目录

积分

第一部分　定积分 definite integral

1　"定积分"的定义

1. 曲线函数f(x), 在x轴上有界, 比如端点是[a,b].
2. 然后, 我们在[a,b]这段区间上, 任意插入n个分点, 分成n个小区间. 它们不要求等分. 每个小区间的长度就是 $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.
3. 在每个Δ小区间上, 任取一点 ξ_i. 这点的函数值(即y轴上的高度), 就是 $y = f(\xi_i)$.
4. 这样, 我们就能得到每一个Δ小区间, 所在的"长方形细条的面积"了, 即 $=$ 宽$\Delta x_i \cdot$ 高$f(\xi_i)$
5. 把所有这些Δ小区间的"长方形细条面积", 全加起来, 就是该曲线到x轴间的面积的近似值. $= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(\xi_i)$
6. 我们令其中 x轴宽度最大的那个Δx小区间 (假设起名为λ, 即$\lambda = \max\{\mathit{\Delta} x_1, ..., \mathit{\Delta} x_n\}$), 我们让这个$\lambda$, 极限趋向于0. 这样, 既然最大的$\Delta$x小区间都趋近于0了, 其他比它更小的$\Delta$x小区间, 就都统统被约束, 也都趋向于0了. 这样, 它们的"长方形细条的面积之和", 就能精确的等于"函数曲线到x轴之间的面积"了, 而不仅仅是"近似"了.

即: $\lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{高}} \cdot \underbrace{\mathit{\Delta} x_i}_{\text{宽}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{定积分}}$

各部分的名字是: $\int_{\text{下限}a}^{\text{上限}b} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}}\ d\ \underbrace{(x)}_{\text{积分变量}}}_{\text{被积表达式}}$

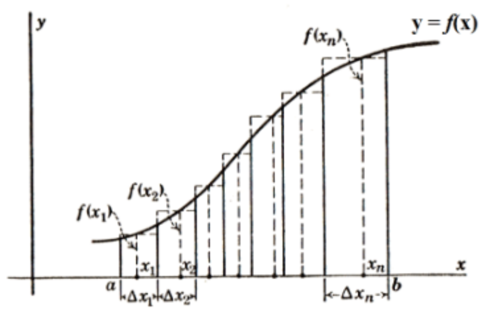


Fig. 1

2 定积分的性质

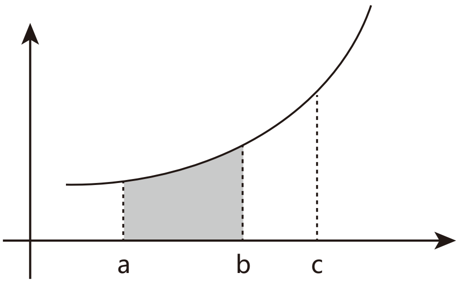
2.1 若 **b=a,** 则 $\int_a^a f(x) = 0$

2.2 $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) \leftarrow$ 交换上下限, 定积分的值要变号

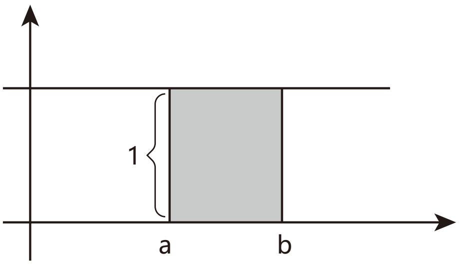
2.3 $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \leftarrow$ 即, 积分可以拆开, 常数可以提到外面去

2.4 若 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leftarrow$ 其实就是原先的一步走, 分成两步走而已.

