第二换元法 之"根式代换法"

Table of Contents

1. 第二换元法 之"根式代换法"

Example 1. 标题

例如:

$$\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx \leftarrow \text{既然是根式代换法，我们就用一个变量来代换这个根号全部，}$$

$$\text{如，令}t=\sqrt{2x+1}$$

$$\text{则 } t^2=2x+1,\quad x=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t}d\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right)\leftarrow \text{ 这里的做微分: } d\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right)=\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right)'\underbrace{dt}_{\text{是自变量的微分!}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2t\ dt=tdt$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t}tdt$$

$$=\frac{1}{2}\int(t^2-1)\ \mathrm{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int t^2dt - \int 1dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t+C\right)$$

$$=\frac{1}{6}t^3-\frac{t}{2}+C\leftarrow\text{再把}t\text{还原成}x,\quad\text{因为}t^2=2x+1,\ \text{所以: }t=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

Example 2. 标题

例如：

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx \leftarrow \text{令}t=\sqrt{2x+1}\text{，则：}\begin{aligned} t^2&=2x+1,\\ x&=\frac{1}{2}(t^2-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx\text{部分} &= d\left(\frac{1}{2}(t^2-1)\right)\\ &=(2^{-1}(t^2-1))'dt\\ &=2^{-1}(2t)dt\\ &=t\cdot d(t)\end{aligned}$$

换元必换限($\int$ 符号的上下限)：

本例，原始 $\int$ 对x的上限是4，下限是0，即 $\int_0^4 \dots\ dx$

那么"换元"成t后，$\int$ 对t的"新限"是多少呢?

因为 $t=\sqrt{2x+1}$

所以x的原上限4（即$x=4$），用t表示就是 $t=\sqrt{2(4)+1}=3$

x的原下限0（即$x=0$），用t表示就是 $t=\sqrt{2(0)+1}=1$

所以，新的积分符号就是 $\int_1^3 \dots\ dt$

$$=\int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{t}\cdot t\cdot dt$$

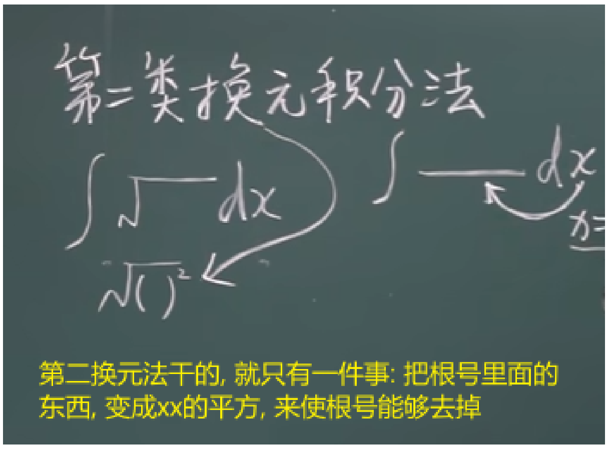
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2-1)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^3$$

---

2. 第二类换元积分法

Header 1	Header 2

Header 1	Header 2
第一类换元积分法	是把d前面的东西, 往d里面拿, 即这个过程相当于是: 先把d外面的东西"求原函数", 再放到d里面.
第二类换元积分法 : 它主要解决 "∫(根号)dx" 这类导函数是带根号的问题	是把d里面的东西, 朝外拿, 即: 对于dx, 将 $x = \varphi(t)$ 朝外拿, 这个过程相当于对 φ(t) 求导. 即变成 $\varphi'(t)dt$ ← 这个其实就是做微分. 这不也是第一换元法这个"凑微分法"的过程之一么? 

