

目录

第一部分	什么是导数?	3
第二部分	导数公式	4
1	常用的导数	4
1.1	$(\text{常数 } C)' = 0$	4
1.2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	4
1.3	$(a^x)' = a^x \ln a$	4
1.4	$(e^x)' = e^x \ln e = e^x$	5
1.5	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	5
1.6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	5
2	反函数的导数 : $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数 } f'(x)}$	6
3	三角函数的导数	6
3.1	$(\sin x)' = \cos x$	6
3.2	$(\cos x)' = -\sin x$	6
3.3	$(\tan x)' = \sec^2 x$	6
3.4	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	6
3.5	$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$	6
3.6	$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$	6
4	反三角函数的导数	6
4.1	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6
4.2	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6
4.3	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	6
4.4	$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	6
第三部分	求导的各种方法, 方法论	6
5	求导法则 : 和差积商	6
5.1	$(a+b)' = a' + b'$	6
5.2	$(a-b)' = a' - b'$	7
5.3	$(a+b+c)' = a' + b' + c'$	7
5.4	$(a-b)' = a' - b'$	7
5.5	$(ab)' = a'b + ab'$	7
5.6	$(abc)' = a'bc + ab'c + abc'$	7

目录	2
5.7 (常数 $C \cdot a$)' = $C \cdot a'$	7
5.8 $(\frac{a}{b})' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$	7
6 对“复合函数”求导的方法: 链式法则 / 剥洋葱法	7
7 对“参数方程”求导的方法	8
8 对“隐函数”求导的方法	8

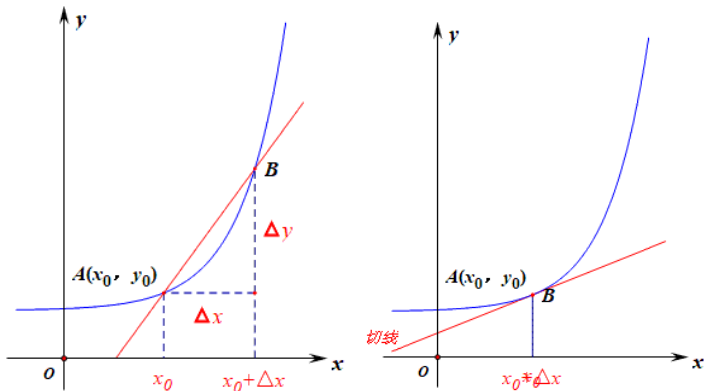
导数 Derivative

2022 年 12 月 9 日

第一部分 什么是导数？

某点处的“导数”，就是该点处“切线的斜率”。

导数，就是一个“极限值”，比如，y 在点 x_0 处的导数，就是： $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



可导，就意味着图像很“光滑”。即图像没有“尖角”存在（因为尖角处的左右导数不相等）。

并且，切线不能垂直于x轴。如果切线是垂直于x轴的，它的斜率就会是 $+\infty$ 或 $-\infty$ 了。

x_0 点处的导数，其实可以有下面4种写法来表示：

- (1) $y'|_{x=x_0}$
- (2) $f'(x_0)$
- (3) $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$
- (4) $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

“位置”的瞬时变化率(变换趋势，能预测未来)，就是“速度”。所以速度是位置的导数。

“速度”的瞬时变化率，就是“加速度”。所以“加速度”是“速度”的导数。“加速度”就是“位置”的二阶导。

单侧导数，就是从“某一侧”逼近某一x点时，该点的切斜斜率。

所以，左导数，就是“从左侧向右”逼近了。右导数，就是“从右边向左”逼近了。

$$\begin{aligned} \text{- 左导数: } f_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{- 右导数: } f_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

第二部分 导数公式

1 常用的导数

1.1 (常数 C)' = 0

常数不会变化, 自然没有“瞬时变化率”存在, 所以常数的导数就=0.

1.2 $(x^n)' = nx^{n-1}$

(1) 当指数 $n=1$ 时, 其导数=1.

(2) 当 $n>1$ 时, 其导数是 $(x^n)' = nx^{n-1}$

例

求 $y = \frac{1}{x}$ 在点(1/2, 2)处的切线的斜率(即导数), 并求出该切线的方程.