2.5 若 $a < b < c$, 则: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$



2.6 若 **f(x)** 恒等于**1**, 即该函数是条"水平直线", 它与x轴之间就形成一个矩形了. 则 $\int_a^b 1dx =$ 高$1 \cdot$ 宽$(b-a) = b - a$

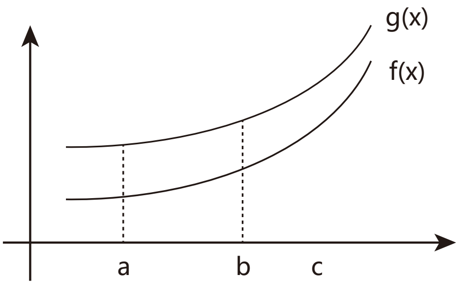


2.7 $\int_a^b kdx = k\int_a^b 1dx = k(b-a) \leftarrow$ **k** 是常数, 可以提到积分外面

2.8 若 $f(x) >= 0$, 即"函数曲线"都在x轴上方. 则$\int_a^b f(x)dx >= 0$

2.9 若$f(x) <= 0$, 即"函数曲线"都在x轴下方. 则 $\int_a^b f(x)dx <= 0$

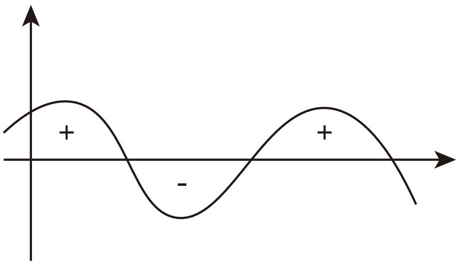
2.10 若 $f(x) <= g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx <= \int_a^b g(x)dx$



2.11 $|\int_a^b f(x)dx| <= \int_a^b |f(x)|dx$

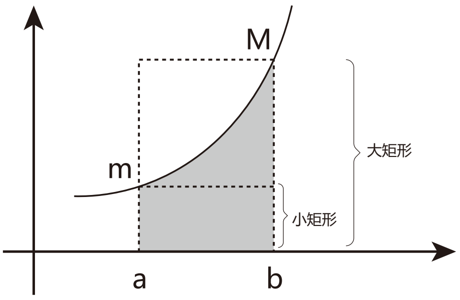
因为"函数曲线"的定积分(面积), 在x轴上方是正面积的, 在x轴下方是负面积的, 如果一个曲线既有正y值的部分, 又有负y值的部分, 那它的总面积, 肯定会有"正负相互抵消掉"的一部分.

而先把“函数曲线”取绝对值, 它的y值就都在x轴上方了, 面积就不存在负数的一块, 就不会抵消掉总面积.



2.12 一个曲线, 在[a,b]区间上, 若 m是它的最小y值高度, M是它的最大y值高度, 则有: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

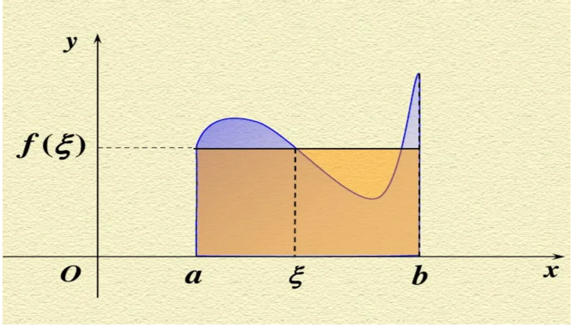
如下图, “高m” 乘以 “宽(b-a)”, 就是 abm 这个小矩形的面积.
‘高M” 乘以 ‘宽(b-a)”, 就是 abM 这个大矩形的面积.
曲线mM 的定积分, 这个面积大小, 肯定是夹在上面两个矩形的面积之间的.



使用该方法, 就可以让我们来对曲线的定积分值, 进行估计.

2.13 定积分“中值定理” : 如果 f(x) 是连续的, $\exists \xi \in [a,b]$, 则必然有 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

定积分中值定理 Mean value theorems for definite integrals 的意思就是说: 在函数曲线的[a,b]区间上, 一定能找到一个点 ξ, 该ξ点的 y值高度(即 f(ξ)), 乘上 “b-a 这个宽度”, 所形成的的矩形面积, 能恰好等于函数曲线的定积分值. 你找吧, 一定能找到这个点ξ 存在.



