目录

1 矩阵 3

2 矩阵的运算 4

2.1 矩阵的加法, 减法 4
2.2 加法的性质 4
2.3 矩阵的数乘 4
2.4 数乘的性质 4
2.5 矩阵的乘法 4
2.5.1 (1) AB=0 , 是推不出 A=0 或 B=0 的. (2) AB=AC, 且 $A =\neq 0$, 是推不出 B=C 的. 6
2.5.2 一个矩阵, 与 “零矩阵” 相乘, 结果就是一个 “新形状” 的零矩阵 6
2.5.3 一个矩阵 X, 与 “单位阵 E” 相乘 (无论左乘还是右乘), 结果还是矩阵 X 本身. 即: AE=A, EB=B 6
2.6 矩阵乘法的运算规律 6
2.6.1 结合律: (AB)C = A(BC) 6
2.6.2 分配律: (1) (A+B)C = AC+BC, (2) C(A+B) = CA+CB 6
2.6.3 k(AB) = (kA)B = A(kB) 6
2.6.4 矩阵乘法的例题 7
2.7 矩阵, 幂的运算 7
2.7.1 $A^k = A \cdot A \cdot ...A \leftarrow$等号右边共$k$个$A$ 7
2.7.2 $A^0 = E$ 7
2.7.3 $A^{k_1}A^{k_1} = A^{k_1+k_2}$ 7
2.7.4 $\left(A^{k_1}\right)^{k_2} = A^{k_1k_2}$ 7
2.7.5 一般, $(AB)^k \neq A^kB^k$ 7
2.7.6 矩阵的幂运算例题 8

3 矩阵的转置 8

3.1 性质: $(A^T)^T = A$ 9
3.2 性质: $(A+B)^T = A^T + B^T$ 9
3.3 性质: $(kA)^T = kA^T$ 9
3.4 ★ 性质: $(AB)^T = B^TA^T \leftarrow$ 注意 AB 顺序要颠倒 9
3.5 性质: $(A_1A_2A_3A_4)^T = A_4^TA_3^TA_2^TA_1^T \leftarrow$ 顺序颠倒 9

4 特殊矩阵 (都是方阵) 9

4.1 数量矩阵 9
4.2 对角型矩阵 9
4.2.1 diag × B : 对角阵元素在哪一行上, 就乘到 B 的相同行上去 9
4.2.2 B × diag : 对角阵元素在哪一列上, 就乘到 B 的相同列上去 10
4.3 上三角形矩阵 10
4.4 下三角形矩阵 10
4.5 对称矩阵: 有 $A^T = A \leftarrow$ 即对自己做转置, 依然等于自己. 10
4.5.1 性质: $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ 11
4.5.2 性质: $(A-B)^T = A^T - B^T = A - B$ 11
4.5.3 性质: $(kA)^T = k \cdot A^T = kA$ 11
4.5.4 性质: $(AB)^T = B^TA^T = BA \neq AB$ 11
4.5.5 定理: 两个对称矩阵 A,B 相乘后, 新矩阵 AB 一般就不再是对称的了. 除非 A,B 是可交换矩阵, 型矩阵 AB 才是对称的. 11
4.6 反对称矩阵: 有 $A^T = -A$ 11

5 方阵的行列式 12
5.1 “方阵的行列式” 的性质 12
5.1.1 性质: $|A^T| = |A|$ 12
5.1.2 ★ 性质: $|kA| = k^n|A|$ 12
5.1.3 性质: $|AB| = |A| \cdot |B| \leftarrow$ A,B 是同阶方阵 12

6 伴随矩阵 A^* 12
6.1 伴随矩阵的性质 14
6.1.1 性质: 对 “任意” 方阵 A, 有: $A * A^* = A^* * A = |A|E$ 14
6.1.2 性质: $|A \cdot A^*| = |A|^n \cdot |E|$ 15
6.1.3 性质: $|A^*| = |A|^{n-1}$ 15
6.1.4 性质: $(kA^*) = k^{n-1}A^*$ 15
6.1.5 性质: $\left(A^T\right)^* = (A^*)^T$ 15
6.1.6 性质: $(AB)^* = B^*A^*$ 15

7 逆矩阵 15
7.1 可逆矩阵: AB = BA = 单位阵 E 15
7.1.1 如何判断一个矩阵是否可逆? A 可逆的充要条件是: $|A| \neq 0$. 并且 A 的逆矩阵就是: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 16
7.1.2 推论: A,B 是 n 阶方阵, 只要我们知道一个条件: AB=E, 或 BA=E, 我们就能得出结论: A 可逆, 并且 $A^{-1} = B$ 16
7.2 求 “逆矩阵” 的方法 17
7.2.1 用 “伴随矩阵法”(不推荐用), 来求逆矩阵: 利用 A 的逆矩阵公式, 来求 A 的逆矩阵. 即: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 17
7.2.2 用 “初等变换法”, 来求逆矩阵 17
7.3 逆矩阵的性质 17
7.3.1 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 并且有 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ 17
7.3.2 若 A,B 均可逆, 则有: AB 也可逆, 并且有: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 17
7.3.3 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆. 并且有: $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T \leftarrow$ 转置的逆 = 逆的转置 17
7.3.4 $k \neq 0$, 则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ 17
7.3.5 性质: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 17
7.3.6 性质: 若 A 可逆, 则 A^*(即伴随矩阵) 也可逆. 并且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ 17
7.3.7 性质: $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ 18

8 矩阵方阵 18

9 分块矩阵 18
9.1 标准形 18
9.2 分块矩阵的 “加法” 19
9.3 分块矩阵的 “数乘” 19
9.4 分块矩阵的 “乘法” 19
9.5 “对角形分块矩阵” 的加减和乘法 20
9.6 分块矩阵的 “转置” 20
9.7 分块矩阵的 “逆矩阵” 20

10 初等变换 22
10.1 初等变换, 有三种 22
10.2 等价 23
10.3 初等方阵 24

矩阵及其运算

1 矩阵

矩阵一般用大写字母来表示. 比如 A, B, C, E. (D 留给了行列式.)

