目录

第一部分 基本概念 **2**

1 排列 and 组合 **2**

1.1 加法原理, 乘法原理 2

1.2 不重复排列: $\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\text{选出的数量 m}} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$ 3

1.3 全排列: $\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}!$ 3

1.4 重复排列 3

1.5 "送利益" 模型 (放球模型) 3

1.6 组合 combination : $\mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{选}} = \frac{\text{总!}}{\text{选!}\left(\text{总}-\text{选!}\right)} = C_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}$ 4

2 交集 $\cap$, 与并集 $\cup$ **5**

3 频率 **5**

4 频率的性质: **6**

5 公理化 **6**

5.1 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ 6

5.2 对于 "完备事件组" 中的所有事件来说: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(\Omega) = 1$ 6

5.3 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 7

5.4 若 A 包含着 B, 则有: $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(A) >= P(B)$ 8

5.5 加法公式: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 8

5.6 加法公式: $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ 8

6 古典概型: $\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{A 中包含的“基本事件”有多少个}}{\textbf{S 中“基本事件”的总数}}$ **9**

7 几何概型 **10**

7.1 "古典概率模型" 和 "几何概率模型" 的区别 13

概率

第一部分 基本概念

1 排列 and 组合

1.1 加法原理, 乘法原理

- 一件事, 只需 "一步" 就能完成. 但这一步中有几种不同的方案可供选择, 就用 "加法" 原理.
- 一件事, 要分成 "几步骤" 才能完成. 每一步, 又有几种不同的选择方案. 就用 "乘法" 原理.

例

上海汽车摇号, 成功率是 5%.
有灰产称: 能帮你将中签率从 5% 提高到 50%, 只要三次就能保证你中签.
→ 若成功: 你车 20 的话, 他们就收你 10% (即 2 万.)
→ 若失败: 代理费全部返还你, 并再陪你 800 元.
问: 1. 他们真的有内部资源吗? 2. 他们会亏还是赚?

正常人, 摇号三次, 每月一次. 即三个月后中签的概率是多少呢?
→ 错误的算法: $0.05^3 = 0.000125$. ← 这算的是 "连续 3 个月, 每个月都能中奖的概率"!
→ 正确的算法: 先算连续三个月, 每个月都没中奖的概率 ($= 0.95^3 = 0.857375$), 然后再 1 减去这个概率值 ($1 - 0.95^3 = 0.142625$). 这个结果, 就是 "至少有一个月能中奖的概率", 即 14.2%.

现在, 我们就用正常人三个月中的中一次奖的概率 14.2 %, 来算算灰产的收益.
灰产找来 100 人, 三个月后:
→ 其中会有平均 14% 个人中签. 每人收 2 万, 就是总收入 14×2=28 万.
→ 还有平均 86 个人没中签, 每人赔偿 800 元, 灰产支出 = 86×800 =68800 元.
→ 即灰产的总收入 = 收入 28 万 - 支出 6.88 万 = 21.12 万.
显然, 灰产根本不需要什么内部资源, 直接普通人的中签概率, 就能在 100 人中, 净赚 21.12 万元.

那么, 我们继续来算一下, 对于没中签的客户, 灰产要陪他们每人多少钱, 灰产才能不赚不亏呢? 即灰产能赚到的钱, 要全部赔出去.
即:

$$280000\text{元总收入} = 86\text{人} \cdot x\text{元}$$
$$x = \frac{280000}{86} = 3255.81\text{元}/\text{人}$$

所以如果你是客户, 要让灰产赔 3255 元/人, 如果他们能够接受, 你才能相信他们的确可能有内部资源.

1.2 不重复排列: $\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\text{选出的数量 m}} = \dfrac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$

不重复排列: 就是从 n 个不同的元素中, 取出 m 个来排列, 排过的元素不放回, 没有下次排列资格了.
则, 所有可能的排列 (Permutation) 方案, 就是:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\text{选出的数量 m}} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}}$$

例

10 人选 5 人上岸, 共有多少种选择?
$\mathrm{P}_{\text{总}10}^{\text{取}5} = \frac{\text{总!}}{(\text{总}-\text{选})!} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$

1.3 全排列: $\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{n} = n!$

全排列, 就是从 n 个里面, 取出全部 n 个来排列, 即所有的元素都参与了排列.