第二部分　求定积分的方法

3　定积分的“分部积分法”: $\int_a^b$ 前 $\cdot\, d$(后) $=$ (前 $\cdot$ 后) $|_a^b - \int_a^b$ 后 d(前)

比较一下:

“不定积分”的“分部积分法”公式是: $\boxed{\int \text{前} \cdot d(\text{后}) = \text{前} \cdot \text{后} - \int \text{后}\ d(\text{前})}$

‘定积分”的“分部积分法”公式是: $\boxed{\int_a^b \text{前} \cdot d(\text{后}) = (\text{前} \cdot \text{后})\ |_a^b - \int_a^b \text{后}\ d(\text{前})}$

为什么要用“分部积分法”, 来把 d(后) 变成d(前)? 不还是要求某个数的微分么? 其实, 你这样做的目的, 是需要先满足这个前提的: 即: 当 “$\int$ 后 d(前)” 比 “$\int$ 前 d(后)” 更容易算时, 你可以用“分部积分法”来交换微分的顺序.

注意: 在反复使用分部积分法的过程中, 不要对调两个函数地位, 否则不仅不会产生循环现象, 反而会一来一往, 恢复原状, 毫无所得.

例

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\arcsin x}_{\text{前}}\ \underbrace{dx}_{\text{后}} \leftarrow \text{根据定积分“分部积分法”公式}$$

$$\int_a^b \text{前} \cdot d(\text{后}) = (\text{前} \cdot \text{后})\Big|_a^b - \int_a^b \text{后}\ d(\text{前})$$

$$= (\arcsin x \cdot x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\ \underbrace{d(\arcsin x)}_{\text{求}\arcsin x\text{的微分}}$$

$\leftarrow$ 注意, 减号后面的积分部分, 这里的$[0, \frac{1}{2}]$是x的积分区间,

而现在d后面是$\arcsin x$了, 即求的是 $\arcsin x$ 的微分,

所以, 你应该把$\arcsin x$这个“原函数”, 朝外提出去变成“导函数”,

让d后面是x才行.

微分 $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= \underbrace{\arcsin \frac{1}{2}}_{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leftarrow \text{右边部分的} \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ \text{把导函数}x\text{拿到}d\text{里面, 变成原函数}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\left(\frac{1}{2} x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ d\ \underbrace{(x^2-1)}_{\substack{\text{原函数, 加常数后,} \\ \text{其导函数的值是不变的}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} + C\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{\pi}{12} - \left[-(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C\right]\Big|_0^{2^{-1}}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \left[-(1-(2^{-1})^2)^{\frac{1}{2}} - \left(-(1-0^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

例

$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$

我们用换元法, 令$\sqrt{x}=t$, 则$x=t^2$. 于是, $dx = \underbrace{d\left(t^2\right)}_{\text{求微分}} = \left(t^2\right)' dt = 2t\ dt$

→ 原上限是 x=1, 换成t来表示上限, 就是 $x=t^2=1$, 即 t=1, 这个就是换元成t后的t的新上限.

→ 原下限是x=0, 换成t来表示上限, 就是 $x=t^2=0$, 即 t=0. 这个是t的下限.

所以原式就变换成了:

$$= \int_0^1 e^t\ 2t\ dt = 2\int_0^1 e^t\ t\ dt \ \leftarrow \text{把导函数}t\text{, 拿到微分}d\text{后面, 变成原函数.}$$

$$= 2\int_0^1 \underbrace{t}_{\text{前}}\ \underbrace{d\left(e^t\right)}_{\text{后}} \ \leftarrow \text{使用定积分的“分部积分法”}$$

$$= 2\left[t\cdot e^t \mid_0^1 - \int_0^1 e^t\ d(t)\right] = 2\left[1\cdot e - e^t \mid_0^1\right] = 2\left[e - \left(e^1 - e^0\right)\right] = 2$$