目录

第一部分 基本概念 **2**

1 排列 and 组合 **2**

1.1 加法原理, 乘法原理 2

1.2 不重复排列: $\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\text{选出的数量 m}} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$ 2

1.3 全排列: $\mathrm{P}_{\text{总数 n}}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}!$ 2

1.4 重复排列 3

1.5 “送利益” 模型 (放球模型) 3

1.6 组合 combination : $\mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{选}} = \frac{\text{总!}}{\text{选!}\left(\text{总}-\text{选!}\right)} = C_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}$ 3

2 交集 ∩ , 与并集 ∪ **4**

3 频率 **5**

4 频率的性质: **5**

5 公理化 **5**

5.1 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ 5

5.2 对于 “完备事件组” 中的所有事件来说: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(\Omega) = 1$ 5

5.3 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 7

5.4 若 A 包含着 B, 则有: $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 且 $P(A) >= P(B)$ 7

5.5 加法公式: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 7

5.6 加法公式: $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ 8

6 古典概型: $\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{A 中包含的 “基本事件” 有多少个}}{\textbf{S 中 “基本事件” 的总数}}$ **9**

7 几何概型 **10**

概率

第一部分　基本概念

1　排列 and 组合

1.1　加法原理, 乘法原理

- 一件事, 只需 “一步” 就能完成. 但这一步中有几种不同的方案可供选择, 就用 “加法” 原理.
- 一件事, 要分成 “几步骤” 才能完成. 每一步, 又有几种不同的选择方案. 就用 “乘法” 原理.

1.2　不重复排列: $\mathbf{P}_{\text{总数 } n}^{\text{选出的数量 } m} = \dfrac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$

不重复排列: 就是从 n 个不同的元素中, 取出 m 个来排列, 排过的元素不放回, 没有下次排列资格了.
则, 所有可能的排列 (Permutation) 方案, 就是:

$$\boxed{P_{\text{总数 } n}^{\text{选出的数量 } m} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}}$$

例

10 人选 5 人上岸, 共有多少种选择?
$P_{\text{总}10}^{\text{取}5} = \frac{\text{总!}}{(\text{总}-\text{选})!} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$

1.3　全排列: $\mathbf{P}_{\text{总数 } n}^{n} = n!$

全排列, 就是从 n 个里面, 取出全部 n 个来排列, 即所有的元素都参与了排列.

$$\boxed{P_{\text{总数 } n}^{n} = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

例如:
- $P_2^2 = 2! = 2$
- $P_1^1 = 1! = 1$

例

一套书, 共 5 本, 排在一起. 问: 自左向右, 或自右向左, 是按着 1,2,3,4,5 编号顺序的概率是?

即 $= \dfrac{\text{顺序排是 1 种情况} + \text{倒序排是 1 种情况}}{P_{\text{总}5}^{\text{选}5}} = \dfrac{2}{P_5^5} = \dfrac{1}{60} = 0.0166667$

- $0! = 1$. 因为:
(1) 解释 1: $m! = m(m-1)!$, 如 $10! = 10 \cdot 9!$. 所以 $1! = 1 \cdot 0!$, 即得到 $0! = 1$
(2) 解释 2: P_0^0 就是从 0 个元素里面, 取出 0 个元素来排列. 这只有一种情况: 即 “不选”. 因为不存在任何元素, 所以没法选. 所以 $P_0^0 = 0! = 1$

- $5^0 = 1 \leftarrow$ 因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
- 0^0 无意义. $\leftarrow$ 因为 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 而分母不能为 0, 所以该式子无意义.

1.4 重复排列

即: 排过队的元素, 可以拿回去, 重复参加后面的排队. (但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。)

重复排列: $\underbrace{\mathrm{n} \cdot \mathrm{n} \cdot \ldots \cdot \mathrm{n}}_{\text{共取了 m 次的 n}} = \mathrm{n}^{\mathrm{m}}$

1.5 "送利益" 模型 (放球模型)

将 $n_{benefit}$ 种利益, 随机投送给 N_{man} 个人 ($N_{man} \geq n_{benefit}$). 问: 每个人中, 最多只拿到 1 种利益的概率?

