第一积分换元法 — 凑微分法

Table of Contents

1. ★ 别忘了: **dx 这部分的意思, 就是对x做"微分". 同样, "d□", 就是对"□"做微分.**
2. 能使用"凑微分法"的前提条件:
3. 凑微分法 (即"第一类换元积分法") Integration By Substitution (核心思想就是"凑")
4. $\int f(\square) g(x) dx$ 这种题型的做法
5. 各种例题: 用"凑微分法", 来求"不定积分"(即原函数)

1. ★ 别忘了: dx 这部分的意思, 就是对x做"微分". 同样, "d□", 就是对"□"做微分.

你会发现,对一个数做“微分”,可以写成下面三种形式:

$$1.\quad \frac{d}{dx}(\text{某数}) = \text{该数的导数}$$

$$2.\quad \frac{d\,(\text{某数})}{dx} = \text{该数的导数}$$

$$3.\quad d\,(\text{某数}) = \text{该数的导数}\ dx$$

$$\text{如：对 } \ln x \text{ 做微分，可以写成：} \begin{aligned} &\to \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \\ &\to \frac{d\,(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \\ &\to d\,(\ln x) = \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

微分公式表如下:

一、基本导数公式：

$1.(kx)' = k$

$2.(x^n)' = nx^{n-1}$

$3.(a^x)' = a^x \ln a$

$4.(e^x)' = e^x$

$5.(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$6.(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$7.(\sin x)' = \cos x$

$8.(\cos x)' = -\sin x$

$9.(\tan x)' = \sec^2 x$

$10.(\cot)' = -\csc^2 x$

$11.(\sec x)' = \sec x \tan x$

$12.(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$13.(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$14.(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$15.(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$16.(\mathrm{a}rc\cot)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

二、基本微分公式：

$1.d(kx) = k$

$2.d(x^n) = nx^{n-1}dx$

$3.d(a^x) = a^x \ln a dx$

$4.d(e^x) = e^x dx$

$5.d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$

$6.d(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}dx$

$7.d(\sin x) = \cos x dx$

$8.d(\cos x) = -\sin x dx$

$9.d(\tan x) = \sec^2 x dx$

$10.d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

$11.d(\sec x) = \sec x \tan x dx$

$12.d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

$13.d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$14.d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$15.d(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$16.d(arc\cot x) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

teachoo.com

Differentiation of Trigonometry Functions

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

---

2. 能使用"凑微分法"的前提条件:

$$\int f(\square)\underbrace{dx} \rightarrow \int f(\square) \quad \underbrace{d\square}_{\substack{\text{对}\square\text{做“微分”} \\ \text{微分后的值}=k\cdot dx}}$$

凑微分法，能使用的前提，必须是要满足：$d\square = k\cdot dx$，即 $d\square$ 和 dx 是 常数k倍的关系.

如果两者不是“常数倍”的关系，就不能使用“凑微分法”来做了.

换言之，要想是“常数倍”的关系，这个$\square$就一定得是一个一次函数，即：$\square = kx+b$

比如：$\int (2x-1)^{10} \leftarrow$ 其中的$(2x-1)$满足是个“一次函数”的条件，可以用“凑微分法”来做.

而$\int (2x^2-1)^{10} \leftarrow$其中的$(2x^2-1)$ 不是个“一次函数”，就不能用“凑微分法”来做.

回到一开始的话题，如果$\int f(\square)\underbrace{dx} \rightarrow \int f(\square) \underbrace{d\square}_{=k\cdot dx}$ 即如果$\square$是dx的k倍的话，

$$\text{则：} \int f(\square) dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{f(\square)}_{\text{导函数}} \underbrace{d\square}_{=k\cdot dx}$$
$$= \frac{1}{k}\underbrace{F(\square)}_{\text{原函数}}+C$$

---

3. 凑微分法 (即"第一类换元积分法") Integration By Substitution (核心思想就是"凑")

口诀:

一看 : 看哪个部分能作为"整体block",

二凑 : 将d后的内容, 强制改成和"整体block"一样,

三比较 : 将"原式"和 "修改了d的内容后的值", 相比较, 并做微调, 来维持住"原式"的值不变.

凑微分法，基本公式是：$\int f(x)dx = F(x)+C \leftarrow$ 即这三个x的地方要完全一致!