原式 $\int f(x)dx$, 我们用一个函数来代替x, 比如 $x=\varphi(t)$, 依此, $t=\varphi^{-1}(x)$

意思是: 原函数如果是输入t, 会输出x,

则其"时间倒流性质"的反函数就是 输入x, 能输出t

就像, 原函数是输入水果原材料, 输出水果汁;

则其反函数机器就是: 输入水果汁, 能输出其水果原材料.

$$\text{则原式} = \int f[\varphi(t)]\, d(\varphi(t)) \leftarrow d(\varphi(t)) = \text{给}\varphi(t)\text{做微分}, \ = \varphi'(t)\,dt$$

$$\text{所以原式就继续} = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\,dt \leftarrow \text{别忘了: 我们还要把}t\text{, 重新换回}x$$

$$= [\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\,dt]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Example 3. 标题

例如：
总结做题的方法，一般的替换规律如下：

第①种：对于$\sqrt{a^2-x^2}$的，

$\rightarrow$ 我们令 $x=\mathrm{a}\cdot\sin t$

根号部分$=\sqrt{a^2-(\mathrm{a}\cdot\sin t)^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}$

第②种：对于$\sqrt{x^2-a^2}$的，

$\rightarrow$ 我们令 $x=\mathrm{a}\cdot\sec t$

根号部分$=\sqrt{a^2-(\mathrm{a}\cdot\sec t)^2}=\sqrt{a^2(1-\sec^2 t)}=\sqrt{a^2\tan^2 t}$

第③种：对于$\sqrt{x^2+a^2}$的，

$\rightarrow$ 我们令 $x=\mathrm{a}\cdot\tan t$

根号部分$=\sqrt{a^2+(\mathrm{a}\cdot\tan t)^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}=\sqrt{a^2\sec^2 t}$

2.1. 对于 $\sqrt{a^2-x^2}$, 其中的x, 用 $x=a\cdot\sin t$ 来替换.

Example 4. 标题

例如：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx\ \ (a>0) \leftarrow \text{令}x=\mathrm{a}\cdot\sin t,\quad (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$$

限定t的定义域，是为了让“该令”有反函数.

这个“令”，也就有：$\sin t=\frac{x}{a}$,

两边同时乘上一个arcsin，把t暴露出来，就有：

$$\underbrace{ar\sin\ \sin t}_{\substack{\text{相当于线性代数中的}\\ A^{-1}A=I}}=\arcsin\frac{x}{a}$$

$$t=\arcsin\frac{x}{a}$$

$$=\int\sqrt{a^2-(\mathrm{a}\cdot\sin t)^2}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$$=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$$=\int\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\ d(\mathrm{a}\cdot\sin t)$$

$$= \int \sqrt{a^2 \ \cos^2 t} \ \ d(\mathrm{a} \cdot \sin t)$$

$$= \int |\mathrm{a} \cdot \cos t| \ \ d(\mathrm{a} \cdot \sin t) \leftarrow \ d\text{的部分就是 对}(\mathrm{a} \cdot \sin t) \text{ 做微分,}$$

$$\begin{aligned} \text{即} d(\mathrm{a} \cdot \sin t) &= d(\mathrm{a} \cdot \sin t) \\ &= (\mathrm{a} \cdot \sin t)' dt \\ &= \mathrm{a} \cdot \cos t \cdot dt \end{aligned}$$

$$= \int |\mathrm{a} \cdot \cos t| \ \cdot \mathrm{a} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$= a^2 \int \cos^2 t \ \ dt \ \leftarrow \ \text{根据倍角公式:} \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

则...

...

$$= a^2 (\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}) + C \leftarrow \ \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$= a^2 (\frac{t}{2} + \frac{2 \sin t \cos t}{4}) + C$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin t \cos t}{2} + C \leftarrow \text{把} t \text{换回} x\text{,上面我们已经做出过:}$$

$$\rightarrow \ \sin t = \frac{x}{a},$$

$$\text{并且,既然} \sin t = \frac{\text{对边} x}{\text{斜边} a}\text{,所以} \cos t = \frac{\text{临边}}{\text{斜边}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$\rightarrow t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$= \frac{a^2 (\arcsin \frac{x}{a})}{2} + \frac{a^2 \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{2} + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C$$

2.2. 对于 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 其中的x, 用 $x = a \cdot \tan t$ 来替换.

