

第一积分换元法 — 凑微分法

Table of Contents

1. ★ 别忘了: dx 这部分的意思, 就是对 x 做"微分". 同样, " $d\Box$ ", 就是对" \Box "做微分.
2. 能使用"凑微分法"的前提条件:
3. 凑微分法 (即"第一类换元积分法") Integration By Substitution (核心思想就是"凑")
4. $\int f(\Box)g(x)dx$ 这种题型的做法
5. 各种例题: 用"凑微分法", 来求"不定积分"(即原函数)

1. ★ 别忘了: dx 这部分的意思, 就是对 x 做"微分". 同样, " $d\Box$ ", 就是对" \Box "做微分.

你会发现, 对一个数做“微分”, 可以写成下面三种形式:

1. $\frac{d}{dx}(\text{某数}) = \text{该数的导数}$
2. $\frac{d(\text{某数})}{dx} = \text{该数的导数}$
3. $d(\text{某数}) = \text{该数的导数 } dx$

如: 对 $\ln x$ 做微分, 可以写成: $\rightarrow \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
 $\rightarrow \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$
 $\rightarrow d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$

微分公式表如下:

素材归纳不易，仅供学习参考

一、基本导数公式：

1. $(kx)' = k$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \sec^2 x$
10. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
11. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
12. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

二、基本微分公式：

1. $d(kx) = k$
2. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$
3. $d(a^x) = a^x \ln a dx$
4. $d(e^x) = e^x dx$
5. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$
6. $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$
7. $d(\sin x) = \cos x dx$
8. $d(\cos x) = -\sin x dx$
9. $d(\tan x) = \sec^2 x dx$
10. $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
11. $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
12. $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
13. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
14. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
15. $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$
16. $d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$

Differentiation of Trigonometry Functions

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

2. 能使用"凑微分法"的前提条件:

$$\int f(\square) \underbrace{dx}_{\substack{\text{对 } \square \text{ 做“微分”} \\ \text{微分后的值} = k \cdot dx}} \rightarrow \int f(\square) \underbrace{d\square}_{\substack{\text{对 } \square \text{ 做“微分”} \\ \text{微分后的值} = k \cdot dx}}$$

凑微分法，能使用的前提，必须是要满足： $d\square = k \cdot dx$ ，即 $d\square$ 和 dx 是常数 k 倍的关系。

如果两者不是“常数倍”的关系，就不能使用“凑微分法”来做了。

换言之，要想是“常数倍”的关系，这个 \square 就一定得是一个一次函数，即： $\square = kx + b$

比如： $\int (2x - 1)^{10} \leftarrow$ 其中的 $(2x - 1)$ 满足是个“一次函数”的条件，可以用“凑微分法”来做。

而 $\int (2x^2 - 1)^{10} \leftarrow$ 其中的 $(2x^2 - 1)$ 不是个“一次函数”，就不能用“凑微分法”来做。

回到一开始的话题，如果 $\int f(\square) \underbrace{dx}_{\substack{\text{对 } \square \text{ 做“微分”} \\ \text{微分后的值} = k \cdot dx}} \rightarrow \int f(\square) \underbrace{d\square}_{\substack{\text{对 } \square \text{ 做“微分”} \\ \text{微分后的值} = k \cdot dx}}$ 即如果 \square 是 dx 的 k 倍的话，

$$\begin{aligned} \text{则: } \int f(\square) dx &= \frac{1}{k} \int \underbrace{f(\square)}_{\text{导函数}} \underbrace{d\square}_{=k \cdot dx} \\ &= \frac{1}{k} \underbrace{F(\square)}_{\text{原函数}} + C \end{aligned}$$

3. 凑微分法 (即"第一类换元积分法") Integration By Substitution (核心思想就是"凑")

口诀:

一看: 看哪个部分能作为"整体block",

二凑: 将d后的内容, 强制改成和"整体block"一样,

三比较: 将"原式"和 "修改了d的内容后的值", 相比较, 并做微调, 来维持住"原式"的值不变.

凑微分法, 基本公式是: $\int f(x) dx = F(x) + C \leftarrow$ 即这三个 x 的地方要完全一致!

即, 这里的模型就是: $\int f(\square) d\square = F(\square) + C \leftarrow$ 这三个红色方块地方的内容, 要完全一样!

如果红色方块不一样, 比如 d 后面的红色方块, 和 $f()$ 中的红色方块不一样,

你就要把 d 后面的红色方块, 凑成和 $f()$ 中的一样!