即，这里的模型就是：$\int f(\square)\ d\square = F(\square)+C \leftarrow$这三个红色方块地方的内容，要完全一样!

如果红色方块不一样，比如d后面的红色方块，和$f()$中的红色方块不一样，

你就要把d后面的红色方块，凑成和 $f()$中的一样!

然后才能对整体使用“积分公式”，求出其“原函数”.

Example 1. 标题

例如:

原式 $\int(2x-1)^{10}dx$ ① ← 我们可以把 $(2x-1)$ 看做为一个"整体",
那么,我们就要把原式,变成这种模式:
$\int(\square)^{10}d\square$

我们先强行把 d 后的内容变成 $(2x-1)$: 即 $\int(2x-1)^{10}\ d(2x-1)$ ②
其中的 $d(2x-1)$,其实就是对 $2x-1$ 做微分,
根据"微分公式":$d(x^n)=nx^{n-1}dx$
所以本例的 $d(2x-1)$ 即 $=(2x-1)'\ dx\ =2dx$

所以 ②式的 $\int(2x-1)^{10}\ \underbrace{d(2x-1)}_{=2dx}$

$=\int(2x-1)^{10}\ 2dx$

$=2\int(2x-1)^{10}\ dx$ ← 和原式①相比,多了2倍. 即:①式 $=\frac{1}{2}$(②式)

所以原式① $=\frac{1}{2}(\underbrace{\int(2x-1)^{10}\ d(2x-1)}_{②式})$ ← 这样,经过凑微分法(即将 d 后面的内容,
凑成和前面导数部分的内容一样,作为相同的整体),
我们就能来使用"积分公式"了.
此处,我们使用这个积分公式: $\int x^n=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10+1}(2x-1)^{10+1}+C$

$=\frac{1}{22}(2x-1)^{11}+C$

Example 2. 标题

例如:

原式 $\int e^{\overbrace{-3x}^{\text{整体}}}dx$ ① ← 我们把指数上的 $-3x$ 作为一个整体,

这个整体满足是一个“一次函数”,所以我们就可以使用“凑微分法”来做.

先强行把 d 后的内容变成 $-3x$,即:

$\int e^{-3x}\underbrace{d(-3x)}_{=-3dx}$ ② ← $d(-3x)$ 这部分,就是对 $-3x$ 做微分.

$d(-3x)=(-3x)'dx=-3dx$

所以完整的②式 $=-3\int e^{-3x}dx$

②式 和 ①式,相差 -3 倍,所以原式①式就是 $=-\frac{1}{3}\cdot$ ②式

$$原式\int e^{\overbrace{-3x}^{\text{整体}}}dx=-\frac{1}{3}\cdot\int e^{-3x}\underbrace{d(-3x)}_{=-3dx}$$ ←利用积分公式 $\int e^{x}dx=e^{x}+C$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$$

Example 3. 标题

例如:

原式 $\int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4-3x}_{\text{看作一个整体}}}}dx$ ① $\leftarrow \sqrt{4-3x}$不能看做一个整体，因为它不是一次函数，

但里面的$4-3x$可以看做一个整体. 假设我们用y来代表这个整体，

那么本例原式，就是我们想让它变成:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int y^{-\frac{1}{2}}dy$$
$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}y^{-\frac{1}{2}+1}+C$$
$$= 2y^{\frac{1}{2}}+C$$

既然我们把$4-3x$看做一个整体. 我们就先强行让d后面的内容变成$4-3x$

即: $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}d(4-3x)$ ② $\leftarrow d(4-3x)$ 就是对 $4-3x$ 求微分

$$= (4-3x)'dx$$
$$= -3dx$$

完整的②式 $= -3\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$，比原式①多出 -3倍.

所以原式① $= -\frac{1}{3}\cdot$②式

原式 $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx = \underbrace{-\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}d(4-3x)}_{\text{②式}}$ ←根据上面我们做出的 $\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = 2y^{\frac{1}{2}}+C$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2(4-3x)^{\frac{1}{2}}+C$$
$$= -\frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{1}{2}}+C$$

4. $\int f(\square)g(x)dx$ 这种题型的做法

原式 $\int f(\square)g(x)\,dx$ $\leftarrow$ 对于这种题型，我们先把 $\underbrace{g(x)}_{\text{导函数}}dx$ 看做一个整体，

那么它的值等于什么呢？其实就是求 $g(x)$ 的原函数.

