目录

文件名

第一部分 交集 ∩ , 与并集 ∪

1 表“或”, 用加法(+); 表“同时”, 用乘法(×)

A, B, C 是试验E 的随机事件. 则表示法是:
- A发生 : A

下面, 加法即表示“或” :
- A, B, C 恰有一个发生 : $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$
- A, B, C 至少一个发生(即 ¿=1) : A+B+C 或 $A{\cup}B{\cup}C$ ← 即3选1, 还有两个发不发生, 不用管, 随意, 都行.
- A, B, C 至多一个发生(即 ¡=1) : $\underbrace{A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C}_{3选1}+\underbrace{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}_{3选0}$
- 恰有两个发生: $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$
- 至少两个发生(即,¿=2) : $\underbrace{AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC}_{3选2}+\underbrace{ABC}_{3选3}+\underbrace{AB+BC+AC}_{3选2,\text{ 还有一个发不发生不用管,随意}}$

下面, 乘法即表示“同时” :
- 只有A发生 : $A\overline{B}\overline{C}$
- A, B, C 同时发生 : ABC

例

一次射击试验, 整个流程是打三枪, 用 $A_i,(i=1,2,3)$ 来表示“在第i次时击中了目标”.
记住: 加法(+) 代表“或,并 ∪”; 乘法代表“交∩”.
- A_1+A_2 : 表示第一次击中了, 或第二次击中了. 即前两次至少击中一次.
- $\overline{A_2}$: 表示第二次没击中.
- $A_1+A_2+A_3$: 表示仅第一次击中, 或仅第二次击中, 或仅第三次击中.
- $A_1A_2A_3$: 表示三次全中.
- $A_2\overline{A_3}=A_2-A_3$: 表示第二次击中, 并且第三次失败.
- $\overline{A_1}\cap\overline{A_3}=\overline{A_1+A_3}$: 表示第一次没中, 并且第三次也没中.
- $\overline{A_1}+\overline{A_3}$: 表示第一次没中, 或第三次没中.

2 公理化

2.1 $P(A)+P(\overline{A})=1$

2.2 对于“完备事件组”中的所有事件来说: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=P(\Omega)=1$

完备事件组 collectively exhaustive events 就是: 如果事件 B1, B2, B3, ... Bn 满足:
1. 它们两两互不相容(即两两的交集=空集),

2. 其“和”为全集Ω.
换言之, 若n个事件两两互斥, 且这n个事件的“并”是Ω， 则称这n个事件为“完备事件组”.

全概率公式

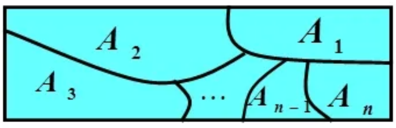
一、样本空间的划分（完备事件组）

定义 设 Ω 为试验 E的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$为 E 的一组事件，若

(i) $A_iA_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω的一个划分．



例

有20件衣服， 质量分3等， 其中一等的6件， 二等的10件， 三等的4件.
问：“任取3件， 至少2件是同质量”的概率?

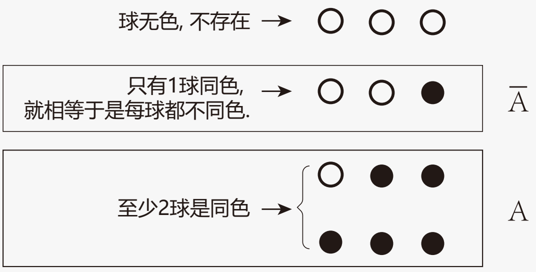
这个问题其实可转化为有色球问题：

20球, 三色, 每色数量分别是6, 10, 4球. 问3取2球， 至少2球是同色的概率.

即 $P(\underbrace{同色 \geq 2球}_{事件A}) = 1 - P(\underbrace{3球都不同色}_{事件\bar{A}})$

$$= 1 - \frac{\overbrace{C_6^1}^{色1中的共6球取1个.}\ \overbrace{C_{10}^1}^{色2中的共10球取1个.}\ \overbrace{C_4^1}^{色3中的共4球取1个}}{\underbrace{C_{20}^3}_{总20球取3}}$$

$$= \frac{15}{19} = 0.789474$$



例

n个人中， 至少2人生日相同的概率是?