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{n} = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

例如:
- $\mathrm{P}_2^2 = 2! = 2$
- $\mathrm{P}_1^1 = 1! = 1$

例

一套书, 共 5 本, 排在一起. 问: 自左向右, 或自右向左, 是按着 1,2,3,4,5 编号顺序的概率是?
即 $= \dfrac{\text{顺序排是 1 种情况} + \text{倒序排是 1 种情况}}{\mathrm{P}_{\text{总}5}^{\text{选}5}} = \dfrac{2}{\mathrm{P}_5^5} = \dfrac{1}{60} = 0.0166667$

- $0! = 1$. 因为:
(1) 解释 1: $m! = m(m-1)!$, 如 $10! = 10 \cdot 9!$. 所以 $1! = 1 \cdot 0!$, 即得到 $0! = 1$
(2) 解释 2: P_0^0 就是从 0 个元素里面, 取出 0 个元素来排列. 这只有一种情况: 即 "不选". 因为不存在任何元素, 所以没法选. 所以 $P_0^0 = 0! = 1$

- $5^0 = 1 \leftarrow$ 因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
- 0^0 无意义. $\leftarrow$ 因为 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 而分母不能为 0, 所以该式子无意义.

1.4 重复排列

即: 排过队的元素, 可以拿回去, 重复参加后面的排队. (但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。)
重复排列: $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{\text{共取了 m 次的 n}} = n^m$

1.5 "送利益" 模型 (放球模型)

将 $n_{benefit}$ 种利益, 随机投送给 N_{man} 个人 ($N_{man} \geq n_{benefit}$). 问: 每个人中, 最多只拿到 1 种利益的概率?
→ 先看样本空间: 第 1 种利益, 有 N_{man} 个人的去向可供选择; 第 2 种利益, 同样如此, ... 所以, 根据 "分步骤" 法, 全部 $n_{benefit}$ 种利益, 它们的所有去向, 就共有: $\underbrace{N_{man} \cdot N_{man} \cdot ... \cdot N_{man}}_{\text{共} n_{benefit} \text{个}} = N^n$ 个.

→ 再来看 “每个人中, 最多只拿到 1 种利益”: 第 1 个人,
未完待续... 这里没看懂

1.6 组合 combination : $\mathrm{C}_{总}^{选} = \frac{总!}{选!(总-选!)} = C_{总}^{总-选}$

组合: 是从 n 个不同元素中, 每次取出 m 个不同元素 $(0 \le m \le n)$, 合成一组, 而不需要管排队顺序, 就称为: 从 n 个元素中不重复地选取 m 个元素的一个组合.

即: 有顺序, 就用排列; 无顺序, 就用组合.

组合的公式是:

$$\boxed{\mathrm{C}_{总数}^{选数} = \frac{\mathrm{P}_{总}^{选}}{选!} = \frac{总!}{选!\left(总-选!\right)}}$$

$$\boxed{\mathrm{C}_{总}^{选} = \mathrm{C}_{总}^{总-选}}$$

上面第二个公式的意思是: 比如你有 100 人, 选其中 10 人上岸, 就相当于是选 90 人不上岸.
即: $\mathrm{C}_{100}^{10} = \mathrm{C}_{100}^{100-10} = \mathrm{C}_{100}^{90}$

同理, 有: $\boxed{\mathrm{C}_{总}^{0} = \mathrm{C}_{总}^{总-0} = \mathrm{C}_{总}^{总}}$

例

有共 N 人, 其中有 w 个女, 你任抽 n 人, 其中恰好有 x 个女人 $(x \le w)$ (记为事件 A) 的概率是?
我们用 “分步骤法” 来做: 第一步, 先取 x 个女人. 第二步, 再取男人 (数量就是 = n-x).

$$\mathrm{P(A)} = \frac{取到\ x\ 女}{从总\ N\ 人中取\ n\ 人} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{总\ w\ 女}^{取\ x\ 女}}^{第一步:\ 先从全部女人里面,\ 取\ x\ 个女人} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{总\ N\ 人-总\ w\ 女=总男人数}^{总取\ n\ 人-x\ 女}}^{第二步:\ 再从总男人里,\ 取剩下的男人数量}}{\mathrm{C}_{总\ N\ 人}^{取\ n\ 人}}$$

上面这个公式, 其实就是 “古典概型” 里面的 “超几何分布”.