既然“做微分”是：$d\,(\text{原函数}) = \text{导函数}\,dx$，

那么 就是 $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{g(x)}_{\text{导数}}dx$， ?就是 $g(x)$ 的原函数.

如：$\underbrace{x^2}_{\text{导函数}}dx = \underbrace{d}_{\text{做微分}}\left(\underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{\text{原函数}}\right)$ $\leftarrow$ 这个例子正过来写，就是：$\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3) = x^2$

所以原式 $\int f(\square)\overbrace{\underbrace{g(x)}_{\text{导函数}}dx}^{\text{看做整体}} = \int f(\square)\ d\left(\underbrace{\odot}_{g(x)\text{的原函数}}\right)$ $\leftarrow$ 下面的问题，我们就是要把 $\odot$ 变成 $\square$

$\rightarrow \int f(\square)\ \underbrace{d(\square)}_{=k\cdot d(\odot)}$ $\leftarrow$ 同样，“$d(\square)$” 和 “$d(\odot)$” 之间会有一个常数倍的关系.

即：$d(\square) = k\cdot d(\odot)$

所以原式 $= \frac{1}{k}\int \underbrace{f(\square)}_{\text{导函数}}d(\square) = \frac{1}{k}\underbrace{F(\square)}_{\text{原函数}} + C$

Example 4. 标题

例如：

$\int e^x\cos(e^x)\,dx$ $\leftarrow$ 我们把 $e^x\,dx$ 合并在一起先做，即做微分：$d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{e^x}_{\text{导函数}}dx$，显然? $= e^x$

$= \int \cos(e^x)\ \underbrace{e^x dx}_{=d(e^x)}$

$= \int \cos(e^x)\ d(e^x)$ $\leftarrow$ 这样就能直接套用积分公式了.

$= \sin(e^x) + C$

Example 5. 标题

例如:

原式 $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ ←除法，可以改写成"乘法"形式

$=\int e^x \cdot \frac{1}{e^x+1}dx$ ←我们让 e^x 和 dx 先合并起来，先运算

$=\int \frac{1}{e^x+1}\cdot \underbrace{e^x dx}_{=d(e^x)}$ ① ← 绿色部分就是问，做微分时: $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{e^x}_{\text{导函数}} dx$，$?=e^x$，所以 $d(?)=d(e^x)$

$=\int \frac{1}{e^x+1}\ d(e^x)$ ←我们把分母上的 e^x+1 看做是一个整体，把 d 后面的部分强制变成 e^x+1

$\to \int \frac{1}{e^x+1}\ \underbrace{d(e^x+1)}_{e^x dx}$ ② ← $d(e^x+1)=(e^x+1)'dx=e^x dx$

所以完整的②式 $=\int \frac{1}{e^x+1}\ e^x dx$ ，发现和原式①没有区别，无倍数关系

所以原式 = ②式

$=\int \frac{1}{e^x+1}\ d(e^x+1)$ ←能直接使用不定积分公式了 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$=\ \ln|e^x+1|+C$

Example 6. 标题

例如:

$\int x\cdot(2x^2-1)^{10}dx$ ←先把 x 和 dx 合并在一起，先算

$=\int (2x^2-1)^{10}\ \underbrace{xdx}_{=d\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$ ← 蓝色部分就是问: $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{x}_{\text{导数}} dx$，$?=\frac{1}{2}x^2$

$=\frac{1}{2}\int (\underbrace{2x^2-1}_{\text{看做整体}})^{10}\ d(x^2)$ ← 把 d 后的内容，强制变成 $2x^2-1$

$d(2x^2-1)=(2x^2-1)'dx=(2\cdot 2x)dx=4xdx$ ②

而原式中的 $d(x^2)$ 是 $=(x^2)'dx=2xdx$ ①

所以发现，原式① $=\frac{1}{2}\cdot$②式

原式 $=\frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{2}\int \overbrace{(2x^2-1)^{10}}^{\text{导函数}}\ \overbrace{d(2x^2-1)}^{\text{做微分}}}_{②\text{式}}$ ← 就能套用积分公式了: $\int \underbrace{x^n}_{\text{导函数}} dx = \underbrace{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}_{\text{原函数}}+C$