其导数是: $y' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2}$

然后把点(x=1/2, y=2) 代入进去, 得到: $y' |_{x=\frac{1}{2}} = -1 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -4 \leftarrow$ 这个数值, 就是函数在点(1/2, 2)处的切线的斜率.

然后再套用直线的“点斜式方程” $y - y_1 = k(x - x_1)$

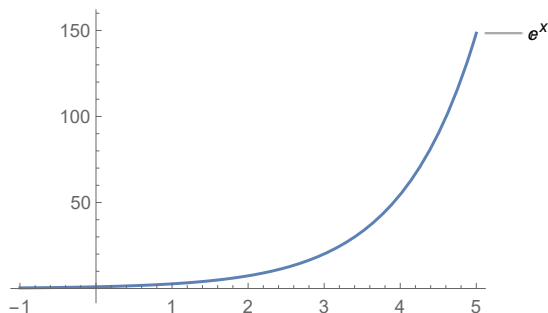
本例的切线即: $y - \underbrace{y_1}_{=2} = \underbrace{k}_{\text{即 } y' = -4} \left(x - \underbrace{x_1}_{=\frac{1}{2}} \right)$

1.3 $(a^x)' = a^x \ln a$

即直接后面跟个尾巴: $\ln a$

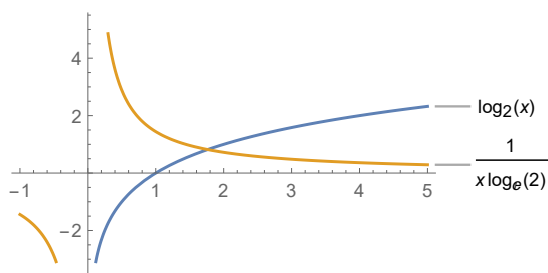
例如, $(2^x)' = 2^x \ln 2$

$$1.4 \quad (e^x)' = e^x \ln e = e^x$$



$$1.5 \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

即把 x 提到前面去, 把 \log 变成 \ln , 整体再放在分母上. 分子为 1.



$$1.6 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{例如: } (\log_e x)' = \frac{1}{x \underbrace{\ln e}_{=\log_e e=1}} = \frac{1}{x}$$

对“对数函数”求导, 有一种技巧: 换底成 \ln 后再来做. 因为转成 \ln 后, 操作会变得简单.

例

$$y = x^x, \text{ 求 } y'$$

$$\ln(y) = \ln(x^x) \leftarrow \text{两边同时取 } \ln$$

$$\ln(y) = x \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \ln x)' \leftarrow \text{两边同时对 } x \text{ 求导, 注意 } y \text{ 是个复合函数, 要用剥洋葱法}$$

$$\ln' y \cdot y' = x' \ln x + x(\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln x + 1) y \leftarrow \text{再把 } y \text{ 这个复合函数的具体内容 } = x^x \text{ 代进去}$$

$$y' = (\ln x + 1) x^x$$

2 反函数的导数 :
$$[F^{-1}(Y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数 } F'(X)}$$

2 反函数的导数 :
$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数 } f'(x)}$$

反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈“倒数关系”.

原函数是 $y=f(x)$, 其反函数是 $x=f(y)$, 则, 反函数的导数, 就是“原函数导数”的倒数.

换言之, 原函数的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 则其反函数的导数就是 $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

“原函数”和“反函数”, 它们“导数”的乘积 =1.

“原函数”与其“反函数”的图像, 是关于 $y=x$ 对称的.

3 三角函数的导数

3.1 $(\sin x)' = \cos x$

3.2 $(\cos x)' = -\sin x$

3.3 $(\tan x)' = \sec^2 x$

3.4 $(\cot x)' = -\csc^2 x$

3.5 $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

3.6 $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

4 反三角函数的导数

4.1 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4.4 $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

