目录

文件名

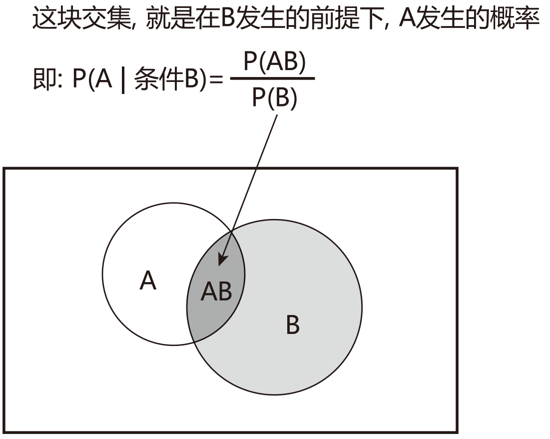
第一部分　条件概率

1　“条件概率”的意思

条件概率是：有A, B 两个事件, 和样本空间Ω．其中 $P(B) > 0$, 则, 在B已经发生的条件下, A发生的概率, 就叫做A对B 的“条件概率”．记作：P(A— 条件B), 读作“在B发生的条件下, A发生的概率”．

即, 条件概率公式是：$P(A\ |conditionB) = \dfrac{\overbrace{\text{在B发生条件下,A发生的样本点数}}^{\text{这个分子即：AB同时发生了}}}{\text{B里面有多少个样本点}} = \dfrac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成：$P(A\ |conditionB) = \dfrac{\mathrm{P\,(A\cap B)}}{\mathrm{P\,(B)}} = \dfrac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \dfrac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示, 注意：概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数(分母)去比.

上面公式中, P(AB) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件A, 和事件B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$
- 如果事件A, 和事件B 不相互独立, 则只能用“条件概率”公式, 来求P(AB), 即：$P(AB) = P(A|B)\cdot P(B) = P(B|A)\cdot P(A)$

注意：“条件概率”, 和“分步骤法”的区别:
- 分步骤法 (用乘法): 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率 (里面也有用到乘法): 前面的事件, 有可能会(但并不一定)影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有100个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

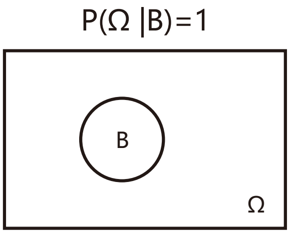
有6个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到1号球
- A_2: 取到2号球
- A_5: 取到大于4号的球

则:
- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到1号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全6选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}\right) = \frac{\text{在B条件里面,取到}\mathrm{A}_1\text{(即1号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面，取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = 0$
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}\right) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号2的球里面,取1个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}\right) = \frac{\text{在B条件里面,取到大于4号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集，只有6号一个球}}}{3}$

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$



2.3 性质：$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2\ |\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\ |\mathbf{B})+\mathbf{P}(\mathbf{A}_2\ |\mathbf{B})-\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ |\mathbf{B})$

2.4 性质：$\mathbf{P}(\mathbf{A}\ —\mathbf{B})=1-\mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}}\ |\mathbf{B}\right)$

2.5 性质：可列可加性：若$A_1,A_2,...A_n,...$ 是“互不相容”的事件，则有：$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)\leftarrow$ 即：“和的概率”，等于“概率的和”

3 “条件概率”的乘法公式：

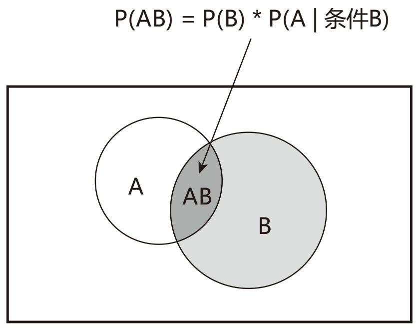
$$\boxed{P(前后)=P(后)\cdot P(前|后)=P(前)\cdot P(后|前)}$$

