目录

方法论

1 几何意义和物理意义, 本质上是一回事

一旦碰到较抽象难懂的新概念或定理, 如何搞定?
- 看推导过程.
- 弄懂它的几何意义, 或物理意义. 几何上说得通，物理上也就说得通，因为几何意义和物理意义本质上是一回事. 因为物理决定着几何结构的存在. n 亿年过去了, 不符合物理规律的物质几何空间早就灭亡了. 数学家和物理学家所研究的，只是一头大象的不同部分.

2 真理总是简单的和直观的

真理总是简单的和直观的. 不管多么复杂高深的数学理论，总有其直观的中心思想. 在数学中再没有别的什么东西，能比几何图形更容易进入人们的脑海了.
数学教育家波利亚曾经说: 一个长的证明常常取决于一个中心思想，而这个思想本身却是直观的和简单的.

事实上, 很多数学家都是先利用几何直观, 猜测到某些结果, 然后才补出逻辑上的证明的.
华罗庚说过: **"数缺形" 时少直观, "形少数" 时难入微;** "数形结合" 百般好, 割裂分家万事休.
抽象和形象是相辅相成，缺一不可的.

3 "线性" 问题 and "非线性" 问题

我们常说的 "一次方程" 和 "一次函数"，都属于 "线性方程 Linear Equation" 和 "线性函数 Linear Function.
现实生活中的数学问题, 无非分为两类: 一类线性问题，一类非线性问题. 线性问题是研究最久、理论最完善的. 而 **"非线性问题", 则可以在一定基础上转化为 "线性问题" 来求解. 比如, 微积分学的基本思想, 就是 "以直代曲", 局部地以 "切线" 代替 "曲线".** 于是，在某种条件下，微分方程就可以近似地变成 "线性代数方程组".

因此, 你在遇到一个具体问题时, 首先要判断它是 "线性" 还是 "非线性" 的. 其次, 若是 "非线性问题", 就考虑应如何转化为 "线性问题" 来解决.

4 不过原点的直线, 不满足线性代数里, 对线性函数的 "比例性" 的要求

线性代数里面的 "线性", 主要意思就是线性空间里的 "线性变换"(映射, 类似函数的概念, 把输入变成另一种输出).

函数 f(x)= kx+b (k,b 是不变量)，称为一元线性函数. 如果 b=0, 则这个函数的外观就变成 f(x)= k 的形式了，这是一条过原点的直线.

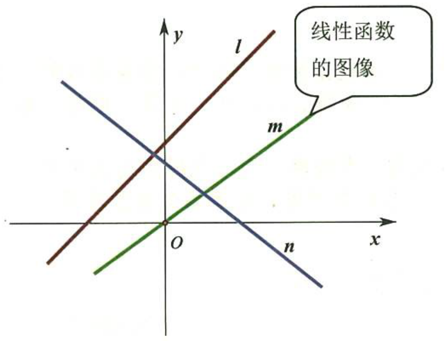

图 1-2 一元线性函数

严格说来，只有过“原点”的最简单的直线 f(x) = kx, 才被称为一元线性函数.

因为**虽然 f(x)=kx+b 是线性函数, 但它却不满足“线性代数”里所指的“线性”含义. 因为不过原点的直线, 不满足线性代数里, 对线性函数的“比例性”的要求.**

线性函数, 其几何意义是：它表示为一条直线. 那么其代数意义呢？最基本的意义只有两条：“可加性”和“比例性”.

【可加性】:
即: 如果函数 f(x) 是线性的, 则有:

$$\boxed{f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}$$

其意思就是一句话：和后的函数, 等于函数后的和.
物理意义就是说：因变量“叠加后”的作用结果, 就等于各个因变量“独自作用结果”的叠加.
即：先结合, 再做函数变形. 等于先各自做函数变形, 再结合.

【比例性 (数乘)】:
也叫做齐次性、数乘性, 或均匀性. 即: 如果函数 f(x) 是线性的, 则有:

$$\boxed{f(kx)=k\cdot f(x)}$$

一句话: **先做比例变化, 后做函数变换, 等于先做函数变换, 后做比例变化.**
物理意义是说：对因变量做缩放时，函数对因变量的作用结果, 也会同等比例地缩放.

而对于不经过原点的直线 f(x)=ax+b 而言, 就不满足此“比例性”. 因为: $f(kx)=akx+b$, 而 $k\cdot f(x)=akx+kb$, 所以 $f(kx)\neq k\cdot f(x)$. 因此严格地讲, f(x)=ax+b 不能再叫“线性函数”了. **或者说，线性代数的“线性变换”, 不直接研究坐标系的移动.**

可加性与比例性组合在一块, 就是“线性”的全部意义了. 即有:

$$f\left(k_1x_1+k_2x_2\right)=k_1f\left(x_1\right)+k_2f\left(x_2\right)\quad\leftarrow k_1,k_2\text{为常数}$$

一句话：线性组合的函数, 等于函数的线性组合。这里面既有“缩放”又有“叠加”的物理含义.

在物理上, 线性函数的**“可加性”表明：函数所描述的事物, 具有累加性. 即：所有起因的累加, 所导致的结果, 完全等于“每个起因独自所引起的结果”的累加。**
是否满足“可加性”, 就界定了它所描述的事物, 到底是“线性”的, 还是“非线性”的.

比例性是啥物理含义呢? **比例性又名 "齐次性", 说明没有初始值。没有输入信号时, 输出也没有; 有几倍的输入量, 就刚好就有几倍的输出量.**

5 y=Kx 所做的动作, 就是将一个向量 x, 通过矩阵 K, 映射变换为另一个新向量 y. 矩阵 K, 就相当于一个 "函数" 的作用.

$$\begin{cases} y_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + ... + k_{1n}x_n \\ y_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + ... + k_{2n}x_n \\ ... \\ y_m = k_{m1}x_1 + k_{m2}x_2 + ... + k_{mn}x_n \end{cases} \leftarrow k_{11}, ..., k_{mn} \text{ 不是变量, 而是系数}$$

如上式, 这 m 个 n 维 (n 元) 线性函数, 都是齐次函数. 他们全部过原点.
线性齐次函数, 形如 $y = k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n$, **这个式子中, 每项里的变量 x 出现的次数, 都是一次的 (没有常数项), 整齐划一, 故此称为 "齐次" 的.** 全称为 "n 元线性齐次函数".

上式, 可等价写成: $\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} lk_{11} & ... & k_{1n} \\ ... & & \\ & & \\ k_{m1} & & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}$

并可进一步简写成: y=f(x) = Kx

即: $y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{vmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_{11} & ... & k_{1n} \\ ... & & \\ & & \\ k_{m1} & & k_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}$

矩阵, 其实就是线性方程组的 "系数". 矩阵, 就核心地代表了 "线性变换".
因为 **y=Kx** 所做的动作, 就是将一个向量 **x**, 通过矩阵 **K**, 映射变换为另一个新向量 **y**. **矩阵 K, 就相当于一个 "函数" 的作用. 即, 一个矩阵对应着一种 "线性变换" 规则.**