非上

面的互斥事件.

$$\underbrace{P(A+B)}_{=0.9} = \underbrace{P(A)}_{=0.4} + P(B) - \underbrace{P(AB)}_{=P(A)\cdot P(B)}$$

$$\text{即: } 0.9 = 0.4 + P(B) - 0.4 \cdot P(B)$$

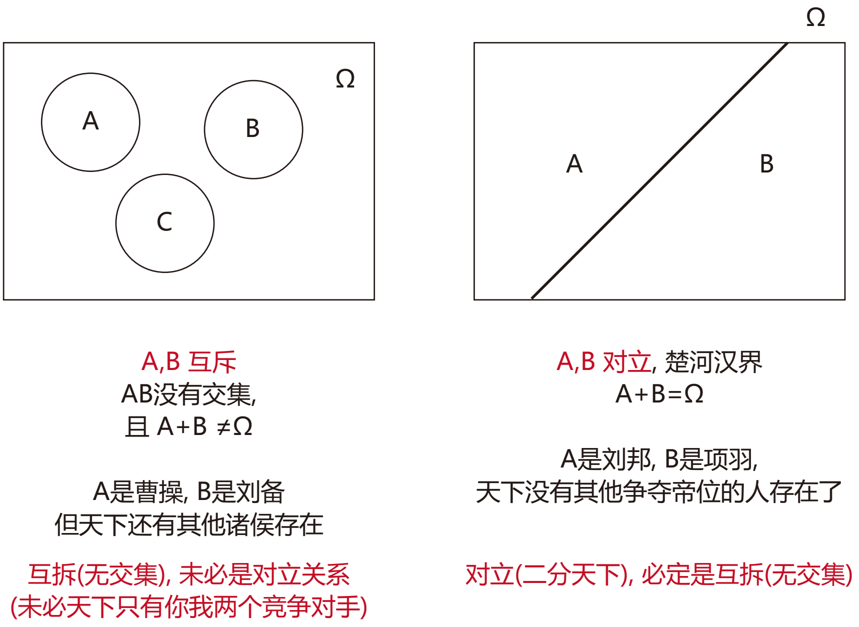
$$0.9 - 0.4 = (1-0.4) \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6} = 0.833333$$

1.1.3 对立事件 (平分天下的刘邦,项羽, 是“对立”事件关系)：P(A+B)=P(A)+P(B)=1=Ω

- 通俗的说：所有可能的结果非黑即白, 并且他们的并集能组成全集 Ω, 就叫对立事件!
如, 一个婴儿出生，要么是男孩，要么是女孩.
争夺天下, 要么成王, 要么败寇.
一道选择题，只有2个选项A和B，要么选A，要么选B.

- 若AB为对立事件，且A+B=Ω，则AB互为对立事件.
反过来说, 即: 若AB为对立事件，A和B发生的概率 P(A+B)=P(A)+P(B)=1
还可以得到：若AB为对立事件，P(A)=1-P(B)



- 对立事件，必定是互斥事件，但互斥事件，未必是对立事件.
所以可以说：互斥事件，是对立事件的前提条件(必要条件)

1.2 A,B 是两个相互独立的事件, 则有: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

即, 事件相互独立: 就是指一个事件发生，不会影响另一个事件的发生或不发生. 两个事件没有相关性，相关系数为0.

从数学上定义, 就是$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
即: 两个相互独立的事件A和B 都发生的概率, 等于每个事件发生的概率的积. (即等于“分步骤法”.)

另外: “Φ 和 Ω” 与“任意事件A” 都独立.

例

甲乙丙三人投篮(显然这三个人的命中率是独立事件, 彼此互不影响), 命中率分别是:
- 甲投中(A事件) : P(A)=0.7. 则甲没投中的概率就是 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.3$
- 乙投中(B事件) : P(B)=0.8. 乙没投中就是 $P(\overline{B}) = 0.2$
- 丙投中(C事件) : P(C)=0.75. 丙没投中就是 $P(\overline{C}) = 0.25$