$\rightarrow$ 先看样本空间: 第 1 种利益, 有 N_{man} 个人的去向可供选择; 第 2 种利益, 同样如此, ... 所以, 根据 "分步骤" 法, 全部 $n_{benefit}$ 种利益, 它们的所有去向, 就共有: $\underbrace{N_{man} \cdot N_{man} \cdot \ldots \cdot N_{man}}_{\text{共} n_{benefit} \text{个}} = N^n$ 个.

$\rightarrow$ 再来看 "每个人中, 最多只拿到 1 种利益": 第 1 个人,

未完待续... 这里没看懂

1.6 组合 combination : $\mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{选}} = \frac{\text{总!}}{\text{选!}(\text{总}-\text{选!})} = C_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}$

组合: 是从 n 个不同元素中, 每次取出 m 个不同元素 $(0 \leq m \leq n)$, 合成一组, 而不需要管排队顺序, 就称为: 从 n 个元素中不重复地选取 m 个元素的一个组合.

即: 有顺序, 就用排列; 无顺序, 就用组合.

组合的公式是:

$$\boxed{\mathrm{C}_{\text{总数}}^{\text{选数}} = \frac{\mathrm{P}_{\text{总}}^{\text{选}}}{\text{选!}} = \frac{\text{总!}}{\text{选!}\left(\text{总}-\text{选!}\right)}}$$

$$\boxed{\mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{选}} = \mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}}$$

上面第二个公式的意思是: 比如你有 100 人, 选其中 10 人上岸, 就相当于是选 90 人不上岸. 即: $\mathrm{C}_{100}^{10} = \mathrm{C}_{100}^{100-10} = \mathrm{C}_{100}^{90}$

同理, 有: $\boxed{\mathrm{C}_{\text{总}}^{0} = \mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{总}-0} = \mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{总}}}$

例

有共 N 人, 其中有 w 个女, 你任抽 n 人, 其中恰好有 x 个女人 $(x \leq w)$ (记为事件 A) 的概率是?

我们用 "分步骤法" 来做: 第一步, 先取 x 个女人. 第二步, 再取男人 (数量就是 = n-x).

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{取到 x 女}}{\text{从总 N 人中取 n 人}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 w 女}}^{\text{取 x 女}}}^{\text{第一步: 先从全部女人里面, 取 x 个女人}} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{\text{总 N 人}-\text{总 w 女}=\text{总男人数}}^{\text{总取 n 人}-\text{x 女}}}^{\text{第二步: 再从总男人里, 取剩下的男人数量}}}{\mathrm{C}_{\text{总 N 人}}^{\text{取 n 人}}}$$

上面这个公式, 其实就是 "古典概型" 里面的 "超几何分布".

例

有共 9 球, 5 白, 4 黑. 任取 3 球, 问:

(1) 是 2 白 1 黑的概率: $P(2\text{ 白 }1\text{ 黑}) = \frac{\overbrace{C_5^2}^{\text{第一步:5 白取2}} \cdot \overbrace{C_4^1}^{\text{第二步:4 黑取1}}}{\underbrace{C_9^3}_{\text{总 9 取3}}} = 0.47619$

(2) 取到的 3 球中, 无黑球: $P(3\text{ 白}) = \frac{\overbrace{C_5^3}^{\text{5白取3}}}{\underbrace{C_9^3}_{\text{总 9 取3}}} = 0.119048$

(3) 取到的 3 球中, 颜色相同: $P(3\text{ 球同色}) = \frac{\overbrace{C_5^3}^{\text{5白取3}} \overbrace{+}^{\text{或}} \overbrace{C_4^3}^{\text{4黑取3}}}{\underbrace{C_9^3}_{\text{总 9 取3}}} = 0.166667$