然后才能对整体使用“积分公式”, 求出其“原函数”.

Example 1. 标题

例如:

原式 $\int (2x-1)^{10} dx$ ① \leftarrow 我们可以把 $(2x-1)$ 看做为一个“整体”,
那么, 我们就要把原式, 变成这种模式:

$$\int (\square)^{10} d\square$$

我们先强行把 d 后的内容变成 $(2x-1)$: 即 $\int (2x-1)^{10} d(2x-1)$ ②

其中的 $d(2x-1)$, 其实就是对 $2x-1$ 做微分,

根据“微分公式”: $d(x^n) = nx^{n-1} dx$

所以本例的 $d(2x-1)$ 即 $= (2x-1)' dx = 2dx$

所以 ② 式的 $\int (2x-1)^{10} \underbrace{d(2x-1)}_{=2dx}$

$$= \int (2x-1)^{10} 2dx$$
$$= 2 \int (2x-1)^{10} dx \leftarrow \text{和原式 ① 相比, 多了 2 倍. 即: ① 式} = \frac{1}{2} (\text{② 式})$$

所以原式 ① $= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int (2x-1)^{10} d(2x-1)}_{\text{② 式}} \right) \leftarrow$ 这样, 经过凑微分法(即将 d 后面的内容, 凑成和前面导数部分的内容一样, 作为相同的整体), 我们就能来使用“积分公式”了.

此处, 我们使用这个积分公式: $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10+1} (2x-1)^{10+1} + C$$
$$= \frac{1}{22} (2x-1)^{11} + C$$

Example 2. 标题

例如：

原式 $\int e^{\overbrace{-3x}^{\text{整体}}} dx$ ① \leftarrow 我们把指数上的 $-3x$ 作为一个整体，
这个整体满足是一个“一次函数”，所以我们可以使用“凑微分法”来做。

先强行把 d 后的内容变成 $-3x$ ，即：

$$\int e^{-3x} \underbrace{d(-3x)}_{=-3dx} \quad \text{②} \leftarrow d(-3x) \text{ 这部分，就是对 } -3x \text{ 做微分.}$$

$$d(-3x) = (-3x)' dx = -3dx$$
$$\text{所以完整的 ②式} = -3 \int e^{-3x} dx$$

②式 和 ①式，相差 -3 倍，所以原式 ①式就是 $= -\frac{1}{3} \cdot \text{②式}$

$$\begin{aligned} \text{原式} \int e^{\overbrace{-3x}^{\text{整体}}} dx &= -\frac{1}{3} \cdot \int e^{-3x} \underbrace{d(-3x)}_{=-3dx} \leftarrow \text{利用积分公式 } \int e^x dx = e^x + C \\ &= -\frac{1}{3} e^{-3x} + C \end{aligned}$$

Example 3. 标题

例如：

原式 $\int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4-3x}_{\text{看作一个整体}}}} dx$ ① $\leftarrow \sqrt{4-3x}$ 不能看做一个整体，因为它不是一次函数，
但里面的 $4-3x$ 可以看做一个整体。假设我们用 y 来代表这个整体，
那么本例原式，就是我们想让它变成：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int y^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} y^{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= 2y^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

既然我们把 $4-3x$ 看做一个整体，我们就先强行让 d 后面的内容变成 $4-3x$

$$\begin{aligned}\text{即：} \int \frac{1}{\sqrt{4-3x}} d(4-3x) &\text{ ② } \leftarrow d(4-3x) \text{ 就是对 } 4-3x \text{ 求微分} \\ &= (4-3x)' dx \\ &= -3dx\end{aligned}$$

$$\text{完整的 ②式} = -3 \int \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx, \text{ 比原式 ① 多出 } -3 \text{ 倍.}$$

$$\text{所以原式 ①} = -\frac{1}{3} \cdot \text{②式}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} \int \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx &= -\frac{1}{3} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}} d(4-3x)}_{\text{②式}} \leftarrow \text{根据上面我们做出的 } \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2y^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2(4-3x)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

4. $\int f(\square)g(x)dx$ 这种题型的做法

原式 $\int f(\square)g(x)dx \leftarrow$ 对于这种题型，我们先把 $\underbrace{g(x)}_{\text{导函数}}dx$ 看做一个整体，

