目录

文件名

第一部分　数学期望 mathematic expectation

1　加权平均数：$\overline{x} = \frac{\sum (x \cdot 对应权重w)}{\sum (对应权重w)}$

加权平均数, 和本章要讲的"数学期望", 没什么关系. 但两者的公式, 确有相似之处. 所以就把"加权平均数"也写在这里.

若n个数$x_1, x_2, ..., x_n$ 的"权重", 分别是 $w_1, w_2, ..., w_n$ ，那么, 这n个数的"加权平均值"就是: $\overline{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_n w_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$. 即: $\overline{x} = \frac{\sum (x \cdot 对应权重w)}{\sum (对应权重w)}$

例

各考试	平时测验=得到了80分	期中考试=90分	期末考试=95分
权重	0.2	0.3	0.5

则, 你成绩的"加权平均值"：
$\overline{x} = \frac{\sum (x \cdot 对应权重w)}{\sum (对应权重w)} = \frac{(80 \cdot 0.2) + (90 \cdot 0.3) + (95 \cdot 0.5)}{0.2 + 0.3 + 0.5} = 90.5$

2　"期望"：是对长期价值的数字化衡量.

各个股票的价格有涨有跌, 那你怎么判断它们各自的价值, 到底几何? 方法就是 — 数学期望.
"期望" 是对"长期价值"的数字化衡量. — 即"长期中会得到的数学均值". 即在长期中(无数次试验)的状态下, 能取到的稳定结果(即均值)为何.

"数学期望"之所以有效, 是因为"大数定律"在背后起作用.
- **大数定律把"随机变量x"在局部上的"随机性数值变化", 固定到"整体上的确定性"，也就是概率.**
- **而"数学期望", 又把"概率"代表的长期价值, 变成了一个具体的数字，方便我们比较.**

几乎所有的金融产品的价值, 如基金, 股票, 都可以用"数学期望" 来衡量它们是否值得投资. 如果"赢的期望"超过"输的期望"，即**数学期望是正的, 它就值得长期投资.**
对于游戏开发者来说, **如何保证游戏的平衡性?** 即不让某些游戏中的职业过强或过弱? **方法就**

是衡量每个角色职业能活下来的"数学期望". 然后调整参数, 达到"数学期望"上的平衡.

不过注意: 数学期望, 有时也会有"主观价值判断"的涉入. 因为每个人, 对同一样事物赋予的"价值高低"的判断不同, 所以不同个体的数学期望, 也不一样. 比如, 俄罗斯轮盘赌, 那些把赢钱看得比自己生命更重的人, 他们赋予这个游戏的数学期望就更高.

3 "离散型"随机变量的"数学期望": $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k P_k)$

该公式的意思就是: 将该随机变量的一切可能的"取值", 各自乘以其对应的"概率", 然后将这些乘积"求总和". 如果该求和, 能得到一个"绝对收敛"的数, 那么这个收敛数, 就是该"离散型随机变量"的"数学期望E". 记为$E(x)$.
它其实是简单算术平均的一种推广，类似"加权平均"。

具体就是:
离散型随机变量X 的取值为: $X_1, X_2, ...X_n$, 其每个X的取值, 对应的概率为 $p(X_1), p(X_2), ..., p(X_n)$.
这些概率, 也可理解为数据 $X_1, X_2, ...X_n$ 出现的频率 $f(X_i)$. 则:

$$\boxed{X_1 \cdot p(x_1) + X_2 \cdot p(x_2) + ... + X_n \cdot p(x_n) = \sum_{k=1}^{n}(x_k \cdot p_k) = \underbrace{E(X)}_{\text{随机变量}X\text{的期望}}}$$

← 这个公式和"加权平均数"的公式很像, 只不过是把"权重"换成了"概率".

例

你在一游戏中, 要么会得到0元, 要么100元, 具体概率如下. 则你的期望为?

X(元)	0	100
P(概率)	3/4	1/4

$E(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k \cdot p_k)=\left(0 \cdot \frac{3}{4}+100 \cdot \frac{1}{4}\right)=25$元

例

某股票, 现在价格50元. 它有40%的概率涨到60块, 有30%的概率保持不变，还有30%的概率跌到35块. 即:

收益 X(元)=未来价格-现在价格(50元)	=60-50	=50-50	=35-50
P	0.4	0.3	0.3

那么它未来涨跌收益的"数学期望"就是:
$E(X)=(60-50)\cdot 0.4+(50-50)\cdot 0.3+(35-50)\cdot 0.3=-0.5$
这个收益的期望, 是负数. 说明长期来看, 这只股票趋向于是亏钱的, 不值得买.