例

有共 9 球, 5 白, 4 黑. 任取 3 球, 问:

(1) 是 2 白 1 黑的概率: $\mathrm{P}(2\ 白\ 1\ 黑) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^2}^{第一步:5\ 白取2} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_4^1}^{第二步:4\ 黑取1}}{\underbrace{\mathrm{C}_9^3}_{总\ 9\ 取3}} = 0.47619$

(2) 取到的 3 球中, 无黑球: $\mathrm{P}(3\ 白) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^3}^{5白取3}}{\underbrace{\mathrm{C}_9^3}_{总\ 9\ 取3}} = 0.119048$

(3) 取到的 3 球中, 颜色相同: $\mathrm{P}(3\ 球同色) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^3}^{5白取3} \overbrace{+}^{或} \overbrace{\mathrm{C}_4^3}^{4黑取3}}{\underbrace{\mathrm{C}_9^3}_{总\ 9\ 取3}} = 0.166667$

或, 也可用第二种思路来解:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(3\text{ 球同色}) = 1 - \mathrm{P}(3\text{ 球存在不同色})\\
&= 1 - \frac{1\text{白 2 黑, 或 2 白 1 黑}}{9\text{取}3}\\
&= 1 - \frac{\overbrace{\mathrm{C}_5^1}^{5\text{白取}1;4\text{黑取}2}\ \overbrace{\mathrm{C}_4^2}\ \overbrace{+}^{\text{或}}\ \overbrace{\mathrm{C}_5^2}^{5\text{白取}2;4\text{黑取}1}\ \overbrace{\mathrm{C}_4^1}}{\mathrm{C}_9^3}\\
&= 0.166667
\end{aligned}
$$

2 交集 ∩ , 与并集 ∪

A, B, C 是试验 E 的随机事件. 则表示法是:
- A 发生: A

下面, 加法即表示 “或” :
- A, B, C 恰有一个发生: $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$
- A, B, C 至少一个发生 (即 >=1) : A+B+C 或 $A \cup B \cup C \leftarrow$ 即 3 选 1, 还有两个发不发生, 不用管, 随意, 都行.
- A, B, C 至多一个发生 (即 <=1) : $\underbrace{A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C}_{3\text{选}1} + \underbrace{\overline{ABC}}_{3\text{选}0}$
- 恰有两个发生: $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$
- 至少两个发生 (即,>=2) : $\underbrace{AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC}_{3\text{选}2} + \underbrace{ABC}_{3\text{选}3} + \underbrace{AB + BC + AC}_{3\text{选 }2\text{, 还有一个发不发生不用管, 随意}}$

下面, 乘法即表示 “同时” :
- 只有 A 发生: $A\overline{BC}$
- A, B, C 同时发生: ABC

例

一次射击试验, 整个流程是打三枪, 用 $A_i, (i = 1, 2, 3)$ 来表示 “在第 i 次时击中了目标”.
记住: 加法 (+) 代表 “或, 并 ∪”; 乘法代表 “交 ∩”.
- $A_1 + A_2$: 表示第一次击中了, 或第二次击中了. 即前两次至少击中一次.
- $\overline{A_2}$: 表示第二次没击中.
- $A_1 + A_2 + A_3$: 表示仅第一次击中, 或仅第二次击中, 或仅第三次击中.
- $A_1A_2A_3$: 表示三次全中.
- $A_2\overline{A_3} = A_2 - A_3$: 表示第二次击中, 并且第三次失败.
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 + A_3}$: 表示第一次没中, 并且第三次也没中.
- $\overline{A_1} + \overline{A_3}$: 表示第一次没中, 或第三次没中.

3 频率

做 n 次试验, A 事件发生了 m 次, 我们就把 $\dfrac{A\text{事件发生的次数}m}{\text{共}n\text{次试验}}$ 叫做 “频率”. 记作 $\omega_n(A)$.
比如丢硬币, 丢 10 次, 丢 100 次, 丢 1000 次, 每次的 “频率” 可能都不一样, 比如结果是 $\frac{7}{10}, \frac{55}{100}, \frac{508}{1000}$. 所以这就是 “频率” 和 “概率” 的区别.
但你可以发现, 随着试验次数 n 的增大, A 事件的 “频率” 的值, 会接近与 “概率” 的值. 即: $\lim_{n\to 0} \omega_n(A) \to P$

4 频率的性质:

规范性:

- $\omega_n(\Omega) = 1 \leftarrow$ 做 n 次试验, 里面 “必然事件” 发生的频率, 是 1. 既然是 “必然事件 Ω”, 它肯定会发生, 所以频率肯定是 1.
- $\omega_n(\Phi) = 0 \leftarrow$ 做 n 次试验, 里面 “不可能事件” 发生的频率, 是 0.

可加性:

比如做 1000 次试验, 即 Ω_{1000}, 则有:

$$\omega_{1000}(A_1 + A_2) = \underbrace{\omega_{1000}(A_1)}_{1000\text{次试验中},A1\text{事件发生的频率}} + \underbrace{\omega_{1000}(A_2)}_{1000\text{次试验中},A2\text{事件发生的频率}}$$

即: “和的频率”, 就等于 “频率的和”.