那么它的值等于什么呢？其实就是求 $g(x)$ 的原函数。

既然“做微分”是： $d(\text{原函数}) = \text{导函数}dx$ ，
那么就是 $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{g(x)}_{\text{导数}}dx$ ， $?$ 就是 $g(x)$ 的原函数。

如： $\underbrace{x^2}_{\text{导函数}}dx = \underbrace{d}_{\text{做微分}}\left(\underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{\text{原函数}}\right) \leftarrow$ 这个例子正过来写，就是： $\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3) = x^2$

所以原式 $\int f(\square)\overbrace{g(x)dx}^{\text{看做整体}} = \int f(\square)d(\underbrace{\bigcirc}_{g(x)\text{的原函数}}) \leftarrow$ 下面的问题，我们就是要将 \bigcirc 变成 \square

$\rightarrow \int f(\square)\underbrace{d(\square)}_{=k \cdot d(\bigcirc)} \leftarrow$ 同样，“ $d(\square)$ ”和“ $d(\bigcirc)$ ”之间会有一个常数倍的关系。
即： $d(\square) = k \cdot d(\bigcirc)$

所以原式 $= \frac{1}{k} \int \underbrace{f(\square)}_{\text{导函数}}d(\square) = \frac{1}{k} \underbrace{F(\square)}_{\text{原函数}} + C$

Example 4. 标题

例如：

$\int e^x \cos(e^x)dx \leftarrow$ 我们把 $e^x dx$ 合并在一起先做，即做微分： $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{e^x}_{\text{导函数}}dx$ ，显然 $? = e^x$

$$= \int \cos(e^x) \underbrace{e^x dx}_{=d(e^x)}$$

$= \int \cos(e^x) d(e^x) \leftarrow$ 这样就能直接套用积分公式了。

$$= \sin(e^x) + C$$

Example 5. 标题

例如：

原式 $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ ← 除法，可以改写成“乘法”形式

$= \int e^x \cdot \frac{1}{e^x+1} dx$ ← 我们让 e^x 和 dx 先合并起来，先运算

$= \int \frac{1}{e^x+1} \cdot \underbrace{e^x dx}_{=d(e^x)} \textcircled{1}$ ← 绿色部分就是问，做微分时： $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{e^x}_{\text{导函数}} dx$ ， $? = e^x$ ，所以 $d(?) = d(e^x)$

$= \int \frac{1}{e^x+1} d(e^x)$ ← 我们把分母上的 e^x+1 看做是一个整体，把 d 后面的部分强制变成 e^x+1

→ $\int \frac{1}{e^x+1} \underbrace{d(e^x+1)}_{e^x dx} \textcircled{2}$ ← $d(e^x+1) = (e^x+1)' dx = e^x dx$
所以完整的 $\textcircled{2}$ 式 $= \int \frac{1}{e^x+1} e^x dx$ ，发现和原式 $\textcircled{1}$ 没有区别，无倍数关系

所以原式 $= \textcircled{2}$ 式

$$= \int \frac{1}{e^x+1} d(e^x+1) \leftarrow \text{能直接使用不定积分公式了 } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= \ln|e^x+1| + C$$

Example 6. 标题

例如：

$\int x \cdot (2x^2-1)^{10} dx$ ← 先把 x 和 dx 合并在一起，先算

$= \int (2x^2-1)^{10} \underbrace{xdx}_{=d(\frac{1}{2}x^2)} \leftarrow$ 蓝色部分就是问： $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{x}_{\text{导数}} dx$ ， $? = \frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2} \int \underbrace{(2x^2-1)^{10}}_{\text{看做整体}} d(x^2) \leftarrow$ 把 d 后的内容，强制变成 $2x^2-1$
 $d(2x^2-1) = (2x^2-1)' dx = (2 \cdot 2x) dx = 4x dx \textcircled{2}$
而原式中的 $d(x^2)$ 是 $= (x^2)' dx = 2x dx \textcircled{1}$

所以发现，原式 $\textcircled{1} = \frac{1}{2} \cdot \textcircled{2}$ 式

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \int \overbrace{(2x^2-1)^{10} d(2x^2-1)}^{\text{做微分}}}_{\text{②式}} \leftarrow \text{就能套用积分公式了：} \int \underbrace{x^n}_{\text{导函数}} dx = \underbrace{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}_{\text{原函数}} + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{11} (2x^2-1)^{11}}_{\text{原函数}} + C$$