【矩阵和行列式的区别】:

行列式 D	矩阵 Matrix
本质是个 "数"	是张 "数表"
符号, 用竖线包围表示, 即 |...|	用 [] 或 () 包围. 几乎不用大括号.
必定是方形的, 即行数 = 列数	行列数无要求.

【元素都是 0 的矩阵, 叫零矩阵, 记作 0】:

【负矩阵】: 所有元素, 都取其负数的矩阵, 叫负矩阵. 记为 -A.

【单位阵】: 即 "主对角线" 上元素都是 1, 其他都是 0 的矩阵. 记作 E 或 I.
记忆方法:
- 主对角线, 是下坡 \
- 次对角线, 是上坡 /

注意: **只有 "方阵", 才有 "主对角线" 的概念.** 不是方阵, 就没有主对角线.

$$E\text{或}I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{单位阵}}$$

【只有一个元素的矩阵, 书写它时可以不带矩阵括号】:
如: [5]=5

【同型矩阵】:
即两个矩阵 A,B, 若 A 的行数 =B 的行数, A 的列数也 =B 的列数, 则它们就叫 "同型矩阵".
如: $A_{3\times5}$ 和 $B_{3\times5}$, 就是同型矩阵. 它们的形状是一样的.

若同型矩阵中, 对应元素都相等, 则这两个矩阵相等. 换言之, **两个矩阵相等的前提, 是它们必须是 "同型矩阵".**

所以, 两个零矩阵, 不一定相等. 因为它们不一定是同型的. 如:
$0_{2\times2} \neq 0_{2\times3}$

---

2 矩阵的运算

2.1 矩阵的加法, 减法

矩阵的加法, 只要把两个矩阵, 对应位置的元素直接相加就行了. 即:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{bmatrix}$$

注意: 只有“同型矩阵”才能做相加减.

减法也是这个规律: 对应元素相减即可.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d-j & e-k & f-l \end{bmatrix}$$

2.2 加法的性质

- A+B = B+A
- (A+B) + C = A + (B+C)
- A + 0 = A $\leftarrow$ 注意, 零矩阵与 A, 应该是“同型”的才能相加. (同时, 两个零矩阵, 也未必是同型的. 如 $0_{3\times 5} \neq 0_{4\times 7}$
- A + (-A) = 0
- $A+B=C \iff A=C-B$

2.3 矩阵的数乘

$$k\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{bmatrix}$$

就是把数字 k, 乘给矩阵中每一个元素身上.

反过来说, 就是: **若矩阵中的所有元素, 都有同一个公因子, 则该公因子提到矩阵外, 只需提“一次”.**
(**注意: 行列式中的公因子, 是“每行提一次”的.**)

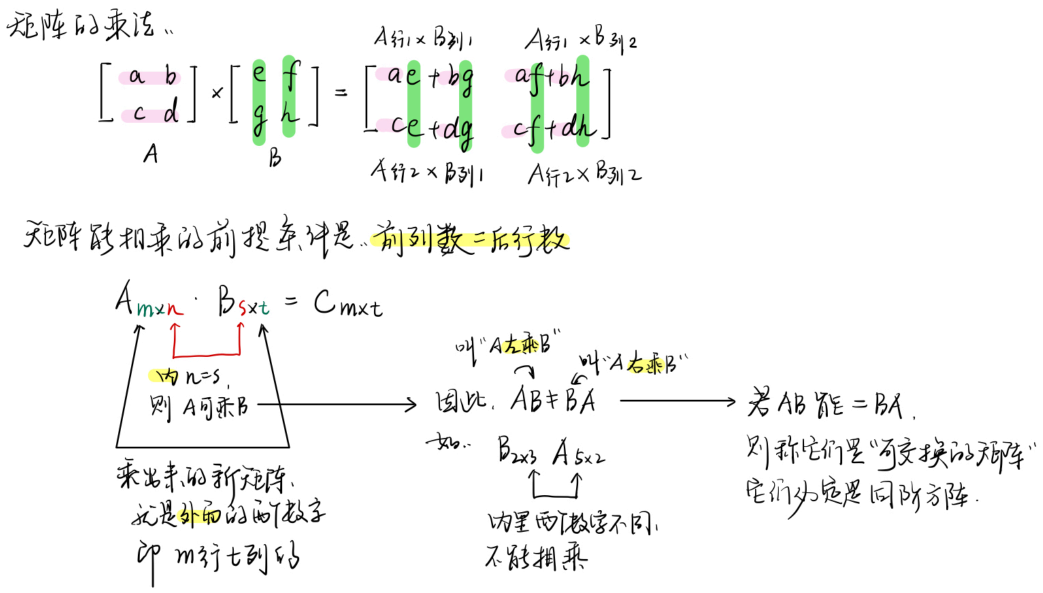
2.4 数乘的性质

- k(A+B) = kA + kB
- (k+l)A = kA + lA
- $k(lA)=(k\cdot l)A$ $\leftarrow$ 两个数 K 和 L, 可以先结合, 再去乘以矩阵 A

2.5 矩阵的乘法

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e & f \\ g & h \end{array}\right] = \begin{bmatrix} ae+bg & A\text{行}1*B\text{列}2 \\ A\text{行}2*B\text{列}1 & A\text{行}2*B\text{列}2 \end{bmatrix}$$

注意: **两个矩阵能相乘的前提是: 前面矩阵的列数 = 后面矩阵的行数.**



所以:
- 两个矩阵相乘的顺序不同的话, 结果就不同. 即: $AB \neq BA$
- AB 这个顺序能相乘, 不一定 BA 这个顺序也能相乘. 比如, $A_{5\times2}B_{2\times3}$ 是可以相乘的 (它们内侧两个数字相同, 都是 2), 能得到一个 5 行 3 列的矩阵. 而顺序倒过来 $B_{2\times3}A_{5\times2}$ 就不能相乘了, 因为它们的内侧两个数字 (前为 3, 后为 5) 不相同.

