目录

第一部分 条件概率：$P(A|\text{条件}B)=\frac{P(A\cap B)}{P(\text{条件}B)}=\frac{\text{事件}A,B\text{同时发生的概率}}{\text{事件}B\text{发生的概率}}$ **2**

1 “条件概率”的意思 **2**

2 条件概率的性质 **4**

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B)>=0$ 4

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B)=1$ 4

2.3 性质: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\mid\mathrm{B}\right)=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\mid\mathrm{B}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2\mid\mathrm{B}\right)-\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mid\mathrm{B}\right)$ 4

2.4 性质: $\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{—}\mathrm{B})=1-\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\mid\mathrm{B}\right)$ 4

2.5 性质: 可列可加性: 若$A_1,A_2,...A_n,...$是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)\leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于“概率的和” 4

3 “条件概率”的乘法公式：$\boxed{P(\text{前后})=P(\text{后})\cdot P(\text{前}|\text{后})=P(\text{前})\cdot P(\text{后}|\text{前})}$ **4**

4 传染病模型 **8**

5 全概率公式：$P(B)=\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$ **9**

6 贝叶斯公式 Bayes' theorem：$\boxed{P(A_k|B)=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(A_i)\cdot P(B|A_i)\right]}=\frac{P(A_kB)}{P(B)}}$ **14**

6.1 先验概率 (从经验来推后果) & 后验概率(更新迭代经验) 14

6.2 贝叶斯公式 14

文件名

第一部分　条件概率：

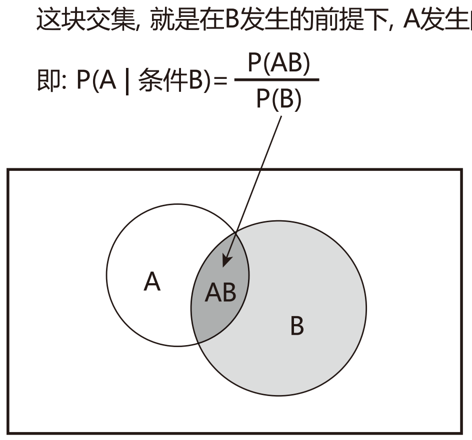
$$P(A|\text{条件}B) = \frac{P(A \cap B)}{P(\text{条件}B)} = \frac{\text{事件}A,B\text{同时发生的概率}}{\text{事件}B\text{发生的概率}}$$

1　“条件概率”的意思

条件概率是：有A, B 两个事件，和样本空间Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则，在B已经发生的条件下，A发生的概率，就叫做A对B 的“条件概率”. 记作：P(A— 条件B), 读作“在B发生的条件下，A发生的概率”.

即，条件概率公式是：$P(A\ |conditionB) = \frac{\overbrace{\text{在B发生条件下,A发生的样本点数}}^{\text{这个分子即：AB同时发生了}}}{\text{B里面有多少个样本点}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成：$P(A\ |conditionB) = \frac{\mathrm{P\,(A \cap B)}}{\mathrm{P\,(B)}} = \frac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示，注意：概率是个比值，所以你光有分子那块的交集值，是没用的，它还需要与另一个数(分母)去比.

上面公式中，P(AB) (← 也可写作 $P(A \cap B)$) 的计算公式是什么呢？
- 如果事件A, 和事件B 是相互独立的，则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件A, 和事件B 不相互独立，则只能用“条件概率”公式，来求P(AB), 即：

$$\boxed{P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

注意：“条件概率”，和“分步骤法”的区别：
- 分步骤法 (用乘法)：前后每一步骤的事件是相互独立的，彼此没有条件关系.
比如，第一步你结婚，第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率 (里面也有用到乘法): 前面的事件, 有可能会(但并不一定)影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有100个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)
彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有6个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到1号球
- A_2: 取到2号球
- A_5: 取到大于4号的球

则:

- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到1号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全6选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{\text{在B条件里面,取到}\mathrm{A}_1\text{(即1号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = 0$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号2的球里面,取1个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = \frac{1}{3}$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \frac{\text{在B条件里面,取到大于4号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有6号一个球}}}{3}$

例

某地10万人, 其中平均有40人患甲病; 有34人患乙病; 两种病都患的有32人. 则, 我们设:
→ 事件A : 是一个人得甲病
→ 事件B : 是一个人得乙病

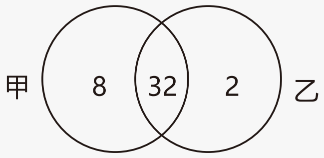
即有:
$P(A) = \frac{40}{100000} = 0.0004$
$P(B) = \frac{34}{100000} = 0.00034$
$P(AB) = \frac{32}{100000} = 0.00032$

根据公式: $P(AB) = P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{=\frac{P(AB)}{P(A)}} = P(A) \cdot \frac{P(AB)}{P(A)}$,

$$\leftarrow \text{即 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{32}{100000}}{\frac{40}{100000}} = 0.8$$

根据公式: $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot \frac{P(AB)}{P(B)}$

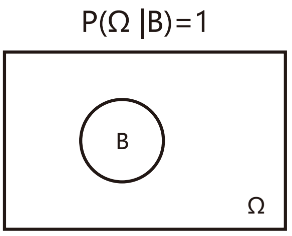
$$\leftarrow \text{即 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{32}{100000}}{\frac{34}{100000}} = 0.941176$$



2 条件概率的性质

2.1 性质：$P(A|条件B) >= 0$

2.2 性质：$P(\Omega|条件B) = 1$



2.3 性质：$\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}\right) = \mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1 \ |\mathbf{B}\right) + \mathbf{P}\left(\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}\right) - \mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}\right)$