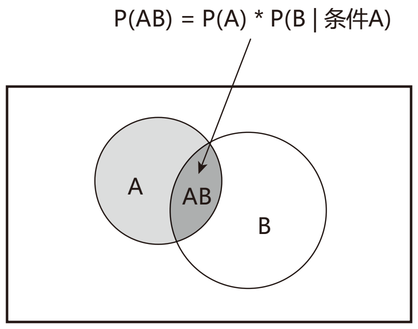
推导过程:

$$因为\begin{cases}P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\rightarrow 即\ P(AB)=\underbrace{P(B)\cdot P(A|B)}_{乘法，是交集\cap的概念} & ①\\ P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\rightarrow 即\ P(AB)=\underbrace{P(A)\cdot P(B|A)}_{乘法，是交集\cap的概念} & ②\end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”. 即 $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A)$

其中 $P(A)>0$，$P(B)>0$





同理，多个事件的乘法公式就是:

$\rightarrow$ $\boxed{P(ABC)=\underbrace{P(A)}\cdot\underbrace{P(B—A)}\cdot\underbrace{P(C—BA)}}$

$\uparrow$ 上面“从右往左”看，就是按 A,B,C 的顺序

$$\rightarrow\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2A_1)\cdot P(A_3A_2A_1)\cdot...\cdot P(\overbrace{A_n}^{即最后一个数字n写在前面.}\ |\ \overbrace{A_{n-1}}^{后面的条件，最后一个数字是：n少一位}...A_2A_1)$$

$\uparrow$ 上面“从右往左”看，就是按$A_1,A_2,...,A_n$的顺序

例

有100件产品，次品率=10%，即有10件次品. 做不放回抽样，问：第3次才取到合格品的概率是?

我们先令:

- A_1 表示第1次取，就取到了合格品
- A_2 表示第2次取，取到了合格品
- A_3 表示第3次取，取到了合格品

那么第3次才取到合格品，就是:

$$\underbrace{P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)}_{分步骤来做} = \underbrace{P\left(\overline{A_1}\right)}_{第1次取,取到次品} \cdot \underbrace{P\left(\overline{A_2}\ |\overline{A_1}\right)}_{在第1次取到次品的条件下,第2次取到也是次品} \cdot \underbrace{P\left(A_3\ |\overline{A_2}\,\overline{A_1}\right)}_{在第1,2次取到次品的条件下,第3次取到正品}$$

$$= \frac{\overbrace{C_{10}^1}^{第一步,10次品里面取1}}{C_{100}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_9^1}^{第二步,因为第一步已经拿走1件次品,这第二步就只能在9件次品里面取1件次品了}}{C_{99}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_{90}^1}^{既然第三步要拿到正品,我们就从90件正品里面取1了}}{C_{98}^1}$$

$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0.00834879$$

例

某产品:
- 甲公司占60%市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占40%市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{J}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified) : 表示产品是“合格”的
- $\overline{Q}$: 表示产品是“不合格”的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$P(JQ) = \underbrace{P(J)}_{=0.6} \cdot \underbrace{P(Q\ |J)}_{甲的合格率=0.9} = 0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$P(\bar{J}Q) = \underbrace{P(\bar{J})}_{=0.4} \cdot \underbrace{P(Q\ |\bar{J})}_{乙条件下的合格率=0.8} = 0.32$$

例

抽签, 共10签, 其中有4个为“成功上岸”的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.
我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到“成功”
- B: 表示乙抽到“成功”
- C: 表示丙抽到“成功”

问, (1) 甲抽到“成功”的概率? $P(A) = \frac{C_{4好签}^1}{C_{10签}^1} = \frac{4}{10} = 0.4$

(2) 甲乙都抽到“成功”的概率?

$$P(AB) = \underbrace{P(A)}_{第1步:甲先成功} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{第2步:在甲成功的前提下,\ 乙再成功}$$

$$= \frac{\overbrace{C_{4好签}^1}^{甲先抽掉一张好签}}{C_{10签}^1} \cdot \frac{\overbrace{C_{4好签-1}^1}^{乙就只能从剩下的3张好签中来抽了}}{C_{10签-1}^1} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P\left(\overline{A}B\right) = \underbrace{P\left(\overline{A}\right)}_{\text{第1步:甲先失败}} \cdot \underbrace{P\left(B\left|\overline{A}\right.\right)}_{\text{第2步:在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$

$$= \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{6\text{坏签}}}^{\text{甲先从共6张坏签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}^{\text{乙从共4张好签中取1}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}-1}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到“成功”的概率?

$$P\left(ABC\right) = \underbrace{P\left(A\right)}_{\text{第1步:甲先成功}} \cdot \underbrace{P\left(B\left|A\right.\right)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}} \cdot \underbrace{P\left(C|BA\right)}_{\text{第3步:在甲乙都成功的前提下,丙再成功}}$$

$$= \frac{\mathrm{C}^1_{4\text{好签}}}{\mathrm{C}^1_{10\text{签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩3好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩9签}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\text{还剩2好签}}}{\mathrm{C}^1_{\text{还剩8签}}}$$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0.0333333$$

例

你的新邻居, 是个 is very shy and withdrawn, invariably helpful but with very little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, ant a passion for detail.