$=\frac{1}{4}\cdot \underbrace{\frac{1}{11}(2x^2-1)^{11}}_{\text{原函数}}+C$

Example 7. 标题

例如：

$$\int \sin^3 x\ dx \quad \leftarrow \text{先变形，再来凑微分}$$

$$= \int \sin^2 x \cdot \underbrace{\sin x\ dx}_{\text{先做}}$$

$$= \int \sin^2 x\ d(-\cos x) \quad \leftarrow \text{因为}\ d(-\cos x) = (-\cos x)' dx\ = \sin x\ dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\ d(-\cos x)$$

$$= \underbrace{\int (1) d(-\cos x)}_{\int 1 d(\square) = \square + C} - \underbrace{\int (\cos^2 x) d(-\cos x)}$$

$$= (-\cos x + C) \ + \ \left(\frac{1}{2+1}(\cos x)^{2+1} + C\right)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Example 8. 标题

例如：

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+2} dx$$

$$= \int \frac{1}{(2x+1)^2+1} dx \quad \leftarrow \text{来凑成} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \text{ 的形式}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x+1)^2+1} d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(2x+1) + C$$

Example 9. 标题

例如:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$$

$$=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\ln x)\ dx$$

$$=\int \frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\ln x)\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{d(\ln x)} \leftarrow \text{先把}\frac{1}{x}dx\ \text{组合在一起做，即}\ d(?)=\frac{1}{x}dx,\quad ?=\ln x$$

$$=\int \ln(\ln x)\cdot\underbrace{\frac{1}{\ln x}d(\ln x)}_{d(\ln(\ln x))} \leftarrow\ \text{再把}\frac{1}{\ln x}\ \text{和}\ d(\ln x)\ \text{组合在一起做，}$$

$$\text{即}\ d\left(\underset{\text{原函数}}{?}\right)=\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{导函数}}d(\ln x),\ \leftarrow\ \text{即}\ d(?)=\frac{1}{\square}d(\square),$$

$$\text{显然，有微分公式}\ d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$\text{所以}\ ?=\ln\square,$$
$$\text{所以本处的}?=\ln(\ln x)$$

$$=\int \underbrace{\ln(\ln x)}_{\text{导函数}}\ d(\ln(\ln x)) \leftarrow \text{这个就是问}\int\square^1 d\square\text{，这里面的导函数是个指数，}$$

$$\text{那么就能根据积分公式}\ \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

$$\text{即}\int\square^1 d\square=\frac{1}{1+1}\square^{1+1}+C$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(\ln x))^2+C$$

---

5. 各种例题: 用"凑微分法", 来求"不定积分"(即原函数)

换元积分法（Integration By Substitution）是求积分的一种方法，主要通过引进"中间变量"作变量替换，来使原式简易，从而来求较复杂的不定积分。它是由链式法则, 和微积分基本定理推导而来的。

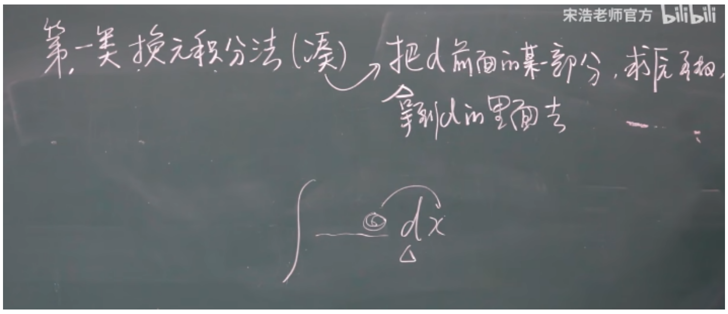
$$\int 1dx = x + C$$

$$\int 1du = u + C$$

$$\int 1d(x^2 - 3) = x^2 - 3 + C = x^2 + C$$

$$\int 1dF(u) = F(u) + C$$

$$\int 1d[F(\varphi(x))] = F(\varphi(x)) + C$$



首先，我们知道 $\int 1dx = x + C$

并且 $\int 1du = u + C$

所以就有 $\int 1dF(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$

← 假设 $[\underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}}]' = \underbrace{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}_{\text{导数}}$ ←“复合函数”求导的“链式法则”

则就有: $\int [\underbrace{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}_{\text{导数}}]dx = \underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}} + C$

进一步变化,就有: $\int f(\varphi(x))\ d\varphi(x) = \underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}} + C$ ← “凑”的思想,就是把 d 前面的某一部分,
先求出这部分它的原函数是什么,
然后把这个原函数，拿到 d 的里面(后面)去.

