目录

矩阵及其运算

1　矩阵

矩阵一般用大写字母来表示. 比如 A, B, C, E. (D 留给了行列式.)

【矩阵和行列式的区别】:

行列式 D	矩阵 Matrix
本质是个 "数"	是张 "数表"
符号, 用竖线包围表示, 即 |...|	用 [] 或 () 包围. 几乎不用大括号.
必定是方形的, 即行数 = 列数	行列数无要求.

【元素都是 0 的矩阵, 叫零矩阵, 记作 0】:

【负矩阵】: 所有元素, 都取其负数的矩阵, 叫负矩阵. 记为 -A.

【单位阵】: 即 "主对角线" 上元素都是 1, 其他都是 0 的矩阵. 记作 E 或 I.
记忆方法:
- 主对角线, 是下坡 \
- 次对角线, 是上坡 /

注意: **只有 "方阵", 才有 "主对角线" 的概念.** 不是方阵, 就没有主对角线.

$$E\text{或}I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{单位阵}}$$

【只有一个元素的矩阵, 书写它时可以不带矩阵括号】:
如: [5]=5

【同型矩阵】:
即两个矩阵 A,B, 若 A 的行数 =B 的行数, A 的列数也 =B 的列数, 则它们就叫 "同型矩阵".
如: $A_{3\times5}$ 和 $B_{3\times5}$, 就是同型矩阵. 它们的形状是一样的.

若同型矩阵中, 对应元素都相等, 则这两个矩阵相等. 换言之, **两个矩阵相等的前提, 是它们必须是 "同型矩阵".**

所以, 两个零矩阵, 不一定相等. 因为它们不一定是同型的. 如:
$0_{2\times2} \neq 0_{2\times3}$

---

2 矩阵的运算

2.1 矩阵的加法, 减法

矩阵的加法, 只要把两个矩阵, 对应位置的元素直接相加就行了. 即:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{bmatrix}$$

注意: 只有 "同型矩阵" 才能做相加减.

减法也是这个规律: 对应元素相减即可.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d-j & e-k & f-l \end{bmatrix}$$

2.2 加法的性质

- A+B = B+A
- (A+B) + C = A + (B+C)
- A + 0 = A ← 注意, 零矩阵与 A, 应该是 "同型" 的才能相加. (同时, 两个零矩阵, 也未必是同型的. 如 $0_{3\times5} \neq 0_{4\times7}$
- A + (-A) = 0
- $A+B=C \iff A=C-B$

2.3 矩阵的数乘

$$k\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{bmatrix}$$

就是把数字 k, 乘给矩阵中每一个元素身上.

反过来说, 就是: **若矩阵中的所有元素, 都有同一个公因子, 则该公因子提到矩阵外, 只需提 "一次".**
(**注意: 行列式中的公因子, 是 "每行提一次" 的.**)

2.4 数乘的性质

- k(A+B) = kA + kB
- (k+l)A = kA + lA
- $k(lA)=(k\cdot l)A$ ← 两个数 K 和 L, 可以先结合, 再去乘以矩阵 A

2.5 矩阵的乘法

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e & f \\ g & h \end{array}\right] = \begin{bmatrix} ae+bg & A\text{行}1 * B\text{列}2 \\ A\text{行}2 * B\text{列}1 & A\text{行}2 * B\text{列}2 \end{bmatrix}$$

注意: **两个矩阵能相乘的前提是: 前面矩阵的列数 = 后面矩阵的行数.**

矩阵的乘法:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \times \underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \begin{array}{cc} \text{A行1×B列1} & \text{A行1×B列2} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}} \\ \text{A行2×B列1} & \text{A行2×B列2} \end{array}$$

矩阵能相乘的前提条件是: 前列数=后行数

$A_{m\times n} \cdot B_{s\times t} = C_{m\times t}$

内 n=s, 则 A可乘B

乘出来的新矩阵, 就是外面的两个数字, 即 m行t列的

因此, AB ≠ BA

叫"A左乘B" 叫"A右乘B"

若 AB 能 = BA, 则称它们是"可交换的矩阵" 它们必定是同阶方阵.

