目录

积分

第一部分 定积分 definite integral

1 "定积分"的定义

1. 曲线函数f(x), 在x轴上有界, 比如端点是[a,b].
2. 然后, 我们在[a,b]这段区间上, 任意插入n个分点, 分成n个小区间. 它们不要求等分. 每个小区间的长度就是 $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.
3. 在每个Δ小区间上, 任取一点 ξ_i. 这点的函数值(即y轴上的高度), 就是 $y = f(\xi_i)$.
4. 这样, 我们就能得到每一个Δ小区间, 所在的"长方形细条的面积"了, 即 $=$ 宽$\Delta x_i \cdot$ 高$f(\xi_i)$
5. 把所有这些Δ小区间的"长方形细条面积", 全加起来, 就是该曲线到x轴间的面积的近似值. $= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(\xi_i)$
6. 我们令其中 x轴宽度最大的那个Δx小区间 (假设起名为λ, 即$\lambda = \max\{\mathit{\Delta} x_1, ..., \mathit{\Delta} x_n\}$), 我们让这个λ, 极限趋向于0. 这样, 既然最大的Δx小区间都趋近于0了, 其他比它更小的Δx小区间, 就都统统被约束, 也都趋向于0了. 这样, 它们的"长方形细条的面积之和", 就能精确的等于"函数曲线到x轴之间的面积"了, 而不仅仅是"近似"了.

即: $\lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{高}} \cdot \underbrace{\mathit{\Delta} x_i}_{\text{宽}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{定积分}}$

各部分的名字是: $\int_{\text{下限}a}^{\text{上限}b} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}} \ d \ \underbrace{(x)}_{\text{积分变量}}}_{\text{被积表达式}}$

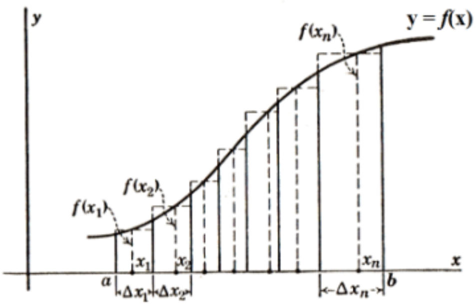

Fig. 1

2 定积分的性质

2.1 若 b=a, 则 $\int_a^a f(x) = 0$

2.2 $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) \leftarrow$ 交换上下限, 定积分的值要变号

2.3 $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \leftarrow$ 即, 积分可以拆开, 常数可以提到外面去

2.4 若 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leftarrow$ 其实就是原先的一步走, 分成两步走而已.

2.5 若 $a < b < c$, 则: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$