凑, 就是把 d 前面的某一部分, 先求出其原函数, 再拿到 d 的里面(后面)去. 但是到底是拿"哪一部分"呢? 就要靠猜测了. 即最终都要向"积分公式"里面的形式靠齐, 才能作为一个"整体"来应用积分公式.

Example 10. 标题

例如:

$\int(2\cos 2x)\,dx \leftarrow$ 我们先把 2 求原函数,即 $(?)'=2$, $?=2x$

然后把 2 (是导数)的原函数 $2x$, 拿到 d 的里面去,

就变成:

$=\int(\cos 2x)\,d2x \leftarrow$ 现在,就有两个 $2x$, 我们把 $2x$ 看做一个整体,

就来问: cos什么,对什么求原函数?

显然是 $\cos 2x$, 对 $2x$ 求原函数 $\leftarrow$ 根据积分公式: $\int\cos x\ dx=\sin x+C$

就有:

$=\sin 2x+C$

Example 11. 标题

例如:

$\int\frac{1}{3+2x}dx \leftarrow$ 我们怎么凑? 能变成 $\int(?)\,d\,(?)$ 的形式呢?

既然导数部分(即 $\frac{1}{3+2x}$)是分式,那我们就来看看,

能不能凑成"积分公式"中的 $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 的形式,

就能应用这个积分公式来做了.

另外,所拿取的部分,要先求原函数,再拿到 d 后面,

并且这个原函数,还要和导数部分的数值一致,即 $\int(?)\,d\,(?)$ 成为一个整体,

才能运用积分公式.

那么本例选取哪一部分来凑,怎么凑,才能让该部分的原函数,和导数数值一致呢?

我们看到,既然导数部分中有个 $2x$, 那我们就来想,哪一部分的原函数,能变成 $2x$ 呢?

显然, 2 (导数)的原函数就是 $2x$, 那我们就来把分子上的 1, 凑成 2, 再对它求原函数. 来做下去.

$=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{3+2x}dx \quad =\frac{1}{2}\int\frac{2}{3+2x}dx \leftarrow$ 分子上的 2 (导数),其原函数是 $2x+C$, 可以进一步凑成分母上的数值

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}d\,(2x+C) \leftarrow C$ 可以是任意常数,当然 C 也能是 3 了

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}d\,(2x+3) \leftarrow$ 就可以应用"积分公式"中的 $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$

Example 12. 标题

例如：

$$\int\left(2x\cdot e^{x^2}\right)dx \leftarrow \text{ 的}2x\text{部分求原函数 } = x^2\text{，拿到}d\text{的后面去}$$

$$= \int\left(e^{x^2}\right)d\left(x^2\right) \leftarrow \text{ 就能用积分公式 } \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$= e^{x^2} + C$$

Example 13. 标题

例如：

$$\int {\color{blue}x}\sqrt{1-x^2}\,dx \leftarrow \text{ 把}{\color{blue}x}\text{取原函数} = \frac{1}{2}x^2\text{，放到}d\text{中}$$

$$= \int\sqrt{1-x^2}\ d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\ d\left(x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\ d\left(-x^2\right) \leftarrow \text{为了凑导数中的 } -x^2\text{，将}d\text{后的}x^2\text{前面加个负号，}$$
$$\text{同时导数部分就也要再加个负号了}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\ d\left(1-x^2\right) \leftarrow \text{为了凑导数中的 } 1-x^2\text{，}d\text{后就加个}1\text{，}$$
$$\text{因为}{\color{blue}d\text{后的部分可以任意加减常数}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{1+\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Example 14. 标题

例如:

$\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx \leftarrow$ 这种分母的最高次数，比分子的最高次数大（即“头小屁股大”)的题目，
我们就用“换元法”来做，给个 $u=x+2$，来先代入进原式中.

$=\int \frac{(u-2)^2}{u^3}dx$

$=\int \frac{u^2-4u+4}{u^3}dx$

$=\int \left(\frac{1}{u}-4\frac{1}{u^2}+\frac{4}{u^3}\right)dx$

$=\left(\int \frac{1}{u}dx\right)-\left(4\int u^{-2}dx\right)+\left(4\int u^{-3}dx\right) \leftarrow$ 其中的 $\int \frac{1}{u}dx$ 部分，能否用指数形式来做?