所以, 我们要区分一下相乘的顺序:
- AB : 叫 "A 左乘 B", 或 "B 右乘 A"

单位阵 E, 就相当于 1 的作用. 所以 AE = EA = A. 但是注意, 这里前后的两个单位阵 E, 不是同一个 E! 比如:

$A_{2\times3}E_{3\times3} = E_{2\times2}A_{2\times3}$

前面的 E, 只能是 3 阶方阵. 后面的 E, 只能是 2 阶方阵. 所以这两个 E 不是同一个单位阵.

例

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{-1\cdot1+1\cdot0+5\cdot-3}^{\text{前行1·后列1}} & \overbrace{-1\cdot-1+1\cdot2+5\cdot6}^{\text{前行1·后列2}} \\ \overbrace{4\cdot1+3\cdot0+-2\cdot-3}^{\text{前行2·后列1}} & \overbrace{4\cdot-1+3\cdot2+-2\cdot6}^{\text{前行2·后列2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 33 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

2.5.1 (1) AB=0，是推不出 A=0 或 B=0 的. (2) AB=AC, 且 $A =\neq 0$, 是推不出 B=C 的.

$$
\text{有} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
$$
$$
\text{则}: AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

从上面的结果, 我们可以得出这两个结论:
- **AB=0，是推不出 A=0 或 B=0 的.**
- **AB=AC, 且 $A \neq 0$, 是推不出 B=C 的.**

2.5.2 一个矩阵, 与"零矩阵"相乘, 结果就是一个"新形状"的零矩阵

如: $A_{4\times3}O_{3\times2} = O_{4\times2}$

2.5.3 一个矩阵 X, 与"单位阵 E"相乘 (无论左乘还是右乘), 结果还是矩阵 X 本身. 即: AE=A, EB=B

AE=A, EB=B

如: $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}}_{A}$

2.6 矩阵乘法的运算规律

2.6.1 结合律: (AB)C = A(BC)

ABC 的顺序, 在等号两边, 不变.

2.6.2 分配律: (1) (A+B)C = AC+BC, (2) C(A+B) = CA+CB

C 在右边时, 分配进去, C 还是在右边.
C 在左边时, 分配进去, C 还是在左边.

2.6.3 k(AB) = (kA)B = A(kB)

即 k 乘以 AB, 可以先和 A 结合来算, 也可以先和 B 结合来算.
并且无论 k 在哪, AB 的左右顺序, 永远是 AB.

2.6.4 矩阵乘法的例题

例

求出与 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

设其可交换的矩阵 $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

B 要能与 A 可交换, 它就必须满足: $A_nB_n=B_nA_n$, 即 A 和 B 是同阶的方阵.

$AB=BA \leftarrow A,B$ 为同阶方阵

即 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1\cdot a+0\cdot c & 1\cdot b+0\cdot d\\1\cdot a+1\cdot c & 1\cdot b+1\cdot d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot 1+b\cdot 1 & a\cdot 0+b\cdot 1\\c\cdot 1+d\cdot 1 & c\cdot 0+d\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}a=a+b, & \text{即}\rightarrow b=0\\b=b\\a+c=c+d, & \text{即}\rightarrow a=d\\b+d=d\end{cases}$

所以, $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}a&0\\c&a\end{bmatrix}}_{a,c\text{为任意常数}}$

例

$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases}$ 可以写成: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}_{\text{这两块, 就是两个矩阵相乘}}$

2.7 矩阵, 幂的运算

2.7.1 $A^k=A\cdot A\cdot ...A \leftarrow$等号右边共$k$个$A$

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot ...A}_{k\text{个}A}$$

2.7.2 $A^0=E$

2.7.3 $A^{k_1}A^{k_1}=A^{k_1+k_2}$

2.7.4 $\left(A^{k_1}\right)^{k_2}=A^{k_1k_2}$

2.7.5 一般, $(AB)^k\neq A^kB^k$

比如, $(AB)^2\neq A^2B^2$

因为: 等号左边 $(AB)^2=ABAB$, 等号右边 $A^2B^2=AABB$, 而一般 $ABAB\neq AABB$. 因为虽然它们最左边都是 A, 最右边都是 B, 但是中间的两个矩阵相乘, BA 一般就不等于 AB 了. 除非它们是可交换矩阵.

其他的:

$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2 \leftarrow$ 这个, 一般也不相等

$(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2 \leftarrow$ 这个, 一般也不相等

例

问 $(A+E)^2$ 是否等于 $A^2+2AE+E^2$?

$$\begin{aligned}
&(A+E)^2=(A+E)(A+E) \\
&=A(A+E)+E(A+E) \\
&=A^2+\underbrace{AE}_{=A}+\underbrace{EA}_{=A}+\underbrace{E^2}_{=E} \\
&=A^2+\underbrace{2A}_{=2AE}+E
\end{aligned}$$

所以这个是对的. 相等.

同样, $(A-E)^2=A^2-2AE+E^2$

2.7.6 矩阵的幂运算例题

例

$A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $(AB)^{10}=?$

$\rightarrow$ 我们先算下: $A_{3\times1}B_{1\times3}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$

$\rightarrow$ 再算一下: $B_{1\times3}A_{3\times1}=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[6]$

$$\rightarrow (AB)^{10}=\overbrace{A\underbrace{\underbrace{B\cdot A}_{=6}\underbrace{B\cdot A}_{=6}B\cdot\ldots\cdot A}_{\text{共}9\text{个}6}B}^{\text{共}10\text{个}AB}$$

$$=A\cdot6^9\cdot B=6^9\underbrace{AB}_{\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}}=6^9\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$$

---

3 矩阵的转置

$A_{m\times n}$, 转置后, 就是 $(A^T)_{n\times m}$

3.1 性质: $(A^T)^T = A$

3.2 性质: $(A+B)^T = A^T + B^T$

3.3 性质: $(kA)^T = kA^T$

3.4 ★ 性质: $(AB)^T = B^T A^T \longleftarrow$ 注意 AB 顺序要颠倒

3.5 性质: $(A_1A_2A_3A_4)^T = A_4^T A_3^T A_2^T A_1^T \longleftarrow$ 顺序颠倒

---

4 特殊矩阵 (都是方阵)

4.1 数量矩阵

数量矩阵 (或叫 "纯量阵") scalar matrix : 就是 "主对角线上" 元素都是同一个数值，其余元素都是零.

