目录

文件名

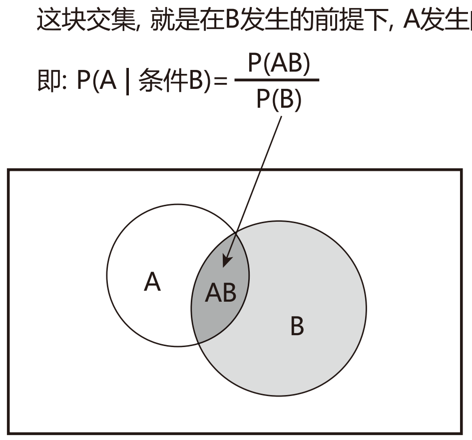
第一部分　条件概率

1 “条件概率”的意思

条件概率是: 有 A, B 两个事件, 和样本空间 Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则, 在 B 已经发生的条件下, A 发生的概率, 就叫做 A 对 B 的“条件概率”. 记作: P(A| 条件 B), 读作“在 B 发生的条件下, A 发生的概率”.

即, 条件概率公式是: $P(A \mid conditionB) = \frac{\overbrace{\text{在 B 发生条件下,A 发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB 同时发生了}}}{\text{B 里面有多少个样本点}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成: $P(A \mid conditionB) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数 (分母) 去比.

上面公式中, P(AB) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件 A, 和事件 B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件 A, 和事件 B 不相互独立, 则只能用“条件概率”公式, 来求 P(AB), 即: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意: “条件概率”, 和“分步骤法”的区别:
- 分步骤法 (用乘法): 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率 (里面也有用到乘法): 前面的事件, 有可能会 (但并不一定) 影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有 100 个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

有 6 个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到 1 号球
- A_2: 取到 2 号球
- A_5: 取到大于 4 号的球

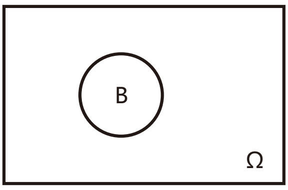
则:
- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到 1 号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全 6 选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{\text{在 B 条件里面, 取到 }\mathrm{A}_1\text{(即 1 号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = 0$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号 2 的球里面, 取 1 个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \frac{\text{在 B 条件里面, 取到大于 4 号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有 6 号一个球}}}{3}$

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|条件B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|条件B) = 1$

P(Ω |B)=1



2.3 性质: $\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \mid \mathbf{B}\right) = \mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{B}\right) + \mathbf{P}\left(\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{B}\right) - \mathbf{P}\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{B}\right)$

2.4 性质: $\mathbf{P}\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}} \mid \mathbf{B}\right)$

2.5 性质: 可列可加性: 若 $A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ ← 即: “和的概率”, 等于 “概率的和”

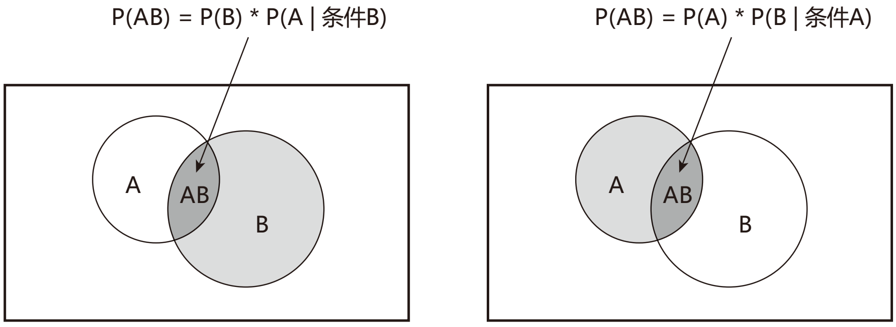
3 “条件概率”的乘法公式:

$$\boxed{P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)}$$

推导过程:

$$\text{因为}\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow \text{即 } P(AB) = \underbrace{P(B) \cdot P(A|B)}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} & ① \\ P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow \text{即 } P(AB) = \underbrace{P(A) \cdot P(B|A)}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} & ② \end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”. 即 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
其中 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$



