# 目录

# 方法论

## 1 几何意义和物理意义, 本质上是一回事

一旦碰到较抽象难懂的新概念或定理, 如何搞定?
- 看推导过程.
- 弄懂它的几何意义, 或物理意义. 几何上说得通，物理上也就说得通，因为几何意义和物理意义本质上是一回事. 因为物理决定着几何结构的存在. n 亿年过去了, 不符合物理规律的物质几何空间早就灭亡了. 数学家和物理学家所研究的，只是一头大象的不同部分.

## 2 真理总是简单的和直观的

真理总是简单的和直观的. 不管多么复杂高深的数学理论，总有其直观的中心思想. 在数学中再没有别的什么东西，能比几何图形更容易进入人们的脑海了.
数学教育家波利亚曾经说: 一个长的证明常常取决于一个中心思想，而这个思想本身却是直观的和简单的.

事实上, 很多数学家都是先利用几何直观, 猜测到某些结果, 然后才补出逻辑上的证明的.
华罗庚说过: **"数缺形" 时少直观, "形少数" 时难入微;** "数形结合" 百般好, 割裂分家万事休.
抽象和形象是相辅相成，缺一不可的.

## 3 "线性" 问题 and "非线性" 问题

我们常说的 "一次方程" 和 "一次函数"，都属于 "线性方程 Linear Equation" 和 "线性函数 Linear Function.
**现实生活中的数学问题, 无非分为两类: 一类线性问题，一类非线性问题.** 线性问题是研究最久、理论最完善的. 而 **"非线性问题", 则可以在一定基础上转化为 "线性问题" 来求解. 比如, 微积分学的基本思想, 就是 "以直代曲", 局部地以 "切线" 代替 "曲线".** 于是，在某种条件下，微分方程就可以近似地变成 "线性代数方程组".

因此, 你在遇到一个具体问题时, 首先要判断它是 "线性" 还是 "非线性" 的. 其次, 若是 "非线性问题", 就考虑应如何转化为 "线性问题" 来解决.

---

# 4 不过原点的直线, 不满足线性代数里, 对线性函数的 “比例性” 的要求

线性代数里面的 “线性”, 主要意思就是线性空间里的 “线性变换”(映射, 类似函数的概念, 把输入变成另一种输出).

函数 f(x)= kx+b (k,b 是不变量)，称为一元线性函数. 如果 b=0, 则这个函数的外观就变成 f(x)= k 的形式了，这是一条过原点的直线.

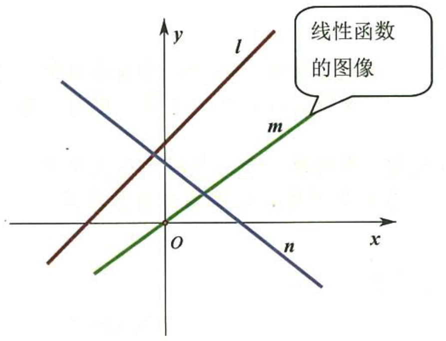



图 1-2 一元线性函数

严格说来，只有过 “原点” 的最简单的直线 f(x) = kx, 才被称为一元线性函数.

**因为虽然 f(x)=kx+b 是线性函数, 但它却不满足 “线性代数” 里所指的 “线性” 含义. 因为不过原点的直线, 不满足线性代数里, 对线性函数的 “比例性” 的要求.**

**线性函数, 其几何意义是：它表示为一条直线. 那么其代数意义呢？最基本的意义只有两条：“可加性” 和 “比例性”.**

【可加性】:
即: 如果函数 f(x) 是线性的, 则有:

$$\boxed{f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}$$

**其意思就是一句话：和后的函数, 等于函数后的和.**
**物理意义就是说：因变量 “叠加后” 的作用结果, 就等于各个因变量 “独自作用结果” 的叠加.**
**即：先结合, 再做函数变形. 等于先各自做函数变形, 再结合.**

【比例性 (数乘)】:
也叫做齐次性、数乘性, 或均匀性. 即: 如果函数 f(x) 是线性的, 则有:

$$\boxed{f(kx)=k\cdot f(x)}$$

一句话: **先做比例变化, 后做函数变换, 等于先做函数变换, 后做比例变化.**
**物理意义是说：对因变量做缩放时，函数对因变量的作用结果, 也会同等比例地缩放.**