你觉得他更可能是 – 图书管理员, 还是农民?

大多数人会认为他是图书馆管理员. 其实, 这种判断是”非理性”的. 问题的关键在于 – 你没有把这两种职业的”人数比例”考虑进去.

→ 在美国，农民与图书馆管理员，两者的数量之比是20∶1.
根据这个比例，我们可以假设他们人数的概率分别为：

$$\begin{cases} P(农民职业)=\dfrac{20}{100} \\ P(图书管理员职业)=\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

→ 假如你听到”彬彬有礼”这类描述，你的直觉是：
40%的图书馆管理员符合这个描述，而只有10%的农民符合这个描述.
如果这是你的估计，那就意味着：

$$\begin{cases} \text{在100\%的纯粹农民群体中，彬彬有礼者的占比概率是：} \\ \qquad P(彬彬有礼\ |农民职业)=0.1 \\ \text{在100\%的纯粹图书管理员群体中，彬彬有礼者的占比概率是：} \\ \qquad P(彬彬有礼\ |图书管理员职业)=0.4 \end{cases}$$

→ 在既有农民，又有图书管理员的混合群体中：

$$\begin{cases} \text{在属于农民职业的前提下，是彬彬有礼者的概率是：} \\ P(农民职业\cap 彬彬有礼)=\underbrace{P(农民职业)}_{\text{第一步，是农民的概率}}\cdot\underbrace{P(彬彬有礼\ |农民职业)}_{\text{第二步，在是农民前提下，彬彬有礼者的概率}} \\ \qquad =0.2\cdot 0.1=0.02 \\ \text{在属于图书管理员职业的前提下，是彬彬有礼者的概率是：} \\ P(图书管理员职业\cap 彬彬有礼)=P(图书管理员职业)\cdot P(彬彬有礼\ |图书管理员职业) \\ \qquad =0.01\cdot 0.4=0.004 \end{cases}$$

→ P(在彬彬有礼者中，取1人为图书管理员的概率)

$$=\frac{P(图书管理员职业\cap彬彬有礼)}{P(农民职业\cap彬彬有礼)+P(图书管理员职业\cap彬彬有礼)}$$

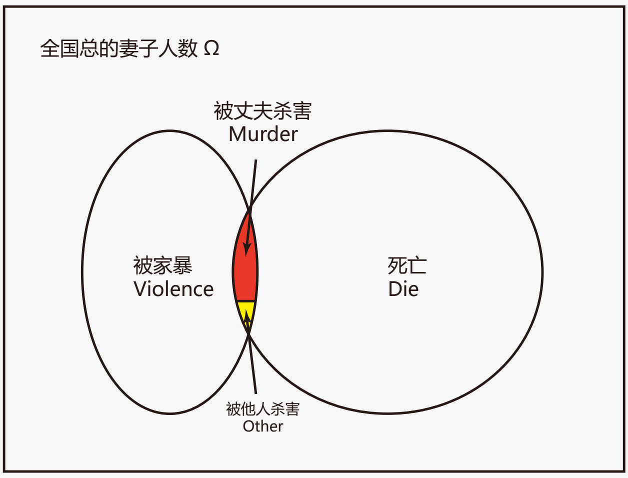
$$=\frac{0.004}{0.02+0.004}=0.166667$$

所以，即使你认为“符合这个描述的人是一个图书馆管理员的可能性，是一个农民的4倍”，也抵不过农民的数量很多.