同理, 多个事件的乘法公式就是:

→ $\boxed{P(ABC) = \underbrace{P(A)} \cdot \underbrace{P(B|A)} \cdot \underbrace{P(C|BA)}}$

↑ 上面 “从右往左” 看, 就是按 A,B,C 的顺序

→ $P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2A_1) \cdot P(A_3A_2A_1) \cdot ... \cdot P(\overbrace{A_n}^{\text{即最后一个数字n写在前面.}} \mid \overbrace{A_{n-1}}^{\text{后面的条件，最后一个数字是：n少一位}} ...A_2A_1)$

↑ 上面 “从右往左” 看, 就是按 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的顺序

例

有 100 件产品, 次品率 =10%, 即有 10 件次品. 做不放回抽样, 问: 第 3 次才取到合格品的概率是?

我们先令:

- A_1 表示第 1 次取, 就取到了合格品
- A_2 表示第 2 次取, 取到了合格品
- A_3 表示第 3 次取, 取到了合格品

那么第 3 次才取到合格品, 就是:

$$\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}_2}\mathrm{A}_3\right)}_{分步骤来做}=\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{第1次取,取到次品}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}_2}\,|\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{在第1次取到次品的条件下,第2次取到也是次品}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\,|\overline{\mathrm{A}_2}\,\overline{\mathrm{A}_1}\right)}_{在第1,2次取到次品的条件下,第3次取到正品}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{10}^1}^{第一步,10次品里面取1}}{\mathrm{C}_{100}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_9^1}^{第二步,因为第一步已经拿走1件次品,这第二步就只能在9件次品里面取1件次品了}}{\mathrm{C}_{99}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{90}^1}^{既然第三步要拿到正品,我们就从90件正品里面取1了}}{\mathrm{C}_{98}^1}$$

$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=0.00834879$$

例

某产品:
- 甲公司占 60% 市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占 40% 市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{\mathrm{J}}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified) : 表示产品是 “合格” 的
- $\overline{\mathrm{Q}}$: 表示产品是 “不合格” 的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$\mathrm{P}\,(\mathrm{JQ})=\underbrace{\mathrm{P}\,(\mathrm{J})}_{=0.6}\cdot\ \underbrace{\mathrm{P}\,(Q\ |J)}_{甲的合格率=0.9}\ =0.54$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$\mathrm{P}\,(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{Q})=\underbrace{\mathrm{P}\,(\bar{\mathrm{J}})}_{=0.4}\cdot\quad\underbrace{\mathrm{P}\,(Q\ |\bar{\mathrm{J}})}_{乙条件下的合格率=0.8}\quad=0.32$

例

抽签, 共 10 签, 其中有 4 个为 “成功上岸” 的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.
我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到 “成功”
- B: 表示乙抽到 “成功”
- C: 表示丙抽到 “成功”

问, (1) 甲抽到 “成功” 的概率? $\mathrm{P}\,(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{C}_{4好签}^1}{\mathrm{C}_{10签}^1}=\frac{4}{10}=0.4$

(2) 甲乙都抽到 “成功” 的概率?

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{AB})=\underbrace{\mathrm{P}\,(\mathrm{A})}_{第\ 1\ 步:\ 甲先成功}\cdot\underbrace{P(B|A)}_{第\ 2\ 步:\ 在甲成功的前提下,\ 乙再成功}$$

$$=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4好签}^1}^{甲先抽掉一张好签}}{\mathrm{C}_{10签}^1}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{4好签-1}^1}^{乙就只能从剩下的\ 3\ 张好签中来抽了}}{\mathrm{C}_{10签-1}^1}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P\left(\overline{A}B\right)=\underbrace{P\left(\overline{A}\right)}_{\text{第 1 步: 甲先失败}}\cdot\underbrace{P\left(B\left|\overline{A}\right.\right)}_{\text{第 2 步: 在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\overbrace{C^1_{6\text{坏签}}}^{\text{甲先从共 6 张坏签中取1}}}{C^1_{10\text{签}}}\cdot\frac{\overbrace{C^1_{4\text{好签}}}^{\text{乙从共 4 张好签中取1}}}{C^1_{10\text{签}-1}}=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到“成功”的概率?