Example 7. 标题

例如：

$$\int \sin^3 x \, dx \quad \leftarrow \text{先变形, 再来凑微分}$$

$$= \int \sin^2 x \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{\text{先做}}$$

$$= \int \sin^2 x \, d(-\cos x) \quad \leftarrow \text{因为 } d(-\cos x) = (-\cos x)' dx = \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \, d(-\cos x)$$

$$= \underbrace{\int (1) d(-\cos x)}_{\int 1 d(\square) = \square + C} - \underbrace{\int (\cos^2 x) d(-\cos x)}$$

$$= (-\cos x + C) + \left(\frac{1}{2+1} (\cos x)^{2+1} + C \right)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Example 8. 标题

例如：

$$\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 2} dx$$

$$= \int \frac{1}{(2x+1)^2 + 1} dx \quad \leftarrow \text{来凑成 } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \text{ 的形式}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\color{blue}{2x+1})^2 + 1} d(\color{blue}{2x+1})$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(2x+1) + C$$

Example 9. 标题

例如：

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\ln x) dx$$

$$= \int \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\ln x) \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{d(\ln x)} \leftarrow \text{先把 } \frac{1}{x} dx \text{ 组合在一起做, 即 } d(?) = \frac{1}{x} dx, \quad ? = \ln x$$

$$= \int \ln(\ln x) \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln x} d(\ln x)}_{d(\ln(\ln x))} \leftarrow \text{再把 } \frac{1}{\ln x} \text{ 和 } d(\ln x) \text{ 组合在一起做,}$$

$$\text{即 } d\left(\underbrace{?}_{\text{原函数}}\right) = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{导函数}} d(\ln x), \leftarrow \text{即 } d(?) = \frac{1}{\square} d(\square),$$

$$\text{显然, 有微分公式 } d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{所以 } ? = \ln \square,$$

$$\text{所以本处的 } ? = \ln(\ln x)$$

$$= \int \underbrace{\ln(\ln x)}_{\text{导函数}} d(\ln(\ln x)) \leftarrow \text{这个就是问 } \int \square^1 d\square, \text{ 这里的导函数是个指数,}$$

$$\text{那么就能根据积分公式 } \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

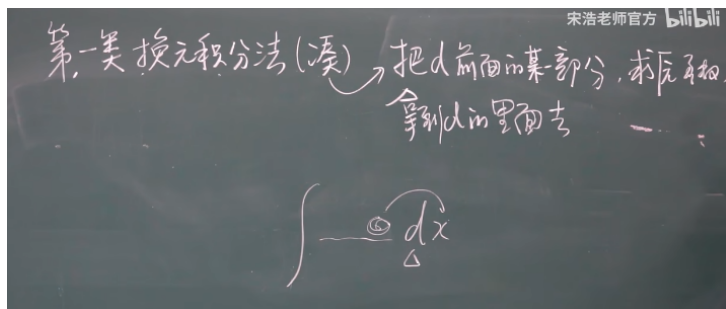
$$\text{即 } \int \square^1 d\square = \frac{1}{1+1} \square^{1+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(\ln x))^2 + C$$

5. 各种例题: 用"凑微分法", 来求"不定积分"(即原函数)

换元积分法 (Integration By Substitution) 是求积分的一种方法, 主要通过引进"中间变量"作变量替换, 来使原式简易, 从而来求较复杂的不定积分。它是由链式法则, 和微积分基本定理推导而来的。

$$\begin{aligned}\int 1dx &= x + C \\ \int 1du &= u + C \\ \int 1d(x^2 - 3) &= x^2 - 3 + C = x^2 + C \\ \int 1dF(u) &= F(u) + C \\ \int 1d[F(\varphi(x))] &= F(\varphi(x)) + C\end{aligned}$$



首先, 我们知道 $\int 1dx = x + C$

并且 $\int 1du = u + C$

所以就有 $\int 1dF(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$

← 假设 $\underbrace{[F(\varphi(x))]}_{\text{原函数}}' = \underbrace{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}_{\text{导数}}$ ← “复合函数”求导的“链式法则”

则就有: $\int \underbrace{[f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)]}_{\text{导数}} dx = \underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}} + C$

进一步变化, 就有: $\int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}} + C$ ← “凑”的思想, 就是把 d 前面的某一部分, 先求出这部分它的原函数是什么, 然后把这个原函数, 拿到 d 的里面(后面)去.