**而对于不经过原点的直线 f(x)=ax+b 而言, 就不满足此 “比例性”.** 因为: $f(kx)=akx+b$, 而 $k\cdot f(x)=akx+kb$, 所以 $f(kx)\neq k\cdot f(x)$. 因此严格地讲, f(x)=ax+b 不能再叫 “线性函数” 了. **或者说，线性代数的 “线性变换”, 不直接研究坐标系的移动.**

可加性与比例性组合在一块, 就是 “线性” 的全部意义了. 即有:

$$f\left(k_1x_1+k_2x_2\right)=k_1f\left(x_1\right)+k_2f\left(x_2\right)\quad\leftarrow k_1,k_2\text{为常数}$$

**一句话: 线性组合的函数, 等于函数的线性组合。**这里面既有 “缩放” 又有 “叠加” 的物理含义.

在物理上, 线性函数的 **“可加性” 表明: 函数所描述的事物, 具有累加性. 即: 所有起因的累加, 所导致的结果, 完全等于 “每个起因独自所引起的结果” 的累加。**
**是否满足 “可加性”, 就界定了它所描述的事物, 到底是 “线性” 的, 还是 “非线性” 的.**

比例性是啥物理含义呢? **比例性又名 “齐次性”, 说明没有初始值。没有输入信号时, 输出也没有; 有几倍的输入量, 就刚好就有几倍的输出量.**

---

# 5 y=Kx 所做的动作, 就是将一个向量 x, 通过矩阵 K, 映射变换为另一个新向量 y. 矩阵 K, 就相当于一个 “函数” 的作用.

$$\begin{cases} y_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + ... + k_{1n}x_n \\ y_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + ... + k_{2n}x_n \\ ... \\ y_m = k_{m1}x_1 + k_{m2}x_2 + ... + k_{mn}x_n \end{cases} \leftarrow k_{11}, ..., k_{mn} \text{ 不是变量, 而是系数}$$

如上式, 这 m 个 n 维 (n 元) 线性函数, 都是齐次函数. 他们全部过原点.
线性齐次函数, 形如 $y = k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n$, **这个式子中, 每项里的变量 x 出现的次数, 都是一次的 (没有常数项), 整齐划一, 故此称为 “齐次” 的.** 全称为 “n 元线性齐次函数”.

上式, 可等价写成: $\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} lk_{11} & ... & k_{1n} \\ ... & & \\ & & \\ k_{m1} & & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}$

并可进一步简写成: y=f(x) = Kx

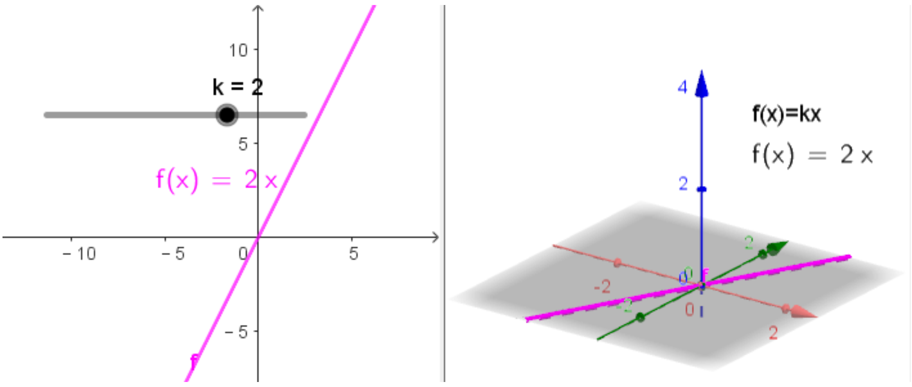
即: $y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{vmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_{11} & ... & k_{1n} \\ ... & & \\ & & \\ k_{m1} & & k_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}$