如: $B_{2\times3}\ A_{5\times2}$

内里两数字不同, 不能相乘

所以:
- 两个矩阵相乘的顺序不同的话, 结果就不同. 即: $AB \neq BA$
- AB 这个顺序能相乘, 不一定 BA 这个顺序也能相乘. 比如, $A_{5\times2}B_{2\times3}$ 是可以相乘的 (它们内侧两个数字相同, 都是 2), 能得到一个 5 行 3 列的矩阵. 而顺序倒过来 $B_{2\times3}A_{5\times2}$ 就不能相乘了, 因为它们的内侧两个数字 (前为 3, 后为 5) 不相同.

所以, 我们要区分一下相乘的顺序:
- AB : 叫 "A 左乘 B", 或 "B 右乘 A"

单位阵 E, 就相当于 1 的作用. 所以 AE = EA = A. 但是注意, 这里前后的两个单位阵 E, 不是同一个 E! 比如:

$A_{2\times3}E_{3\times3} = E_{2\times2}A_{2\times3}$

前面的 E, 只能是 3 阶方阵. 后面的 E, 只能是 2 阶方阵. 所以这两个 E 不是同一个单位阵.

例

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{-1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 5\cdot -3}^{\text{前行}1\cdot\text{后列}1} & \overbrace{-1\cdot -1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 6}^{\text{前行}1\cdot\text{后列}2} \\ \overbrace{4\cdot 1 + 3\cdot 0 + -2\cdot -3}^{\text{前行}2\cdot\text{后列}1} & \overbrace{4\cdot -1 + 3\cdot 2 + -2\cdot 6}^{\text{前行}2\cdot\text{后列}2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 33 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

2.5.1 (1) AB=0 , 是推不出 A=0 或 B=0 的. (2) AB=AC, 且 $A =\neq 0$, 是推不出 B=C 的.

$$
\text{有}A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{则}:AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ AC=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

从上面的结果, 我们可以得出这两个结论:
- **AB=0 , 是推不出 A=0 或 B=0 的.**
- **AB=AC, 且 $A \neq 0$, 是推不出 B=C 的.**

2.5.2 一个矩阵, 与 "零矩阵" 相乘, 结果就是一个 "新形状" 的零矩阵

如: $A_{4\times3}O_{3\times2}=O_{4\times2}$

2.5.3 一个矩阵 X, 与 "单位阵 E" 相乘 (无论左乘还是右乘), 结果还是矩阵 X 本身. 即: AE=A, EB=B

AE=A, EB=B

如: $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}}_{A}$

2.6 矩阵乘法的运算规律

2.6.1 结合律: (AB)C = A(BC)

ABC 的顺序, 在等号两边, 不变.

2.6.2 分配律: (1) (A+B)C = AC+BC, (2) C(A+B) = CA+CB

C 在右边时, 分配进去, C 还是在右边.
C 在左边时, 分配进去, C 还是在左边.

2.6.3 k(AB) = (kA)B = A(kB)

即 k 乘以 AB, 可以先和 A 结合来算, 也可以先和 B 结合来算.
并且无论 k 在哪, AB 的左右顺序, 永远是 AB.