凑, 就是把 d 前面的某一部分, 先求出其原函数, 再拿到 d 的里面(后面)去. 但是到底是拿“哪一部分”呢? 就要靠猜测了. 即最终都要向“积分公式”里面的形式靠齐, 才能作为一个“整体”来应用积分公式.

Example 10. 标题

例如：

$\int (2 \cos 2x) dx$ ← 我们先把2求原函数, 即 $(?)' = 2$, $? = 2x$
然后把2(是导数)的原函数 $2x$, 拿到 d 的里面去,
就变成:

$= \int (\cos 2x) d2x$ ← 现在, 就有两个 $2x$, 我们把 $2x$ 看做一个整体,
就来问: \cos 什么, 对什么求原函数?

显然是 $\cos 2x$, 对 $2x$ 求原函数 ← 根据积分公式: $\int \cos x dx = \sin x + C$

就有:

$$= \sin 2x + C$$

Example 11. 标题

例如：

$\int \frac{1}{3+2x} dx$ ← 我们怎么凑? 能变成 $\int (?) d(?)$ 的形式呢?

既然导数部分(即 $\frac{1}{3+2x}$)是分式, 那我们就来看看,

能不能凑成“积分公式”中的 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 的形式,
就能应用这个积分公式来做了.

另外, 所拿取的部分, 要先求原函数, 再拿到 d 后面,

并且这个原函数, 还要和导数部分的数值一致, 即 $\int (?) d(?)$ 成为一个整体,
才能运用积分公式.

那么本例选取哪一部分来凑, 怎么凑, 才能让该部分的原函数, 和导数数值一致呢?

我们看到, 既然导数部分中有个 $2x$, 那我们就来想, 哪一部分的原函数, 能变成 $2x$ 呢?

显然, 2(导数)的原函数就是 $2x$, 那我们就来把分子上的1, 凑成2, 再对它求原函数. 来做下去.

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{3+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{3+2x} dx \leftarrow \text{分子上的2(导数), 其原函数是 } 2x + C, \text{ 可以进一步凑成分母上的数值} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} d(2x + C) \leftarrow C \text{ 可以是任意常数, 当然 } C \text{ 也能是3了} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} d(2x + 3) \leftarrow \text{就可以应用“积分公式”中的 } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C \end{aligned}$$

Example 12. 标题

例如：

$$\begin{aligned} \int (2x \cdot e^{x^2}) dx &\leftarrow \text{的 } 2x \text{ 部分求原函数 } = x^2, \text{ 拿到 } d \text{ 的后面去} \\ &= \int (e^{x^2}) d(x^2) \leftarrow \text{就能用积分公式 } \int e^x dx = e^x + C \\ &= e^{x^2} + C \end{aligned}$$

Example 13. 标题

例如：

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} dx &\leftarrow \text{把 } x \text{ 取原函数 } = \frac{1}{2} x^2, \text{ 放到 } d \text{ 中} \\ &= \int \sqrt{1-x^2} d\left(\frac{1}{2} x^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(x^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(-x^2) \leftarrow \text{为了凑导数中的 } -x^2, \text{ 将 } d \text{ 后的 } x^2 \text{ 前面加个负号,} \\ &\quad \text{同时导数部分就也要再加个负号了} \\ &= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2) \leftarrow \text{为了凑导数中的 } 1-x^2, d \text{ 后就加个 } 1, \\ &\quad \text{因为 } d \text{ 后的部分可以任意加减常数} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (1-x^2)^{1+\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Example 14. 标题

例如：

$\int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$ ← 这种分母的最高次数，比分子的最高次数大（即“头小屁股大”）的题目，我们就用“换元法”来做，给个 $u = x + 2$ ，来先代入进原式中。

$$= \int \frac{(u-2)^2}{u^3} dx$$

$$= \int \frac{u^2 - 4u + 4}{u^3} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - 4\frac{1}{u^2} + \frac{4}{u^3} \right) dx$$

$$= \left(\int \frac{1}{u} dx \right) - \left(4 \int u^{-2} dx \right) + \left(4 \int u^{-3} dx \right) \leftarrow \text{其中的 } \int \frac{1}{u} dx \text{ 部分，能否用指数形式来做？}$$

$$\text{即 } \int u^{-1} dx = \frac{1}{-1+1} u^{-1+1} + C \leftarrow \text{发现分母为0，所以不能用指数形式来做。}$$