即:

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix} = aE$$

所以, 零矩阵, 和单位阵 E, 都是特殊的 "数量矩阵".

有性质:

(aE)B = B(aE) = aB

4.2 对角型矩阵

对角矩阵 diagonal matrix : 主对角线元素无要求 (可以不相等), 但之外的所有元素都为 0.

即:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

可记为: $A = diag(\lambda_1, \lambda 2, ..., \lambda_n)$

所以, "数量矩阵"(主对角线上的元素都相等), 只不过是一种特殊的 "对角矩阵" 罢了.

4.2.1 diag × B : 对角阵元素在哪一行上, 就乘到 B 的相同行上去

$$\left[\begin{array}{ccc} k_1 & & \\ \hline & k_2 & \\ \hline & & k_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 8 & 8 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1k_1 & 2k_1 & 3k_1 \\ \hline 2k_2 & 2k_2 & 2k_2 \\ \hline 8k_3 & 8k_3 & 8k_3 \end{array}\right] \tag{2}$$

即: diag 在前, 就乘到后者的 “行” 上去. (前行, 后列)
即: **左乘, 对应后面的行.**

4.2.2 B × diag : 对角阵元素在哪一列上, 就乘到 B 的相同列上去

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c} 1k_1 & 2k_2 & 3k_3 \\ 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ 8k_1 & 8k_2 & 8k_3 \end{array}\right] \tag{3}$$

即: diag 在后, 就乘到前者的 “列” 上去. (前行, 后列)
即: **右乘, 对应后面的列.**

4.3 上三角形矩阵

upper triangular matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & \ddots & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

性质:
- 上三角矩阵, 乘以系数后, 也是上三角矩阵
- 上三角矩阵间的 “加减法” 和 “乘法” 运算的结果, 仍是上三角矩阵
- 上三角矩阵的 “逆矩阵”, 也仍然是上三角矩阵
- 上三角矩阵的行列式, 为 “主对角线” 元素相乘

4.4 下三角形矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

4.5 对称矩阵: 有 $A^T = A$ ← 即对自己做转置, 依然等于自己.

对称矩阵 Symmetric Matrices : 是以主对角线为对称轴, 上下元素对应相等. 即: $a_{ij} = a_{ji}$

如:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{bmatrix}$$

对称矩阵, 有性质: $A^T = A$

例

注意: 下面例题中的字打错了, 不是 “互为”, 而是 “都是”.

有普通矩阵$A_{m\times n}$，证明：$(A\cdot A^T)$和$(A^T\cdot A)$互为对称矩阵.

思考：若一个矩阵是对称的，则必有 $[...]^T=[...]$

那么我们就来看看 $(A\cdot A^T)$是否真的等于$(A^T\cdot A)$，反之也是.

$\rightarrow (A\cdot A^T)^T=(A^T)^T\cdot A^T=A\cdot A^T \quad \leftarrow$ 证毕

$\rightarrow (A^T\cdot A)^T=A^T\cdot (A^T)^T=A^T\cdot A \quad \leftarrow$ 证毕

例

已知A是对称的，证明 B^TAB 也是对称的.

思考：对称矩阵具有性质 $[...]^T=[...]$

那么就来看看：$(B^TAB)^T=B^T\underbrace{A^T}_{\text{题目已经说}A\text{是对称的了，所以}A^T=A}(B^T)^T=B^TAB \quad \leftarrow$ 证毕

A,B 是同阶的 “对称矩阵”, 则有性质:

4.5.1 性质: $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$

$$(A+B)^T=\underbrace{A^T}_{A^T=A}+\underbrace{B^T}_{B^T=B}=A+B$$

4.5.2 性质: $(A-B)^T=A^T-B^T=A-B$

4.5.3 性质: $(kA)^T=k\cdot A^T=kA$

$$(kA)^T=k\cdot\underbrace{A^T}_{A^T=A}=kA$$

4.5.4 性质: $(AB)^T=B^TA^T=BA\neq AB$

$$(AB)^T=\underbrace{B^T}_{B^T=B}.\underbrace{A^T}_{A^T=A}=BA\neq AB$$

4.5.5 定理: 两个对称矩阵 A,B 相乘后, 新矩阵 AB 一般就不再是对称的了. 除非 A,B 是可交换矩阵, 型矩阵 AB 才是对称的.

即: 对称矩阵 A, B, 只有在它们是 “可交换矩阵” 的前提下, 它们的乘积 A×B, 才也是 “对称矩阵”.

4.6 反对称矩阵: 有 $A^T=-A$

反对称矩阵 Skew-symmetric matrix：主对角线上的元素全为零，主对角线两侧对称的元素, 反号 (即互为相反数). 即 $a_{ij}=-a_{ij}$

如:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

为什么它主对角线上的元素都是 0 呢? 因为根据 “反对称矩阵” 的性质: $a_{ii}=-a_{ii}$, 则就 $2a_{ii}=0$, 所以就有 $a_{ii}=0$ 了.

反对称矩阵, 有性质: $A^T = -A$.

---

5 方阵的行列式

只需把矩阵的中括号, 改成行列式的两条竖线, 就得到了 "方阵的行列式".

如: 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, 其行列式就是: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

行列式和矩阵有什么关系? 其实, 行列式只是矩阵的一个 "属性" 而已.
矩阵有很多属性, 包括: 特征值, 特征向量, 行列式, 等等.

