目录

第一部分 定积分 definite integral **2**

1 "定积分" 的定义 **2**

2 定积分的性质 **3**

2.1 若 b=a, 则 $\int_a^a f(x) = 0$ 3

2.2 $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) \leftarrow$ 交换上下限, 定积分的值要变号 3

2.3 $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \leftarrow$ 即, 积分可以拆开, 常数可以提到外面去 3

2.4 若 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leftarrow$ 其实就是原先的一步走, 分成两步走而已. 3

2.5 若 $a < b < c$, 则: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ 3

2.6 若 f(x) 恒等于 1, 即该函数是条 "水平直线", 它与 x 轴之间就形成一个矩形了. 则 $\int_a^b 1dx =$ 高$1 \cdot$ 宽$(b-a) = b-a$ 3

2.7 $\int_a^b kdx = k\int_a^b 1dx = k(b-a) \leftarrow$ k 是常数, 可以提到积分外面 3

2.8 若 $f(x) >= 0$, 即 "函数曲线" 都在 x 轴上方. 则 $\int_a^b f(x)dx >= 0$ 3

2.9 若 $f(x) <= 0$, 即 "函数曲线" 都在 x 轴下方. 则 $\int_a^b f(x)dx <= 0$ 3

2.10 若 $f(x) <= g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx <= \int_a^b g(x)dx$ 3

2.11 $|\int_a^b f(x)dx| <= \int_a^b |f(x)|dx$ 3

2.12 一个曲线, 在 [a,b] 区间上, 若 m 是它的最小 y 值高度, M 是它的最大 y 值高度, 则有: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ 4

2.13 定积分 "中值定理" :
如果 f(x) 是连续的, $\exists \xi \in [a,b]$, 则必然有 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ 4

第二部分 求定积分的方法 **4**

3 定积分的 "分部积分法": $\int_a^b$ 前 $\cdot\, d($后$) = ($前 $\cdot$ 后$)\ |_a^b - \int_a^b$ 后 $d($前$)$ **5**

积分

第一部分　定积分 definite integral

1　“定积分” 的定义

1. 曲线函数 f(x), 在 x 轴上有界, 比如端点是 [a,b].
2. 然后, 我们在 [a,b] 这段区间上, 任意插入 n 个分点, 分成 n 个小区间. 它们不要求等分. 每个小区间的长度就是 $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.
3. 在每个 Δ 小区间上, 任取一点 ξ_i. 这点的函数值 (即 y 轴上的高度), 就是 $y = f(\xi_i)$.
4. 这样, 我们就能得到每一个 Δ 小区间, 所在的 “长方形细条的面积” 了, 即 = 宽$\Delta x_i \cdot$高$f(\xi_i)$
5. 把所有这些 Δ 小区间的 “长方形细条面积”, 全加起来, 就是该曲线到 x 轴间的面积的近似值. $= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(\xi_i)$
6. 我们令其中 x 轴宽度最大的那个 Δx 小区间 (假设起名为 , 即 $\lambda = \max\{\mathit{\Delta} x_1, ..., \mathit{\Delta} x_n\}$), 我们让这个 , 极限趋向于 0. 这样, 既然最大的 Δx 小区间都趋近于 0 了, 其他比它更小的 Δx 小区间, 就都统统被约束, 也都趋向于 0 了. 这样, 它们的 “长方形细条的面积之和”, 就能精确的等于 “函数曲线到 x 轴之间的面积” 了, 而不仅仅是 “近似” 了.

即: $\lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{高}} \cdot \underbrace{\mathit{\Delta} x_i}_{\text{宽}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{定积分}}$

各部分的名字是: $\int_{\text{下限}a}^{\text{上限}b} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}}\ d\ \underbrace{(x)}_{\text{积分变量}}}_{\text{被积表达式}}$

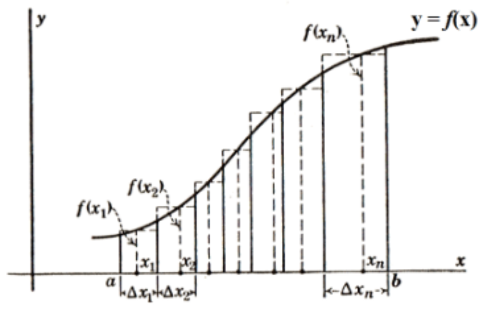


Fig. 1

2 定积分的性质

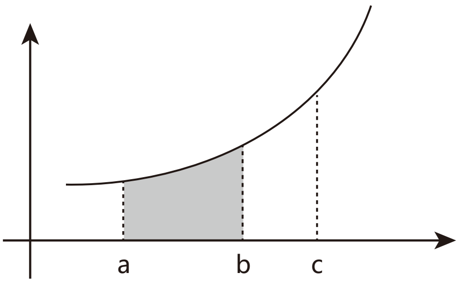
2.1 若 b=a, 则 $\int_a^a f(x) = 0$

2.2 $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) \leftarrow$ 交换上下限, 定积分的值要变号