第三部分 求导的各种方法, 方法论

5 求导法则 : 和差积商

5.1 $(a+b)' = a' + b'$

例: $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

$$5.2 \quad (a + b)' = a' + b'$$

$$5.3 \quad (a + b + c)' = a' + b' + c'$$

$$5.4 \quad (a - b)' = a' - b'$$

$$5.5 \quad (ab)' = a'b + ab'$$

$$\text{例: } (x^3 e^x)' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$$

$$5.6 \quad (abc)' = a'bc + ab'c + abc'$$

$$5.7 \quad (\text{常数} C \cdot a)' = C \cdot a'$$

← 直接把常数提到外面去就行了

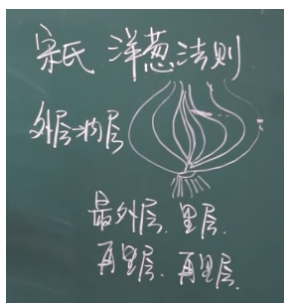
$$\text{例: } (5\sin x)' = 5(\sin x)' = 5\cos x$$

$$5.8 \quad \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

$$\text{即: } \left(\frac{\text{上}}{\text{下}}\right)' = \frac{\text{上}' \cdot \text{下} - \text{上} \cdot \text{下}'}{\text{下}^2}$$

6 对“复合函数”求导的方法: 链式法则 / 剥洋葱法

$$\text{有} \begin{cases} \text{大} = f(\text{中}) \\ \text{中} = g(\text{小}) \\ \text{小} = h(\text{微}) \end{cases}, \text{ 则: } \frac{d\text{大}}{d\text{微}} = \frac{d\text{大}}{d\text{中}} \cdot \frac{d\text{中}}{d\text{小}} \cdot \frac{d\text{小}}{d\text{微}}$$



例

我们用“剥洋葱法”(从外向内一层层求导), 来求下面的复合函数的导数

$$y = (1 - 2x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \left[(1 - 2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' \cdot (1 - 2x^2)' = \frac{1}{3} (1 - 2x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (-2 \cdot 2x)$$

7 对“参数方程”求导的方法

比如, 有这个参数方程, t 是参数 :

$$d(x) = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

要求“ y 对 x 求导”. 则:

$$\text{其“一阶导数”是: } \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{y \text{ 对 } t \text{ 的导数}}{x \text{ 对 } t \text{ 的导数}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\text{其“二阶导数”是: } \frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{dy}{dx} \text{ 对 } t \text{ 的导数}}{x \text{ 对 } t \text{ 的导数}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

8 对“隐函数”求导的方法

- 显函数: 能清晰的写成 $y = \dots x$ 的形式.

- 而隐函数: 虽然 x 和 y 之间有关系, 但无法写成清晰的 $y = f(x)$ 的形式. 即无法变换成“能把 y 单独提取出来, 放在等号左边”的这种形式.

对“隐函数”求导的方法是: 等号两边同时对 x 求导.

例

有隐函数 $e^y + xy - e = 0$, 求 y'

$$(e^y + xy - e)' = 0'$$

$$(e^y)'y' + (xy)' - e' = 0 \leftarrow \text{常数 } e \text{ 的导数也} = 0$$

$$e^y y' + (x'y + xy') = 0$$

$$e^y y' + y + xy' = 0$$

$$(e^y + x)y' = -y$$

$$y' = -\frac{y}{(e^y + x)}$$

因为是隐函数, y 无法写成 $\dots x$ 的形式, 所以我们就会发现, y' 的结果里面, 也无法只有纯粹的 x , 会带着 y .

例

$$y = e^x x^2 \ln x \tan x \leftarrow \text{先两边取 } \ln, \text{ 转成对数}$$

$$\ln y = \ln (e^x x^2 \ln x \tan x) \leftarrow \text{根据公式 } \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln y = \ln e^x + \ln x^2 + \ln(\ln x) + \ln(\tan x) \leftarrow \text{再两边求导}$$

$$\begin{aligned} (\ln y)' \cdot y' &= \underbrace{(\ln e^x)'} + \underbrace{(\ln x^2)'} + \underbrace{(\ln(\ln x))'}_{=\frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}} + \underbrace{(\ln(\tan x))'}_{=\frac{1}{\tan x} \sec^2 x} \\ &= (x \ln e)' = \frac{1}{x^2} 2x \\ &= (x \cdot 1)' = \frac{2}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x \ln x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x \ln x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} \right) y \leftarrow \text{然后把 } y \text{ 的具体值 } = e^x \cdot x^2 \cdot \ln x \cdot \tan x \text{ 代入进去}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x \ln x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} \right) (e^x \cdot x^2 \cdot \ln x \cdot \tan x)$$