$$\text{只能套用公式 } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ 来做}$$

$$= \ln|u| - 4 \cdot \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} + 4 \cdot \frac{1}{-3+1} u^{-3+1} + C$$

$$= \ln|u| + 4u^{-1} - 2u^{-2} \leftarrow \text{然后再把 } u = x + 2 \text{ 代入回来}$$

$$= \ln|x+2| + 4(x+2)^{-1} - 2(x+2)^{-2} + C$$

Example 15. 标题

例如：

$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ ($a \neq 0$) ← 我们看看能不能凑成能用 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ 的公式
那么本例，我们先把分母上的 a^2 变成 1

$$= \int \frac{1}{a^2 \cdot \frac{a^2 + x^2}{a^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \leftarrow \text{现在，我们还要把 } d \text{ 后面的内容，凑成 } \frac{x}{a} \text{ 的形式}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right) \leftarrow \text{即积分 } \int \text{ 前面的常数部分，可以直接运算 } d \text{ 后面的部分里去}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right) \leftarrow \text{也能就用 } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \text{ 的积分公式了}$$

$$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

Example 16. 标题

例如:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0) \leftarrow \text{我们看看能否凑成用公式 } \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$$

先把本例分母中的 a^2 凑成 1

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2}}} dx$$

$$= \int \frac{1}{a \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d\textcolor{blue}{x} \leftarrow \text{把 } d \text{ 后面的 } x \text{ 凑成 } \frac{x}{a}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d(\textcolor{blue}{\frac{x}{a}}) \leftarrow \text{积分符号 } \int \text{ 前面的常数, 可以直接拿到 } d \text{ 后面, 做乘法运算}$$

这里就是能变成 $d(\frac{1}{a} \cdot \textcolor{blue}{x}) = d(\frac{x}{a})$

$$= \arcsin(\frac{x}{a}) + C$$

Example 17. 标题

例如：

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+a)(x-a)} dx \leftarrow \text{先把分数部分做拆分, 即“裂项”}:$$

$$\text{暂且先拆成 } \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}$$

$$= \frac{x-a-x-a}{(x+a)(x-a)}$$

$$= \frac{-2a}{(x+a)(x-a)} \leftarrow \text{和原导数(即绿色部分)相差 } -2a \text{ 倍}$$

$$\text{所以, 原导数部分 } \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{-2a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right)$$

$$= \frac{1}{-2a} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{-2a} \left[\int \left(\frac{1}{x+a} \right) dx - \int \left(\frac{1}{x-a} \right) dx \right] \leftarrow \text{我们看看每项, 能不能凑成 } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ 这种形式}$$

$$= \frac{1}{-2a} \left[\int \left(\frac{1}{x+a} \right) d(x+a) - \int \left(\frac{1}{x-a} \right) d(x-a) \right] \leftarrow \text{因为 } d \text{ 里面可以随意加减常数}$$

$$= \frac{1}{-2a} \cdot (\ln|x+a| - \ln|x-a|) + C$$

$$= \frac{1}{-2a} \cdot \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

Example 18. 标题

例如：

$$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+2\ln x} dx$$

$$= \int \frac{1}{1+2\ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{=d(\ln x)} \leftarrow \text{我们先把 } \frac{1}{x} dx \text{ 合并在一起做, 即问: } d(?) = \frac{1}{x} dx, \quad ? = \ln x$$

$$= \int \frac{1}{1+2\ln x} d(\ln x) \leftarrow \text{我们将 } d \text{ 后面的部分, 强行变成 } 1+2\ln x$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+2\ln x} d(2\ln x + 1) \leftarrow \text{这里就能套用积分公式 } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + C$$

Example 19. 标题

例如:

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int e^{3\sqrt{x}} \underbrace{x^{-\frac{1}{2}} dx}_{\text{合并先做}} \leftarrow x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ 就是问: } d(?) = x^{-\frac{1}{2}} dx,$$
$$? = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} x^{-\frac{1}{2} + 1}$$
$$= 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int e^{3\sqrt{x}} d\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 \int e^{3\sqrt{x}} d(\sqrt{x})$$

$$= \frac{2}{3} \int e^{3\sqrt{x}} d(3\sqrt{x})$$

$$= \frac{2}{3} e^{3\sqrt{x}} + C$$

Example 20. 标题

例如：

$$\begin{aligned}& \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx \\&= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \underbrace{\cos x dx}_{=d(\sin x)} \\&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x) \\&= \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \, d(\sin x) \\&= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \, d(\sin x) \\&= \int (\sin^2 x) d(\sin x) - \int (2\sin^4 x) d(\sin x) + \int (\sin^6 x) d(\sin x) \\&= \frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \cdot \frac{1}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C\end{aligned}$$