**矩阵, 其实就是线性方程组的 “系数”. 矩阵, 就核心地代表了 “线性变换”.**
因为 **y=Kx 所做的动作, 就是将一个向量 x, 通过矩阵 K, 映射变换为另一个新向量 y. 矩阵 K, 就相当于一个 “函数” 的作用. 即, 一个矩阵对应着一种 “线性变换” 规则.**

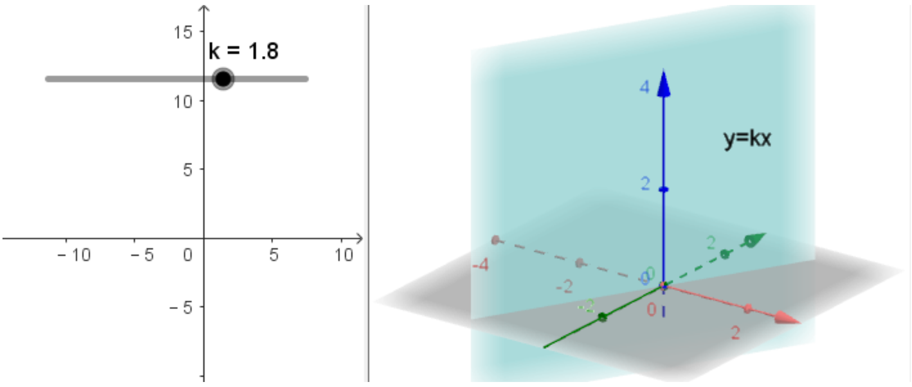
---

# 6 线性超平面

f(x) = kx 是二维坐标空间中的几何图形.




把这个二维直线, 放到三维空间中, 其函数表达式, 就要改写成: $f(x_1,x_2)=k_1x_1$ 或 $f(x_1,x_2)=k_1x_2$. 它的图形是一个过原点的 "平面". 其中, 多出来的这个 $x_2$, 可以取任意值. 也就是说: $f(x_1,x_2)=k_1x_1$ 的图像, 是一个过 $x_2$ 坐标轴的平面.



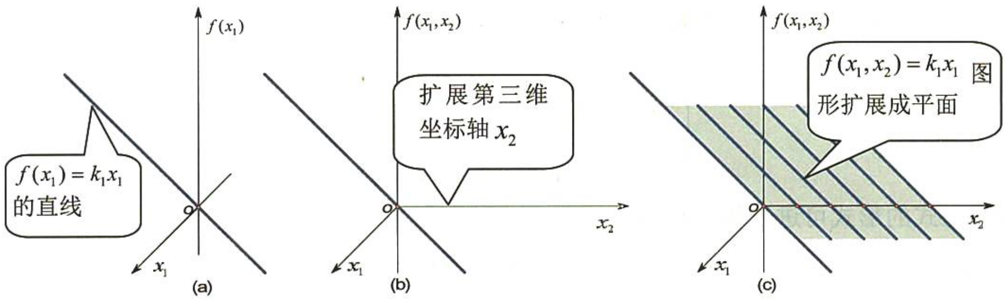




图 1-4 平面是由直线扩展而来的线性函数图形

形象的扩展过程可以这样想象：二维平面坐标系里有一根直线图形（见图 1-4（a）），这时有 $x_2$ 轴过原点以垂直于坐标系 $x_1\sim f(x_1)$ 的平面向右方向（右手系）生长出来（见图 1-4（b）），然后原来的那条直线 $f(x_1)=k_1x_1$ 沿着坐标轴 $x_2$ 方向向右滑动，无数个平行的直线被 $x_2$ 轴像竹帘子一样串起来，平铺得到了 $f(x_1,x_2)=k_1x_1$ 的平面（见图 1-4（c））。这个平面是由无数的直线铺成的，因此平面也是“线性”的。

既然在三维空间中, $k_1x_1$ 是一个平面, 那么 $k_1x_1+k_2x_2$, 就是两个平面相加了. 即就是 $f(x_1,x_2)=k_1x_1$ 和 $f(x_1,x_2)=k_2x_2$ 的图形相加. **一般情况下, 两个平面相加, 仍然是一个平面.**