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\omega_n}_{\text{做}n\text{次试验}}\underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_m)}_{\text{里面有}m\text{个事件}}}_{\text{做}n\text{次试验, 里面有}m\text{个事件发生了的频率}} = \omega_n(A_1) + \omega_n(A_2) + ... + \omega_n(A_m)}$$

5 公理化

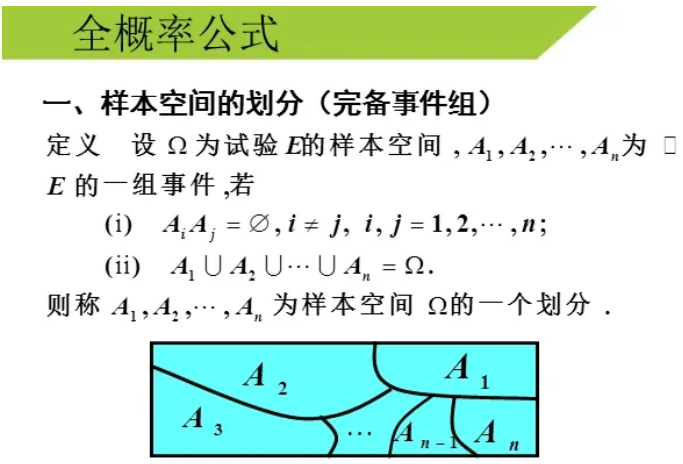
5.1 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

5.2 对于 “完备事件组” 中的所有事件来说: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(\Omega) = 1$

完备事件组 collectively exhaustive events 就是: 如果事件 B1, B2, B3, ... Bn 满足:

1. 它们两两互不相容 (即两两的交集 = 空集),
2. 其 “和” 为全集 Ω.

换言之, 若 n 个事件两两互斥, 且这 n 个事件的 “并” 是 Ω，则称这 n 个事件为 “完备事件组”.



例

有20件衣服，质量分3等，其中一等的6件，二等的10件，三等的4件.

问：“任取3件，至少2件是同质量”的概率?

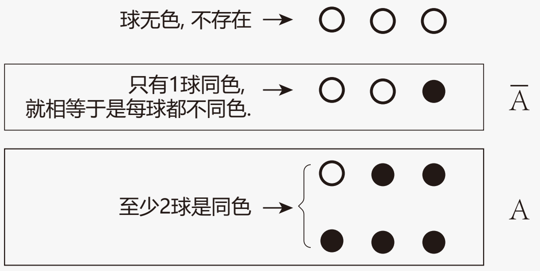
这个问题其实可转化为有色球问题:

20球,三色,每色数量分别是6,10,4球. 问3取2球，至少2球是同色的概率.

即 $P(\underbrace{\text{同色}\geq 2\text{球}}_{\text{事件}A}) = 1 - P(\underbrace{3\text{球都不同色}}_{\text{事件}\bar{A}})$

$$= 1 - \frac{\overbrace{C_6^1}^{\text{色1中的共6球取1个.}}\ \overbrace{C_{10}^1}^{\text{色2中的共10球取1个.}}\ \overbrace{C_4^1}^{\text{色3中的共4球取1个}}}{\underbrace{C_{20}^3}_{\text{总20球取3}}}$$

$$= \frac{15}{19} = 0.789474$$



例

n个人中，至少2人生日相同的概率是?

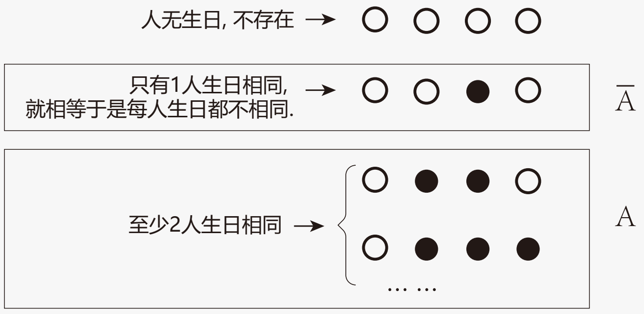
$P(\underbrace{\text{至少2人生日相同}}_{\text{事件}A}) = 1 - P\ (\underbrace{\text{只有1人生日相同}}_{\text{即n个人每人生日都不相同. 即事件}\bar{A}})$

$$= 1 - \frac{\text{n个人生日都不相同}}{\text{n个人，随便选生日，无所谓充不重复}}$$

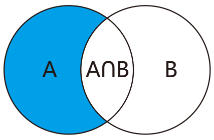
$$= 1 - \frac{\overbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365-n+1}^1}^{\text{共n人的}}}{\underbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365}^1}_{\text{共n人的}}}$$