$$P\left(ABC\right)=\underbrace{P\left(A\right)}_{\text{第 1 步: 甲先成功}}\cdot\underbrace{P\left(B\left|A\right.\right)}_{\text{第 2 步: 在甲成功的前提下, 乙再成功}}\cdot\underbrace{P\left(C|BA\right)}_{\text{第 3 步: 在甲乙都成功的前提下, 丙再成功}}$$

$$=\frac{C^1_{4\text{好签}}}{C^1_{10\text{签}}}\cdot\frac{C^1_{\text{还剩 3 好签}}}{C^1_{\text{还剩 9 签}}}\cdot\frac{C^1_{\text{还剩 2 好签}}}{C^1_{\text{还剩 8 签}}}$$

$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=0.0333333$$

例

你的新邻居, 是个 is very shy and withdrawn, invariably helpful but with very little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, ant a passion for detail.

你觉得他更可能是 – 图书管理员, 还是农民?

大多数人会认为他是图书馆管理员. 其实, 这种判断是” 非理性” 的. 问题的关键在于 – 你没有把这两种职业的” 人数比例” 考虑进去.

→ 在美国,农民与图书馆管理员,两者的数量之比是 $20:1$.
根据这个比例,我们可以假设他们人数的概率分别为:

$$\begin{cases} P(农民职业) = \dfrac{20}{100} \\ P(图书管理员职业) = \dfrac{1}{100} \end{cases}$$

→ 假如你听到"彬彬有礼"这类描述,你的直觉是:
40% 的图书馆管理员符合这个描述,而只有 10% 的农民符合这个描述.
如果这是你的估计,那就意味着:

$$\begin{cases} \text{在}100\%\text{的纯粹农民群体中,彬彬有礼者的占比概率是:} \\ \qquad P(彬彬有礼\ |农民职业) = 0.1 \\ \text{在}100\%\text{的纯粹图书管理员群体中,彬彬有礼者的占比概率是:} \\ \qquad P(彬彬有礼\ |图书管理员职业) = 0.4 \end{cases}$$

→ 在既有农民,又有图书管理员的混合群体中:

$$\begin{cases} \text{在属于农民职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是:} \\ P(农民职业 \cap 彬彬有礼) = \underbrace{P(农民职业)}_{\text{第一步,是农民的概率}} \cdot \underbrace{P(彬彬有礼\ |农民职业)}_{\text{第二步,在是农民前提下,彬彬有礼者的概率}} \\ \qquad = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02 \\ \text{在属于图书管理员职业的前提下,是彬彬有礼者的概率是:} \\ P(图书管理员职业 \cap 彬彬有礼) = P(图书管理员职业) \cdot P(彬彬有礼\ |图书管理员职业) \\ \qquad = 0.01 \cdot 0.4 = 0.004 \end{cases}$$

→ P(在彬彬有礼者中,取 1 人为图书管理员的概率)

$$= \frac{P(图书管理员职业\cap彬彬有礼)}{P(农民职业\cap彬彬有礼) + P(图书管理员职业\cap彬彬有礼)}$$

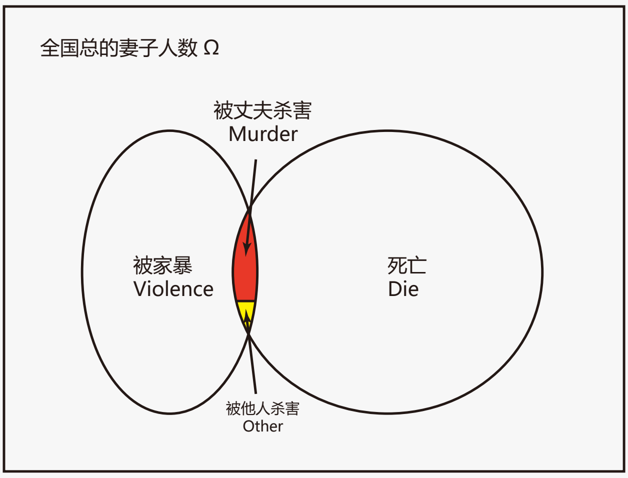
$$= \frac{0.004}{0.02 + 0.004} = 0.166667$$

所以, 即使你认为“符合这个描述的人是一个图书馆管理员的可能性, 是一个农民的 4 倍”, 也抵不过农民的数量很多.