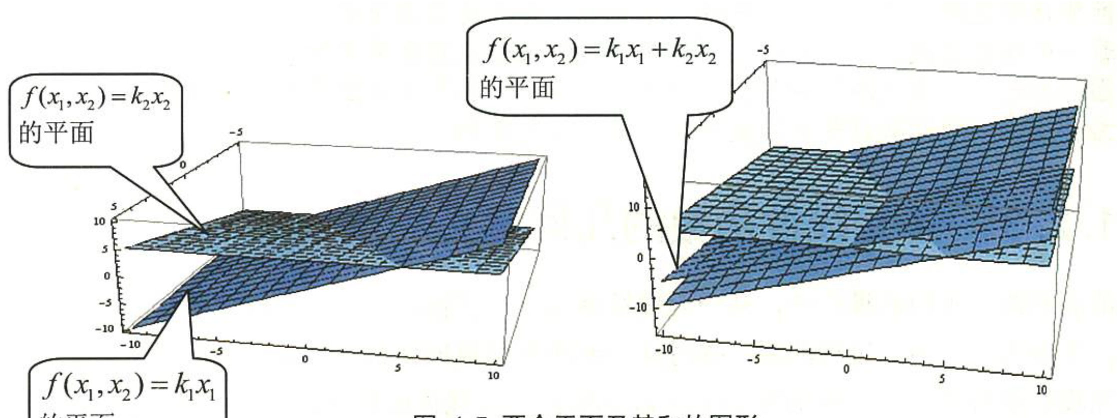



图 1-5 两个平面及其和的图形

因此，线性函数 $f(x_1,x_2)=k_1x_1+k_2x_2$ 的几何图形, 是一个过原点的平面. **这个平面，是在三维坐标系下的二维几何图形.**

由二元线性函数 $f(x_1,x_2)=k_1x_2+k_2x_2$ 继续扩展到三元线性函数 $f(x_1,x_2,x_3)=k_1x_2+k_2x_2+k_3x_3$ 时，所在的坐标系, 由三维扩展到四维。可以想象: 这个三元变量函数, 构成了一个三维空间，是由三个空间 $f(x_1,x_2,x_3)=k_1x_1$, $f(x_1,x_2,x_3)=k_2x_2$, $f(x_1,x_2,x_3)=k_3x_3$ 叠加得到的. 因此它是一个四维空间中 (四维坐标系) 的一个三维子空间.

继续扩展到 "四元", 及 "n 元" 的线性函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)=k_1x_2+k_2x_2+...+k_nx_n$, 坐标系空间扩展到五维, 乃至 n+1 维,**其几何图形, 仍将是一个低于坐标系维度一个维数的 "子空间".**

**这个 n 元几何图形, 总是低于坐标系一个维数。我们常常把一个高维的坐标系, 称为一个 "空间". 那么，只能把这个线性函数低一维的几何图形, 称为一个 "平面". 这是一个扩展意义上的平面, 常被称为 "超平面"**(原理如同对于三维 "空间里" 而言，低一维度的子空间就是平面). **所以, 超平面等同于包含在 n 维空间 $R^n$ 中的 n-1 维欧式空间**，它们对应于通常三维空间中的二维平面、平面内的直线、直线上的点等.

把线性函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)=k_1x_2+k_2x_2+...+k_nx_n$ 的形式改写为
$k_1x_2+k_2x_2+...+k_nx_n-f(x_1,x_2,...,x_n)=0$
或者更一般的形式为
$k_1x_2+k_2x_2+...+k_nx_n+k_{n+1}x_{n+1}=c$
这是一个 n+1 维空间 $R^{n+1}$ 中的一个 n 维超平面，只是这个平面不一定过原点了（注意，**不过原点的超平面, 依然可称之为 "空间"，但不能称之为 "线性空间"**).