比如，若总人数$n = 55$人，则:

$$P(A) = 1 - \frac{\overbrace{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-54)}^{\text{共55个数}}}{(C_{365}^1)^{55}} = 0.99$$



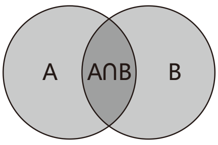
5.3 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$



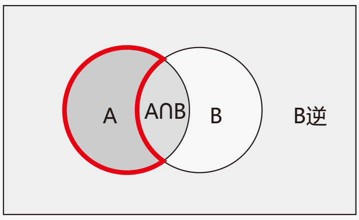
P(A-B) = P(A) - P(AB)

5.4 若 A 包含着 B, 则有: $P(A-B)=P(A)-P(B)$, 且 $P(A)>=P(B)$

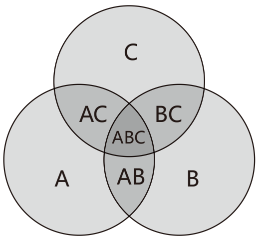
5.5 加法公式: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



P(A+B) = P(A) +P(B)- 它们的交集部分 P(AB)

> 例
>
> A 事件的概率是 0.4, 即 P(A)=0.4;
> P(B)=0.3;
> 且 P(A+B)=0.6, ← 说明 A 与 B 有交集部分存在. 否则, 如果 A 与 B 是不相容的话, 它们和的概率, 应该是 0.4+0.3=0.7.
> 所以它们的交集 P(AB) 就是 =0.1 :
>
> $$\underbrace{P(A+B)}_{0.6}=\underbrace{P(A)}_{0.4}-\underbrace{P(B)}_{0.3}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}$$
>
> 求 $P\left(A\overline{B}\right)$, 即求 $A\cap B$逆 的概率:
>
> $$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A-B)=\underbrace{P(A)}_{=0.4}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}=0.3$$
>
> 
>
>
> A∩B逆：就是红色面积的那块

5.6 加法公式: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$



P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)
−P(AB)−P(AC)−P(BC)
+P(ABC)

说明:

$$P(A+B+C)$$
$$=\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分, 被加了 3 次}}\underbrace{-P(AB)-P(AC)-P(BC)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分, 又减了 3 次}}+\underbrace{P(ABC)}_{\text{所以最后, 我们还要把镂空的}ABC\text{交集部分, 加上一份上去}}$$

例

已知 $\begin{cases} P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4} \\ P(AB)=0 \\ P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16} \end{cases}$ ，求 $\begin{cases} 1.\ A,B,C\text{ 至少一个发生的概率} \\ 2.\ A,B,C\text{ 都不发生的概率} \end{cases}$

我们先来算 $P(ABC)$，因为下面会用到.

因为 $ABC\subset AB$，所以 $P(ABC)\le \underbrace{P(AB)}_{=0}$，因此 $P(ABC)=0$

→ 至少一个发生，就是用“并∪”，用加法：

所以 $P(A+B+C)=\underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{P(C)}_{=\frac{1}{4}}-\underbrace{P(AB)}_{=0}-\underbrace{P(AC)}_{=\frac{1}{16}}-\underbrace{P(BC)}_{=\frac{1}{16}}+\underbrace{P(ABC)}_{=0}$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{16}=\dfrac{5}{8}=0.625$

→ 都不发生，即 $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=1-\underbrace{P(A+B+C)}_{\text{任意一个发生}}=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}=0.375$

例

有两台机床，$\begin{cases}\text{第1台：不需要照看的概率是0.9，则需要照看它的概率就是0.1} \\ \text{第2台：不需要照看的概率是0.8，则需要照看它的概率就是0.2} \\ \text{两台都需要照看的概率，是0.02}\end{cases}$

问：至少1台需要照看的概率是?

思路1：$P(\text{至少1台要照看})=1-P(\text{都不需要照看})$

$=1-(0.9\cdot 0.8)=0.28$

思路2：至少1台需要照看，就是要照看1台或2台呗，“或”就是用加法，并集

$=P(A_1+A_2)=\underbrace{P(A_1)}_{=0.1}+\underbrace{P(A_2)}_{=0.2}-\underbrace{P(A_1A_2)}_{=0.02}=0.28$

---

6 古典概型: $P(A)=\dfrac{A\text{ 中包含的“基本事件”有多少个}}{S\text{ 中“基本事件”的总数}}$

满足这些条件的, 就属于“古典概率 classical models of probability 模型”:
- 样本点是有限的
- 所有样本点出现的可能性, 是相同的. 即“等可能性”.