例

投篮得分X ↓	← 命中概率	← 数学期望
近距离篮下投, 得2分	0.55	2×0.55=1.1分
中距离投篮, 得2分	0.45	2×0.45=0.9分
远距离投三分球, 得3分	0.35	3×0.35=1.05分

每种进攻方式的价值, 原本没办法比较，有了"数学期望"后，就可以进行比较了. 所以要多采用"近距离"和"远距离"投篮 (因为它们的数学期望值更高), 少投"中距离". 事实上, 在NBA 篮球联赛中, 不少球队就是照这个思路制定策略的.

例

某城市, 家庭中拥有孩子的数量, 是一个随机变量X, 取值为0,1,2,3.

	孩子数量X=0	x=1	x=2	x=3
概率	P=0.01	P=0.9	P=0.06	P=0.03

该城市的家庭, 孩子数量的期望就是:

$E(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.01)+(\underbrace{1}_{1\text{个孩子}}\cdot\underbrace{0.9}_{\text{概率是}0.9})+(2\cdot 0.06)+(3\cdot 0.03)=1.11$

例

有甲乙两人,

- 甲会生产出“次品的数量”和“相应概率”的数据为:

次品数量 X_1	0	1	2	3
概率P	0.3	0.3	0.2	0.2

- 乙会生产出“次品的数量”和“相应概率”的数据为:

次品数量 X_2	0	1	2	3
概率P	0.2	0.5	0.3	0

问: 两人谁的技术水平高? 那么我们就来看他们两人各自的“期望”:

- “甲生产出次品的数量”的期望是:

$E(X_1)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.3)+(1\cdot 0.3)+(2\cdot 0.2)+(3\cdot 0.2)=1.3$

- “乙生产出次品的数量”的期望是:

$E(X_2)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.2)+(1\cdot 0.5)+(2\cdot 0.3)+(3\cdot 0)=1.1$

所以, 甲的次品期望 ¿ 乙的. 即乙的水平高.

4 “连续型”随机变量的“数学期望”: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x\cdot f(x)]\,dx \leftarrow$ 其中的 f(x) 是“概率(密度)函数”.

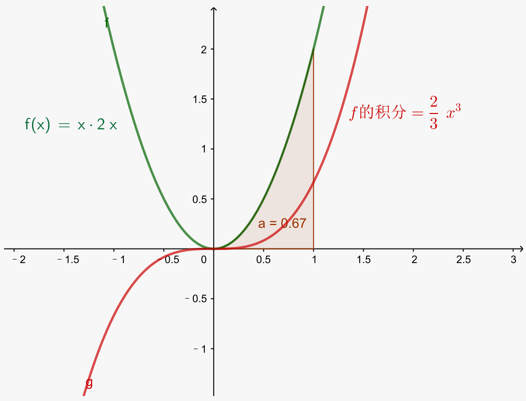
如果这个积分: $\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\cdot\underbrace{f(x)}_{\text{概率函数}}\right]dx}$ 的值, 是绝对收敛的. 则, 该积分的值, 就是“连续型”随机变量的“数学期望”.

例

求概率函数 $f(x)=\begin{cases}2x\ (0<x<1)\\ 0\ (else)\end{cases}$ 的期望值.

4 “连续型”随机变量的“数学期望”: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X \cdot F(X)]\, DX \leftarrow$ 其中的 $F(X)$ 是“概率(密度)函数”

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{概率函数}} \right] dx \\
&= \int_{x\text{的下限}=0}^{x\text{的上限}=1} \left[x \cdot \underbrace{2x}_{\text{即本例的概率函数} f(x)} \right] dx \\
&= \int_0^1 2x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx \leftarrow \text{根据公式: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) |_0^1 \\
&= \frac{2}{3} x^3 \ |_0^1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$



例

某产品, 根据寿命长短(用随机变量X表示), 分为三档, 每档有不同的定价.
该随机变量X(寿命), 符合$\lambda = \frac{1}{10}$的“指数分布”.
(别忘了, 指数分布的“概率函数”公式是: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \ (x \geq 0) \\ 0 \ (x < 0) \end{cases}$)

根据寿命 ,分档的价格是:

寿命(年)	$X \leq 1$	$1 \leq X \leq 2$	$2 \leq X \leq 3$	$X > 3$
价格(元)	1500	2000	2500	3000

我们要先算出, 产品在“每个价格区间”的概率是多少? 因为下面求“价格期望”时, 要用到这些概率数值.