2.4 性质：$\mathbf{P}\left(\mathbf{A} \text{ —}\mathbf{B}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}} \ |\mathbf{B}\right)$

2.5 性质：可列可加性：若$A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是“互不相容”的事件, 则有：$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即：“和的概率”，等于“概率的和”

3 “条件概率”的乘法公式：

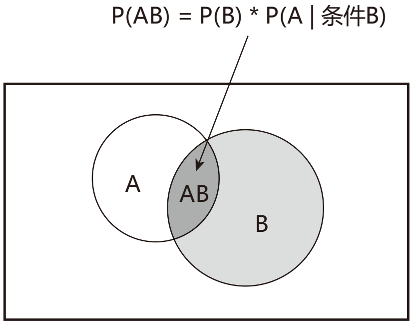
$$\boxed{P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)}$$

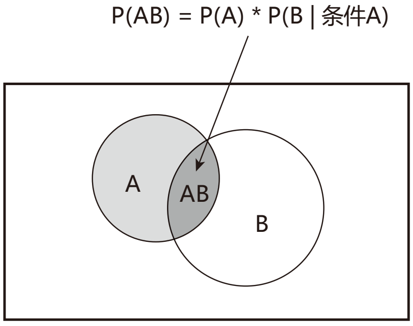
推导过程:

$$因为\begin{cases} \mathrm{P(A|B)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} \rightarrow 即\ \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)}}_{乘法，是交集\cap的概念} \quad ① \\ \mathrm{P(B|A)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}} \rightarrow 即\ \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}}_{乘法，是交集\cap的概念} \quad ② \end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”. 即 $\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}$

其中 $\mathrm{P(A)} > 0$，$\mathrm{P(B)} > 0$





同理, 多个事件的乘法公式就是:

$\rightarrow \boxed{\mathrm{P(ABC)} = \underbrace{\mathrm{P(A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(B—A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(C—BA)}}}$

$\uparrow$ 上面“从右往左”看, 就是按 A,B,C 的顺序

$$\rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(\overbrace{\mathrm{A}_n}^{\text{即最后一个数字n写在前面.}} \mid \overbrace{\mathrm{A}_{n-1}}^{\text{后面的条件, 最后一个数字是: n少一位}} \ldots\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)$$

↑ 上面"从右往左"看, 就是按$A_1, A_2, ..., A_n$的顺序

例

有100件产品, 次品率=10%, 即有10件次品. 做不放回抽样, 问: 第3次才取到合格品的概率是?

我们先令:
- A_1 表示第1次取, 就取到了合格品
- A_2 表示第2次取, 取到了合格品
- A_3 表示第3次取, 取到了合格品

那么第3次才取到合格品, 就是:

$$\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}_2}\mathrm{A}_3\right)}_{\text{分步骤来做}}= \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{第1次取,取到次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_2}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{在第1次取到次品的条件下, 第2次取到也是次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\mid\overline{\mathrm{A}_2}\,\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{\text{在第1,2次取到次品的条件下, 第3次取到正品}}$$

$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{10}^1}^{\text{第一步, 10次品里面取1}}}{\mathrm{C}_{100}^1} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}_9^1}^{\text{第二步, 因为第一步已经拿走1件次品, 这第二步就只能在9件次品里面取1件次品了}}}{\mathrm{C}_{99}^1} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{90}^1}^{\text{既然第三步要拿到正品, 我们就从90件正品里面取1了}}}{\mathrm{C}_{98}^1}$$

$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0.00834879$$

例

某产品:
- 甲公司占60%市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占40%市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{\mathrm{J}}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified) : 表示产品是"合格"的
- $\overline{\mathrm{Q}}$: 表示产品是"不合格"的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}(\mathrm{JQ}) = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{J})}_{=0.6} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(Q\mid J)}_{\text{甲的合格率}=0.9} = 0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{Q}) = \underbrace{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{J}})}_{=0.4} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(Q\mid\bar{\mathrm{J}})}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8} = 0.32$$

例

抽签, 共10签, 其中有4个为"成功上岸"的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.

我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到"成功"

- B: 表示乙抽到"成功"
- C: 表示丙抽到"成功"

问, (1) 甲抽到"成功"的概率? $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} = \frac{4}{10} = 0.4$

(2) 甲乙都抽到"成功"的概率?

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A})}_{\text{第1步:甲先成功}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$
$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}-1}}^{\text{乙就只能从剩下的3张好签中来抽了}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P\left(\overline{A}B\right) = \underbrace{P\left(\overline{A}\right)}_{\text{第1步:甲先失败}} \cdot \underbrace{P\left(B \mid \overline{A}\right)}_{\text{第2步:在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$
$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{6\text{坏签}}}^{\text{甲先从共6张坏签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{乙从共4张好签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到"成功"的概率?

$$P(ABC) = \underbrace{P(A)}_{\text{第1步:甲先成功}} \cdot \underbrace{P(B \mid A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}} \cdot \underbrace{P(C|BA)}_{\text{第3步:在甲乙都成功的前提下,丙再成功}}$$
$$= \frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩3好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩9签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩2好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩8签}}}$$
$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0.0333333$$

例

你的新邻居, 是个 is very shy and withdrawn, invariably helpful but with very little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, ant a passion for detail.
你觉得他更可能是 – 图书管理员, 还是农民?
大多数人会认为他是图书馆管理员. 其实, 这种判断是"非理性"的. 问题的关键在于 – 你没有把这两种职业的"人数比例"考虑进去.