古典概型模型:
事件 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_k}\}$ 发生的概率为:
$P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{A\text{ 中包含的“基本事件”有多少个}}{S\text{ 中“基本事件”的总数}}$

古典概率模型的性质:
- $0<=P(A)<=1$
- $P(\Omega)=1,\quad P(\Phi)=0$
- 有限可加: $A_1,A_2,...A_n$ 是互不相容的. 即 $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_n)$

古典概率模型:
- 其优点是: 可以直接套公式来算.

- 但其缺点是:
(1) 其结果必须是 “有限个” 的结果 (如, 掷骰子, 结果就是 6 个基本事件, 而不是无限个事件.)
(2) 其结果, 必须是 “等可能性”.

例

有 a 个白, b 个黑, 问: 从中连续取出 m 个球 (连续取, 就是不放回的意思了) $(1 \le m \le a+b)$, 第 m 个是白球的概率 = ?

思路 1 : 其实我们只要考虑第 m 个位置的这一个球的情况就行了, 其他位置的球, 随便它们什么颜色, 我们不用考虑的.

$$\mathrm{P}\left(\text{第 m 位置是白球}\right) = \frac{\text{在第 m 个位置上, 从 a 个白球里取 1 个放上去. 剩下数量的其他位置上, 依然做全排列}}{\text{所有球的全排列}}$$

$$\text{即 } \mathrm{P}\left(\text{第 m 位置是白球}\right) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 a 白}}^{\text{取}1}}^{\text{第一步, 先取 1 个白球, 占位放在第 m 个位置上.}} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}-1}^{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}-1}}^{\text{第二步: 剩下的所有球, 依然做全排列}}}{\mathrm{P}_{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}}^{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}}}$$

思路 2 : 或者我们也只需考虑前 m 个数量的球就行了, 后面其他的球, 爱怎样颜色怎样颜色, 不用我们考虑.

$$\mathrm{P}\left(\text{第 m 位置是白球}\right) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 a 白}}^{\text{取}1}}^{\text{第一步, 先取 1 个白球, 占位放在第 m 个位置上}} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}-1}^{m-1}}^{\text{第二步:m 个数中的剩下的所有球, 依然做全排列}}}{\underbrace{\mathrm{P}_{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}}^{m}}_{\text{m 个球的全排列}}}$$

其实你有没有发现? “在第 m 个位置上出现白球” 这个 “m 索引位置”, 其实是个障眼法. 白球出现在任何其他位置, 它出现在第 1 个位置, 第 10 个位置, 最后一个位置, 对我们的计算结果没有任何影响. 因为不管白球出现在第几个位置上, 它出现的概率都是相同的, 因为是古典概率嘛! 所以, “位置为几” 其实不重要.

所以, 我们就有了第三种思路: 我们就把这个白球, 让它直接出现在第 1 个位置就好了:

$$\mathrm{P}\left(\text{第 1 个位置是白球}\right) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 a 白}}^{1}}^{\text{(在第 1 个位置上,) 从白球里, 取 1 个 的取法数量}}}{\underbrace{\mathrm{C}_{\text{总 a 白}+\text{总 b 黑}}^{1}}_{\text{(在第 1 个位置上,) 从总数里, 取 1 个 的取法数量}}} = \frac{a}{a+b}$$

---

7 几何概型

几何概型 geometric models of probability, 即这类概率问题, 能够转换成用 “几何问题” 来求解.

例

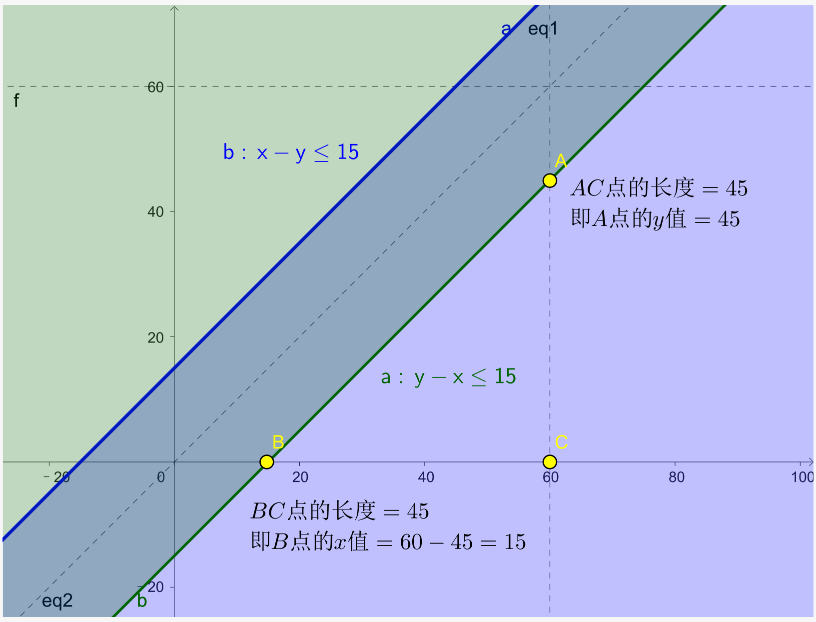
有甲乙两人, 相约在 6-7 点见面 (其实这个具体的时间点也是个障眼法, 只要在 1 个小时的区间就行). 先到者, 最多等对方 15 分钟, 然后就离开了.
甲乙两人, 在这 1 小时内的任意时刻, 都可能到达.
问, 他们能相见的概率是多少?