例

辛普森杀妻案, 原告证明辛普森常常家暴前妻. 他们认为, 长期家暴说明辛普森有杀妻的动机. 被告律师则举出数据反驳说, 美国有 400 万被家暴的妻子, 但只有 1432 名被丈夫杀害, 这个概率只有 $\frac{1432}{400\text{万}}$ = 比 1/2500 还低. 所以家暴证明不了辛普森谋杀.
被告想表达的是: 在“家暴”这个事件前提条件下, 丈夫谋杀妻子的概率不高. 即 P(丈夫家暴　丈夫杀妻) = 概率值很低.

你怎么看? 事实上, 被告举出的概率, 不适用于这个案子上. 因为本案的妻子已经死亡, “妻子已死”也变成了一个已经存在的前提条件. 所以现在我们要看的概率就是: P(丈夫家暴　妻子已死亡　是丈夫杀妻)=? 即: 在“被家暴”且“死亡”的妻子数量里面 (这里就有两个前提条件了, 而不是仅一个前提条件), 有多少是被丈夫杀害的?



即:

- 辛普森律师一方的概率公式是: $\frac{\text{红色}}{Violence} < \frac{1}{2500}$
- 妻子一方律师的概率公式是: $\frac{\text{红色}}{\text{红色} + \text{黄色}} = 93\%$

根据美国 1992 年发布的数据推算: 每 10 万个被家暴的妇女中, 有 43 个会被谋杀. 其中 40 个是被丈夫谋杀, 其他 3 个是被丈夫以外的人谋杀. 那么, 条件概率就是:
$P(A\,|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P\left(\text{丈夫杀} \mid \text{家暴} \cap \text{妻死}\right) = \frac{P\left(\text{家暴} \cap \text{妻死} \cap \text{丈夫杀}\right)}{P\left(\text{家暴} \cap \text{妻死}\right)} = \frac{\frac{40}{100000}}{\frac{43}{100000}} = 0.930233$$

你仔细体会一下两者的不同:

- 辛普森方, 是说: 在所有 "之后活着和死去" 的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大. 即 $\frac{\text{丈夫杀害}}{\text{条件: 1. 被家暴}}$
- 妻子方, 是说: 在所有 "死去" 的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大? 即 $\frac{\text{丈夫杀害}}{\text{条件: 1. 被家暴 \& 2. 死亡}}$

不过, 即使概率高达 93%，也不能绝对证明辛普森杀了妻子. 因为**"条件概率" 只表示统计意义上的 "相关性", 并不代表 "因果关系".** 即只说明: 家暴和谋杀妻子之间有很强的相关性。

4 传染病模型

例

有红球 a 个, 黑球 b 个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入 c 个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续 3 次都是取出红球的概率?

先设定事件:

- A_1 : 表示你第 1 次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第 1 次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第 3 次, 取出的是红球

$$\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)}_{\text{连续3次取到红球}} = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第一步：}\\ \text{第一次就取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\ |\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第二步：}\\ \text{在第一次取到红球的前提下，}\\ \text{第二次也取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\ |\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第三步：}\\ \text{再前两次都取到红球的前提下，}\\ \text{第三次也取到红球}}}$$

$$= \frac{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}}}{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{b黑}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{c红}}}^{\substack{\text{在第一次取到红球后，}\\ \text{又放入c个红球.}\\ \text{所以第二次取时，}\\ \text{红球就一共有a + c个}}}}{\underbrace{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{b黑}+\mathrm{c红}}}_{\substack{\text{为什么总数没有减1个?}\\ \text{因为是“放回抽样”.}\\ \text{总数不变}}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+2\mathrm{c红}}}{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{b黑}+2\mathrm{c红}}}$$

上面可以看出:
- 当 c 红 = 0 时, 就是正常的 “放回抽样”.
- 当 c 红 = -1 时, 就是 “不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c 红 >0 时, 就是本例的 “传染病模型”.