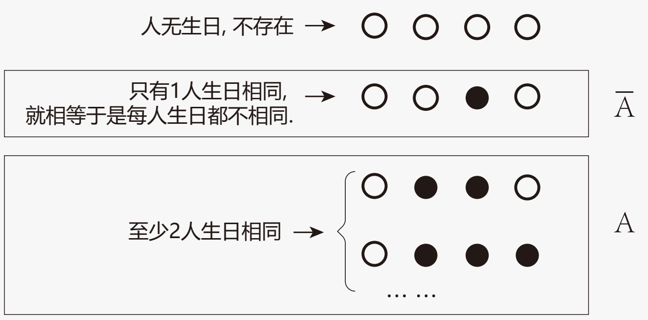
$P(\underbrace{至少2人生日相同}_{事件A}) = 1 - P\ (\underbrace{只有1人生日相同}_{即n个人每人生日都不相同. 即事件\bar{A}})$

$$= 1 - \frac{n个人生日都不相同}{n个人，随便选生日，无所谓充不重复}$$

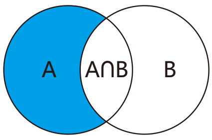
$$= 1 - \frac{\overbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365-n+1}^1}^{共n人的}}{\underbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365}^1}_{共n人的}}$$

比如， 若总人数n = 55人， 则:

$$P(A) = 1 - \frac{\overbrace{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 54)}^{共55个数}}{(C_{365}^1)^{55}} = 0.99$$



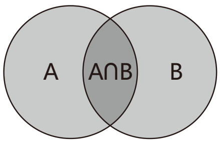
2.3 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$



P(A-B) = P(A) - P(AB)

2.4 若A包含着B, 则有: $P(A-B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(A) >= P(B)$

2.5 加法公式: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



P(A+B) = P(A) +P(B)- 它们的交集部分 P(AB)

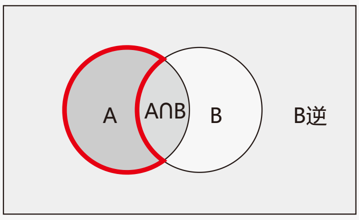
例

A事件的概率是0.4, 即 P(A)=0.4;
P(B)=0.3;
且P(A+B)=0.6, ← 说明A与B有交集部分存在. 否则, 如果A与B是不相容的话, 它们和的概率, 应该是 0.4+0.3=0.7.
所以它们的交集 P(AB) 就是=0.1 :

$$\underbrace{P(A+B)}_{0.6} = \underbrace{P(A)}_{0.4} - \underbrace{P(B)}_{0.3} - \underbrace{P(AB)}_{=0.1}$$

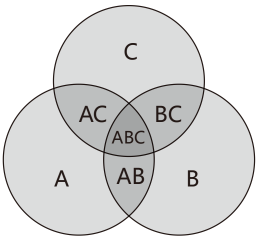
求$P\left(A\overline{B}\right)$, 即求$A \cap B$逆 的概率:

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A-B) = \underbrace{P(A)}_{=0.4} - \underbrace{P(AB)}_{=0.1} = 0.3$$



A∩B逆: 就是红色面积的那块

2.6 加法公式：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$



P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)
−P(AB)−P(AC)−P(BC)
+P(ABC)

说明:

$$P(A+B+C)$$
$$=\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分,被加了3次}}\underbrace{-P(AB)-P(AC)-P(BC)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分,又减了3次}}+\underbrace{P(ABC)}_{\text{所以最后,我们还要把镂空的}ABC\text{交集部分,加上一份上去}}$$

例

已知 $\begin{cases} P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4} \\ P(AB)=0 \\ P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16} \end{cases}$，求 $\begin{cases} 1.\ A,B,C \text{ 至少一个发生的概率} \\ 2.\ A,B,C \text{ 都不发生的概率} \end{cases}$

我们先来算 $P(ABC)$，因为下面会用到.

因为 $ABC\subset AB$，所以 $P(ABC)\le\underbrace{P(AB)}_{=0}$，因此 $P(ABC)=0$

→ 至少一个发生，就是用“并∪”，用加法:

所以 $P(A+B+C)=\underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{P(C)}_{=\frac{1}{4}}-\underbrace{P(AB)}_{=0}-\underbrace{P(AC)}_{=\frac{1}{16}}-\underbrace{P(BC)}_{=\frac{1}{16}}+\underbrace{P(ABC)}_{=0}$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}=0.625$$

→ 都不发生，即 $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=1-\underbrace{P(A+B+C)}_{\text{任意一个发生}}=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}=0.375$

例

有两台机床，$\begin{cases} \text{第}1\text{台：不需要照看的概率是}0.9\text{，则需要照看它的概率就是}0.1 \\ \text{第}2\text{台：不需要照看的概率是}0.8\text{，则需要照看它的概率就是}0.2 \\ \text{两台都需要照看的概率，是}0.02 \end{cases}$

问：至少1台需要照看的概率是?

思路1：$P(\text{至少1台要照看})=1-P(\text{都不需要照看})$
$$=1-(0.9\cdot 0.8)=0.28$$

思路2：至少1台需要照看，就是要照看1台或2台呗，“或”就是用加法，并集

$$=P(A_1+A_2)=\underbrace{P(A_1)}_{=0.1}+\underbrace{P(A_2)}_{=0.2}-\underbrace{P(A_1A_2)}_{=0.02}=0.28$$