或, 也可用第二种思路来解:

$$
\begin{aligned}
&P(3\text{ 球同色}) = 1 - P(3\text{ 球存在不同色}) \\
&= 1 - \frac{\text{1白 2 黑, 或 2 白 1 黑}}{\text{9取3}} \\
&= 1 - \frac{\overbrace{C_5^1}^{\text{5白取1;4黑取2}} \overbrace{C_4^2} \overbrace{+}^{\text{或}} \overbrace{C_5^2}^{\text{5白取2;4黑取1}} \overbrace{C_4^1}}{C_9^3} \\
&= 0.166667
\end{aligned}
$$

2 交集 ∩ , 与并集 ∪

A, B, C 是试验 E 的随机事件. 则表示法是:
- A 发生: A

下面, 加法即表示 “或” :
- A, B, C 恰有一个发生: $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$
- A, B, C 至少一个发生 (即 >=1) : A+B+C 或 $A \cup B \cup C$ ← 即 3 选 1, 还有两个发不发生, 不用管, 随意, 都行.
- A, B, C 至多一个发生 (即 <=1) : $\underbrace{A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C}_{\text{3选1}} + \underbrace{\overline{ABC}}_{\text{3选0}}$
- 恰有两个发生: $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$
- 至少两个发生 (即,>=2) : $\underbrace{AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC}_{\text{3选2}} + \underbrace{ABC}_{\text{3选3}} + \underbrace{AB + BC + AC}_{\text{3选 2, 还有一个发不发生不用管, 随意}}$

下面, 乘法即表示 “同时” :
- 只有 A 发生: $A\overline{BC}$
- A, B, C 同时发生: ABC

例

一次射击试验, 整个流程是打三枪, 用 $A_i, (i=1,2,3)$ 来表示 "在第 i 次时击中了目标".
记住: 加法 (+) 代表 "或, 并 ∪"; 乘法代表 "交 ∩".
- A_1+A_2 : 表示第一次击中了, 或第二次击中了. 即前两次至少击中一次.
- $\overline{A_2}$: 表示第二次没击中.
- $A_1+A_2+A_3$: 表示仅第一次击中, 或仅第二次击中, 或仅第三次击中.
- $A_1A_2A_3$: 表示三次全中.
- $A_2\overline{A_3}=A_2-A_3$: 表示第二次击中, 并且第三次失败.
- $\overline{A_1}\cap\overline{A_3}=\overline{A_1+A_3}$: 表示第一次没中, 并且第三次也没中.
- $\overline{A_1}+\overline{A_3}$: 表示第一次没中, 或第三次没中.

3 频率

做 n 次试验, A 事件发生了 m 次, 我们就把 $\frac{A\text{事件发生的次数}m}{\text{共}n\text{次试验}}$ 叫做 "频率". 记作 $\omega_n(A)$.
比如丢硬币, 丢 10 次, 丢 100 次, 丢 1000 次, 每次的 "频率" 可能都不一样, 比如结果是 $\frac{7}{10}, \frac{55}{100}, \frac{508}{1000}$. 所以这就是 "频率" 和 "概率" 的区别.
但你可以发现, 随着试验次数 n 的增大, A 事件的 "频率" 的值, 会接近与 "概率" 的值. 即: $\lim_{n\to 0}\omega_n(A)\to P$

4 频率的性质:

规范性:
- $\omega_n(\mathit{\Omega})=1 \leftarrow$ 做 n 次试验, 里面 "必然事件" 发生的频率, 是 1. 既然是 "必然事件 Ω", 它肯定会发生, 所以频率肯定是 1.
- $\omega_n(\mathit{\Phi})=0 \leftarrow$ 做 n 次试验, 里面 "不可能事件" 发生的频率, 是 0.

可加性:
比如做 1000 次试验, 即 $\mathit{\Omega}_{1000}$, 则有:

$$\omega_{1000}(A_1+A_2)=\underbrace{\omega_{1000}(A_1)}_{1000\text{次试验中},A1\text{事件发生的频率}}+\underbrace{\omega_{1000}(A_2)}_{1000\text{次试验中},A2\text{事件发生的频率}}$$

即: "和的频率", 就等于 "频率的和".