即 $\int u^{-1}dx=\frac{1}{-1+1}u^{-1+1}+C \leftarrow$ 发现分母为0，所以不能用指数形式来做.

只能套用公式 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 来做

$=\ln|u|-4\cdot\frac{1}{-2+1}u^{-2+1}+4\cdot\frac{1}{-3+1}u^{-3+1}+C$

$=\ln|u|+4u^{-1}-2u^{-2} \leftarrow$ 然后再把 $u=x+2$ 代入回来

$=\ln|x+2|+4(x+2)^{-1}-2(x+2)^{-2}+C$

Example 15. 标题

例如:

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad (a\neq 0) \leftarrow$ 我们看看能不能凑成能用 $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ 的公式

那么本例，我们先把分母上的 a^2 变成1

$$=\int \frac{1}{a^2\cdot\frac{a^2+x^2}{a^2}}dx$$

$$=\int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$$

$=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx \leftarrow$ 现在，我们还要把 d 后面的内容，凑成 $\frac{x}{a}$ 的形式

$=a\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\left(\frac{x}{a}\right) \leftarrow$ 即积分 $\int$ 前面的常数部分，可以直接运算 d 后面的部分里去

$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\left(\frac{x}{a}\right) \leftarrow$ 也能就用 $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ 的积分公式了

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

Example 16. 标题

例如:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0) \leftarrow \text{我们看看能否凑成用公式} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

先把本例分母中的a^2凑成1

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot \frac{a^2-x^2}{a^2}}}dx$$

$$= \int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx \leftarrow \text{把}d\text{后面的}x\text{ 凑成}\frac{x}{a}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d(\frac{x}{a}) \leftarrow \text{积分符号}\int\text{ 前面的常数,可以直接拿到}d\text{后面，做乘法运算}$$

这里就是能变成 $d(\frac{1}{a}\cdot x) = d(\frac{x}{a})$

$$= \arcsin(\frac{x}{a}) + C$$

Example 17. 标题

例如:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

$$=\int \frac{1}{(x+a)(x-a)}dx \leftarrow$$ 先把分数部分做拆分,即“裂项”:

暂且先拆成 $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}$

$$=\frac{x-a-x-a}{(x+a)(x-a)}$$

$$=\frac{-2a}{(x+a)(x-a)}$$ ←和原导数(即绿色部分)相差 $-2a$ 倍

所以,原导数部分 $\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{-2a}(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a})$

$$=\frac{1}{-2a}\int(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a})dx$$

$$=\frac{1}{-2a}\left[\int\left(\frac{1}{x+a}\right)dx-\int\left(\frac{1}{x-a}\right)dx\right] \leftarrow$$ 我们看看每项,能不能凑成 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 这种形式

$$=\frac{1}{-2a}\left[\int\left(\frac{1}{x+a}\right)d(x+a)-\int\left(\frac{1}{x-a}\right)d(x+a)\right]$$ ←因为 d 里面可以随意加减常数

$$=\frac{1}{-2a}\cdot(\ln|x+a|-\ln|x-a|)+C$$

$$=\frac{1}{-2a}\cdot\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

Example 18. 标题

例如:

$$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$$

$$=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+2\ln x}\ dx$$

$$=\int \frac{1}{1+2\ln x}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{=d(\ln x)} \leftarrow$$ 我们先把 $\frac{1}{x}dx$ 合并在一起做,即问: $d(?)=\frac{1}{x}dx,\quad ?=\ln x$

$$=\int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x) \leftarrow$$ 我们将 d 后面的部分,强行变成 $1+2\ln x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(2\ln x+1)$$ ←这里就能套用积分公式 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+C$$

Example 19. 标题

例如:

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int e^{3\sqrt{x}} \underbrace{x^{-\frac{1}{2}} dx}_{\text{合并先做}} \quad \leftarrow x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ 就是问: } \begin{aligned} & d\,(?) = x^{-\frac{1}{2}} dx, \\ & ? = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} \\ & = 2x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \int e^{3\sqrt{x}} \; d\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\int e^{3\sqrt{x}} d\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\int e^{\color{blue}{3\sqrt{x}}} d\left(\color{blue}{3\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{2}{3} e^{\color{blue}{3\sqrt{x}}} + C$$