我们令

- 事件 A : 表示两人见到了面
- x : 表示甲到达的时间点
- y : 表示乙到达的时间点

他们要能见到面, 即 $|y-x| \leq 15$ 分钟. 那么这就有两种可能性:
- 甲先到. 即 $x \leq y$ (甲来到的时间点 x, 比乙来到的时间点 y 要小 (早)), 即 $y-x \leq 15$
- 乙先到. 即 $y \leq x$, 即 $x-y \leq 15$

这两组不等式, 能用函数图形来表示出来, 如下图. x 和 y 轴上的 60, 分别代表两人的 1 小时区间 (60 分钟) . 中间的交集区域, 就是两人可以见到面的时间段.

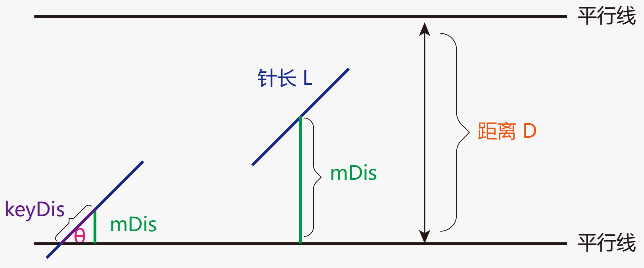


显然, 这就是求几何面积的问题.

$$即: \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{60 \cdot 60 - \overbrace{\frac{45 \cdot 45}{2}}^{上面的“边长为 45”的三角形的面积} - \overbrace{\frac{45 \cdot 45}{2}}^{下面的“边长为 45”的三角形的面积}}{\underbrace{60 \cdot 60}_{即“边长为 60 分钟”的矩形}} = 0.4375$$

例

(法国) 布丰 (1707-1788) 投针 Buffon's needle problem.
说: 有两条平行的直线, 相聚为 D(distance), 距离单位不重要. 你哪一个针 (长度为 L (length), $L < D$), 随机地投向针. 问: 针与那两条平行直线相交的概率是?



思路: 针投上去后的位置状态, 是由两个参数决定的:
(1) 针的中点, 距离 "最近那根直线" 的最短距离. ← 该距离用变量 mDis (midpoint distance) 来表示.
(2) 针倾斜的位置, 与直线的夹角. ← 我们用变量 θ 来表示.
用上面这两个变量, 我们能分别作为 x 轴 (表示 θ 变量) 和 y 轴 (表示 mDis 变量), 来画出函数图像.

针投出后, 所有可能的状态, 其全集就是:

$$\Omega=\left\{(\theta,\ \mathrm{mDis})\ \middle|\ 0\leq\underbrace{\theta}_{\text{夹角}}\leq\pi;\quad 0\leq\underbrace{\underbrace{\mathrm{mDis}}_{\text{针的一半长度}}\leq\underbrace{\frac{D}{2}}_{\text{两条平行线间距的一半}}}_{\text{因为针的长度L, 是小于两条平行线的间距D的}}\right\}$$

那么, 什么状态下, "针" 就与 "直线" 相交了呢? – 当 "从针的中点 (沿着针的身体走) 到直线" 的距离 (下面用变量 keyDis (key distance) 来表示这个距离) ≤ 针的一半长度时. 它们就相交了. 否则, 它们就不想交.
即, 就有:

→ 因为 θ角度有sin值: $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{mDis}}{\mathrm{keyDis}}$,

则有: $\mathrm{keyDis} = \dfrac{\mathrm{mDis}}{\sin\theta}$, ←当该值 $\le \dfrac{针长L}{2}$时, 针与直线相交.