例

辛普森杀妻案，原告证明辛普森常常家暴前妻．他们认为，长期家暴说明辛普森有杀妻的动机．被告律师则举出数据反驳说，美国有400万被家暴的妻子，但只有1432名被丈夫杀害，这个概率只有 $\frac{1432}{400万}=$ 比1/2500还低．所以家暴证明不了辛普森谋杀.
被告想表达的是：在“家暴”这个事件前提条件下，丈夫谋杀妻子的概率不高．即 P(丈夫家暴∩丈夫杀妻) = 概率值很低.

你怎么看？ 事实上，被告举出的概率，不适用于这个案子上． 因为本案的妻子已经死亡，“妻子已死”也变成了一个已经存在的前提条件． 所以现在我们要看的概率就是：P(丈夫家暴∩妻子已死亡∩是丈夫杀妻)=？ 即：在“被家暴”且“死亡”的妻子数量里面 (这里就有两个前提条件了，而不是仅一个前提条件)，有多少是被丈夫杀害的？



即:

- 辛普森律师一方的概率公式是: $\frac{\text{红色}}{Violence} < \frac{1}{2500}$
- 妻子一方律师的概率公式是: $\frac{\text{红色}}{\text{红色+黄色}} = 93\%$

根据美国1992年发布的数据推算: 每10万个被家暴的妇女中, 有43个会被谋杀. 其中40个是被丈夫谋杀, 其他3个是被丈夫以外的人谋杀. 那么, 条件概率就是:

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(\text{丈夫杀}\ \text{—家暴} \cap \text{妻死}) = \frac{P(\text{家暴} \cap \text{妻死} \cap \text{丈夫杀})}{P(\text{家暴} \cap \text{妻死})} = \frac{\frac{40}{100000}}{\frac{43}{100000}} = 0.930233$$

你仔细体会一下两者的不同:

- 辛普森方, 是说: 在所有"之后活着和死去"的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大. 即 $\frac{\text{丈夫杀害}}{\text{条件: 1.被家暴}}$
- 妻子方, 是说: 在所有"死去"的被家暴的妻子里, 被丈夫杀了的可能性是多大? 即 $\frac{\text{丈夫杀害}}{\text{条件: 1.被家暴 \& 2.死亡}}$

不过, 即使概率高达93%，也不能绝对证明辛普森杀了妻子. 因为**"条件概率"只表示统计意义上的"相关性", 并不代表"因果关系".** 即只说明: 家暴和谋杀妻子之间有很强的相关性。

4 传染病模型

例

有红球a个, 黑球b个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入c个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续3次都是取出红球的概率?

先设定事件:

- A_1 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第3次, 取出的是红球

$$\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)}_{\text{连续3次取到红球}} = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第一步:}\\\text{第一次就取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\ |\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第二步:}\\\text{在第一次取到红球的前提下,}\\\text{第二次也取到红球}}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_3\ |\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1)}_{\substack{\text{第三步:}\\\text{再前两次都取到红球的前提下,}\\\text{第三次也取到红球}}}$$

$$= \frac{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}}}{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{b黑}}} \cdot \frac{\overbrace{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{c红}}}^{\substack{\text{在第一次取到红球后,}\\\text{又放入c个红球.}\\\text{所以第二次取时,}\\\text{红球就一共有a+c个}}}}{\underbrace{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{b黑}+\mathrm{c红}}}_{\substack{\text{为什么总数没有减1个?}\\\text{因为是“放回抽样”.}\\\text{总数不变}}}} \cdot \frac{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+2\mathrm{c红}}}{\mathrm{C}^1_{\mathrm{a红}+\mathrm{b黑}+2\mathrm{c红}}}$$

上面可以看出:
- 当 c红= 0 时, 就是正常的“放回抽样”.
- 当 c红= -1 时, 就是“不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c红¿0 时, 就是本例的“传染病模型”.