5.1 "方阵的行列式" 的性质

5.1.1 性质: $|A^T| = |A|$

5.1.2 ★ 性质: $|kA| = k^n|A|$

5.1.3 性质: $|AB| = |A| \cdot |B|$ ← A,B 是同阶方阵

因此,$|ABC| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$

例

A 是 5 阶方阵, 且 |A|=3. 求:

$|-A| = |-1 \cdot A| = -1^5 \underbrace{|A|}_{=3} = -3$

$|2A^T| = 2^5 \underbrace{|A^T|}_{=|A|=3} = 2^5 \cdot 3 = 96$

$\left| \underbrace{|A|}_{=3} A \right| = 3^5 \underbrace{|A|}_{=3} = 3^6$

$$\underbrace{\left|\underbrace{\left|\underbrace{\left|\underbrace{|A|}_{①}A\right|}_{②}A\right|}_{③}A\right|}_{④}$$

第①层: $|A| = 3$

第②层: $|3A| = 3^5|A| = 3^5 \cdot 3 = 3^6$

第③层: $|3^6 A| = (3^6)^5|A| = 3^{30} \cdot 3 = 3^{31}$

第④层: $|3^{31} A| = (3^{31})^5|A| = 3^{155} \cdot 3 = 3^{156}$

---

6 伴随矩阵 A^*

只有方阵, 才有伴随矩阵 Adjugate matrix. 并且任何方阵, 都有伴随矩阵.

如: $A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$, 它的伴随矩阵 A^* 是什么?

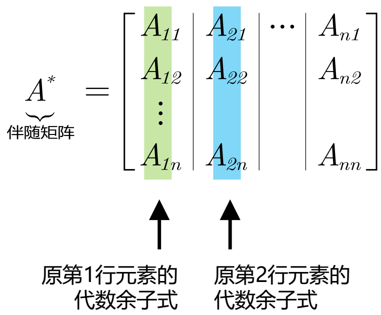
第 1 步: 先求出每个元素的 "代数余子式":

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} = 1 & A_{12} = -5 & A_{13} = 1 \\ A_{21} = -3 & A_{22} = 3 & A_{23} = 0 \\ A_{31} = 2 & A_{32} = -1 & A_{33} = -1 \end{bmatrix}$$

第 2 步: 把 A_{ij} 做转置, 就能得到 A 的伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

即: 按 "行" 求的 "代数余子式", 按 "列" 放.



【已知 A, 如何求得它的伴随矩阵 A^* ?】:

$$\text{因为}A\text{的逆阵, 有这个性质: } A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

$$\text{所以, 把分母拿到等号左边, 就有: } |A|A^{-1} = A^*$$

即, 只要把 A 的行列式, 和 A 的逆阵, 相乘, 就能得到 A 的伴随矩阵. 即:

$$\boxed{|A|A^{-1} = A^*}$$

例

问 $(A^*)^* = ?$

根据公式 $A^* = |A|A^{-1}$，我们就把 A^* 当做 A，代入这个公式中.

即有：$(A^*)^* = \underbrace{|A^*|}_{有公式=|A|^{n-1}} \underbrace{(A^*)^{-1}}_{有公式=\frac{1}{|A|}A}$

$$= |A|^{n-1} \cdot \frac{1}{|A|} A$$

$$= |A|^{n-2} A$$

问 $((A^*)^*)^* = ?$

上面的例题，我们已经做出过 $\boxed{(A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad ②}$

那么只要把 A^* 当做 A，代入上面的公式 ② 中即可.

就有：$((A^*)^*)^* = \underbrace{|A^*|^{n-2}}_{根据公式，|A^*|=|A|^{n-1}} \cdot \underbrace{A^*}_{根据公式，A^*=|A|A^{-1}}$

$$= (|A|^{n-1})^{n-2} (|A| A^{-1})$$

$$= |A|^{(n-1)(n-2)+1} A^{-1}$$

$$= |A|^{n^2-3n+3} A^{-1}$$

6.1 伴随矩阵的性质

6.1.1 性质：对“任意”方阵 A，有：$A * A^* = A^* * A = |A|E$

例

只有一个元素组成的方阵 $A = [5]$，其 A^* 是什么？

根据性质：

$$A * A^* = A^* * A = |A|E$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$[5]A^*$ $\qquad$ $|5|E$

$A^*_{1\times1}$ = $E_{1\times1}$

$A^*_{1\times1}$ $\qquad$ 1

6.1.2 性质: $|A \cdot A^*| = |A|^n \cdot |E|$

6.1.3 性质: $|A^*| = |A|^{n-1}$

证明过程如下:

既然 $A \cdot A^* = |A|E$

则 $\underbrace{|A \cdot A^*|}_{\text{根据公式 } |AB|=|A|\cdot|B|,\ \text{就可以拆开出来}} = \left| \underbrace{|A|}_{\text{行列式是个数，可以提到外面去，但要变成}n\text{次方}} E \right|$

$|A| \cdot |A^*| = |A|^n \cdot \underbrace{|E|}_{\text{单位阵的行列式，主对角线上元素的乘积，就等于}1}$

$|A^*| = \dfrac{|A|^n}{|A|}$

即 $|A^*| = |A|^{n-1}$

6.1.4 性质: $(kA^*) = k^{n-1}A^*$

6.1.5 性质: $\left(A^T\right)^* = (A^*)^T$

6.1.6 性质: $(AB)^* = B^*A^*$

---

7 逆矩阵

要记住一句话: 线性代数中, **矩阵不能放在分母上!**

7.1 可逆矩阵: AB = BA = 单位阵 E

【可逆矩阵】invertible matrix : A,B 为 n 阶方阵，若 **AB = BA = 单位阵 E,** 则称 A 为 "可逆矩阵""(或 "非奇异矩阵"),B 为 A 的 "逆矩阵",**记为** $A^{-1} = B$**.** ← **意思即: A 的逆矩阵, 是 B.**

注意:

1. 并非所有方阵均可逆.

比如零矩阵, OA = AO = O, 它就不满足 "可逆矩阵" 的要求 AB = BA = E 了. 所以零矩阵不可逆.