Example 20. 标题

例如:

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \ dx$$

$$= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \ \underbrace{\cos x dx}_{=d(\sin x)}$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \ d(\sin x)$$

$$= \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \ d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \ d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x) d(\sin x) - \int (2\sin^4 x) d(\sin x) + \int (\sin^6 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - 2 \cdot \frac{1}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin x^7 x + C$$

Example 21. 标题

例如:

$$\int \tan dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos x} \underbrace{\sin x dx}_{=d(-\cos x)}$$

$$= -\int \frac{1}{\cos x} \ d(\cos x) \leftarrow \text{根据积分公式} \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

Example 22. 标题

例如:

$$\int \cot dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x} \underbrace{\cos x dx}_{= d(\sin x)}$$

$$= -\int \frac{1}{\sin x} \ d(\sin x) \leftarrow \text{根据积分公式} \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= -\ln|\sin x| + C$$

Example 23. 标题

例如:

$$\int \cos^2 x \ \ dx \ \leftarrow \text{根据三角倍角公式} \ \ \begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 A \end{aligned}$$

$$\text{所以} \ \ 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \ \ dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x\right) d(2x)$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x \ \ d(2x)$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Example 24. 标题

例如:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \ \ dx \leftarrow \text{对于偶次方的三角函数，一般都用倍角公式来做}$$

根据三角倍角公式 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

所以:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} (\cos^2 x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\underbrace{\frac{1-\cos 2x}{2}}_{2\sin^2 x}\right)\left(\underbrace{\frac{1+\cos 2x}{2}}_{2\cos^2 x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(\int 1 dx + \int (\cos 2x) dx - \int (\cos^2 2x) dx - \int (\cos^3 2x) dx\right)$$

$$\to \int 1 dx = x + C$$

$$\to \int (\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$\to \int (\cos^2 2x) dx \quad \leftarrow$ 根据公式 $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2(2x)}{2}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

$\to \int (\cos^3 2x) dx$ ←对于奇数次项的三角函数，一般拆分成单数次 + 偶数次两项

$$= \int \cos^2 2x \underbrace{\cos 2x dx}_{=\frac{1}{2}\cos 2x \; d(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos^2 2x \; d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int 1\ d(\sin 2x)-\int \sin^2 2x\ d(\sin 2x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x+C\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)-\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x+C\right)\right)$$

Example 25. 标题

例如:

$$\int \sin^6 x\ dx$$

$$=\int (\sec^2 x)^2 \underbrace{\sec^2 x\ dx}_{d(\tan x)} \leftarrow \text{根据积分公式} \int \sec^2 x\ dx=\tan x+C$$

$$=\int (1+\tan^2 x)^2\ d(\tan x)$$

$$=\int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x)\ d(\tan x)$$

$$=\tan x+2\cdot\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C$$

Example 26. 标题

例如：

$$\int \csc x\ dx$$ ←本题直接记住最后的结果就行，证明过程不容易想到

$$=\int \frac{1}{\sin x}dx$$ ← 根据倍角公式：$\sin 2x=2\sin x\cos x$

就有：$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}dx$$

$$=\int \frac{1}{2\frac{sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\ dx$$ ← 根据三角函数公式 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

$$=\int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\underbrace{\sec^2\frac{x}{2}\ dx}_{=2d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$$ ←根据积分公式：$\int \sec^2 x\ dx=\tan x+C$

将 d 后的内容强制变为 $\frac{x}{2}$，即：

$$=\underbrace{2\sec^2\frac{x}{2}\ d\left(\frac{x}{2}\right)}_{=\tan\frac{x}{2}+C}$$

$$=\int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot 2d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$ ← 根据积分公式：$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$$=\ln|\tan\frac{x}{2}|\ +C$$ ←根据三角半角公式：$\tan\frac{x}{2}=\csc x-\cot x$

$$=\ln|\cos x-\cot x|+C$$

Example 27. 标题

例如:

$$\int \cos 3x \cos 2x \ dx$$

←根据三角函数“积化和差”公式:

$$\cos\mathrm{a} \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$= \int \frac{1}{2}[\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x)] \ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x + C\right)$$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$$