2.6.4 矩阵乘法的例题

例

求出与 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

设其可交换的矩阵 $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

B 要能与 A 可交换, 它就必须满足: $A_nB_n=B_nA_n$, 即 A 和 B 是同阶的方阵.

$$AB=BA \leftarrow A,B\text{为同阶方阵}$$

$$\text{即}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\cdot a+0\cdot c & 1\cdot b+0\cdot d\\1\cdot a+1\cdot c & 1\cdot b+1\cdot d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot 1+b\cdot 1 & a\cdot 0+b\cdot 1\\c\cdot 1+d\cdot 1 & c\cdot 0+d\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{bmatrix}$$

$$\text{即}\begin{cases}a=a+b, & \text{即}\rightarrow b=0\\b=b\\a+c=c+d, & \text{即}\rightarrow a=d\\b+d=d\end{cases}$$

$$\text{所以，}B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}a&0\\c&a\end{bmatrix}}_{a,c\text{为任意常数}}$$

例

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases}\quad\text{可以写成:}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}_{\text{这两块，就是两个矩阵相乘}}$$

2.7 矩阵, 幂的运算

2.7.1 $A^k=A\cdot A\cdot ...A$ ←等号右边共k个A

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot ...A}_{k\text{个}A}$$

2.7.2 $A^0=E$

2.7.3 $A^{k_1}A^{k_1}=A^{k_1+k_2}$

2.7.4 $\left(A^{k_1}\right)^{k_2}=A^{k_1k_2}$

2.7.5 一般, $(AB)^k\neq A^kB^k$

比如, $(AB)^2\neq A^2B^2$

因为: 等号左边 $(AB)^2=ABAB$, 等号右边 $A^2B^2=AABB$, 而一般 $ABAB\neq AABB$. 因为虽然它们最左边都是 A, 最右边都是 B, 但是中间的两个矩阵相乘, BA 一般就不等于 AB 了. 除非它们是可交换矩阵.

其他的:
$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2 \leftarrow$ 这个, 一般也不相等
$(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2 \leftarrow$ 这个, 一般也不相等

例

问 $(A+E)^2$ 是否等于 $A^2+2AE+E^2$?

$$\begin{aligned}
&(A+E)^2=(A+E)(A+E)\\
&=A(A+E)+E(A+E)\\
&=A^2+\underbrace{AE}_{=A}+\underbrace{EA}_{=A}+\underbrace{E^2}_{=E}\\
&=A^2+\underbrace{2A}_{=2AE}+E
\end{aligned}$$

所以这个是对的. 相等.

同样, $(A-E)^2=A^2-2AE+E^2$

2.7.6 矩阵的幂运算例题

例

$A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$, 则 $(AB)^{10}=?$

$\rightarrow$ 我们先算下: $A_{3\times1}B_{1\times3}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$

$\rightarrow$ 再算一下: $B_{1\times3}A_{3\times1}=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[6]$

$$\rightarrow (AB)^{10}=\overbrace{A\underbrace{\underbrace{B\cdot A}_{=6}\underbrace{B\cdot A}_{=6}B\cdot\ldots\cdot A}_{\text{共}9\text{个}6}B}^{\text{共}10\text{个}AB}$$

$$=A\cdot6^9\cdot B=6^9\underbrace{AB}_{\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}}=6^9\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$$

---

3 矩阵的转置

$A_{m\times n}$, 转置后, 就是 $(A^T)_{n\times m}$

3.1 性质: $(A^T)^T = A$

3.2 性质: $(A+B)^T = A^T + B^T$

3.3 性质: $(kA)^T = kA^T$

3.4 ★ 性质: $(AB)^T = B^T A^T \longleftarrow$ 注意 AB 顺序要颠倒

3.5 性质: $(A_1A_2A_3A_4)^T = A_4^T A_3^T A_2^T A_1^T \longleftarrow$ 顺序颠倒

---

4 特殊矩阵 (都是方阵)

4.1 数量矩阵

数量矩阵 (或叫 "纯量阵") scalar matrix : 就是 "主对角线上" 元素都是同一个数值，其余元素都是零.
即:

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix} = aE$$

所以, 零矩阵, 和单位阵 E, 都是特殊的 "数量矩阵".

有性质:
(aE)B = B(aE) = aB

4.2 对角型矩阵

对角矩阵 diagonal matrix : 主对角线元素无要求 (可以不相等), 但之外的所有元素都为 0.

即:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

可记为: $A = diag(\lambda_1, \lambda 2, ..., \lambda_n)$

所以, "数量矩阵"(主对角线上的元素都相等), 只不过是一种特殊的 "对角矩阵" 罢了.

4.2.1 diag $\times$ B : 对角阵元素在哪一行上, 就乘到 B 的相同行上去

$$\left[\begin{array}{ccc} k_1 & & \\ \hline & k_2 & \\ \hline & & k_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 8 & 8 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1k_1 & 2k_1 & 3k_1 \\ \hline 2k_2 & 2k_2 & 2k_2 \\ \hline 8k_3 & 8k_3 & 8k_3 \end{array}\right] \tag{2}$$

即: diag 在前, 就乘到后者的 "行" 上去. (前行, 后列)
即: **左乘, 对应后面的行.**

4.2.2 B × diag : 对角阵元素在哪一列上，就乘到 B 的相同列上去

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c} 1k_1 & 2k_2 & 3k_3 \\ 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ 8k_1 & 8k_2 & 8k_3 \end{array}\right] \tag{3}$$

即: diag 在后, 就乘到前者的 “列” 上去. (前行, 后列)

即: **右乘, 对应后面的列.**

4.3 上三角形矩阵

upper triangular matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & \ddots & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

性质:

- 上三角矩阵, 乘以系数后, 也是上三角矩阵
- 上三角矩阵间的 “加减法” 和 “乘法” 运算的结果, 仍是上三角矩阵
- 上三角矩阵的 “逆矩阵”, 也仍然是上三角矩阵
- 上三角矩阵的行列式, 为 “主对角线” 元素相乘

4.4 下三角形矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

4.5 对称矩阵: 有 $A^T = A \leftarrow$ 即对自己做转置, 依然等于自己.

对称矩阵 Symmetric Matrices : 是以主对角线为对称轴, 上下元素对应相等. 即: $a_{ij} = a_{ji}$

如:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{bmatrix}$$

对称矩阵, 有性质: $A^T = A$

例

注意: 下面例题中的字打错了, 不是 “互为”, 而是 “都是”.

有普通矩阵$A_{m\times n}$，证明：$(A\cdot A^T)$和$(A^T\cdot A)$互为对称矩阵.

思考：若一个矩阵是对称的，则必有 $[...]^T=[...]$

那么我们就来看看 $(A\cdot A^T)$是否真的等于$(A^T\cdot A)$，反之也是.

$\rightarrow (A\cdot A^T)^T=(A^T)^T\cdot A^T=A\cdot A^T$ $\leftarrow$ 证毕

$\rightarrow (A^T\cdot A)^T=A^T\cdot (A^T)^T=A^T\cdot A$ $\leftarrow$ 证毕

例

已知A是对称的，证明 B^TAB 也是对称的.

思考：对称矩阵具有性质 $[...]^T=[...]$

那么就来看看：$(B^TAB)^T=B^T\underbrace{A^T}_{\text{题目已经说}A\text{是对称的了，所以}A^T=A}(B^T)^T=B^TAB$ $\leftarrow$ 证毕

A,B 是同阶的 “对称矩阵”, 则有性质:

4.5.1 性质: $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$

$$(A+B)^T=\underbrace{A^T}_{A^T=A}+\underbrace{B^T}_{B^T=B}=A+B$$

4.5.2 性质: $(A-B)^T=A^T-B^T=A-B$

4.5.3 性质: $(kA)^T=k\cdot A^T=kA$

$$(kA)^T=k\cdot\underbrace{A^T}_{A^T=A}=kA$$

4.5.4 性质: $(AB)^T=B^TA^T=BA\neq AB$

$$(AB)^T=\underbrace{B^T}_{B^T=B}.\underbrace{A^T}_{A^T=A}=BA\neq AB$$

4.5.5 定理: 两个对称矩阵 A,B 相乘后, 新矩阵 AB 一般就不再是对称的了. 除非 A,B 是可交换矩阵, 型矩阵 AB 才是对称的.