2. **若 A 为 "可逆矩阵", 则 A 的 "逆矩阵" 是唯一的.**

例

已知 A+B = AB , 验证: A-E 是可逆的.

$$\begin{aligned}
&\text{既然} A+B=AB \\
&\text{则 } AB-A-B=O\text{零矩阵} \\
&AB-A-B+E=O+E \leftarrow \text{两边同时加上单位阵} E \\
&\underbrace{AB-B}_{=(A-E)B}-A+E=E \\
&(A-E)B-(A-E)=E \leftarrow \text{等号左边, 提取 } (A-E) \\
&(A-E) \quad \underbrace{(B-E)}_{\text{这个, 就是}(A-E)\text{的逆矩阵了}} \quad =E \\
&\text{即: } (A-E)^{-1}=B-E
\end{aligned}$$

7.1.1 如何判断一个矩阵是否可逆? A 可逆的充要条件是: $|A| \neq 0$. 并且 A 的逆矩阵就是: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

【如何判断一个矩阵是否可逆?】:
判断方法就是: 只要它的行列式 |A| 不等于 0, 它就是可逆的.

【逆矩阵的公式】:
如果一个矩阵是可逆的, 它的逆矩阵是什么呢? 公式就是:

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*}$$

例

"A 的逆矩阵" 公式, 其证明过程是:

因为对任何方阵, 都有:$AA^*=A^*A=|A|E$

我们有 $|A| \neq 0$这个前提条件, 那么就把上式两边同时除以 $|A|$

即: $A\dfrac{1}{|A|}A^*=A^*\dfrac{1}{|A|}A=|A|\dfrac{1}{|A|}E$

$\underbrace{A\left(\dfrac{1}{|A|}A^*\right)}_{\text{把这块看成}B}=\underbrace{\left(A^*\dfrac{1}{|A|}\right)A}_{\text{把这块看成}B}=E \leftarrow$这不就是满足$AB=BA=E$, 这个可逆矩阵的定义吗?

所以, A的逆矩阵, 就是$\dfrac{1}{|A|}A^*$

7.1.2 推论: A,B 是 n 阶方阵, 只要我们知道一个条件: AB=E, 或 BA=E, 我们就能得出结论: A 可逆, 并且 $A^{-1}=B$

7.2 求 “逆矩阵” 的方法

7.2.1 用 “伴随矩阵法”(不推荐用), 来求逆矩阵: 利用 A 的逆矩阵公式, 来求 A 的逆矩阵. 即: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$$\because A^*=|A|A^{-1}$$
$$\therefore \frac{A^*}{|A|}=A^{-1}$$
$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*}$$

不过, 实际中, 该求逆方法很少用, 因为要先求 A^*, 计算量太大.

7.2.2 用 “初等变换法”, 来求逆矩阵

7.3 逆矩阵的性质

7.3.1 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 并且有 $(A^{-1})^{-1}=A$

证明过程:

$$\text{因为根据 逆矩阵 的定义: 只要}AB=E,\ \text{则}A^{-1}=B$$
$$\text{那么我们就反过来看看, }A^{-1}A\text{是否}=E,\ \text{如果等于, 则就证明了}A^{-1}=A\text{了}.$$
$$A^{-1}A\text{肯定}=E\text{了}.$$

7.3.2 若 A,B 均可逆, 则有: AB 也可逆, 并且有: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

所以同样: $(ABCD)^{-1}=D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}\leftarrow$ 注意等号右边, 顺序是倒过来的. 这个和转置公式 $((AB)^T=B^TA^T$) 很像.

7.3.3 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆. 并且有: $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\leftarrow$ 转置的逆 = 逆的转置

7.3.4 $k\neq 0,$ 则 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

证明过程:

$$\text{只要来看看 }kA\cdot\frac{1}{k}A^{-1}\text{ 是否}=E\text{就行了, 它们就互为逆矩阵.}$$
$$kA\cdot\frac{1}{k}A^{-1}=k\frac{1}{k}\cdot AA^{-1}=1\cdot E=E\leftarrow\text{的确等于}E.$$

7.3.5 性质: $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

7.3.6 性质: 若 A 可逆, 则 A^*(即伴随矩阵) 也可逆. 并且 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

证明过程:

$$A^*\text{有这个性质 }AA^*=|A|E$$
$$\text{那么两边同时除以 }|A|,\ \text{即: }\frac{1}{|A|}AA^*=\frac{1}{|A|}|A|E$$
$$\text{即 }\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=E\leftarrow\text{所以一看就知道,}A^*\text{的逆矩阵, 就是}\frac{1}{|A|}A$$

7.3.7 性质: $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

A 可逆时, A^* 也可逆.

---

8 矩阵方阵

例

已知$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 且$A \cdot \overbrace{X}^{X\text{也是矩阵}} = A + 2X$, 求$X$

既然: $AX = A + 2X$

$AX - 2X = A$ ← 注意, 这个式子, 不能继续写成$(A-2)X$,
因为A是一个矩阵, 不能和一个数相加减.
所以, 只能把这个数(即2)变成矩阵才行,
怎么做呢? 就是让2先乘上单位阵E.

$AX - 2EX = A$

$(A-2E)X = A$ ← 注意: 这一步时, 不能写成 $X = \frac{A}{A-2E}$,
因为矩阵永远不能写在分母上!
所以为了消除掉$A-2E$,
我们只能给它乘上它的"逆矩阵"(相当于 $ctrl + z$ 操作)才行.
但注意: 首先, 我们要判断$A-2E$是否可逆,
即判断 $|A-2E|$ 是否满足 $\neq 0$ 才行. 满足这个条件, 它才有逆阵存在.

$\underbrace{(A-2E)^{-1}(A-2E)}_{=E}X = (A-2E)^{-1}A$

$EX = (A-2E)^{-1}A$

$X = (A-2E)^{-1}A$

---

9 分块矩阵

9.1 标准形

标准形, 形如:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

即: 从左上角开始的一串 1, 不能断. 其余的地方全是 0.
注意: 标准形, 不一定是方阵.

如:

$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$ ← 这个<u>是</u> 标准形.

$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&0\end{bmatrix}$ ← 这个也<u>是</u> 标准形. 哪怕它没有 0.

