目录

第一部分　条件概率 **2**

1 “条件概率” 的意思 **2**

2 条件概率的性质 **3**

2.1 性质: $P(A|条件B) >= 0$ 3

2.2 性质: $P(\Omega|条件B) = 1$ 3

2.3 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \mid \mathrm{B}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}\right)$ 3

2.4 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \mid \mathrm{B}\right)$ 3

2.5 性质: 可列可加性: 若 $A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是 “互不相容” 的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于 “概率的和” 3

3 “条件概率” 的乘法公式: $P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)$ **4**

4 传染病模型 **6**

5 全概率公式 **7**

文件名

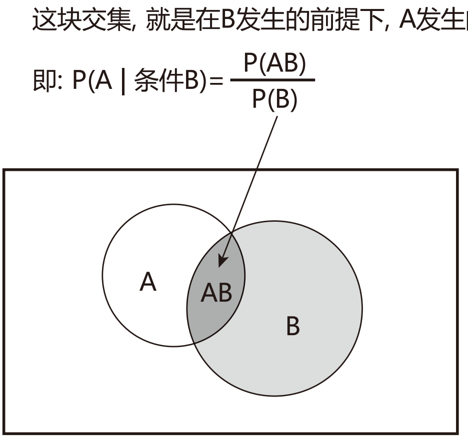
第一部分　条件概率

1　“条件概率” 的意思

条件概率是: 有 A, B 两个事件, 和样本空间 Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则, 在 B 已经发生的条件下, A 发生的概率, 就叫做 A 对 B 的 “条件概率”. 记作: P(A| 条件 B), 读作 “在 B 发生的条件下, A 发生的概率” .

即, 条件概率公式是: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}| \text{条件 B}\right) = \frac{\overbrace{\text{在 B 发生条件下,A 发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB 同时发生了}}}{\text{B 里面有多少个样本点}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}| \text{条件 B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)} = \frac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数 (分母) 去比.

上面公式中, P(AB) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件 A, 和事件 B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件 A, 和事件 B 不相互独立, 则只能用 “条件概率” 公式, 来求 P(AB), 即: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意: “条件概率”, 和 “分步骤法” 的区别:
- 分步骤法: 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率: 前面的事件, 有可能会 (但并不一定) 影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有 100 个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有 6 个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到 1 号球
- A_2: 取到 2 号球
- A_5: 取到大于 4 号的球

则:

- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到 1 号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全 6 选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{\text{在 B 条件里面, 取到 }\mathrm{A}_1\text{(即 1 号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = 0$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号 2 的球里面, 取 1 个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = \frac{1}{3}$

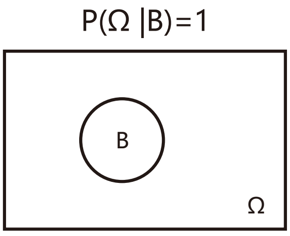
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \frac{\text{在 B 条件里面, 取到大于 4 号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有 6 号一个球}}}{3}$

---

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$



2.3 性质: $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \ |\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B})$

2.4 性质: $\mathbf{P}(\mathbf{A} \ |\mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}} \ |\mathbf{B}\right)$

2.5 性质: 可列可加性: 若 $A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是 “互不相容” 的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于 “概率的和”

---

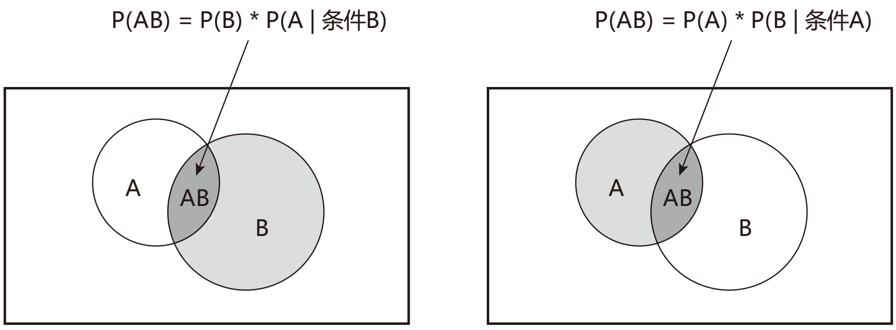
3 “条件概率”的乘法公式: $P(\text{前后}) = P(\text{后}) \cdot P(\text{前}|\text{后}) = P(\text{前}) \cdot P(\text{后}|\text{前})$

推导过程:

$$\text{因为}\begin{cases} \mathrm{P(A|B)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} \to \text{即 } \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)}}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} & ① \\ \mathrm{P(B|A)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}} \to \text{即 } \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} & ② \end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”. 即 $\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}$

其中 $\mathrm{P(A)} > 0$，$\mathrm{P(B)} > 0$



同理, 多个事件的乘法公式就是:

$\to \boxed{\mathrm{P(ABC)} = \underbrace{\mathrm{P(A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(B|A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(C|BA)}}}$

↑ 上面 “从右往左” 看, 就是按 A,B,C 的顺序

$$\to \mathrm{P(A_1A_2 \cdots A_n)} = \mathrm{P(A_1)} \cdot \mathrm{P(A_2A_1)} \cdot \mathrm{P(A_3A_2A_1)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{P(}\overbrace{\mathrm{A_n}}^{\substack{\text{即最后一个数字n} \\ \text{写在前面.}}} \mid \overbrace{\mathrm{A_{n-1}}}^{\substack{\text{后面的条件,} \\ \text{最后一个数字是:} \\ \text{n少一位}}} \ldots \mathrm{A_2A_1)}$$

↑ 上面 “从右往左” 看, 就是按 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的顺序

例

有 100 件产品, 次品率 =10%, 即有 10 件次品. 做不放回抽样, 问: 第 3 次才取到合格品的概率是?

我们先令:

- A_1 表示第 1 次取, 就取到了合格品
- A_2 表示第 2 次取, 取到了合格品
- A_3 表示第 3 次取, 取到了合格品

那么第 3 次才取到合格品, 就是:

$$\mathrm{P}\underbrace{\left(\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}_2}\mathrm{A}_3\right)}_{\text{分步骤来做}} = \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{第1次取,取到次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_2}\,|\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\substack{\text{在第1次取到次品的条件下,} \\ \text{第2次取到也是次品}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\,|\overline{\mathrm{A}_2}\,\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\substack{\text{在第1,2次取到次品的条件下,} \\ \text{第3次取到正品}}}$$

$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{10}^1}^{\text{第一步, 10次品里面取1}}}{\mathrm{C}_{100}^1} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}_9^1}^{\substack{\text{第二步,因为第一步} \\ \text{已经拿走1件次品,} \\ \text{这第二步就只能在9件次品} \\ \text{里面取1件次品了}}}}{\mathrm{C}_{99}^1} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{90}^1}^{\substack{\text{既然第三步要拿到正品,} \\ \text{我们就从90件正品里面取1了}}}}{\mathrm{C}_{98}^1}$$

$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0.00834879$$

例

某产品:
- 甲公司占 60% 市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占 40% 市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{\mathrm{J}}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified) : 表示产品是 “合格” 的
- $\overline{\mathrm{Q}}$: 表示产品是 “不合格” 的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{JQ}\right) = \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{J}\right)}_{=0.6} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(Q \mid J\right)}_{\text{甲的合格率}=0.9} = 0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{Q}\right) = \underbrace{\mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{J}}\right)}_{=0.4} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(Q \mid \bar{\mathrm{J}}\right)}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8} = 0.32$$

例

抽签, 共 10 签, 其中有 4 个为 “成功上岸” 的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.
我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到 “成功”
- B: 表示乙抽到 “成功”
- C: 表示丙抽到 “成功”

问, (1) 甲抽到 “成功” 的概率? $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{C}_{4\text{好签}}^{1}}{\mathrm{C}_{10\text{签}}^{1}}=\frac{4}{10}=0.4$

(2) 甲乙都抽到 “成功” 的概率?

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{AB}) &= \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\text{第 1 步: 甲先成功}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}\mid\mathrm{A})}_{\text{第 2 步: 在甲成功的前提下, 乙再成功}} \\
&= \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4\text{好签}}^{1}}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{\mathrm{C}_{10\text{签}}^{1}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4\text{好签}-1}^{1}}^{\text{乙就只能从剩下的 3 张好签中来抽了}}}{\mathrm{C}_{10\text{签}-1}^{1}} = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = 0.133333
\end{aligned}$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}\right) &= \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)}_{\text{第 1 步: 甲先失败}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\mid\overline{\mathrm{A}}\right)}_{\text{第 2 步: 在甲失败的前提下, 乙再成功}} \\
&= \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{6\text{坏签}}^{1}}^{\text{甲先从共 6 张坏签中取1}}}{\mathrm{C}_{10\text{签}}^{1}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4\text{好签}}^{1}}^{\text{乙从共 4 张好签中取1}}}{\mathrm{C}_{10\text{签}-1}^{1}} = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = 0.266667
\end{aligned}$$

(4) 甲乙丙都抽到 “成功” 的概率?