即: 对称矩阵 A, B, 只有在它们是 “可交换矩阵” 的前提下, 它们的乘积 A×B, 才也是 “对称矩阵”.

4.6 反对称矩阵: 有 $A^T=-A$

反对称矩阵 Skew-symmetric matrix ：主对角线上的元素全为零，主对角线两侧对称的元素, 反号 (即互为相反数). 即 $a_{ij}=-a_{ij}$

如:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

为什么它主对角线上的元素都是 0 呢? 因为根据 “反对称矩阵” 的性质: $a_{ii}=-a_{ii}$, 则就 $2a_{ii}=0$, 所以就有 $a_{ii}=0$ 了.

反对称矩阵, 有性质: $A^T = -A$.

---

5 逆矩阵

要记住一句话: 线性代数中, **矩阵不能放在分母上!**

---

6 方阵的行列式

只需把矩阵的中括号, 改成行列式的两条竖线, 就得到了 "方阵的行列式".

如: 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, 其行列式就是: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

行列式和矩阵有什么关系? 其实, 行列式只是矩阵的一个 "属性" 而已.
矩阵有很多属性, 包括: 特征值, 特征向量, 行列式, 等等.

6.1 "方阵的行列式" 的性质

6.1.1 性质: $|A^T| = |A|$

6.1.2 ★ 性质: $|kA| = k^n|A|$

6.1.3 性质: $|AB| = |A| \cdot |B| \leftarrow$ A,B 是同阶方阵

因此,$|ABC| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$

例

A 是 5 阶方阵, 且 |A|=3. 求:

$|-A| = |-1 \cdot A| = -1^5 \underbrace{|A|}_{=3} = -3$

$|2A^T| = 2^5 \underbrace{|A^T|}_{=|A|=3} = 2^5 \cdot 3 = 96$

$\left| \underbrace{|A|}_{=3} A \right| = 3^5 \underbrace{|A|}_{=3} = 3^6$

$$\underbrace{\left|\underbrace{\left|\underbrace{\left|\underbrace{|A|}_{\textcircled{1}}A\right|}_{\textcircled{2}}A\right|}_{\textcircled{3}}A\right|}_{\textcircled{4}}$$

第①层: $|A| = 3$

第②层: $|3A| = 3^5|A| = 3^5 \cdot 3 = 3^6$

第③层: $|3^6A| = (3^6)^5|A| = 3^{30} \cdot 3 = 3^{31}$

第④层: $|3^{31}A| = (3^{31})^5|A| = 3^{155} \cdot 3 = 3^{156}$

---

7 伴随矩阵 A^*

只有方阵, 才有伴随矩阵 Adjugate matrix. 并且任何方阵, 都有伴随矩阵.

如: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, 它的伴随矩阵 A^* 是什么?

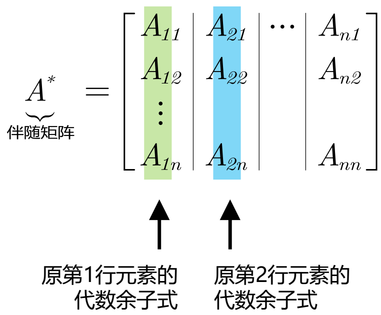
第 1 步: 先求出每个元素的 "代数余子式":

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} = 1 & A_{12} = -5 & A_{13} = 1 \\ A_{21} = -3 & A_{22} = 3 & A_{23} = 0 \\ A_{31} = 2 & A_{32} = -1 & A_{33} = -1 \end{bmatrix}$$

第 2 步: 把 A_{ij} 做转置, 就能得到 A 的伴随矩阵 A^* :

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

即: 按 "行" 求的 "代数余子式", 按 "列" 放.



7.1 性质: 对 "任意" 方阵 A, 有:$A * A^* = A^* * A = |A|E$