$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$ ← 这个也<u>是</u> 标准形. 没有 0 也是.

$\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ ← 这个<u>不是</u> 标准形.

$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&1\end{bmatrix}$ ← 这个<u>不是</u> 标准形. 因为 1 被断开了.

$\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ ← 这个<u>是</u> 标准形. 完全没有 1 也是.

对 “标准形”, 我们可以对它做分块.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\\hline&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}E_r&O_{r\cdot(n-r)}\\O_{(m-r)\cdot r}&O_{(m-r)\cdot(n-r)}\end{bmatrix}$$

9.2 分块矩阵的 “加法”

$$\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1&A_2+B_2\\A_3+B_3&A_4+B_4\end{bmatrix}$$

能 “相加” 的前提是: 必须保证 “对应子块” 的行列数, 都相同.

9.3 分块矩阵的 “数乘”

$$k\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kA_1&kA_2\\kA_3&kA_4\end{bmatrix}$$

9.4 分块矩阵的 “乘法”

$$\left[\begin{array}{cc}A_1&A_2\\\hline A_3&A_4\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_1B_1+A_2B_3&A_1B_2+A_2B_4\\A_3B_1+A_4B_3&A_3B_2+A_4B_4\end{bmatrix}$$

即:

注意: 能相乘的前提是: 必须保证 “对应子块” 能相乘.

例

有 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$, 把 B 分块成 $B=(B_1,B_2,...,B_t)$ (每块的列数, 不需要相同)
则: $AB=A\cdot(B_1,|B_2,|...,|B_t)=AB_1,AB_2,...,AB_t$ ← 注意: 这个不是分配率! 要把它们理解成两个矩阵相乘. 即正确的理解是这样的: 用矩阵 A, 去乘上分块 B 的第一列 (即 B1); 再用矩阵 A, 去乘上分块 B 的第二列 (即 B2), ...

9.5 "对角形分块矩阵" 的加减和乘法

有 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{bmatrix}$ ← 这是 "对角形分块矩阵", 即对角线上有块.

则:

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_nB_n \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n+B_n \end{bmatrix}$$

9.6 分块矩阵的 "转置"

有分块矩阵 $A=\left[\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_4 & A_5 & A_6 \end{array}\right]$, 它的转置 A^T 怎么求?

第 1 步: 先把子块, 视做 "元素", 做 A 整体的转置, 即变成 → $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_4 \\ A_2 & A_5 \\ A_3 & A_6 \end{array}\right]$

第 2 步: 再分别把每个子块, 做转置. 即变成 → $\left[\begin{array}{c|c} A_1^T & A_4^T \\ A_2^T & A_5^T \\ A_3^T & A_6^T \end{array}\right]$

9.7 分块矩阵的 "逆矩阵"

公式是:

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix}$$

例

$$\begin{array}{c|c} A_{m\times m} \quad m & C_{m\times n} \\ m & n \\ \hline O_{n\times m} \quad n & B_{n\times n} \end{array}$$

$H=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$，$A$是$m$阶，$B$是$n$阶的可逆矩阵.

问：H可逆吗？若行，求其逆.

→ H是否有逆？

只有当 $|H|\neq 0$时，即它的面积没有压缩成零维时，它才能 $ctrl+z$ 做恢复. 即才有“逆”在

所以，我们就来检查一下它的行列式，即 $|H|=?$

$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|\neq 0$，说明$H$可逆.

→ 求H的逆

设其逆阵 $H^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{bmatrix}}_{\text{分块矩阵}}$ ← 这里设成$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$也行.

则 $HH^{-1}=E$

即$\left[\begin{array}{cc} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{array}\right]=E$

$$\begin{bmatrix} AX_1+CX_4 & AX_3+CX_2 \\ \underbrace{OX_1}_{\text{零矩阵}}+BX_4 & \underbrace{OX_3}_{\text{零矩阵}}+BX_2 \end{bmatrix}=\underbrace{E}_{=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}}$$

即$\begin{bmatrix} AX_1+CX_4 & AX_3+CX_2 \\ O+BX_4 & O+BX_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$

于是

$AX_1+CX_4=E$ ①

$AX_3+CX_2=O$ ②

$O+BX_4=O$ ③ → 得到 $BX_4=O$ ← 对它两边同时乘上B逆

$\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{\text{抵消掉，}=E}X_4=B^{-1}\cdot O$

所以$X_4=O$，代入①

就得到：$AX_1+\underbrace{CO}_{\text{零矩阵}}=E$

即 $AX_1=E$ ←这说明A和X_1互逆，

即 $X_1=A^{-1}$

$O+BX_2=E$ ④ ← 这说明 B和X_2互逆. 即 $X_2=B^{-1}$. ←代入②

$AX_3+CB^{-1}=O$

$AX^3=-CB^{-1}$ ← 然后两边同时左乘A^{-1}

$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{=E}X^3=A^{-1}\cdot -CB^{-1}$

所以$X^3=A^{-1}\cdot(-CB^{-1})$

因此，$H^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{bmatrix}}_{\text{分块矩阵}}=\begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}\cdot(-CB^{-1}) \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$

10 初等变换

10.1 初等变换, 有三种

矩阵的初等变换 Elementary transformation, 有三种:

1. **交换两行.**

比如 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换第 1,2 行}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

2. **用 k($k \neq 0$) 乘以某一行.**

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{line1 \times 6} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

3. **把某一行的 k 倍 (k 可为 0), 加到另一行上去.**

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & \cdots & \\ 4 & & \end{bmatrix} \xrightarrow{newLine3 = -4(line1) + (line3)} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & \cdots & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

注意: 矩阵的 “初等变换”, 与行列式的初等变换, 没有任何关系. 虽然它们的三条变换规则相同.