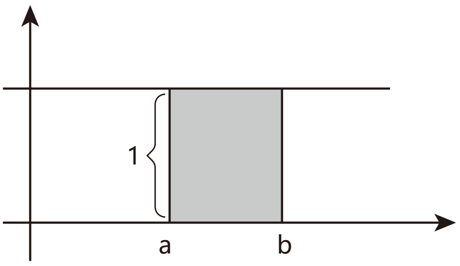
2.3 $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \leftarrow$ 即, 积分可以拆开, 常数可以提到外面去

2.4 若 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leftarrow$ 其实就是原先的一步走, 分成两步走而已.

2.5 若 $a < b < c$, 则: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$



2.6 若 f(x) 恒等于 1, 即该函数是条 "水平直线", 它与 x 轴之间就形成一个矩形了. 则 $\int_a^b 1dx =$ 高$1 \cdot$ 宽$(b-a) = b-a$

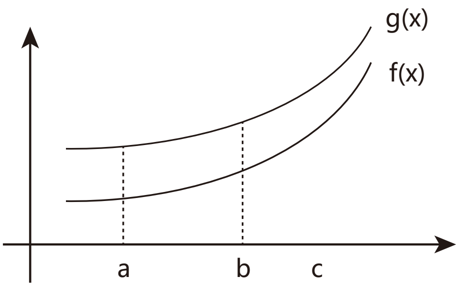


2.7 $\int_a^b kdx = k\int_a^b 1dx = k(b-a) \leftarrow$ **k** 是常数, 可以提到积分外面

2.8 若 $f(x) >= 0$, 即 "函数曲线" 都在 x 轴上方. 则 $\int_a^b f(x)dx >= 0$

2.9 若 $f(x) <= 0$, 即 "函数曲线" 都在 x 轴下方. 则 $\int_a^b f(x)dx <= 0$

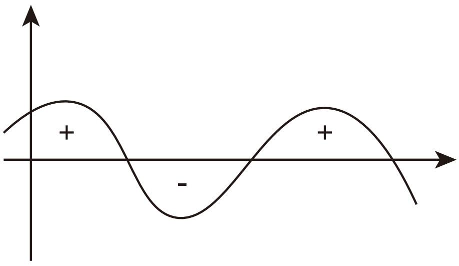
2.10 若 $f(x) <= g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx <= \int_a^b g(x)dx$



2.11 $|\int_a^b f(x)dx| <= \int_a^b |f(x)|dx$

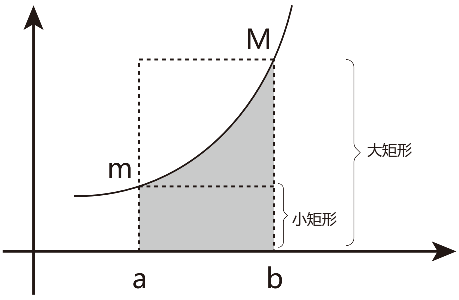
因为 "函数曲线" 的定积分 (面积), 在 x 轴上方是正面积的, 在 x 轴下方是负面积的, 如果一个曲线既有正 y 值的部分, 又有负 y 值的部分, 那它的总面积, 肯定会有" 正负相互抵消掉" 的一部分.

而先把 “函数曲线” 取绝对值, 它的 y 值就都在 x 轴上方了, 面积就不存在负数的一块, 就不会抵消掉总面积.



2.12 一个曲线, 在 [a,b] 区间上, 若 m 是它的最小 y 值高度, M 是它的最大 y 值高度, 则有: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

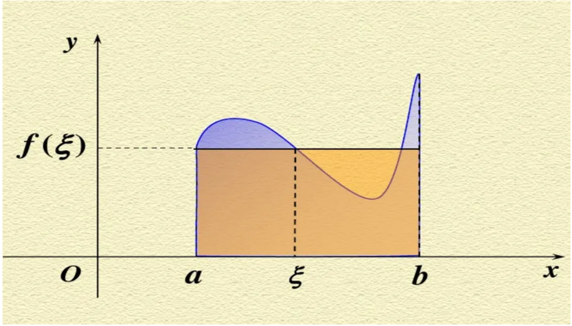
如下图, “高 m” 乘以 “宽 (b-a)”, 就是 abm 这个小矩形的面积.
‘高 M” 乘以 ‘宽 (b-a)”, 就是 abM 这个大矩形的面积.
曲线 mM 的定积分, 这个面积大小, 肯定是夹在上面两个矩形的面积之间的.