**因此, 我们就明白了多元线性函数的 "线性", 不能单纯地理解为空间中的一条直线了，把线性函数几何图形, 想象成一个 "平面", 更有代表性。**
**实际上，把 n 个 n 元线性函数, 组成一个 "满秩方程组", 才能表示一条直线。**

**相比较而言，线性函数中含有的参数少，涉及的运算简单，仅为 "加法" 和 "乘法"，便于运算，是变量数学中最简单的函数. 其实许多复杂的函数, 都可以在一定范围和精确度下, 近似地 "用线性函数" 来表示. 所以 "线性函数" 是变量数学中最重要的函数。**

# 7 线性映射

**线性函数, 用运动的概念来理解, 就是 “映射”, 如同函数的功能一样.**

下面的图, 给出了一元线性齐次函数 f(x)=kx, 当 “k 取不同的数” 时的映射对应关系。注意: 在三个分图中，有一个共性就是: 元素 0 必然映射到元素 0.

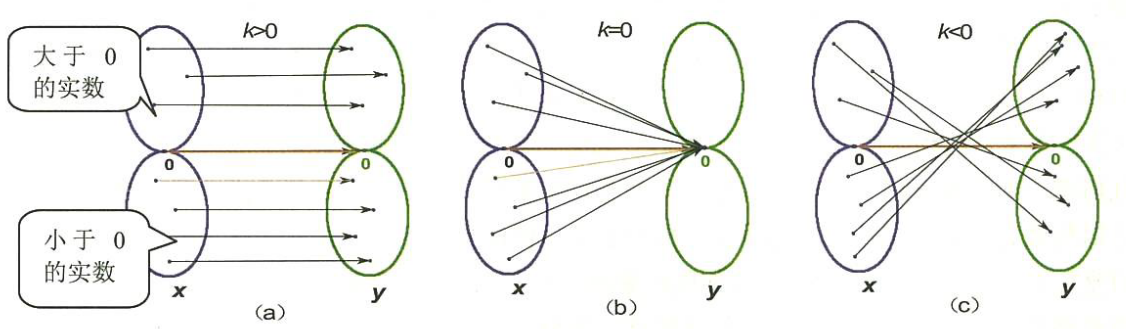



图 1-9 比例函数 $y=kx$ 在集合上的映射关系

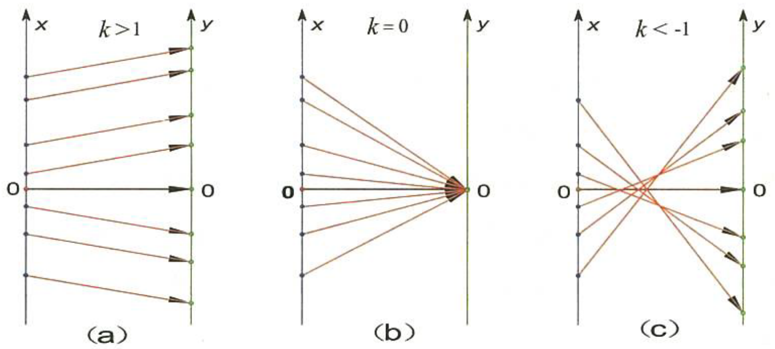



图 1-10 比例函数 $y=kx$ 在线轴上的映射关系

如果把两个坐标轴的原点, 进行重合 (因为 0 元素必然映射到 0 元素)，再把两个坐标轴的夹角, 调整到 $\frac{\pi}{2}$ 角，就可得到笛卡尔平面坐标系 (而**线性代数中讲的 “线性空间” 坐标系的坐标轴, 可以是任意非零的夹角**). 如下图只画出 k>0 的映射情况.