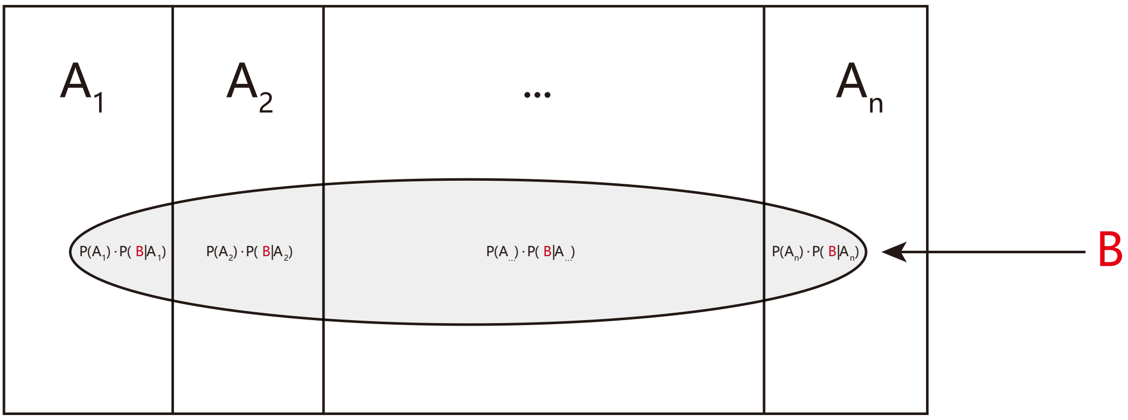
---

5 全概率公式：$P(B) = \underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$

全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, ..., A_n$ 构成一个“完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2)其“和”(或“并集”)为全集 Ω, (3) $P(A_i) > 0$.

则有: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left[P(A_i)\cdot P(B|A_i)\right] = P(B)}$

即有: $P(B) = \underbrace{P(A_1)\cdot P(B|A_1)} + \underbrace{P(A_2)\cdot P(B|A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$



Total Probability Theorem
全概率公式

例

一个工厂, 有4条生产线, 情况如下:

	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是“不合格品”的概率?

我们先设定事件:
- A_1：表示是生产线1 中的产品
- A_2：表示是生产线2 中的产品
- A_3：表示是生产线3 中的产品
- A_4：表示是生产线4 中的产品
- B：表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$P\left(B\right)$$
$$=\underbrace{\overbrace{P\left(A_1\right)}^{\text{产品属于生产线1的概率}}\cdot\overbrace{P\left(B|A_1\right)}^{\text{生产线1中的次品率}}}_{\text{第1条生产线中(的条件下), 不合格品的概率}}+P\left(A_2\right)\cdot P\left(B|A_2\right)+P\left(A_3\right)\cdot P\left(B|A_3\right)+P\left(A_4\right)\cdot P\left(B|A_4\right)$$
$$=(15\%\cdot 0.05)+(20\%\cdot 0.04)+(30\%\cdot 0.03)+(35\%\cdot 0.02)$$
$$=0.0315$$

例

有10台机器人, 3台是次品. 已经卖出去了2台(是正品还是次品未知).
问: 再取1台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:
- B_{00}：B(bad), 表示前两次取, 都是次品(用0表示)
- B_{10}： 表示前两次取, 是一正(用1表示), 一次(用0表示). 至于顺序是“正,次” 还是“次,正”, 都行
- B_{11}：表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3}：G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第3次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这3种可能性:
- (第1次取到)次, (第2次取到)次, (第4次取到)正.

即→ $=\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{00}\right)}_{\text{前两次取到次品}}\cdot\underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}\ |\mathrm{B}_{00}\right)}_{\text{在前两次取到次品的条件下, 第3次取到正品}}$
- 次,正,正. 即→ $=\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{10}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}\ |\mathrm{B}_{10}\right)$
- 正,正,正. 即→ $=\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{11}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{G}_{\mathrm{xx3}}\ |\mathrm{B}_{11}\right)$

上面这三种可能性并存, 就是“和”(并集)的概念. 用加法:

$$G_{xx3} = \underbrace{P(B_{00})\cdot P(G_{xx3}\ |B_{00})}_{第1种情况:2次,1正} + \underbrace{P(B_{10})\cdot P(G_{xx3}\ |B_{10})}_{第2种情况:1次1正，再正} + \underbrace{P(B_{11})\cdot P(G_{xx3}\ |B_{11})}_{第3种情况:前2正,再1正}$$

$$= \underbrace{\frac{C_{总3次}^{取2次}}{C_{总10}^{2}}\cdot\frac{C_{总7正}^{取1正}}{C_{10-2}^{1}}}_{第1种情况:2次,1正} + \underbrace{\frac{\overbrace{\overbrace{C_{总7正}^{1}}^{取1正}\cdot\overbrace{C_{总3次}^{1}}^{取1次}}^{分步骤,用乘法}}{C_{总10}^{2}}\cdot\frac{C_{还剩总6正}^{1正}}{C_{10-2}^{1}}}_{第2种情况:1次1正，再1正} + \underbrace{\frac{C_{总7正}^{2}}{C_{10}^{2}}\cdot\frac{C_{还剩总5正}^{1}}{C_{8}^{1}}}_{第3种情况:前2正,再1正}$$

$$= \underbrace{\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_8^1}} + \underbrace{\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_6^1}{C_8^1}} + \underbrace{\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_5^1}{C_8^1}} = 0.7$$