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{ABC}) &= \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\text{第 1 步: 甲先成功}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}\mid\mathrm{A})}_{\text{第 2 步: 在甲成功的前提下, 乙再成功}} \\
&= \frac{\mathrm{C}_{4\text{好签}}^{1}}{\mathrm{C}_{10\text{签}}^{1}} \cdot \frac{\mathrm{C}_{\text{还剩 3 好签}}^{1}}{\mathrm{C}_{\text{还剩 9 签}}^{1}} \cdot \frac{\mathrm{C}_{\text{还剩 2 好签}}^{1}}{\mathrm{C}_{\text{还剩 8 签}}^{1}} = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = 0.0333333
\end{aligned}$$

---

4 传染病模型

有红球 a 个, 黑球 b 个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入 c 个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续 3 次都是取出红球的概率?
先设定事件:
- A_1 : 表示你第 1 次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第 1 次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第 3 次, 取出的是红球

$$\underbrace{\mathrm{P(A_1A_2A_3)}}_{\text{连续3次取到红球}} = \underbrace{\mathrm{P(A_1)}}_{\substack{\text{第一步:}\\ \text{第一次就取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(A_2\ |A_1)}}_{\substack{\text{第二步:}\\ \text{在第一次取到红球的前提下,}\\ \text{第二次也取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(A_3\ |A_2A_1)}}_{\substack{\text{第三步:}\\ \text{再前两次都取到红球的前提下,}\\ \text{第三次也取到红球}}}$$

$$= \frac{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a}红}}{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a}红+\mathrm{b}黑}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\overbrace{\mathrm{a}红+\mathrm{c}红}^{\substack{\text{在第一次取到红球后,}\\ \text{又放入c个红球.}\\ \text{所以第二次取时,}\\ \text{红球就一共有a + c个}}}}}{\mathrm{C}^1_{\underbrace{\mathrm{a}红+\mathrm{b}黑+\mathrm{c}红}_{\substack{\text{为什么总数没有减1个?}\\ \text{因为是“放回抽样”.}\\ \text{总数不变}}}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a}红+2\mathrm{c}红}}{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a}红+\mathrm{b}黑+2\mathrm{c}红}}$$

上面可以看出:
- 当 c 红 = 0 时, 就是正常的 “放回抽样”.
- 当 c 红 = -1 时, 就是 “不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c 红 >0 时, 就是本例的 “传染病模型”.

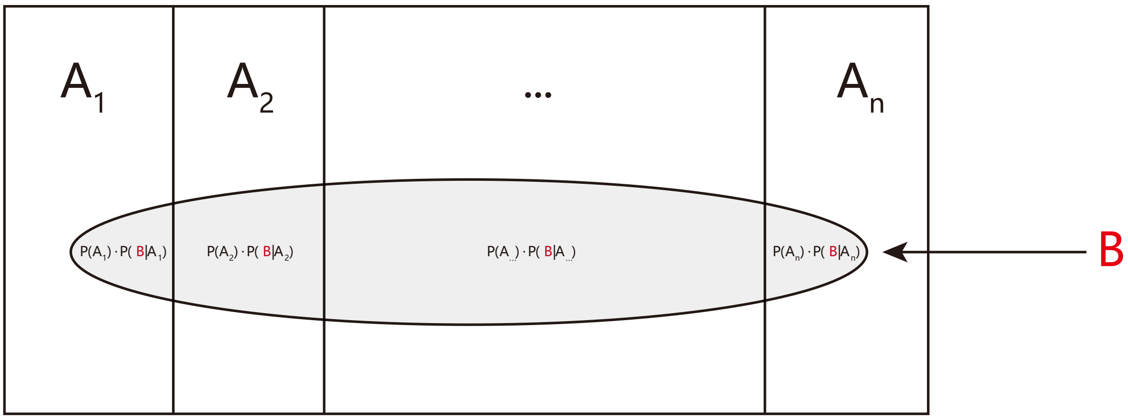
---

5 全概率公式

全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, ..., A_n$ 构成一个 “完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2) 其 “和”(或 “并集”) 为全集 Ω, (3) $P(A_i) > 0$.

则有: $\boxed{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} [\mathrm{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}] = \mathrm{P(B)}}$

即有: $\mathrm{P(B)} = \underbrace{\mathrm{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}} + \underbrace{\mathrm{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}} + ... + \underbrace{\mathrm{P(A_n) \cdot P(B|A_n)}}$



Total Probability Theorem
全概率公式

例

一个工厂, 有 4 条生产线, 情况如下:

	生产线 1	生产线 2	生产线 3	生产线 4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是 "不合格品" 的概率?

我们先设定事件:
- A_1 : 表示是生产线 1 中的产品
- A_2 : 表示是生产线 2 中的产品
- A_3 : 表示是生产线 3 中的产品
- A_4 : 表示是生产线 4 中的产品
- B : 表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{B}) &= \underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{产品属于生产线 1 的概率}} \cdot \overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)}^{\text{生产线 1 中的次品率}}}_{\text{第 1 条生产线中 (的条件下), 不合格品的概率}} + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2) \\
&+ \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_4) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_4) \\
&= (15\% \cdot 0.05) + (20\% \cdot 0.04) + (30\% \cdot 0.03) + (35\% \cdot 0.02) \\
&= 0.0315
\end{aligned}
$$