任何矩阵, 都可以通过 “初等变换”, 变成 “标准形” $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

例

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{先搞定第1列，做初等行变换} \\ newLine2 = (line1) \times 1 + line2 \\ newLine4 = (line1) \times (-1) + line4 \end{array}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{再搞定第2列，做初等行变换} \\ newLine1 = (line2) \times (-2) + line1 \\ newLine3 = (line2) \times (-1) + line3 \\ newLine4 = (line2) \times (-1) + line4 \end{array}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{再搞定第3列的第1行，做初等列变换} \\ newCol3 = (Col1) \times (1) + Col3 \end{array}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{再搞定第3列的第二行，做初等列变换} \\ newCol3 = (Col2) \times (-1) + Col3 \end{array}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{就得到了“标准形”}
$$

10.2 等价

等价: A 经过初等变换得到 B, 则 A 与 B 等价. 记为 $A \cong B$.

等价的性质有:

1. 反身性: $A \cong A \leftarrow$ 自己等价于自己.
2. 对称性: $A \cong B$, 则 $B \cong A$. $\leftarrow$ 重重就是说: A 经过 “初等变换” 得到 B, B 也能再经过 “初等变换” 得回 A.
3. 传递性: 若 $A \cong B$, $B \cong C$, 则 $A \cong C$. $\leftarrow$ 就相当于: A→C 的一步, 分成了两步来做. B 只是中间状态而已.
4. 任意矩阵 A ≅ 标准形 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

如: $A_{4\times4}$ 可以化成这 5 种标准形:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{4\times4}}_{\text{秩}0}
\quad
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{\text{秩}1}
\quad
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{\text{秩}2}
\quad
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{\text{秩}3}
\quad
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{秩}4}
$$

10.3 初等方阵

初等方阵 Elementary matrix: 对单位阵 E 做一次 “初等变换” 得到的矩阵, 就是 “初等方阵”.

既然是做 “初等变换”, 就是 3 种了:

(1) **交换两行**:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{交换 1,3 行}} \left[\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right]$$

记为: $E(i,j)$, 即交换 “第 i 行” 和 “第 j 行” 后, 所得到的矩阵.

(2) **用 k 乘上某一行/列**

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{newLine3\ =\ 5*line3} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

记为: $E(i(k))$, 即把第 i 行, 变为 k 倍. $k \neq 0$.

(3) **某行的 k 倍, 加到另一行上去**

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{newLine1\ =\ (5*line3)+line1} \begin{bmatrix} 1 & & 5 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

记为: $E(i,j(k))$, 即把 “j 行的 k 倍”, 加到 “第 i 行” 上去.

可以看出: 三种不同的变换方式, 所得到的 “初等方阵”, 其 “行列式值”, 是不同的.

$\rightarrow$ 第 (1) 种: $\begin{vmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = -1 \leftarrow$ 即: $\boxed{|E(i,j)| = -1}$

其逆阵是: $\boxed{E^{-1}(i,j) = E(i,j)}$

$\rightarrow$ 第 (2) 种: $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 5 \leftarrow$ 即: $\boxed{|E(i(k))| = k, (k \neq 0)}$

其逆阵是: $\boxed{E^{-1}(i(k)) = E(i(\frac{1}{k}))}$

$\rightarrow$ 第 (3) 种: $\begin{vmatrix} 1 & & 5 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \leftarrow$ 即: $\boxed{|E(i,j(k))| = 1}$

其逆阵是: $\boxed{E^{-1}(i,j(k)) = E(i,j(-k))}$

上面三种初等变换得到的矩阵, 做出来的行列式值, 都不等于 0. 说明: (1) 它们 (即初等方阵) 都可逆. (2) 它们的逆矩阵, 也是 "初等方阵." (3) 并且, 初等方阵的转置, 也是 "初等方阵."

注意区别:
- 初等变换: (v.) 是动词, 是对矩阵做 "变换" 的一种过程.
- 初等方阵: (n.) 是名词. 它就是一个方阵.

例

有 $\underbrace{E(2(3))}_{\text{即，将单位阵}E\text{的第二行，乘上}3\text{倍}} = \begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\ \overbrace{E(1,3)}^{1,3\text{行交换}} = \begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$

则: $\rightarrow \underbrace{E(2(3))\cdot A}_{\text{即：初等方阵，左乘}A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&1\end{bmatrix}}_{\text{对单位阵的第二行，实施让其变成}3\text{倍的变换}} \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\12&15&18\\7&8&9\end{bmatrix}}_{\text{结果就相当于是对}A\text{的第二行，实施了让其变成}3\text{倍的变换}}$ ← 即用 "初等方阵" 去 "左乘" A, 相当于对 A 实施了同种的 "行变换"

$\rightarrow \underbrace{A\cdot E(1,3)}_{\text{即：初等方阵，右乘}A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}}_{\text{对单位阵，交换了}1,3\text{列}} = \underbrace{\begin{bmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{bmatrix}}_{\text{结果就相当于对}A\text{，也交换了}1,3\text{列}}$ ← 即用 "初等方阵" 去 "右乘" A, 相当于对 A 实施了同种的 "列变换"

这两个单位阵 E, 做了一次 "初等变换" 后, 就已经是 "初等方阵" 了. 那么用 "初等方阵" 左乘 "一个普通矩阵, 和 "右乘" 一个普通矩阵, 顺序不同, 运算规则也是不一样的:

(1) 用初等方阵 "左乘" A 矩阵 (即初等方阵在 A 左边)
E 在左边, 即: **用第 i 种初等方阵 "左乘"A, 效果就相当于对 A 实施了同种的 (即也是第 i 种的)"初等行变换".** (左行, 右列)
比如本例, 对 E 做了 "对第 2 行, 乘上 3 倍" 的操作, 就相当于对 A 做了 "对第 2 行, 乘上 3 倍" 的操作.

(2) 用初等方阵 "右乘" A 矩阵 (即初等方阵在 A 右边)
E 在右边, 即: **用第 i 种初等方阵 "右乘"A, 效果就相当于对 A 实施了同种的 (即也是第 i 种的)"初等列变换".** (左行, 右列)

这就好像是古代的扎小人巫术, 对初等方阵 E(人偶) 做扎针, 就相当于对 A(真人对象) 做同等扎针.