→ 在美国,农民与图书馆管理员,两者的数量之比是$20:1$.
根据这个比例,我们可以假设他们人数的概率分别为:

$$\begin{cases} P(\text{农民职业}) = \dfrac{20}{100} \\ P(\text{图书管理员职业}) = \dfrac{1}{100} \end{cases}$$

→ 假如你听到”彬彬有礼”这类描述,你的直觉是:
40%的图书馆管理员符合这个描述,而只有10%的农民符合这个描述.
如果这是你的估计,那就意味着:

$$\begin{cases} \text{在}100\%\text{的纯粹农民群体中,彬彬有礼者的占比概率是:} \\ \qquad P(\text{彬彬有礼}\ |\text{农民职业}) = 0.1 \\ \text{在}100\%\text{的纯粹图书管理员群体中,彬彬有礼者的占比概率是:} \\ \qquad P(\text{彬彬有礼}\ |\text{图书管理员职业}) = 0.4 \end{cases}$$

→ 在既有农民,又有图书管理员的混合群体中:

$$\begin{cases} \text{在属于农民职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是:} \\ P(\text{农民职业} \cap \text{彬彬有礼}) = \underbrace{P(\text{农民职业})}_{\text{第一步,是农民的概率}} \cdot \underbrace{P(\text{彬彬有礼}\ |\text{农民职业})}_{\text{第二步,在是农民前提下,彬彬有礼者的概率}} \\ \qquad = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02 \\ \text{在属于图书管理员职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是:} \\ P(\text{图书管理员职业} \cap \text{彬彬有礼}) = P(\text{图书管理员职业}) \cdot P(\text{彬彬有礼}\ |\text{图书管理员职业}) \\ \qquad = 0.01 \cdot 0.4 = 0.004 \end{cases}$$

→ P(在彬彬有礼者中,取1人为图书管理员的概率)

$$= \frac{P(\text{图书管理员职业}\cap\text{彬彬有礼})}{P(\text{农民职业}\cap\text{彬彬有礼}) + P(\text{图书管理员职业}\cap\text{彬彬有礼})}$$

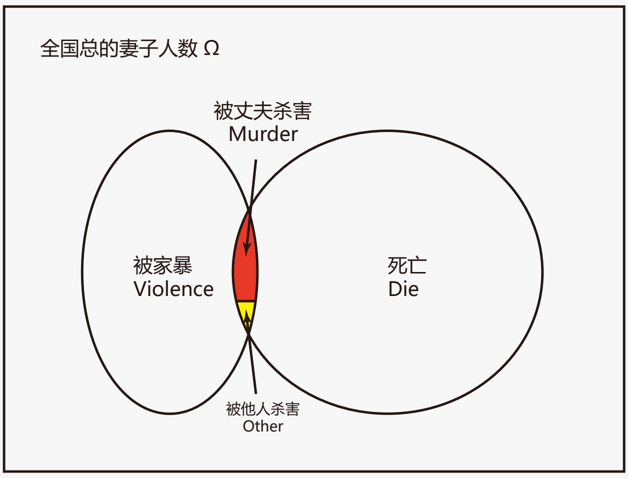
$$= \frac{0.004}{0.02 + 0.004} = 0.166667$$

所以, 即使你认为“符合这个描述的人是一个图书馆管理员的可能性, 是一个农民的4倍”, 也抵不过农民的数量很多.

例

辛普森杀妻案, 原告证明辛普森常常家暴前妻. 他们认为, 长期家暴说明辛普森有杀妻的动机. 被告律师则举出数据反驳说, 美国有400万被家暴的妻子, 但只有1432名被丈夫杀害, 这个概率只有 $\frac{1432}{400\text{万}}$ = 比1/2500还低. 所以家暴证明不了辛普森谋杀.
被告想表达的是: 在“家暴”这个事件前提条件下, 丈夫谋杀妻子的概率不高. 即 P(丈夫家暴 ∩ 丈夫杀妻) = 概率值很低.

你怎么看? 事实上, 被告举出的概率, 不适用于这个案子上. 因为本案的妻子已经死亡, “妻子已死”也变成了一个已经存在的前提条件. 所以现在我们要看的概率就是: P(丈夫家暴 ∩ 妻子已死亡 ∩ 是丈夫杀妻)=? 即: 在“被家暴”且“死亡”的妻子数量里面 (这里就有两个前提条件了, 而不是仅一个前提条件), 有多少是被丈夫杀害的?



即:

- 辛普森律师一方的概率公式是: $\frac{\text{红色}}{Violence} < \frac{1}{2500}$
- 妻子一方律师的概率公式是: $\frac{\text{红色}}{\text{红色+黄色}} = 93\%$

根据美国1992年发布的数据推算: 每10万个被家暴的妇女中, 有43个会被谋杀. 其中40个是被丈夫谋杀, 其他3个是被丈夫以外的人谋杀. 那么, 条件概率就是:

$P(A\ |B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(\text{丈夫杀 —家暴} \cap \text{妻死}) = \frac{P(\text{家暴} \cap \text{妻死} \cap \text{丈夫杀})}{P(\text{家暴} \cap \text{妻死})} = \frac{\frac{40}{100000}}{\frac{43}{100000}} = 0.930233$$

你仔细体会一下两者的不同:

- 辛普森方, 是说: 在所有"之后活着和死去"的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大. 即 $\frac{\text{丈夫杀害}}{\text{条件: 1.被家暴}}$
- 妻子方, 是说: 在所有"死去"的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大? 即 $\frac{\text{丈夫杀害}}{\text{条件: 1.被家暴 \& 2.死亡}}$

不过, 即使概率高达93%, 也不能绝对证明辛普森杀了妻子. 因为**"条件概率"只表示统计意义上的"相关性", 并不代表"因果关系".** 即只说明: 家暴和谋杀妻子之间有很强的相关性。

4 传染病模型

例

有红球a个, 黑球b个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入c个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续3次都是取出红球的概率?

