

目录

第一部分	条件概率	2
1	“条件概率”的意思	2
2	条件概率的性质	3
2.1	性质: $P(A \text{条件}B) \geq 0$	3
2.2	性质: $P(\Omega \text{条件}B) = 1$	3
2.3	性质: $P(A_1 \cup A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) - P(A_1 A_2 B)$	4
2.4	性质: $P(A - B) = 1 - P(\bar{A} B)$	4
2.5	性质: 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于“概率的和”	4
3	“条件概率”的乘法公式: $P(\text{前后}) = P(\text{后}) \cdot P(\text{前} \text{后}) = P(\text{前}) \cdot P(\text{后} \text{前})$	4
4	传染病模型	6
5	全概率公式	7

文件名

第一部分 条件概率

1 “条件概率”的意思

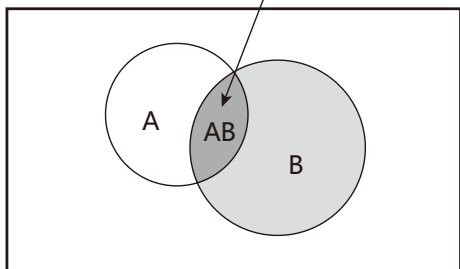
条件概率是：有A, B 两个事件, 和样本空间 Ω . 其中 $P(B) > 0$, 则, 在B已经发生的条件下, A发生的概率, 就叫做A对B 的“条件概率”. 记作: $P(A \text{— 条件} B)$, 读作“在B发生的条件下, A发生的概率”.

即, 条件概率公式是: $P(A \text{— 条件} B) = \frac{\overbrace{\text{在B发生条件下,A发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB同时发生了}}}{\text{B里面有多少个样本点}} = \frac{n_{AB}}{n_B}$

还可写成: $P(A \text{— 条件} B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{n_{AB}}{n_B}$

这块交集, 就是在B发生的前提下, A发生的概率

$$\text{即: } P(A | \text{条件} B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数(分母)去比.

上面公式中, $P(AB)$ 的计算公式是什么呢?

- 如果事件A, 和事件B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件A, 和事件B 不相互独立, 则只能用“条件概率”公式, 来求 $P(AB)$, 即: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意: “条件概率”, 和“分步骤法”的区别:

- 分步骤法: 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.

比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率: 前面的事件, 有可能会(但并不一定)影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.

会影响的例子: 比如一共有100个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有6个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:

- B: 取到偶数编号的球

- A_1 : 取到1号球

- A_2 : 取到2号球

- A_5 : 取到大于4号的球

则:

取到1号球的概率

$$- \overbrace{P(A_1)}^{\text{1号球选1}} = \frac{\overbrace{C_1^1}^{\text{全6选1}}}{C_6^1} = \frac{1}{6} = 0.166667$$

偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球

$$- P(A_1|B) = \frac{\text{在B条件里面,取到}A_1\text{(即1号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\overbrace{C_3^1}^{\text{3个偶数球里面取1个}}} = 0$$

1个编号2的球里面,取1个

$$- P(A_2|B) = \frac{\overbrace{C_1^1}^{\text{1个编号2的球里面,取1个}}}{\overbrace{C_3^1}^{\text{3个偶数球里面取1个}}} = \frac{1}{3}$$

5,6号与偶数的交集, 只有6号一个球

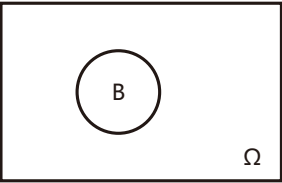
$$- P(A_5|B) = \frac{\text{在B条件里面,取到大于4号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有6号一个球}}}{3}$$

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) \geq 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$

$P(\Omega | B)=1$



2.3 性质： $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 A_2 | B)$

2.4 性质： $P(A - B) = 1 - P(\overline{A} | B)$

2.5 性质：可列可加性：若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是“互不相容”的事件，则有： $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B) \leftarrow$ 即：“和的概率”，等于“概率的和”

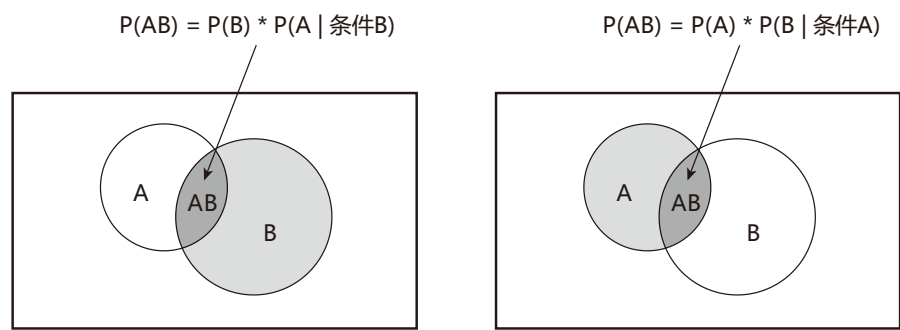
3 “条件概率”的乘法公式：

$$P(\text{前后}) = P(\text{后}) \cdot P(\text{前}|\text{后}) = P(\text{前}) \cdot P(\text{后}|\text{前})$$