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\omega_n}_{\text{做}n\text{次试验}}\underbrace{(A_1+A_2+...+A_m)}_{\text{里面有}m\text{个事件}}}_{\text{做}n\text{次试验, 里面有}m\text{个事件发生了的频率}}=\omega_n(A_1)+\omega_n(A_2)+...+\omega_n(A_m)}$$

5 公理化

5.1 $P(A)+P(\overline{A})=1$

5.2 对于 "完备事件组" 中的所有事件来说: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=P(\Omega)=1$

完备事件组 collectively exhaustive events 就是: 如果事件 B1, B2, B3, ... Bn 满足:
1. 它们两两互不相容 (即两两的交集 = 空集),
2. 其 "和" 为全集 Ω.
换言之, 若 n 个事件两两互斥, 且这 n 个事件的 "并" 是 Ω，则称这 n 个事件为 "完备事件组".

全概率公式

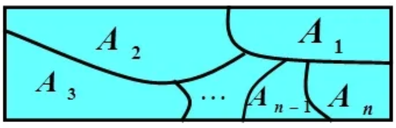
一、样本空间的划分（完备事件组）

定义 设 Ω 为试验 E 的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 E 的一组事件，若

(i) $A_iA_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分．



例

有20件衣服，质量分3等，其中一等的6件，二等的10件，三等的4件.
问："任取3件，至少2件是同质量"的概率?

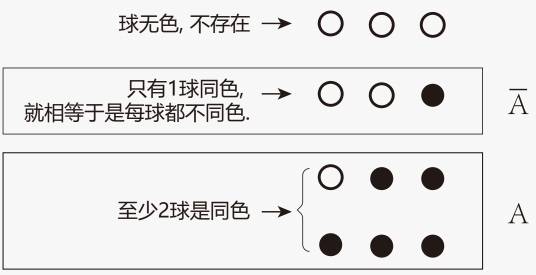
这个问题其实可转化为有色球问题:

20球,三色,每色数量分别是6,10,4球. 问3取2球，至少2球是同色的概率.

即 $P(\underbrace{\text{同色}\geqslant 2\text{球}}_{\text{事件A}})=1-P(\underbrace{3\text{球都不同色}}_{\text{事件}\bar{A}})$

$$=1-\frac{\overbrace{C_6^1}^{\text{色1中的共6球取1个.}}\ \overbrace{C_{10}^1}^{\text{色2中的共10球取1个.}}\ \overbrace{C_4^1}^{\text{色3中的共4球取1个}}}{\underbrace{C_{20}^3}_{\text{总20球取3}}}$$

$$=\frac{15}{19}=0.789474$$



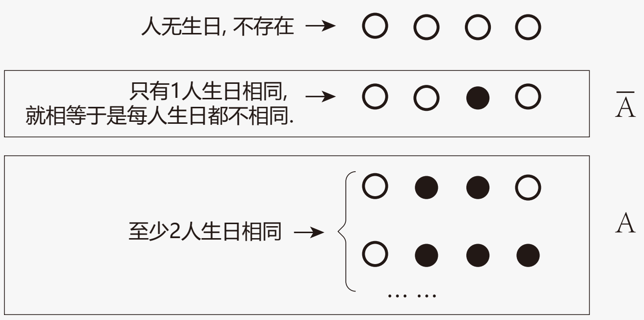
例

n个人中，至少2人生日相同的概率是?