先设定事件:

- A_1 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第3次, 取出的是红球

$$\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)}_{\text{连续3次取到红球}}=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}_{\begin{array}{l}\text{第一步:}\\\text{第一次就取到红球}\end{array}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\ |\mathrm{A}_1)}_{\begin{array}{l}\text{第二步:}\\\text{在第一次取到红球的前提下,}\\\text{第二次也取到红球}\end{array}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\ |\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)}_{\begin{array}{l}\text{第三步:}\\\text{再前两次都取到红球的前提下,}\\\text{第三次也取到红球}\end{array}}$$

$$=\frac{\mathrm{C}^1_{\text{a红}}}{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{b黑}}}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{c红}}}^{\begin{array}{l}\text{在第一次取到红球后,}\\\text{又放入c个红球.}\\\text{所以第二次取时,}\\\text{红球就一共有a}+\text{c个}\end{array}}}{\underbrace{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{b黑}+\text{c红}}}_{\begin{array}{l}\text{为什么总数没有减1个?}\\\text{因为是“放回抽样”.}\\\text{总数不变}\end{array}}}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+2\text{c红}}}{\mathrm{C}^1_{\text{a红}+\text{b黑}+2\text{c红}}}$$

上面可以看出:
- 当 c红= 0 时, 就是正常的“放回抽样”.
- 当 c红= -1 时, 就是“不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c红¿0 时, 就是本例的“传染病模型”.

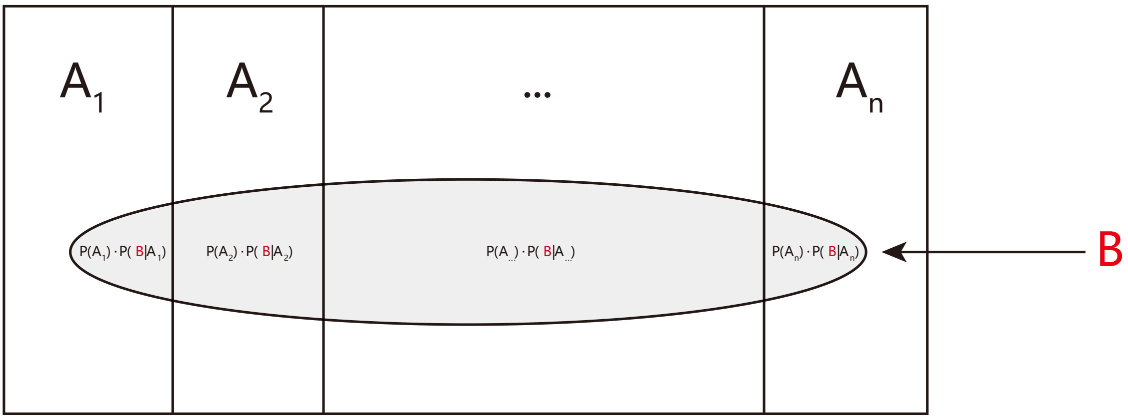
---

5 全概率公式：$P(B)=\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$

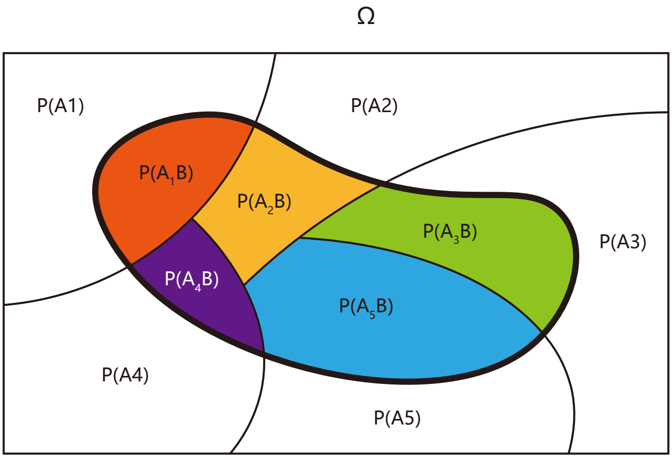
全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1,A_2,...,A_n$ 构成一个“完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2)其“和”(或“并集”)为全集 Ω, (3) $P(A_i)>0$.

则有: $\boxed{\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\cdot P(B|A_i)]=P(B)}$

即有: $P(B)=\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$



Total Probability Theorem
全概率公式



上图, 粗线部分围起来的整块有彩色区域, 就是B.
B的概率, 就等于= 每一个彩色块的概率, 加总起来.

比如第1块, 橙色的概率, 就是 A1 和 B 的交集, 即 $=P(A_1\cap B)$
P(B) = 所有5块彩色的概率加起来. 即得到下图中的"全概率公式".