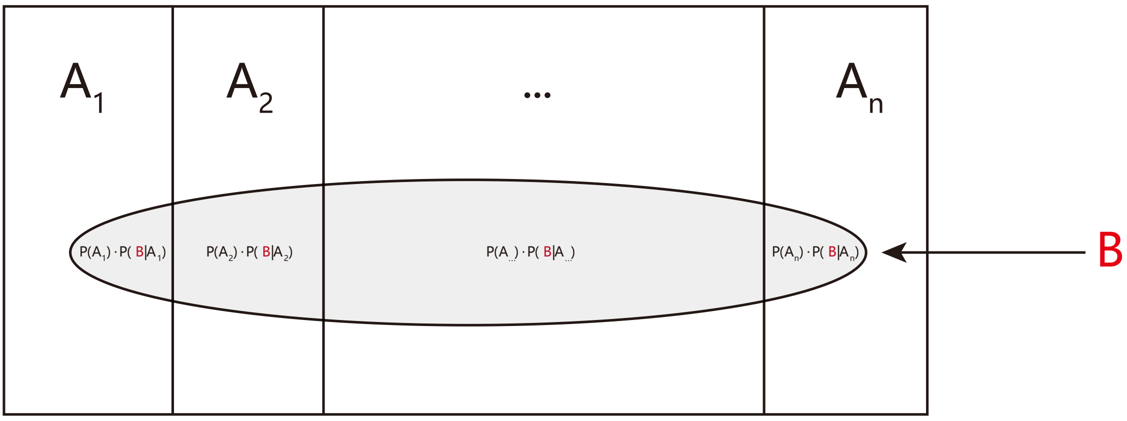
---

5 全概率公式: $P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B|A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$

全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, ..., A_n$ 构成一个 “完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2) 其 “和”(或 “并集”) 为全集 Ω, (3) $P(A_i) > 0$.

则有: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} [P(A_i) \cdot P(B|A_i)] = P(B)}$

即有: $P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B|A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$



Total Probability Theorem
全概率公式

例

一个工厂, 有 4 条生产线, 情况如下:

	生产线 1	生产线 2	生产线 3	生产线 4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是 "不合格品" 的概率?

我们先设定事件:
- A_1 : 表示是生产线 1 中的产品
- A_2 : 表示是生产线 2 中的产品
- A_3 : 表示是生产线 3 中的产品
- A_4 : 表示是生产线 4 中的产品
- B : 表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$
\begin{aligned}
&P(B)\\
&=\underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线 1 的概率}}\cdot\overbrace{P(B|A_1)}^{\text{生产线 1 中的次品率}}}_{\text{第 1 条生产线中}\left(\text{的条件下}\right)\text{, 不合格品的概率}}+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)+P(A_4)\cdot P(B|A_4)\\
&=(15\%\cdot 0.05)+(20\%\cdot 0.04)+(30\%\cdot 0.03)+(35\%\cdot 0.02)\\
&=0.0315
\end{aligned}
$$

例

有 10 台机器人, 3 台是次品. 已经卖出去了 2 台 (是正品还是次品未知).
问: 再取 1 台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:
- B_{00} : B(bad), 表示前两次取, 都是次品 (用 0 表示)
- B_{10} : 表示前两次取, 是一正 (用 1 表示), 一次 (用 0 表示). 至于顺序是 "正, 次" 还是 "次, 正", 都行
- B_{11} : 表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3} : G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第 3 次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这 3 种可能性:
- (第 1 次取到) 次, (第 2 次取到) 次, (第 4 次取到) 正.