Example 5. 标题

例如：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0) \quad \leftarrow \text{令} x=\mathrm{a}\cdot\tan t \quad (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$$

则分母上的 $\sqrt{x^2+a^2}$ 部分，就

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\mathrm{a}\cdot\tan t)^2+a^2}\\
&=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}\\
&=\sqrt{a^2(\tan^2 t+1)}\\
&=a\sqrt{\sec^2 t} \leftarrow \sec t=\frac{1}{\cos t}\text{，因为}-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\text{，所以}\sec t>0\\
&=\mathrm{a}\cdot\sec t
\end{aligned}$$

$$=\int \frac{1}{a\cdot\sec t}\, d(\mathrm{a}\cdot\tan t) \leftarrow d\text{部分}=(\mathrm{a}\cdot\tan t)'dt$$

$$=a\cdot\sec^2 t\ dt$$

$$=\int \frac{a\cdot\sec^2 t}{a\cdot\sec t}dt$$

$$=\int \sec t\ dt \leftarrow \text{根据积分公式} \int \sec t\ dx = \ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$= \ln|\sec t+\tan t|+C \quad \leftarrow \text{别忘了把} t \text{换回} x\text{. 因为 } x=\mathrm{a}\cdot\tan t\text{，所以}$$

$$\tan t=\frac{x}{a}=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}\text{，所以另一条斜边}=\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\sec x=\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

$$=\ln|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}|+C$$

$$=\ln|\frac{1}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)|+C \quad \leftarrow x\text{和}\sqrt{x^2}\text{是一样大的，而根号里再加一个正数，其值肯定就比}x\text{更大了，}$$

所以绝对值符号可以去掉，它肯定是个正数

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)+C$$

2.3. 对于 $\sqrt{x^2-a^2}$, 其中的x, 用 $x = a\cdot\sec t$ 来替换.

Example 6. 标题

例如:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0)$$ ①当分母根号中的$x^2>a^2$时:

$$\leftarrow 令\ x=\mathrm{a}\cdot\sec t \quad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} dx &= d(\mathrm{a}\cdot\sec t) \\ &= (\mathrm{a}\cdot\sec t)'dt \\ &= \mathrm{a}\cdot\sec t\tan t\ dt \end{aligned}$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{a}\cdot\sec t)^2-a^2}}\ \mathrm{a}\cdot\sec t\tan t\ dt$$

$$\begin{aligned} \leftarrow 分母的\sqrt{(\mathrm{a}\cdot\sec t)^2-a^2} &= \sqrt{\mathrm{a}^2\cdot\sec^2 t-a^2} \\ &= \sqrt{\mathrm{a}^2(\sec^2 t-1)} \leftarrow 根据公式: 1+\tan^2 x=\sec^2 x \\ &= a\sqrt{\tan^2 t} \\ &= \mathrm{a}\cdot\tan t \end{aligned}$$

$$=\int \frac{\mathrm{a}\cdot\sec t\tan t}{\mathrm{a}\cdot\tan t}dt$$

$$=\int \sec t\ dt \qquad \leftarrow 根据积分公式: \int \sec t\ dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C \qquad \leftarrow 别忘了把t换回x:$$

因为我们令了 $x=\mathrm{a}\cdot\sec t$，即 $\sec t=\frac{x}{a}=\frac{斜边}{邻边}$,

所以：对边 $=\sqrt{斜边^2-邻边^2}=\sqrt{x^2-a^2}$

$$\tan=\frac{对边}{邻边}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$$ ←其中的公因子 $\ln|\frac{1}{a}|$ 是一个常数，可以归并到常数C里面去

$$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

②当分母根号中的$x^2<a^2$时，结果是: $=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

https://www.bilibili.com/video/BV1Eb411u7Fw?p=46&vd_source=52c6cb2c1143f8e222795afbab2ab1b5

41.49

https://www.bilibili.com/video/BV1Jo4y1R7Bx?
spm_id_from=333.337.top_right_bar_window_history.content.click&vd_source=52c6cb2c1143f8e22
2795afbab2ab1b5

9.55