全概率公式：

$$\begin{aligned}P(B)&=\text{第1块的概率}+\text{第2块的概率}+...+\text{第}n\text{块的概率}\\&=P(A_1B)+P(A_2B)+...+P(A_nB)\\&=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+...+P(A_n)\cdot P(B|A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\cdot P(B|A_i)]\end{aligned}$$

并有: $P(B)=\underbrace{P(A)\cdot P(B|A)}_{A\text{中},B\text{的概率的具体值}}+\underbrace{P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$

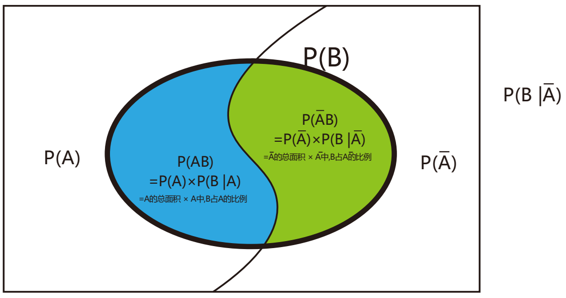
注意: 上式中, P(B—A) 这块只是个比例而已. 即 B在A中的比例. 即 $\frac{B}{A}$. 但单纯的比例是没用的. 比如, alice说她的收入只有 bob 的 1/10, 但 1/10 依然没有告诉你 alice的收入到底是多少? 所以, 比例值还需要乘上一个基数. 这个"基数"就是 bob 本身的收入, 比如是 10000元, 你才能知道 alice的收入是 $10000\cdot\frac{1}{10}=1000$元.

同理, 本处的公式, P(B—A) 这个比例, 还要乘上"P(A) 本身的值"作为基数, 我们才能最终知道 P(AB)的具体值到底是多少.
事实上, P(B—A) 就是 B占A的比例. 即 $\frac{B}{A}$.
而 $P(A)\cdot P(B|A)$ 就是 AB 的交集面积占整个全集Ω 的比例, 即$\frac{A\cap B}{\Omega}$

如果我们把全集分为两部分: A 和 $\overline{A}$, 则, B的部分, 就是:

$$\boxed{P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$$

如下图:



比如，全集 Ω (亚欧板块)被分成两部分：一块是A(亚洲)，另一块是$\overline{A}$ (欧洲)．全集中有子集B(俄罗斯)，被A 和$\overline{A}$各自分割了一部分土地．那么：

$$\begin{aligned}\underbrace{P(B)}_{\text{俄罗斯占亚欧板块的面积比例}} &= \underbrace{P(A)}_{\text{亚洲占亚欧板块的比例}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{亚洲中的俄罗斯部分,占亚洲的比例}} \\ &+ \underbrace{P(\overline{A})}_{\text{欧洲占亚欧板块的比例}} \cdot \underbrace{P(B|\overline{A})}_{\text{欧洲中的俄罗斯部分,占欧洲的比例}}\end{aligned}$$

例

一个工厂，有4条生产线，情况如下：

	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问：从该工厂的产品中，任取一件，是"不合格品"的概率？

我们先设定事件：
- A_1：表示是生产线1 中的产品
- A_2：表示是生产线2 中的产品
- A_3：表示是生产线3 中的产品
- A_4：表示是生产线4 中的产品
- B：表示是次品

那么，你任取一件为不合格的概率，不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$\begin{aligned}&P(B)\\ &=\underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线1的概率}} \cdot \overbrace{P(B|A_1)}^{\text{生产线1中的次品率}}}_{\text{第1条生产线中(的条件下)，不合格品的概率}} + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3) + P(A_4)\cdot P(B|A_4)\\ &=(15\%\cdot 0.05)+(20\%\cdot 0.04)+(30\%\cdot 0.03)+(35\%\cdot 0.02)\\ &=0.0315\end{aligned}$$

例

有10台机器人，3台是次品．已经卖出去了2台(是正品还是次品未知)．
问：再取1台，是正品的概率？

首先，我们定义事件：
- B_{00}：B(bad)，表示前两次取，都是次品(用0表示)
- B_{10}：表示前两次取，是一正(用1表示)，一次(用0表示)．至于顺序是"正,次" 还是"次,正"，都行
- B_{11}：表示前两次取，都是正品
- G_{xx3}：G(good)，表示第三次取，是正品

那么，第3次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况，就有这3种可能性：
- (第1次取到)次，(第2次取到)次，(第4次取到)正．

即→ $= \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})}_{\text{前两次取到次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}|\mathrm{B}_{00})}_{\text{在前两次取到次品的条件下，第3次取到正品}}$

- 次,正,正．即→ $=\mathrm{P}(\mathrm{B}_{10})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}|\mathrm{B}_{10})$

- 正,正,正. 即→ $= P(B_{11})\cdot P(G_{xx3}|B_{11})$

上面这三种可能性并存, 就是“和”(并集)的概念. 用加法:

$$G_{xx3} = \underbrace{P(B_{00})\cdot P(G_{xx3}|B_{00})}_{第1种情况:2次,1正} + \underbrace{P(B_{10})\cdot P(G_{xx3}|B_{10})}_{第2种情况:1次1正，再正} + \underbrace{P(B_{11})\cdot P(G_{xx3}|B_{11})}_{第3种情况:前2正,再1正}$$

$$= \underbrace{\frac{C^{取2次}_{总3次}}{C^2_{总10}}\cdot\frac{C^{取1正}_{总7正}}{C^1_{10-2}}}_{第1种情况:2次,1正} + \underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{C^1_{总7正}}^{取1正}\cdot\overbrace{C^1_{总3次}}^{取1次}}^{分步骤,用乘法}}{C^2_{总10}}\cdot\frac{C^{1正}_{还剩总6正}}{C^1_{10-2}}}_{第2种情况:1次1正，再1正} + \underbrace{\frac{C^2_{总7正}}{C^2_{10}}\cdot\frac{C^1_{还剩总5正}}{C^1_8}}_{第3种情况:前2正,再1正}$$

$$= \underbrace{\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_8^1}} + \underbrace{\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_6^1}{C_8^1}} + \underbrace{\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_5^1}{C_8^1}} = 0.7$$