即 $\rightarrow = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_{00})}_{\text{前两次取到次品}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx}3}|\mathrm{B}_{00})}_{\text{在前两次取到次品的条件下, 第 3 次取到正品}}$

- 次, 正, 正. 即 $\rightarrow=\mathrm{P}(\mathrm{B}_{10})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx}3}|\mathrm{B}_{10})$
- 正, 正, 正. 即 $\rightarrow=\mathrm{P}(\mathrm{B}_{11})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{G}_{\mathrm{xx}3}|\mathrm{B}_{11})$

上面这三种可能性并存, 就是 "和"(并集) 的概念. 用加法:

$$G_{xx3}=\underbrace{P(B_{00})\cdot P(G_{xx3}\ |B_{00})}_{\text{第1种情况:2次, 1正}}+\underbrace{P(B_{10})\cdot P(G_{xx3}\ |B_{10})}_{\text{第2种情况:1次1正, 再正}}+\underbrace{P(B_{11})\cdot P(G_{xx3}\ |B_{11})}_{\text{第3种情况:前2正,再1正}}$$

$$=\underbrace{\frac{C^{取2次}_{总3次}}{C^{2}_{总10}}\cdot\frac{C^{取1正}_{总7正}}{C^{1}_{10-2}}}_{\text{第1种情况:2次, 1正}}+\underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{C^{1}_{总7正}}^{\text{取1正}}\cdot\overbrace{C^{1}_{总3次}}^{\text{取1次}}}^{\text{分步骤, 用乘法}}}{C^{2}_{总10}}\cdot\frac{C^{1正}_{还剩总6正}}{C^{1}_{10-2}}}_{\text{第2种情况:1次1正, 再1正}}+\underbrace{\frac{C^{2}_{总7正}}{C^{2}_{10}}\cdot\frac{C^{1}_{还剩总5正}}{C^{1}_{8}}}_{\text{第3种情况:前2正,再1正}}$$

$$=\underbrace{\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_8^1}}+\underbrace{\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_6^1}{C_8^1}}+\underbrace{\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_5^1}{C_8^1}}=0.7$$

注意: 上面的第2种情况, 先取1正1次, 或1次1正的情况, 就是:

$$=\overbrace{\overbrace{\frac{C_7^1}{C_{10}^1}}^{\text{先取1正}}\cdot\overbrace{\frac{C_3^1}{C_9^1}}^{\text{再取1次}}}^{\text{分步骤, 用乘法}}+\overbrace{\overbrace{\frac{C_3^1}{C_{10}^1}}^{\text{先取1次}}\cdot\overbrace{\frac{C_7^1}{C_9^1}}^{\text{再取1正}}}^{\text{分步骤, 用乘法}}=0.466667$$

$$=\underbrace{\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}}=0.466667$$

总10个里面取2个,
其中1个从正品里面取,
1个从次品里面取

一件事是"分步骤"来做的, 用乘法 →

		第 1 次取到	第 2 次取到	第 3 次取到
"或"的情况 用加法	情况1	次	次	正
	情况2	次	正	正
	情况3	正	正	正

例

有 10 件产品, 其中次品的数量, 有三种可能性: 0 件 /1 件 /2 件, 即这三种可能性中的每一种, 发生的概率是 1/3.

同时, 检验时也存在 "误检" 情况:

	→ 被检验成 →		的概率是
正品		次品	0.02
正品	→	正品	0.98
次品	→	正品	0.05
次品		次品	0.96

问: 这批产品能通过检验 (即事件 S_2) 的可能性是多少? 即本题要求 $P(S_2)$=?

这要分两种情况来讨论 ("和" 的概念, 用加法):

- 1. 正品被误检 (成 "假") 时的情况
- 2. 次品被误检 (成 "真") 时的情况

我们先定义各种事件:

- B_0 : B(bad). 表示总的 10 件产品中, 存在 0 件次品. 该事件的概率, 题目已经告诉我们: $P(B_0)=\frac{1}{3}$
- B_1 : 表示总的 10 件产品中, 存在 1 件次品. $P(B_1)=\frac{1}{3}$
- B_2 : 表示总的 10 件产品中, 存在 2 件次品. $P(B_2)=\frac{1}{3}$
- S_1 : S(sample. (v.) 抽样检验; 取样; 采样) 表示任意抽检一次, 抽到了正品. (但这里

还有个问题不清晰, 就是说这个正品, 到底是它本身就是 "正品"; 还是说只是抽验认为它是 "正品"?)