$$P\{\text{寿命}X \leq 1\text{年}\} = \int_{0\text{年寿命}}^{1\text{年寿命}} \underbrace{\left(\underbrace{\lambda}_{=\frac{1}{10}} e^{-\lambda x} \right)}_{\text{指数分布的概率函数} f(x)} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10} x} \right) dx = 0.0952$$

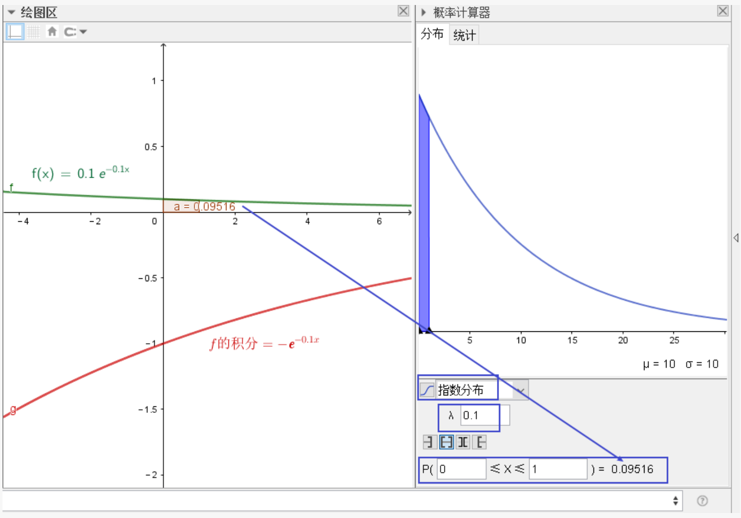
$$P\{1 < X \leq 2\} = \int_1^2 \left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10} x} \right) dx = 0.0861$$

$$P\{2 < X \leq 3\} = \int_2^3 \left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10} x} \right) dx = 0.0779$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} \left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = \int_3^{+\infty} \left(\frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10} x} \right) dx = 0.7408$$

现在就有:

寿命X(年)	(0-1]	(1-2]	(2-3]	¿3
价格Y(元)	1500	2000	2500	3000
概率P	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408



所以, 该产品的价格期望值, 就是:

$$
\begin{aligned}
E(\text{价格}Y) = & \left(\underbrace{1500}_{\text{“属于该寿命段”产品的价格}} \cdot \underbrace{0.0952}_{\text{“会属于该寿命段产品”的概率}} \right) \\
& + (2000 \cdot 0.0861) \\
& + (2500 \cdot 0.0779) \\
& + (3000 \cdot 0.7408) \\
& = 2732.15\text{元}
\end{aligned}
$$

---

5 “随机变量函数”的“数学期望”

即用随机变量X, 构造出新的函数 Y=g(X), 来求这个“新函数Y”的数学期望.

5.1 由 “离散型随机变量X” 构造出的新函数 Y=g(X) ：其数学期望是: $E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1} [g(x_i) \cdot P_i]$

	数学期望
“离散型”的随机变量 X	$E(X) = \sum (X_i P_i)$
由“离散型随机变量X” 构造出的新函数 Y=g(X)	$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1} [g(x_i) \cdot P_i]$

例

有“离散型”随机变量X :

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

由X构造出的新函数: Y=4X+1, 就有:

Y=4X+1	$4 \times (0) + 1 = 1$	$4 \times (1) + 1 = 5$	$4 \times (2) + 1 = 9$
P	0.1	0.6	0.3

则, Y的期望就是:
$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1}[g(x_i) \cdot P_i] = (1 \cdot 0.1) + (5 \cdot 0.6) + (9 \cdot 0.3) = 5.8$

5.2 由"连续型随机变量X"构造出的新函数 Y=g(X)：其数学期望是:

$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty}[g(x) f(x)]dx$

	数学期望
"连续型"的随机变量 X	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}[x \cdot f(x)]dx$
由"连续型随机变量X"构造出的新函数 Y=g(X)	$E(X) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty}[g(x) \cdot f(x)]dx$

例

有"连续性"随机变量X, 其概率函数是: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \le X \le 2) \\ 0 & (else) \end{cases}$

由X构造出的新函数Y是: $Y = 4X + 1$
则: Y的数学期望就是:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(4X+1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[g(x) \cdot f(x)]dx \\ &= \int_0^2 [\underbrace{(4X+1)}_{\text{即}g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{即}f(x)}]dx = 5 \end{aligned}$$