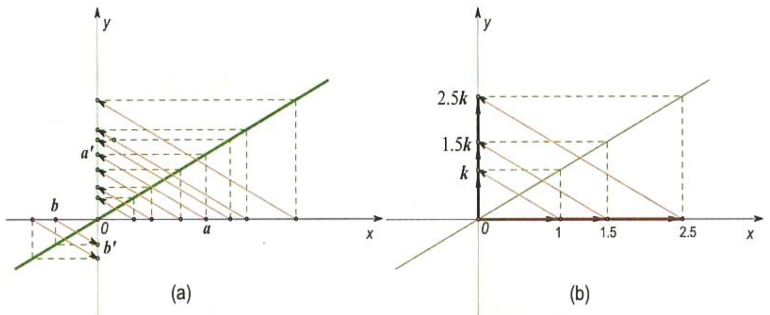



图 1-11 比例函数之点的映射和向量的映射

上图, 如果把点 a、a'、b 和 b', 分别与原点 0 连起来，就会得到线段 0a、0b、0a'、0b'。于是, 线段 0a, 映射到线段 0a'; 线段 0b, 映射到线段 0b'.
所以, 线性映射, 就是把 “线段” 映射到 “线段”.
如果我们把 “线段” 改称为 “向量” 的话，就是: **线性映射就是把 “向量” 映射成 “向量”**(见图 1-11(b)). 线性映射把向量变成另外一个向量.

当然，这个线性映射, 也满足线性的 “可加性” 和 “比例性” 的性质:
→ **可加性：两个向量先求和，再映射．结果就等于：先各自映射，再求和．**(即: x 轴上的两向

量的和, 映射得到的 y 轴向量, 等于 “两个 x 轴向量, 分别映射得到的 y 轴向量” 的和.)
→ **比例性：先倍数，再映射．结果就等于：先映射，再倍数．**(即:“x 轴向量的倍数” 映射得到的 y 轴向量, 等于 “x 轴向量映射的 y 轴向量” 的倍数)（见图 1-11 (b)).

用数学表示上面的这两种性质, 就是:
→ $T(a+b)=Ta+Tb$
→ $T(ka)=k\cdot Ta$
其中, T 是映射运算 (即矩阵), a、b 是任意两个向量.

**T 本来表示一种 “线性映射” 的动作关系 (或函数关系)．但在上式中，就像一个实数或变量一样参与运算。**如 T(a+b)=Ta+Tb，就像乘法对加法的分配律一样展开运算. **因此 T 在这里，也叫 “线性算子”。具体的算子有：微分算子、积分算子、拉普拉斯算子等。**

例

$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ 的几何解释是:
**向量 x 和 y，都是二维向量．因此，所有任意的向量 x 的集合，将构成平面 $\Pi_1$，所有任意的向量 y 的集合，会构成平面 $\Pi_2$。所以，二维线性函数，就构成了两个二维平面之间由矩阵 K 所确定的映射关系.(此处，矩阵是二维的比率).**

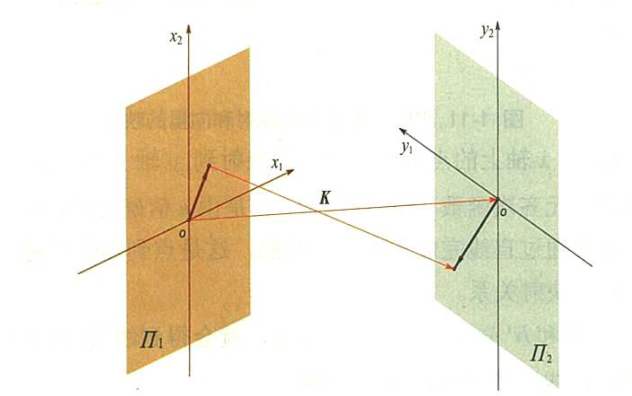


图 1-12 由矩阵 $\boldsymbol{K}$ 所确定的两个平面上二维向量的映射关系

**平面 $\Pi_1$ 的原点 0，始终映射到另一个平面 $\Pi_2$ 的原点 0，这是 “线性映射” 的最基本要求。**

为了更仔细地观察映射之间的关系，我们把平面 $\Pi_1$ 放平，并使两个平面的原点 0 重合，就得到了一个由两个相交平面, 所构造的三维空间。

图 1-13 中，把平面 $\Pi_1$ 上的向量 x, 标注为 $a_i$，把平面 $\Pi_2$ 上的向量 y, 标注为 $b_i$,(为了和坐标系的标注区别开来)。