- $\overline{S_1}$: 表示任意抽检一次, 抽到了次品.
- S_2 : 表示再次检验, 并 "通过验证" (注意: 有误检率存在. 所以通过检验的, 未必是 "正品"; 反之亦然).

本题要求的 P(S_2), 实际上就是: "无论第一次抽, 认为是正是次; 在第二次检验时, 都认为是正品" 的东西. 即: $\mathrm{P(S_2)} = \underbrace{\mathrm{P(S_1)\cdot P(S_2\ |S_1)}}_{\text{第一次抽为正品, 第二次检验为正}} + \underbrace{\mathrm{P\left(\overline{S_1}\right)\cdot P\left(S_2\ |\overline{S_1}\right)}}_{\text{第一次抽为次品, 第二次检验为正}}$

那么我们先考算 $\mathrm{P(S_1)}$ 和 $\mathrm{P\left(\overline{S_1}\right)}$.

→ $\mathrm{P(S_1)}$: 是在具体 "次品" 数量未知的情况下, 抽 1 次就得到 "正品" 的概率.

$$\mathrm{P(S_1)} = \underbrace{\overbrace{\mathrm{P(B_0)}}^{\text{总数中有 0 次品}}\cdot \mathrm{P}\left(\overbrace{\mathrm{S_1}}^{\text{第 1 次抽得到正品}}\ |\mathrm{B_0}\right)}_{\text{在总数中有 0 次品的条件下, 抽 1 次得到正品的概率}} + \underbrace{\mathrm{P(B_1)\cdot P(S_1|B_1)}}_{\text{总数中含有 1 次品, 抽 1 次取到正}} + \underbrace{\mathrm{P(B_2)\cdot P(S_1|B_2)}}_{\text{总数中含有 2 次品, 抽 1 次取到正}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总 10 正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总 10 中含有 0 次品}} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总 9 正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总 10 中含有 1 次品}} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总 8 正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总}10}}}_{\text{总 10 中含有 2 次品}}$$