推导过程：

因为
$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow \text{即 } P(AB) = \underbrace{P(B) \cdot P(A|B)}_{\text{乘法, 是交集}\cap\text{的概念}} \quad \textcircled{1} \\ P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow \text{即 } P(AB) = \underbrace{P(A) \cdot P(B|A)}_{\text{乘法, 是交集}\cap\text{的概念}} \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”． 即 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
其中 $P(A) > 0, P(B) > 0$



同理，多个事件的乘法公式就是：

$$\rightarrow P(ABC) = \underbrace{P(A)} \cdot \underbrace{P(B-A)} \cdot \underbrace{P(C-BA)}$$

↑ 上面“从右往左”看，就是按 A,B,C 的顺序

$$\rightarrow P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 A_1) \cdot P(A_3 A_2 A_1) \cdot \dots \cdot P(\underbrace{A_n}_{\substack{\text{即最后一个数字n} \\ \text{写在前面.}}} \mid \underbrace{A_{n-1} \dots A_2 A_1}_{\substack{\text{后面的条件,} \\ \text{最后一个数字是:} \\ \text{n少一位}}})$$

↑ 上面“从右往左”看，就是按 A_1, A_2, \dots, A_n 的顺序

例

有100件产品，次品率=10%，即有10件次品。做不放回抽样，问：第3次才取到合格品的概率是？

我们先令：

- A_1 表示第1次取，就取到了合格品
- A_2 表示第2次取，取到了合格品
- A_3 表示第3次取，取到了合格品

那么第3次才取到合格品，就是：

$$P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) = \underbrace{P(\overline{A_1})}_{\text{分步骤来做}} \cdot \underbrace{P(\overline{A_2}|\overline{A_1})}_{\text{第1次取,取到次品}} \cdot \underbrace{P(A_3|\overline{A_2}\overline{A_1})}_{\text{在第1,2次取到次品的条件下,第3次取到正品}}$$

第二步,因为第一步已经拿走1件次品,这第二步就只能在9件次品里面取1件次品了

既然第三步要拿到正品,我们就从90件正品里面取1了

$$= \frac{\overbrace{C_{10}^1}^{\text{第一步,10次品里面取1}}}{C_{100}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_9^1}^{\text{第二步,9件次品里面取1}}}{C_{99}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_{90}^1}^{\text{第三步,90件正品里面取1}}}{C_{98}^1}$$
$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0.00834879$$

例

某产品:

- 甲公司占60%市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占40%市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:

- J: 表示产品是甲的
- \bar{J} : 表示产品是乙的
- Q (qualified): 表示产品是“合格”的
- \bar{Q} : 表示产品是“不合格”的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$P(JQ) = \underbrace{P(J)}_{=0.6} \cdot \underbrace{P(Q|J)}_{\text{甲的合格率}=0.9} = 0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$P(\bar{J}Q) = \underbrace{P(\bar{J})}_{=0.4} \cdot \underbrace{P(Q|\bar{J})}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8} = 0.32$$

例

抽签, 共10签, 其中有4个为“成功上岸”的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回. 我们先设定事件:

- A: 表示甲抽到“成功”
- B: 表示乙抽到“成功”
- C: 表示丙抽到“成功”

问, (1) 甲抽到“成功”的概率? $P(A) = \frac{C_{4\text{好签}}^1}{C_{10\text{签}}^1} = \frac{4}{10} = 0.4$

(2) 甲乙都抽到“成功”的概率?

$$P(AB) = \underbrace{P(A)}_{\text{第1步:甲先成功}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下,乙再成功}}$$

甲先抽掉一张好签

乙就只能从剩下的3张好签中来抽了

$$= \frac{\overbrace{C_{4\text{好签}}^1}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{C_{10\text{签}}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_{3\text{好签}}^1}^{\text{乙就只能从剩下的3张好签中来抽了}}}{C_{9\text{签}}^1} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P(\overline{A}B) = \underbrace{P(\overline{A})}_{\text{第1步:甲先失败}} \cdot \underbrace{P(B|\overline{A})}_{\text{第2步:在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$

甲先从共6张坏签中取1

乙从共4张好签中取1

$$= \frac{C_{6\text{坏签}}^1}{C_{10\text{签}}^1} \cdot \frac{C_{4\text{好签}}^1}{C_{10\text{签}-1}^1} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到“成功”的概率?

$$P(ABC) = \underbrace{P(A)}_{\text{第1步:甲先成功}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$

$\frac{C_{4\text{好签}}^1}{C_{10\text{签}}^1} \cdot \frac{C_{\text{还剩3好签}}^1}{C_{\text{还剩9签}}^1}$

$\cdot \frac{C_{\text{还剩2好签}}^1}{C_{\text{还剩8签}}^1}$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0.0333333$$

4 传染病模型

例

有红球a个, 黑球b个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入c个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续3次都是取出红球的概率?