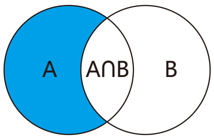
$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\underbrace{\text{至少2人生日相同}}_{\text{事件A}}) &= 1-\mathrm{P}\ (\underbrace{\text{只有1人生日相同}}_{\text{即n个人每人生日都不相同，即事件}\bar{\mathrm{A}}}) \\
&= 1-\frac{\text{n个人生日都不相同}}{\text{n个人，随便选生日，无所谓充不重复}} \\
&= 1-\frac{\overbrace{C_{365}^{1}\cdot C_{365-1}^{1}\cdot \ldots \cdot C_{365-n+1}^{1}}^{\text{共n人的}}}{\underbrace{C_{365}^{1}\cdot C_{365}^{1}\cdot \ldots \cdot C_{365}^{1}}_{\text{共n人的}}}
\end{aligned}
$$

比如，若总人数$n=55$人，则:

$$
\mathrm{P(A)}=1-\frac{\overbrace{365\cdot 364\cdot \ldots \cdot (365-54)}^{\text{共55个数}}}{(C_{365}^{1})^{55}}=0.99
$$



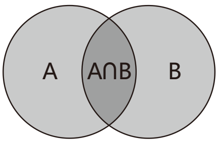
5.3 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$



P(A-B) = P(A) - P(AB)

5.4 若 A 包含着 B, 则有: $P(A-B)=P(A)-P(B)$, 且 $P(A)>=P(B)$

5.5 加法公式: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

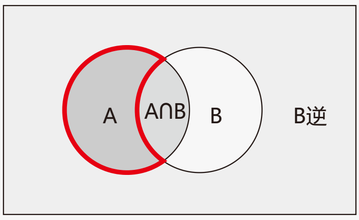


P(A+B) = P(A) +P(B)- 它们的交集部分 P(AB)

例

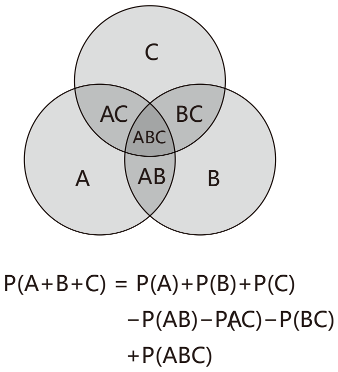
A 事件的概率是 0.4, 即 P(A)=0.4;
P(B)=0.3;
且 P(A+B)=0.6, ← 说明 A 与 B 有交集部分存在. 否则, 如果 A 与 B 是不相容的话, 它们和的概率, 应该是 0.4+0.3=0.7.
所以它们的交集 P(AB) 就是 =0.1 :
$\underbrace{P(A+B)}_{0.6}=\underbrace{P(A)}_{0.4}-\underbrace{P(B)}_{0.3}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}$

求 $P\left(A\overline{B}\right)$, 即求 $A\cap B$逆 的概率:
$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A-B)=\underbrace{P(A)}_{=0.4}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}=0.3$



A∩B逆：就是红色面积的那块

5.6 加法公式: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$



说明:

$$P(A+B+C)$$
$$=\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分, 被加了 3 次}}\underbrace{-P(AB)-P(AC)-P(BC)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分, 又减了 3 次}}+\underbrace{P(ABC)}_{\text{所以最后, 我们还要把镂空的}ABC\text{交集部分, 加上一份上去}}$$

例

已知 $\begin{cases} P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4} \\ P(AB) = 0 \\ P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16} \end{cases}$，求 $\begin{cases} 1.\ A,B,C\ 至少一个发生的概率 \\ 2.\ A,B,C\ 都不发生的概率 \end{cases}$

我们先来算 $P(ABC)$，因为下面会用到.

因为 $ABC \subset AB$，所以 $P(ABC) \le \underbrace{P(AB)}_{=0}$，因此 $P(ABC) = 0$

→ 至少一个发生，就是用“并∪”，用加法:

所以 $P(A+B+C) = \underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{4}} + \underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{4}} + \underbrace{P(C)}_{=\frac{1}{4}} - \underbrace{P(AB)}_{=0} - \underbrace{P(AC)}_{=\frac{1}{16}} - \underbrace{P(BC)}_{=\frac{1}{16}} + \underbrace{P(ABC)}_{=0}$

$= \frac{3}{4} - \frac{2}{16} = \frac{5}{8} = 0.625$

→ 都不发生，即 $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = 1 - \underbrace{P(A+B+C)}_{任意一个发生} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$

例

有两台机床，$\begin{cases} 第1台: 不需要照看的概率是0.9，则需要照看它的概率就是0.1 \\ 第2台: 不需要照看的概率是0.8，则需要照看它的概率就是0.2 \\ 两台都需要照看的概率，是0.02 \end{cases}$

问: 至少1台需要照看的概率是?