注意：上面的第2种情况，先取1正1次，或1次1正的情况，就是:

$$= \overbrace{\overbrace{\frac{C_7^1}{C_{10}^1}}^{先取1正}\cdot\overbrace{\frac{C_3^1}{C_9^1}}^{再取1次}}^{分步骤,用乘法} + \overbrace{\overbrace{\frac{C_3^1}{C_{10}^1}}^{先取1次}\cdot\overbrace{\frac{C_7^1}{C_9^1}}^{再取1正}}^{分步骤,用乘法} = 0.466667$$

$$= \underbrace{\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}}_{\substack{总10个里面取2个,\\ 其中1个从正品里面取,\\ 1个从次品里面取}} = 0.466667$$

一件事是"分步骤"来做的, 用乘法 →

		第 1 次取到	第 2 次取到	第 3 次取到
“或”的情况 用加法	情况1	次	次	正
	情况2	次	正	正
	情况3	正	正	正

例

有10件产品, 其中次品的数量, 有三种可能性: 0件 /1件 /2件, 即这三种可能性中的每一种, 发生的概率是1/3.

同时, 检验时也存在“误检”情况 :

	→被检验成→		的概率是
正品		次品	0.02
正品	→	正品	0.98
次品	→	正品	0.05
次品		次品	0.96

问: 这批产品能通过检验(即事件S_2)的可能性是多少? 即本题要求 P(S_2)=?

这要分两种情况来讨论 (“和”的概念, 用加法):

- 1. 正品被误检(成“假”)时的情况
- 2. 次品被误检(成“真”)时的情况

我们先定义各种事件:

- B_0 : B(bad). 表示总的10件产品中, 存在0件次品. 该事件的概率, 题目已经告诉我们: $P(B_0) = \frac{1}{3}$

- B_1 : 表示总的10件产品中, 存在1件次品. $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)=\frac{1}{3}$
- B_2 : 表示总的10件产品中, 存在2件次品. $\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)=\frac{1}{3}$
- S_1 : S(sample. (v.) 抽样检验; 取样; 采样) 表示任意抽检一次, 抽到了正品. (但这里还有个问题不清晰, 就是说这个正品, 到底是它本身就是“正品”; 还是说只是抽验认为它是“正品”?)
- $\overline{S_1}$: 表示任意抽检一次, 抽到了次品.
- S_2 : 表示再次检验, 并“通过验证” (注意: 有误检率存在. 所以通过检验的, 未必是“正品”; 反之亦然).

本题要求的 $\mathrm{P}(S_2)$, 实际上就是: “无论第一次抽, 认为是正是次; 在第二次检验时, 都认为是正品”的东西. 即: $\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\mid\mathrm{S}_1)}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\mid\overline{\mathrm{S}_1})}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$

那么我们先考算 $\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$ 和 $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})$.

$\rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$: 是在具体“次品”数量未知的情况下, 抽1次就得到“正品”的概率.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_0)}^{\text{总数中有0次品}}\cdot\mathrm{P}\left(\overbrace{\mathrm{S}_1}^{\text{第1次抽得到正品}}|\mathrm{B}_0\right)}_{\text{在总数中有0次品的条件下, 抽1次得到正品的概率}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_1)}_{\text{总数中含有1次品, 抽1次取到正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_2)}_{\text{总数中含有2次品, 抽1次取到正}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总}10\text{正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总10中含有0次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总}9\text{正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总10中含有1次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总}8\text{正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总10中含有2次品}}$$