使用该方法, 就可以让我们来对曲线的定积分值, 进行估计.

2.13 定积分 “中值定理” : 如果 f(x) 是连续的, $\exists \xi \in [a,b]$, 则必然有 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

定积分中值定理 Mean value theorems for definite integrals 的意思就是说: 在函数曲线的 [a,b] 区间上, 一定能找到一个点 ξ, 该 ξ 点的 y 值高度 (即 f(ξ)), 乘上 “b-a 这个宽度”, 所形成的的矩形面积, 能恰好等于函数曲线的定积分值. 你找吧, 一定能找到这个点 ξ 存在.



第二部分 求定积分的方法

3 定积分的 “分部积分法”: $\int_a^b$ 前 $\cdot\, d($后$) = ($前 $\cdot$ 后$)\ |_a^b - \int_a^b$ 后 $d($前$)$

比较一下:

“不定积分” 的 “分部积分法” 公式是: $\boxed{\int \text{前} \cdot d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后}\ d(\text{前})}$

‘定积分” 的 “分部积分法” 公式是: $\boxed{\int_a^b \text{前} \cdot d(\text{后}) = (\text{前} \cdot \text{后})\ |_a^b - \int_a^b \text{后}\ d(\text{前})}$

为什么要用 “分部积分法”, 来把 d(后) 变成 d(前)? 不还是要求某个数的微分么? 其实, 你这样做的目的, 是需要先满足这个前提的: 即: 当 “$\int$ 后 $d\,($前$)$” 比 “$\int$ 前 $d\,($后$)$” 更容易算时, 你可以用 “分部积分法” 来交换微分的顺序.

注意: 在反复使用分部积分法的过程中, 不要对调两个函数地位, 否则不仅不会产生循环现象, 反而会一来一往, 恢复原状, 毫无所得.

例

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\arcsin x}_{\text{前}}\ \underbrace{dx}_{\text{后}} \leftarrow \text{根据定积分“分部积分法”公式}$$

$$\int_a^b \text{前} \cdot d(\text{后}) = (\text{前} \cdot \text{后})\Big|_a^b - \int_a^b \text{后}\ d(\text{前})$$

$$= (\arcsin x \cdot x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\ \underbrace{d(\arcsin x)}_{\text{求}\arcsin x\text{的微分}}$$

$\leftarrow$ 注意, 减号后面的积分部分, 这里的$[0, \frac{1}{2}]$是x的积分区间,

而现在d后面是$\arcsin x$了, 即求的是 $\arcsin x$ 的微分,
所以, 你应该把$\arcsin x$这个 “原函数”, 朝外提出去变成 “导函数”,
让d后面是x才行.

微分 $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= \underbrace{\arcsin \frac{1}{2}}_{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leftarrow \text{右边部分的} \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ \text{把导函数}x\text{拿到}d\text{里面, 变成原函数}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\left(\frac{1}{2} x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ d\ \underbrace{(x^2-1)}_{\substack{\text{原函数, 加常数后,} \\ \text{其导函数的值是不变的}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} + C\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{\pi}{12} - \left[-(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C\right]\Bigg|_0^{2^{-1}}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \left[-(1-(2^{-1})^2)^{\frac{1}{2}} - \left(-(1-0^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

例

$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$

我们用换元法, 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$. 于是, $dx = \underbrace{d\left(t^2\right)}_{\text{求微分}} = \left(t^2\right)' dt = 2t\ dt$

→ 原上限是 x=1, 换成 t 来表示上限, 就是 $x = t^2 = 1$, 即 t=1, 这个就是换元成 t 后的 t 的新上限.

→ 原下限是 x=0, 换成 t 来表示上限, 就是 $x = t^2 = 0$, 即 t=0. 这个是 t 的下限.

所以原式就变换成了:

$$= \int_0^1 e^t\ 2t\ dt = 2\int_0^1 e^t\ t\ dt \leftarrow \text{把导函数}t\text{, 拿到微分}d\text{后面, 变成原函数.}$$

$$= 2\int_0^1 \underbrace{t}_{\text{前}}\ \underbrace{d\left(e^t\right)}_{\text{后}} \leftarrow \text{使用定积分的 “分部积分法”}$$

$$= 2\left[t \cdot e^t \mid_0^1 - \int_0^1 e^t\ d\left(t\right)\right] = 2\left[1 \cdot e - e^t \mid_0^1\right] = 2\left[e - \left(e^1 - e^0\right)\right] = 2$$