问:
→ 他们各投一次, 恰有一人投中的概率:

$$
\begin{aligned}
&= P\left(A\overline{BC} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{AB}C\right) \\
&= P\left(A\overline{BC}\right) + P\left(\overline{A}B\overline{C}\right) + P\left(\overline{AB}C\right) \\
&\text{¸ 因为}ABC\text{是独立事件,所以它们乘积的概率,就等于各自概率的乘积} \\
&= \underbrace{P(A) \cdot P\left(\overline{B}\right) \cdot P\left(\overline{C}\right)} + \underbrace{P\left(\overline{A}\right) \cdot P(B) \cdot P\left(\overline{C}\right)} + \underbrace{P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) \cdot P(C)}
\end{aligned}
$$

→ 三人全部投中的概率: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

→ 至少有一人投中的概率 (即 ¿= 1人, 就是把“0人投中”排除出去后,剩下的全部) :
$= 1 - \underbrace{P(\overline{ABC})}_{\text{所有人全没投中}} = 1 - \underbrace{P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) \cdot P\left(\overline{C}\right)}_{ABC\text{是独立事件,所以它们乘积后的概率,就等于各自概率的乘积}}$

例

破译某密码, 如果仅靠一个人去破译, 成功概率是 0.6 (即60%).
问: 如果想将成功率提高到99%, 至少需要多少人来一起破译?

显然, 每个人的破译成功率, 彼此间毫无影响, 是“独立事件”关系的.
我们先设:
- A_i : 表示是第i个人破译出了密码.
- B : 表示破译成功. 即 $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ← 也就是说 : 只要一堆A里面任何一个人成功了, 就相当于整个团队完成了任务. (这里就用了并集).

我们倒过来想: 成功概率, 就等于1减去“大家都没成功的概率”. 即:

$$P(B) = 1 - \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)}_{\text{连乘后的概率}} \text{ ¸ 1减去每一个人都失败了,即失败交集的概率}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) \text{ ¸ 连乘后的概率,就等于概率后的乘积}$$

$$= 1 - 0.4^n \text{ ¸ 每一个人失败的概率} = 1 - \text{成功率}0.6 = 0.4\text{. 然后一共有}n\text{个人在做破解工作.}$$

上面, 0.4^n 就是 n个人都失败的概率.

即我们要让：

$$\begin{aligned} &P(B) \geq 0.99 \\ &1-0.4^n \geq 0.99 \\ &n \approx 5.026 \end{aligned}$$

即, 至少需要6个人才行.

1.3 若A,B是互相独立的事件, 则有: (1) A与$\overline{B}$ 独立; (2) $\overline{A}$ 与B独立; (3) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立

既然A,B 是相互独立的事件了, 彼此发生或不发生, 对另一方毫无影响. 所以, 我上不上岸 (A 或 $\overline{A}$), 和你结不结婚(B 或 $\overline{B}$)毫无影响.

1.4 若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$, 则 A与"任意事件"都互相独立.

---

2 伯努利模型 bernoulli model

- 独立试验序列：
在相同的试验条件下，进行一系列随机试验 $E_1, E_2, ...E_n$, (每次做的实验, 可以是不相同的), 观察某事件A发生与否.若每次试验结果相互独立, 则这样的一系列试验称为"独立试验序列".

- n重独立试验：
把一个试验, 重复做n次. 即: E, E, ... E, 记作: E^n

2.1 伯努利试验：其试验结果只有两种: 成功, 失败

伯努利试验：**其试验结果只有两种.** 即: $\Omega=\{A, \overline{A}\}$

属于"伯努利试验"的例子有:
- 掷硬币, 结果只有"正面"和"反面"两种.
- 射击, 结果只有"击中"和"没击中"两种.
- 检验产品, 结果只有"合格","次品" 两种.

不属于"伯努利试验"的例子是：掷骰子, 有6种结果.

如果在一个试验中, 我们只关心某个事件A 发生与否, 那么就称这个试验为"伯努利试验". 此时, 试验的结果可以看成只有两种: A发生, 或 A不发生. 相应的数学模型, 就称为"伯努利概型".

2.2 n重伯努利试验：事件A恰好发生k次的概率,就是=

n重伯努利试验：就是把"伯努利试验"重复做n次, 每次都是独立的. 并且试验结果只有两种. 比如, 抛硬币, 是一个伯努利试验 (它只有正面, 反面, 这两种结果). 我们做100次这个试验, 就

是做了 100重伯努利试验.

设在单次试验中, 事件A发生的概率为P, 将此试验重复独立地进行n次, 则事件A恰好发生k次的概率是多少? 通常记这个概率为: $P_n(k), \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$