思路1: $P(至少1台要照看) = 1 - P(都不需要照看)$

$= 1 - (0.9 \cdot 0.8) = 0.28$

思路2: 至少1台需要照看，就是要照看1台或2台呗，“或”就是用加法，并集

$= P(A_1 + A_2) = \underbrace{P(A_1)}_{=0.1} + \underbrace{P(A_2)}_{=0.2} - \underbrace{P(A_1A_2)}_{=0.02} = 0.28$

6 古典概型: $P(A) = \frac{A\ 中包含的“基本事件”有多少个}{S\ 中“基本事件”的总数}$

满足这些条件的, 就属于 “古典概率 classical models of probability 模型”:

- 样本点是有限的
- 所有样本点出现的可能性, 是相同的. 即 “等可能性”.

古典概型模型:

事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_k}\}$ 发生的概率为:

$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\ 中包含的“基本事件”有多少个}{S\ 中“基本事件”的总数}$

古典概率模型的性质:

- $0 <= P(A) <= 1$
- $P(\Omega) = 1, \quad P(\Phi) = 0$
- 有限可加: $A_1, A_2, ...A_n$ 是互不相容的. 即 $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_n)$

古典概率模型:

- 其优点是: 可以直接套公式来算.
- 但其缺点是:

(1) 其结果必须是 “有限个” 的结果 (如, 掷骰子, 结果就是 6 个基本事件, 而不是无限个事件.)

(2) 其结果, 必须是 “等可能性”.

例

有 a 个白, b 个黑, 问: 从中连续取出 m 个球 (连续取, 就是不放回的意思了) $(1 \le m \le a+b)$, 第 m 个是白球的概率 = ?

思路 1 : 其实我们只要考虑第 m 个位置的这一个球的情况就行了, 其他位置的球, 随便它们什么颜色, 我们不用考虑的.

$$P\left(\text{第 m 位置是白球}\right) = \frac{\text{在第 m 个位置上, 从 a 个白球里取 1 个放上去. 剩下数量的其他位置上, 依然做全排列}}{\text{所有球的全排列}}$$

$$\text{即 } P\left(\text{第 m 位置是白球}\right) = \frac{\overbrace{C_{\text{总 a 白}}^{\text{取1}} \cdot C_{\text{总 a 白+总 b 黑}-1}^{\text{总 a 白+总 b 黑}-1}}^{\text{第一步, 先取 1 个白球, 占位放在第 m 个位置上. 第二步: 剩下的所有球, 依然做全排列}}}{P_{\text{总 a 白+总 b 黑}}^{\text{总 a 白+总 b 黑}}}$$

思路 2 : 或者我们也只需考虑前 m 个数量的球就行了, 后面其他的球, 爱怎样颜色怎样颜色, 不用我们考虑.

$$P\left(\text{第 m 位置是白球}\right) = \frac{\overbrace{C_{\text{总 a 白}}^{\text{取1}}}^{\text{第一步, 先取 1 个白球, 占位放在第 m 个位置上}} \cdot \overbrace{C_{\text{总 a 白+总 b 黑}-1}^{\text{m}-1}}^{\text{第二步:m 个数中的剩下的所有球, 依然做全排列}}}{\underbrace{P_{\text{总 a 白+总 b 黑}}^{\text{m}}}_{\text{m 个球的全排列}}}$$

其实你有没有发现? "在第 m 个位置上出现白球" 这个 "m 索引位置", 其实是个障眼法. 白球出现在任何其他位置, 它出现在第 1 个位置, 第 10 个位置, 最后一个位置, 对我们的计算结果没有任何影响. 因为不管白球出现在第几个位置上, 它出现的概率都是相同的, 因为是古典概率嘛! 所以, "位置为几" 其实不重要.