先设定事件:

- A_1 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第2次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第3次, 取出的是红球

$$P(\underbrace{A_1 A_2 A_3}_{\text{连续3次取到红球}}) = \underbrace{P(A_1)}_{\text{第一步: 第一次就取到红球}} \cdot \underbrace{P(A_2 | A_1)}_{\text{第二步: 在第一次取到红球的前提下, 第二次也取到红球}} \cdot \underbrace{P(A_3 | A_2 A_1)}_{\text{第三步: 再前两次都取到红球的前提下, 第三次也取到红球}}$$

在第一次取到红球后,
又放入c个红球.
所以第二次取时,
红球就一共有a + c个

$$= \frac{C_{a\text{红}}^1}{C_{a\text{红} + b\text{黑}}^1} \cdot \frac{C_{a\text{红} + c\text{红}}^1}{C_{a\text{红} + b\text{黑} + c\text{红}}^1} \cdot \frac{C_{a\text{红} + 2c\text{红}}^1}{C_{a\text{红} + b\text{黑} + 2c\text{红}}^1}$$

为什么总数没有减1个?
因为是“放回抽样”.
总数不变

上面可以看出:

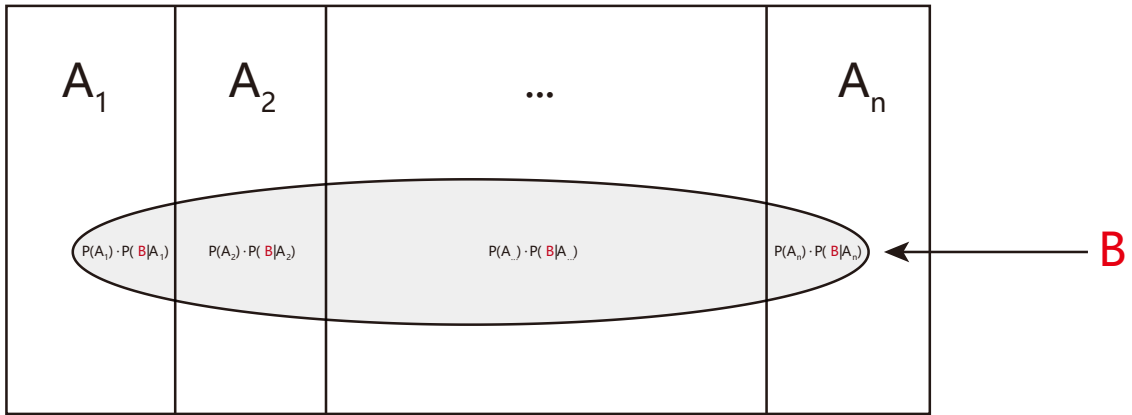
- 当 $c_{\text{红}} = 0$ 时, 就是正常的“放回抽样”.
- 当 $c_{\text{红}} = -1$ 时, 就是“不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 $c_{\text{红}} \neq 0$ 时, 就是本例的“传染病模型”.

5 全概率公式

全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 A_1, A_2, \dots, A_n 构成一个“完备事件组”，即：(1) 这些事件两两互不相容, (2)其“和”(或“并集”)为全集 Ω , (3) $P(A_i) > 0$.

则有:
$$\sum_{i=1}^n [P(A_i) \cdot P(B|A_i)] = P(B)$$

即有:
$$P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B|A_2)} + \dots + \underbrace{P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$



Total Probability Theorem
全概率公式

例

一个工厂, 有4条生产线, 情况如下:

	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是“不合格品”的概率?

我们先设定事件:

- A_1 : 表示是生产线1 中的产品
- A_2 : 表示是生产线2 中的产品
- A_3 : 表示是生产线3 中的产品
- A_4 : 表示是生产线4 中的产品
- B : 表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 $=P(B)$

$$\begin{aligned} P(B) &= \underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线1的概率}} \cdot \overbrace{P(B|A_1)}^{\text{生产线1中的次品率}}}_{\text{第1条生产线中(的条件下), 不合格品的概率}} + P(A_2) \cdot P(B|A_2) \\ &\quad + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + P(A_4) \cdot P(B|A_4) \\ &= (15\% \cdot 0.05) + (20\% \cdot 0.04) + (30\% \cdot 0.03) + (35\% \cdot 0.02) \\ &= 0.0315 \end{aligned}$$

例

有10台机器人, 3台是次品. 已经卖出去了2台(是正品还是次品未知).
问: 再取1台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:

- B_{00} : B(bad), 表示前两次取, 都是次品(用0表示)
- B_{10} : 表示前两次取, 是一正(用1表示), 一次(用0表示)
- B_{11} : 表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3} : G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第3次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这3种可能性:

	第1次取到	第2次取到	第3次取到
情况1 :	次=	次	正
情况2 :	次	正	正
情况3 :	正	正	正