注意：上面的第2种情况，先取1正1次，或1次1正的情况，就是：

$$= \overbrace{\overbrace{\frac{C_7^1}{C_{10}^1}}^{先取1正}\cdot\overbrace{\frac{C_3^1}{C_9^1}}^{再取1次}}^{分步骤,用乘法} + \overbrace{\overbrace{\frac{C_3^1}{C_{10}^1}}^{先取1次}\cdot\overbrace{\frac{C_7^1}{C_9^1}}^{再取1正}}^{分步骤,用乘法} = 0.466667$$

$$= \underbrace{\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}}_{\substack{总10个里面取2个,\\其中1个从正品里面取,\\1个从次品里面取}} = 0.466667$$

$\xrightarrow{一件事是"分步骤"来做的,用乘法}$

		第 1 次取到	第 2 次取到	第 3 次取到
"或"的情况用加法	情况1	次	次	正
	情况2	次	正	正
	情况3	正	正	正

例

有10件产品, 其中次品的数量, 有三种可能性: 0件 /1件 /2件, 即这三种可能性中的每一种, 发生的概率是1/3.

同时, 检验时也存在“误检”情况：

	→被检验成→		的概率是
正品		次品	0.02
正品	→	正品	0.98
次品	→	正品	0.05
次品		次品	0.96

问: 这批产品能通过检验(即事件S_2)的可能性是多少? 即本题要求 $P(S_2)$=?

这要分两种情况来讨论 (“和”的概念, 用加法):

- 1. 正品被误检(成“假”)时的情况
- 2. 次品被误检(成“真”)时的情况

我们先定义各种事件:

- B_0 : B(bad). 表示总的10件产品中, 存在0件次品. 该事件的概率, 题目已经告诉我们: $P(B_0) = \frac{1}{3}$
- B_1 : 表示总的10件产品中, 存在1件次品. $P(B_1) = \frac{1}{3}$
- B_2 : 表示总的10件产品中, 存在2件次品. $P(B_2) = \frac{1}{3}$
- S_1 : S(sample. (v.) 抽样检验；取样；采样) 表示任意抽检一次, 抽到了正品. (但这

里还有个问题不清晰，就是说这个正品，到底是它本身就是“正品”；还是说只是抽验认为它是“正品”？）

- $\overline{S_1}$：表示任意抽检一次，抽到了次品.
- S_2：表示再次检验，并“通过验证”（注意：有误检率存在. 所以通过检验的，未必是“正品”；反之亦然）.

本题要求的 P(S_2)，实际上就是：“无论第一次抽，认为是正是次；在第二次检验时，都认为是正品”的东西. 即：$\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\,|\mathrm{S}_1)}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\,|\overline{\mathrm{S}_1}\right)}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$

那么我们先考算 $\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$ 和 $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)$.

$\rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{S}_1)$：是在具体“次品”数量未知的情况下，抽1次就得到“正品”的概率.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_0)}^{\text{总数中有0次品}}\cdot\mathrm{P}\left(\overbrace{\mathrm{S}_1}^{\text{第1次抽得到正品}}|\mathrm{B}_0\right)}_{\text{在总数中有0次品的条件下，抽1次得到正品的概率}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_1)}_{\text{总数中含有1次品，抽1次取到正}}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{S}_1|\mathrm{B}_2)}_{\text{总数中含有2次品，抽1次取到正}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总10正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总10}}}}_{\text{总10中含有0次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总9正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总10}}}}_{\text{总10中含有1次品}}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{C}^1_{\text{总8正}}}{\mathrm{C}^1_{\text{总10}}}}_{\text{总10中含有2次品}}$$