→ 因为y轴是代表 mDis变量, 所以我们要写出 mDis 曲线的函数值:

根据 上面的 $\mathrm{keyDis} = \dfrac{\mathrm{mDis}}{\sin\theta} \le \dfrac{针长L}{2}$

就有: $\mathrm{mDis} \le \dfrac{针长L}{2} \cdot \sin\theta$

即: $\mathrm{mDis} \le \dfrac{1}{2}针长L \cdot \sin\theta$ ←这个就是$y = \mathrm{mDis}$曲线的函数表达式内容了.
既然这里是 小于等于符号, 则mDis的值,
就是$\dfrac{1}{2}针长L \cdot \sin\theta$这条曲线下方的面积了,

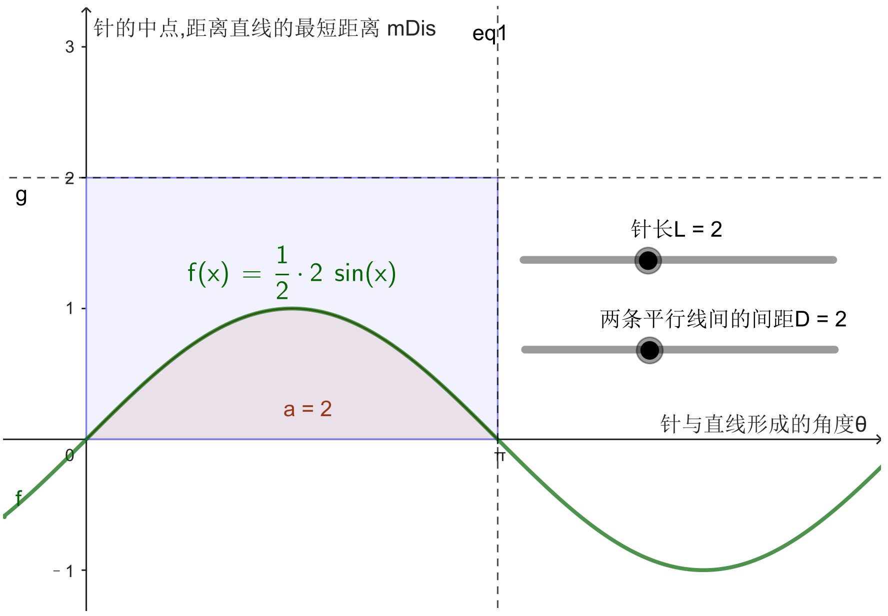
即 $\mathrm{mDis} = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\frac{1}{2}针长L \cdot \sin\theta}^{即\ \mathrm{mDis}\ 函数曲线} \right) d\theta$

→ 所以, 相交的概率

$$= \frac{\text{“针”与“直线”相交时的 mDis 与 }\theta\text{ 的所有取值范围}}{\text{针投出后的 所有可能的 mDis 与 }\theta\text{ 的取值范围}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}针长L}_{常数} \cdot \sin\theta}^{即\ \mathrm{mDis}\ 函数曲线} \right) d\theta}{\underbrace{\pi}_{\substack{x轴上代表的\\ “\theta角”的取值范围}} \cdot \underbrace{\frac{D}{2}}_{\substack{y轴上代表的\\ “针的一半长度mDis”\\ 的取值范围}}}$$ ←分子上积分的下限是0,上限是π, 这个也就是 θ角度的所有区间(0 − π)

$$= \frac{\frac{1}{2}针长L \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}}{\frac{1}{2}\pi D} = \frac{针长L \cdot \overbrace{[-\cos\pi - (-\cos 0)]}^{=2}}{\pi D} = \frac{\overbrace{2针长L}^{即函数图中红色区域的面积}}{\underbrace{\pi D}_{即函数图中蓝色区域的面积}}$$



7.1 “古典概率模型” 和 “几何概率模型” 的区别

- 古典概率模型:

具有 “有限可加性” (finite additivity): 是指 “有限个” 两两互不相容事件的 “和事件” 的概率,

等于“每个事件概率”的和.

即: $\underbrace{\mathrm{P}(\underbrace{{}_{i=1}^{n}A_i}_{\text{和}})}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathrm{P}(A_i)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

- 几何概率模型:

具有“完全可加性”: 即先求和, 再求概率, 等于先求每个事件概率, 再求和.

即: $\underbrace{\mathrm{P}(\underbrace{{}_{i=1}^{\infty}A_i}_{\text{和}})}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\underbrace{\mathrm{P}(A_i)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

注意两者的区别: 一个是“有限 (到 n)”的加, 一个是“无限 (到 ∞)”的加.