所以, 我们就有了第三种思路: 我们就把这个白球, 让它直接出现在第 1 个位置就好了:

$$P\left(\text{第 1 个位置是白球}\right) = \frac{\overbrace{C_{\text{总 a 白}}^{1}}^{\text{(在第 1 个位置上,) 从白球里, 取 1 个 的取法数量}}}{\underbrace{C_{\text{总 a 白+总 b 黑}}^{1}}_{\text{(在第 1 个位置上,) 从总数里, 取 1 个 的取法数量}}} = \frac{\text{a}}{\text{a+b}}$$

7 几何概型

几何概型 geometric models of probability, 即这类概率问题, 能够转换成用 "几何问题" 来求解.

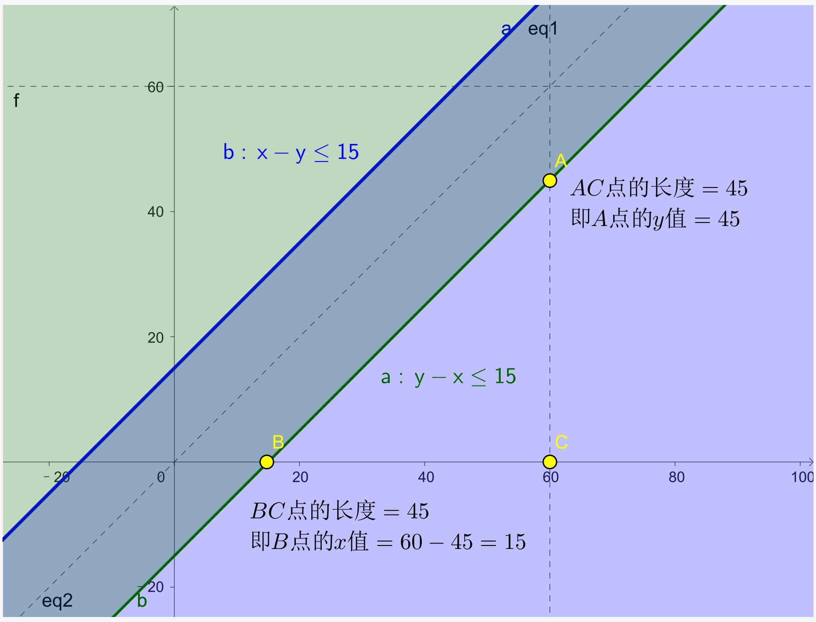
例

有甲乙两人, 相约在 6-7 点见面 (其实这个具体的时间点也是个障眼法, 只要在 1 个小时的区间就行). 先到者, 最多等对方 15 分钟, 然后就离开了.
甲乙两人, 在这 1 小时内的任意时刻, 都可能到达.
问, 他们能相见的概率是多少?

我们令
- 事件 A : 表示两人见到了面
- x : 表示甲到达的时间点
- y : 表示乙到达的时间点

他们要能见到面, 即 $|y-x| \le 15$ 分钟. 那么这就有两种可能性:
- 甲先到. 即 $x \le y$ (甲来到的时间点 x, 比乙来到的时间点 y 要小 (早)), 即 $y-x \le 15$
- 乙先到. 即 $y \le x$, 即 $x-y \le 15$

这两组不等式, 能用函数图形来表示出来, 如下图. x 和 y 轴上的 60, 分别代表两人的 1 小时区间 (60 分钟) . 中间的交集区域, 就是两人可以见到面的时间段.