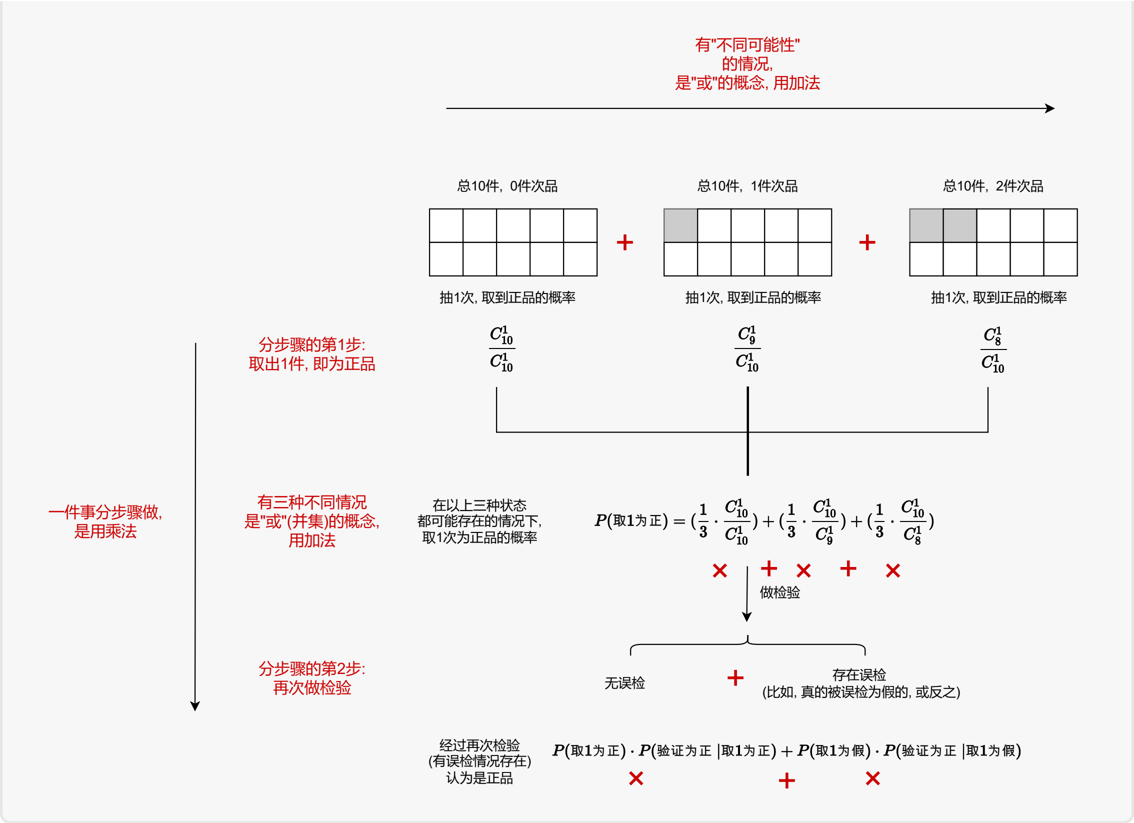
$$=0.9$$

所以：$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)=1-\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)=1-0.9=0.1$

于是，我们就能得到：

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_2)=\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_1)}^{=0.9}\cdot\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S}_2\,|\mathrm{S}_1)}^{\text{从上面的表格中可知，正品被检验为正品,概率为0.98}}}_{\text{第一次抽为正品,第二次检验为正}}+\underbrace{\overbrace{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{S}_1}\right)}^{=0.1}\cdot\overbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_2\,|\overline{\mathrm{S}_1}\right)}^{\text{次品被检验为正品，概率是0.05}}}_{\text{第一次抽为次品,第二次检验为正}}$$

$$=(0.9\cdot 0.98)+(0.1\cdot 0.05)=0.887$$



6 贝叶斯公式 Bayes' theorem

6.1 先验概率 (从经验来推后果) & 后验概率(更新迭代经验)

先验概率：是指根据以往经验和分析得到的概率，它往往作为“由因求果”问题中的“因”出现.	“先验概率”的计算比较简单，没有使用“贝叶斯公式”.
后验概率: 是基于新的信息，修正原来的“先验概率”后，所获得的更接近实际情况的概率估计.	“后验概率”的计算，要使用“贝叶斯公式”.