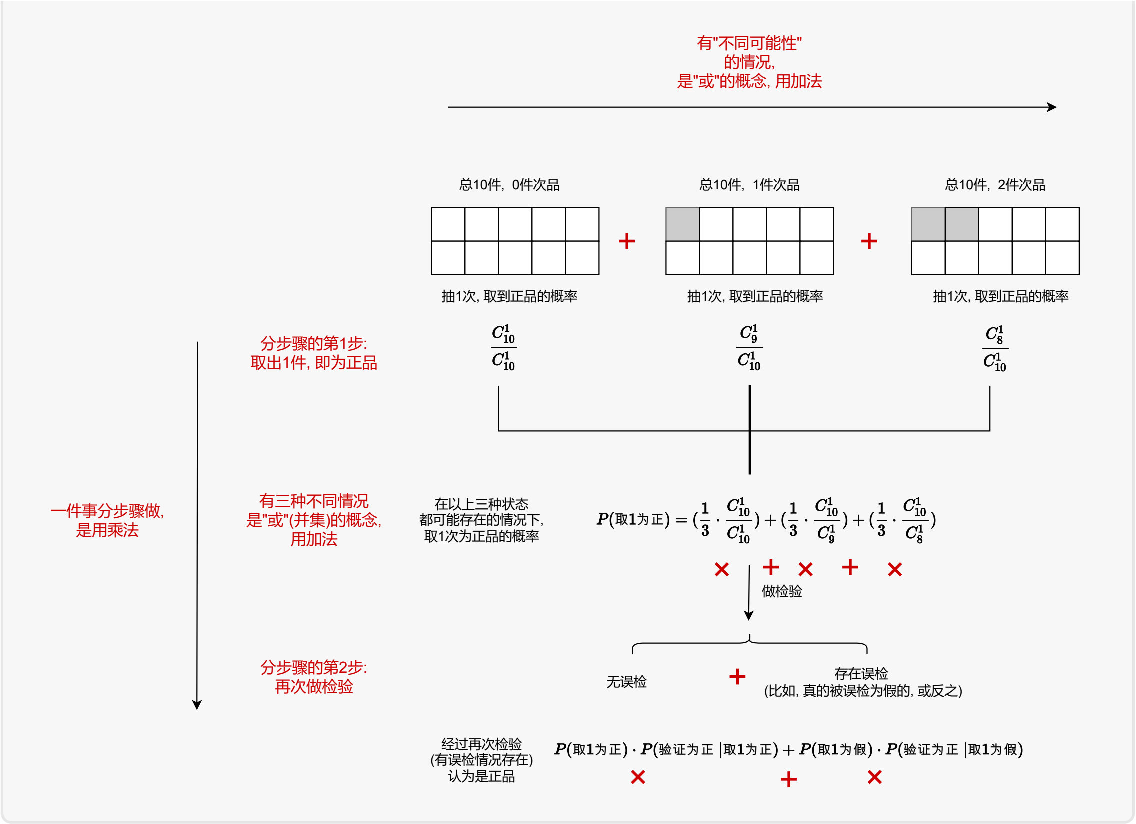
$$= 0.9$$

所以: $\mathrm{P\left(\overline{S_1}\right)} = 1 - \mathrm{P(S_1)} = 1 - 0.9 = 0.1$

于是, 我们就能得到:

$$\mathrm{P(S_2)} = \underbrace{\overbrace{\mathrm{P(S_1)}}^{=0.9}\cdot \overbrace{\mathrm{P(S_2\ |S_1)}}^{\text{从上面的表格中可知, 正品被检验为正品, 概率为0.98}}}_{\text{第一次抽为正品, 第二次检验为正}} + \underbrace{\overbrace{\mathrm{P\left(\overline{S_1}\right)}}^{=0.1}\cdot \overbrace{\mathrm{P\left(S_2\ |\overline{S_1}\right)}}^{\text{次品被检验为正品, 概率是0.05}}}_{\text{第一次抽为次品, 第二次检验为正}}$$

$$= (0.9\cdot 0.98) + (0.1\cdot 0.05) = 0.887$$



---

6 贝叶斯公式 Bayes' theorem

6.1 先验概率 (从经验来推后果) & 后验概率 (更新迭代经验)

先验概率: 是指根据以往经验和分析得到的概率，它往往作为 “由因求果” 问题中的 “因” 出现.	“先验概率” 的计算比较简单，没有使用 “贝叶斯公式”.
后验概率: 是基于新的信息，修正原来的 “先验概率” 后，所获得的更接近实际情况的概率估计.	“后验概率” 的计算，要使用 “贝叶斯公式”.

6.2 贝叶斯公式

根据新信息, 不断调整对一个随机事件发生概率的判断, 这就是 “贝叶斯推理”。即反复迭代, 不断逼近真相 (即人工智能的原理).

通常, “事件 A, 在事件 B(发生) 的条件下的概率”，与 “事件 B, 在事件 A 的条件下的概率”, 是不一样的. 然而, 这两者是有确定的关系, “贝叶斯法则” 就是对这种关系的陈述。

“条件概率”的公式是 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ ①

可进一步变换为：$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

改变 A 和 B 的顺序，就得到：$\underbrace{P(BA)}_{\substack{P(AB)\\ \text{是 }AB\text{ 同时发生的概率，}\\ \text{其实就}=P(BA)}}=P(B)\cdot P(A|B)$ ②

把公式②代入公式①，就得到：
$$P(B|A)=\frac{\overbrace{P(AB)}^{=P(BA)=P(B)\cdot P(A|B)}}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

即：$P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

$\boxed{P(A|B)=\dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}}$ ③ ←这个就是“贝叶斯公式”

上面“贝叶斯公式”的意思就是说：“在现象 B 出现的条件下，事件 A 发生的概率”(即 P(A|B))，就等于“事件 A 发生的概率 (即 P(A))”，乘以“事件 A 发生条件下，事件 B 出现的概率”(即 P(B|A))，再除以“事件 B 出现的概率”(即 P(B))。