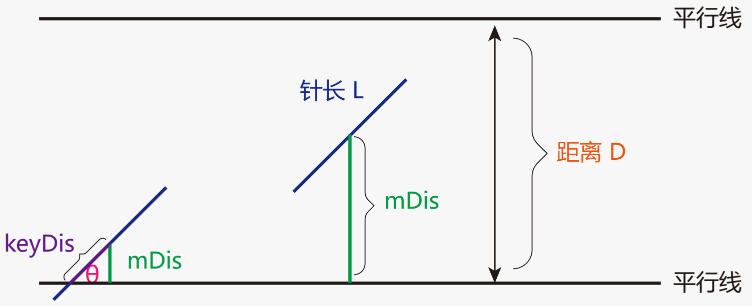


显然, 这就是求几何面积的问题.

$$\text{即: } P(A) = \frac{60\cdot 60 - \overbrace{\frac{45\cdot 45}{2}}^{\text{上面的“边长为 45”的三角形的面积}} - \overbrace{\frac{45\cdot 45}{2}}^{\text{下面的“边长为 45”的三角形的面积}}}{\underbrace{60\cdot 60}_{\text{即“边长为 60 分钟”的矩形}}} = 0.4375$$

例

(法国) 布丰 (1707-1788) 投针 Buffon's needle problem.
说：有两条平行的直线，相聚为 D(distance)，距离单位不重要. 你哪一个针 (长度为 L (length)，$L < D$)，随机地投向针. 问：针与那两条平行直线相交的概率是?



思路：针投上去后的位置状态，是由两个参数决定的：
(1) 针的中点，距离 "最近那根直线" 的最短距离. ← 该距离用变量 mDis (midpoint distance) 来表示.
(2) 针倾斜的位置，与直线的夹角. ← 我们用变量 θ 来表示.

用上面这两个变量，我们能分别作为 x 轴 (表示 θ 变量) 和 y 轴 (表示 mDis 变量)，来画出函数图像.

针投出后，所有可能的状态，其全集就是：

$$\Omega=\left\{(\theta,\ \mathrm{mDis})\ \middle|\ 0\le \underbrace{\theta}_{\text{夹角}}\le\pi;\quad \underbrace{0\le \underbrace{\mathrm{mDis}}_{\text{针的一半长度}}\le \underbrace{\frac{D}{2}}_{\text{两条平行线间距的一半}}}_{\text{因为针的长度L，是小于两条平行线的间距D的}}\right\}$$

那么，什么状态下，"针" 就与 "直线" 相交了呢? – 当 "从针的中点 (沿着针的身体走) 到直线" 的距离 (下面用变量 keyDis (key distance) 来表示这个距离) ≤ 针的一半长度时. 它们就相交了. 否则，它们就不想交.
即，就有：

→ 因为 θ角度有sin值：$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{mDis}}{\mathrm{keyDis}}$，

则有：$\mathrm{keyDis}=\dfrac{\mathrm{mDis}}{\sin\theta}$，←当该值 $\le \dfrac{\text{针长L}}{2}$ 时，针与直线相交.

→ 因为y轴是代表 mDis变量，所以我们要写出 mDis 曲线的函数值：

根据 上面的 $\mathrm{keyDis}=\dfrac{\mathrm{mDis}}{\sin\theta}\le\dfrac{\text{针长L}}{2}$

就有：$\mathrm{mDis}\le\dfrac{\text{针长L}}{2}\cdot\sin\theta$

即：$\mathrm{mDis}\le\dfrac{1}{2}\text{针长L}\cdot\sin\theta$ ←这个就是$y=\mathrm{mDis}$曲线的函数表达式内容了.
既然这里是 小于等于符号，则mDis的值，
就是$\dfrac{1}{2}\text{针长L}\cdot\sin\theta$这条曲线下方的面积了，

即 $\mathrm{mDis}=\displaystyle\int_0^{\pi}\Big(\overbrace{\frac{1}{2}\text{针长L}\cdot\sin\theta}^{\text{即 mDis 函数曲线}}\Big)\,d\theta$

→ 所以，相交的概率

$$=\frac{\text{“针”与“直线”相交时的 mDis 与 }\theta\text{ 的所有取值范围}}{\text{针投出后的 所有可能的 mDis 与 }\theta\text{ 的取值范围}}$$

$$\int_0^{\pi}\Big(\overbrace{\frac{1}{2}\text{针长L}\cdot\sin\theta}^{\text{即 mDis 函数曲线}}\Big)\,d\theta$$