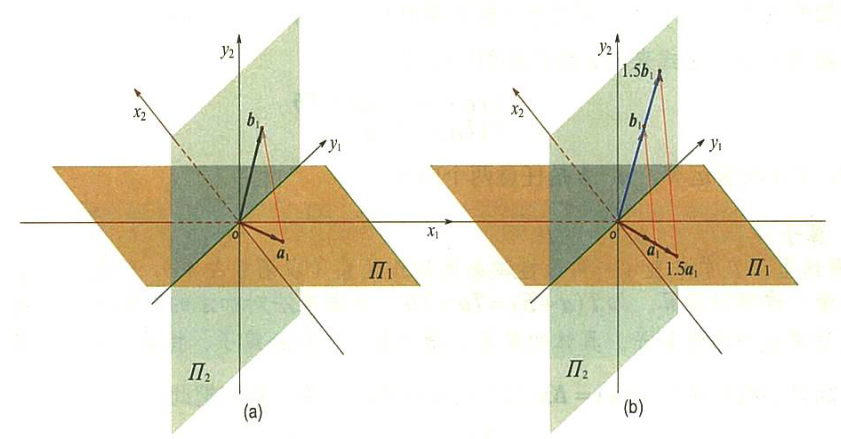


图 1-13 向量之线性映射的比例性

图 1-13（a）表示: 矩阵 K, 把平面 $\Pi_1$ 上的一个向量 $a_1$, 映射到平面 $\Pi_2$ 上的向量 $b_1$. 也即 “有向线段” 映射为 “有向线段”.
图 1-13(b）表示: 把一个向量 $a_1$ 比例放大到 1.5 倍后, 用矩阵 K 的规则, 来映射到平面 $\Pi_2$ 上的向量 $1.5b_1$. 这满足线性映射的 “比例性”。

**其实, 对于 “数乘变换” T(a)= ka，除了把 a 看做向量外，我们可以把 a 看做一个几何图形 (其实 “向量” 也是一个几何图形，只不过它是一个简单的几何图形 – 有向线段).**
→ T 在 k>1 时, 就是对向量线段 (几何图形)a 放大
→ T 在 0<k<1 时, 就是对 a 缩小
→ T 在 k=-1 时, 就是把 a 反方向变化

---

# 8 “线性变换” 的几何意义

**在大多数的教科书中，“线性映射” 和 “线性变换” 被区别为两个概念。**
**如果映射是发生在一个集合上的 “同一个坐标系” 中，“线性映射” 就被称为 “线性变换”。所以, “线性变换” 其实只是作为 “线性映射” 的特例而已，**就是把集合上的两个坐标系, 合并为在一个上显示而已.

比如下例, 本来有两个平面 $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$. 现在, 我们把 $\Pi_2$ 平面旋转后让它躺下, 让 $y_1$ 轴重合于 $x_1$ 轴，$y_2$ 轴重合于 $x_2$ 轴，即把两个平面合二为一了. 从左图的状态, 变成了右图的状态. 这个, 就是从 “线性映射” 转换成了 “线性变换”.

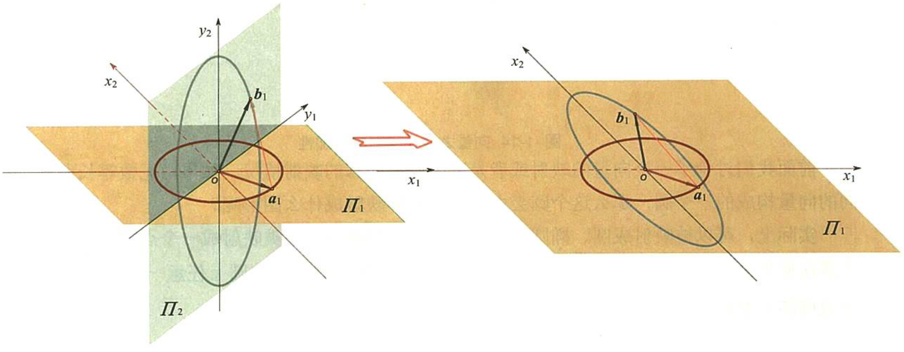


图 1-16 线性映射转换成线性变换