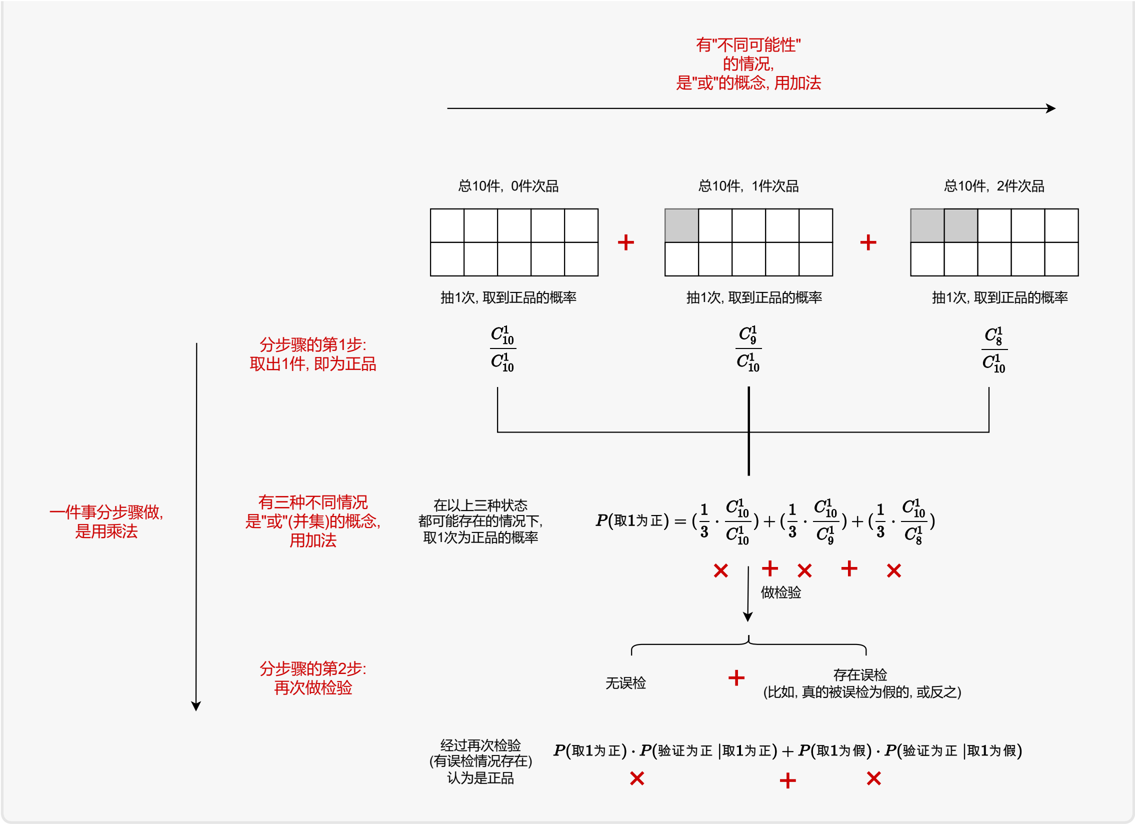
$$=0.9$$

所以 : $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})=1-\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=1-0.9=0.1$

于是, 我们就能得到 :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)}^{=0.9}\cdot\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\mid\mathrm{S}_1)}^{\text{从上面的表格中可知, 正品被检验为正品,概率为0.98}}}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}_1})}^{=0.1}\cdot\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\mid\overline{\mathrm{S}_1})}^{\text{次品被检验为正品, 概率是0.05}}}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$$

$$=(0.9\cdot 0.98)+(0.1\cdot 0.05)=0.887$$



---

6 贝叶斯公式 Bayes' theorem :

$$\boxed{P\left(A_k|B\right)=\frac{P\left(A_k\right)\cdot P\left(B|A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(A_i\right)\cdot P\left(B|A_i\right)\right]}=\frac{P\left(A_k B\right)}{P\left(B\right)}}$$

6.1 先验概率 (从经验来推后果) & 后验概率(更新迭代经验)

先验概率 : 是指根据以往经验和分析得到的概率，它往往作为"由因求果"问题中的"因"出现.	"先验概率"的计算比较简单，没有使用"贝叶斯公式".
后验概率: 是基于新的信息，修正原来的"先验概率"后，所获得的更接近实际情况的概率估计.	"后验概率"的计算， 要使用"贝叶斯公式".

6.2 贝叶斯公式

根据新信息, 不断调整对一个随机事件发生概率的判断, 这就是"贝叶斯推理"。即反复迭代, 不断逼近真相 (即人工智能的原理).

通常, "事件A, 在事件B(发生)的条件下的概率", 与"事件B, 在事件A的条件下的概率", 是不一样的. 然而, 这两者是有确定的关系, "贝叶斯法则"就是对这种关系的陈述。

推导1 :

"条件概率"的公式是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ ①

可进一步变换为: $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

改变 A 和 B 的顺序，就得到: $\underbrace{P(BA)}_{\substack{P(AB)\\ \text{是}AB\text{同时发生的概率，}\\ \text{其实就}=P(BA)}}=P(B)\cdot P(A|B)$ ②

把公式②代入公式①，就得到: $P(B|A)=\frac{\overbrace{P(AB)}^{=P(BA)=P(B)\cdot P(A|B)}}{P(A)}$

$$=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

即: $P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}}$ ③ ←这个就是"贝叶斯公式"

上面"贝叶斯公式"的意思就是说: "在现象B出现的条件下, 事件A发生的概率" (即 P(A—B)), 就等于"事件A发生的概率 (即 P(A))", 乘以 "事件A发生条件下, 事件B出现的概率" (即 P(B—A)), 再除以"事件B出现的概率" (即 P(B)).

推导2 :

有条件概率: $P(B|A_i)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(A_i)}$ ①

即: $P(A_iB)=P(A_i)\cdot P(B|A_i)$ ②

然后, 对①式, 我们把 A_i 和 B 倒一倒, 让 B 作为条件, 即有:

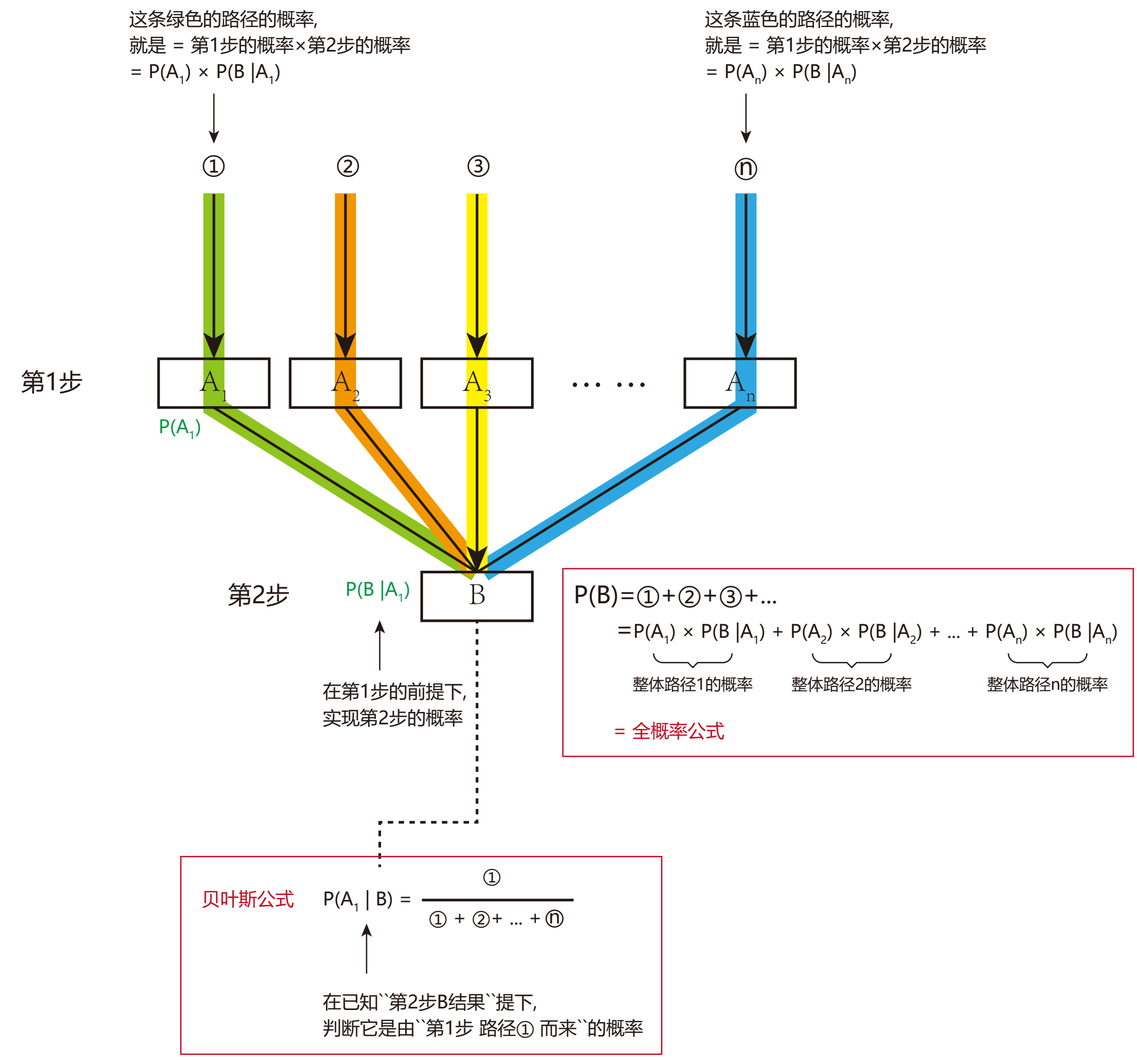
$$P(A_i|B)=\frac{\overbrace{P(A_iB)}^{\text{分子即式②的内容}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{分母即"全概率公式"}}}\leftarrow\text{分母的 } P(B)=\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\cdot P(B|A_i)]$$

$$=\underbrace{P(A)\cdot P(B|A)}+\underbrace{P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{\overbrace{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}^{i\text{可取}1\text{到}n\text{中的任何索引值. 即任何一条路径}}}{\sum_{i=1}^{n}[P(A_i)\cdot P(B|A_i)]}=\frac{\leftarrow\text{条件概率}}{\leftarrow\text{全概率公式}}$$ ③ ←这个就是"贝叶斯公式"

推导3 :

6 贝叶斯公式 *BAYES' THEOREM* : $\boxed{P\left(A_K|B\right)=\frac{P\left(A_K\right)\cdot P\left(B|A_K\right)}{\sum_{I=1}^{N}\left[P\left(A_I\right)\cdot P\left(B|A_I\right)\right]}=\frac{P\left(A_KB\right)}{P\left(B\right)}}$



→ 到第一步的, 其实就是“贝叶斯公式”. 即已知第二步的结果B, 我们来倒推推测它到底是从哪条路径走过来的 (即在第一步中是从哪个路口过来的). 比如, 如果从第A_1 节点过来, 那么其概率就是:$P\left(A_1|B\right)=\frac{\text{路径1的概率}}{\text{路径1的概率}+\text{路径2的概率}+..+\text{路径}n\text{的概率}}$

即:

$$P\left(A_i|B\right)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\left[P(A_j)\cdot P(B|A_j)\right]}=\frac{\overbrace{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}^{\text{第}i\text{条路径的概率}}}{\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+...+P(A_n)\cdot P(B|A_n)}_{\text{分母上是把所有的路径概率,都加起来}=P(B)=\text{全概率公式}}}$$

→ 到第二步的, 其实就是“全概率公式”, 即:

$$P(B)=\underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}_{\text{整条路径1的概率}}+\underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}_{\text{整条路径2的概率}}+...+\underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}_{\text{整条路径}n\text{的概率}}$$

概率告诉我们: 要相信长期中的期望.$0.99^{365}=0.025518$, 而 $1.01^{365}=37.7834$.
篮球领域有一句名言——“训练时，用正确姿势投丢的球, 比用错误姿势投进的球, 更有价值.”
站在当下，未来任何事都只是一个概率. **所谓坚持，所谓努力，其实就是寻找一个大概率成功的方向, 然后相信系统, 相信长期主义.** 当然，你得坚持活着．等到长期的到来.

但行为经济学家发现，人们在决策过程中, 往往并不遵循“贝叶斯规律”，而是给予最近发生的事件和最新的经验, 以更多的权重值，更看重近期的事件。面对复杂问题，人们往往会走捷径，依据可能性, 而非概率来做决策. 这种对经典模型的系统性偏离, 称为“偏差”. 因此, 投资者在决策判断时, 并非绝对理性.
但长期以来，由于缺乏有力的“能结合人类决策中的理性和感性因素”的替代工具, 经济学家不得不在分析中坚持“贝叶斯法则”.