Example 21. 标题

例如：

$$\begin{aligned}& \int \tan x \, dx \\&= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\&= \int \frac{1}{\cos x} \underbrace{\sin x \, dx}_{=d(-\cos x)} \\&= - \int \frac{1}{\cos x} \, d(\cos x) \leftarrow \text{根据积分公式 } \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \\&= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

Example 22. 标题

例如：

$$\begin{aligned} & \int \cot x \, dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\ &= \int \frac{1}{\sin x} \underbrace{\cos x \, dx}_{=d(\sin x)} \\ &= - \int \frac{1}{\sin x} \, d(\sin x) \leftarrow \text{根据积分公式 } \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \\ &= -\ln|\sin x| + C \end{aligned}$$

Example 23. 标题

例如：

$$\begin{aligned} & \int \cos^2 x \, dx \leftarrow \text{根据三角倍角公式 } \begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 A \end{aligned} \\ & \text{所以 } 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \\ & \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x + \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x \right) d(2x) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, d(2x) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

Example 24. 标题

例如：

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx \leftarrow \text{对于偶次方的三角函数，一般都用倍角公式来做}$$

根据三角倍角公式 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

所以:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} (\cos^2 x)^2 dx$$

$$= \int \left(\underbrace{\frac{1 - \cos 2x}{2}}_{2\sin^2 x} \right) \left(\underbrace{\frac{1 + \cos 2x}{2}}_{2\cos^2 x} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(\int 1 dx + \int (\cos 2x) dx - \int (\cos^2 2x) dx - \int (\cos^3 2x) dx \right)$$

$$\rightarrow \int 1 dx = x + C$$

$$\rightarrow \int (\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\rightarrow \int (\cos^2 2x) dx \leftarrow \text{根据公式 } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \int \left(\frac{1 + \cos 2(2x)}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C$$

$$\rightarrow \int (\cos^3 2x) dx \leftarrow \text{对于奇数次项的三角函数, 一般拆分成单数次 + 偶数次两项}$$

$$= \int \cos^2 2x \underbrace{\cos 2x dx}_{= \frac{1}{2} \cos 2x d(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos^2 2x d(\sin 2x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) \\
&= \frac{1}{2} \left[\int 1 d(\sin 2x) - \int \sin^2 2x d(\sin 2x) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + C \right] \\
&= \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x - \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) - \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + C \right) \right)
\end{aligned}$$

Example 25. 标题

例如:

$$\begin{aligned}
&\int \sin^6 x dx \\
&= \int (\sec^2 x)^2 \underbrace{\sec^2 x dx}_{d(\tan x)} \leftarrow \text{根据积分公式 } \int \sec^2 x dx = \tan x + C \\
&= \int (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) \\
&= \int (1 + 2 \tan^2 x + \tan^4 x) d(\tan x) \\
&= \tan x + 2 \cdot \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C
\end{aligned}$$

Example 26. 标题

例如：

$$\int \csc x \, dx \leftarrow \text{本题直接记住最后的结果就行，证明过程不容易想到}$$

$$= \int \frac{1}{\sin x} dx \leftarrow \text{根据倍角公式：} \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{就有：} \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}} dx$$

$$= \int \frac{1}{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \leftarrow \text{根据三角函数公式 } \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \int \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}} \underbrace{\sec^2 \frac{x}{2}}_{=2d\left(\tan \frac{x}{2}\right)} dx \leftarrow \text{根据积分公式：} \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

将 d 后的内容强制变为 $\frac{x}{2}$ ，即：

$$= \underbrace{2 \sec^2 \frac{x}{2} \, d\left(\frac{x}{2}\right)}_{= \tan \frac{x}{2} + C}$$

$$= \int \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}} \cdot 2d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \leftarrow \text{根据积分公式：} \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C \leftarrow \text{根据三角半角公式：} \tan \frac{x}{2} = \csc x - \cot x$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + C$$

Example 27. 标题

例如：

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx \quad \leftarrow \text{根据三角函数“积化和差”公式:}$$
$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$$

$$= \int \frac{1}{2} [\cos (3x + 2x) + \cos (3x - 2x)] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x + C \right)$$

$$= \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C$$
