基础_裂项

Table of Contents

1. 裂项

1.1. 分母上两个数, 是等差数列"相邻的两项", 即$\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$

如果分母上的两个数, 是等差数列相邻两项的乘积 (如: $\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$), 就可以用"裂项相消".

Example 1. 标题

例如:

$\dfrac{1}{n(n+1)}$ ←把分母裂开，中间用减号

即 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ←对其通分，就得到 $\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}$

说明原式就能直接“裂项”成 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

Example 2. 标题

例如：

对 $\dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)}$ 做裂项.

← 先直接把分母裂开，不用管它们的系数会是什么. 中间用减号

即 $\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$ ← 对其通分，

就得到 $\dfrac{2n+1-2n+1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ ← 它和原式，相差一个 $\dfrac{3}{2}$ 倍，

所以原式就能 "裂项" 成 $=\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$

---

2. 分母上两个数，是等差数列"相隔一个item的两项"，即 $\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}$

Example 3. 标题

例如：

对 $\dfrac{1}{n(n+2)}$ 做裂项.

← 先直接把分母裂开，不用管它们的系数会是什么. 中间用减号

即 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$ ← 对其通分，

就得到 $\dfrac{n+2-n}{n(n+2)}$

$=\dfrac{2}{n(n+2)}$ ← 它和原式，相差一个 2 倍，

所以原式就能 "裂项" 成 $=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$

---

3. 分子不为1的情况，就把分子先变成1，然后再用常规操作来处理

Example 4. 标题

例如:

对 $\dfrac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}$ 做裂项.

$\leftarrow$ 先把分子弄出去，让分子的值保持为 1

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{4n^2}{(2n)^2-1^2} \\
&= \frac{4n^2}{4n^2-1} \\
&= 1+\frac{1}{4n^2-1} \quad ①
\end{aligned}$$

$\leftarrow$ 我们只看右边的分数部分：先直接把分母裂开,不用管它们的系数会是什么. 中间用减号

即 $\dfrac{1}{4n^2-1}$

$= \dfrac{1}{(2n+1)} - \dfrac{1}{(2n-1)}$ $\leftarrow$ 对其通分,

就得到 $\dfrac{2n-1-2n-1}{(2n+1)(2n-1)}$

$= \dfrac{-2}{(2n+1)(2n-1)}$ $\leftarrow$ 它和原式,相差一个 -2倍,

所以原式 $\dfrac{1}{4n^2-1}$ 就能“裂项”成 $= -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n-1}\right)$

所以，本例的 $\dfrac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = 1+\dfrac{1}{4n^2-1}$ $\leftarrow$ 即①式

$$\begin{aligned}
&= 1+\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)\right) \\
&= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

---

4. 分母中有三项 → 就把中间一项重复乘一遍, 变成四项, 再前两项并成一组, 后两项并成一组, 来拆分

Example 5. 标题

例如：

对 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 做裂项.

分母有三项，先把中间一项，在分子分母上同时重复乘一遍：

$$=\frac{(n+1)}{n(n+1)(n+1)(n+2)}$$

$$=(n+1)\frac{1}{n(n+1)(n+1)(n+2)} \quad ①$$

我们先看右边绿色的分数那块：分母上，把前两项并称一组，后两项并称一组，做拆分：

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leftarrow \text{做通分}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)}{n(n+1)(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2(n+1)}{n(n+1)(n+1)(n+2)} \leftarrow \text{和原绿色那块部分，只差}2(n+1)\text{倍.}$$

$$\text{所以原绿色部分} = \frac{1}{2(n+1)}\cdot\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

所以，本例原式 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=(n+1)\frac{1}{n(n+1)(n+1)(n+2)} \quad \text{即 ①式}$$

$$=(n+1)\cdot\frac{1}{2(n+1)}\cdot\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

5. 分子都是"1次方"的情况, 快速裂项法

Example 6. 标题

例如：

原式 $\dfrac{x^2+x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ←把分母的每项先单独拆开，分子都是常数C.
拆开的每项用“加号”连起来

$=\dfrac{C_1}{x+1}+\dfrac{C_2}{x+2}+\dfrac{C_3}{x+3}$ ←现在的问题就是，每项的常数C怎么求？
比如第一项，分母是 $x+1$，我们就在原式中，把分母上的$x+1$先划掉，
然后把$x+1=0$ 得出的x值 $=-1$，代入进原式剩下的内容中，得到的值就是C_1
即：

$\dfrac{x^2+x+2}{(x+2)(x+3)}$ ← 把$x=-1$ 代入进去

$=\dfrac{(-1)^2+(-1)+2}{(-1+2)(-1+3)}=\dfrac{2}{2}=1=C_1$

← 同理，我们来求第二项的系数C_2，在原式中先把$(x+2)$划掉，即剩下：

$\dfrac{x^2+x+2}{(x+1)(x+3)}$ ← 把$x+2=0$，即$x=-2$ 代入进去

$=\dfrac{(-2)^2+(-2)+2}{(-2+1)(-2+3)}=\dfrac{4}{-1}=-4$，即$C_2=-4$

← 再来求第三项的系数C_3，在原式中先把$(x+3)$划掉，即剩下：

$\dfrac{x^2+x+2}{(x+1)(x+2)}$ ← 把$x+3=0$，即$x=-3$ 代入进去

$=\dfrac{(-3)^2+(-3)+2}{(-3+1)(-3+2)}=\dfrac{8}{2}=4=C_3$

现在，$C_1=1$，$C_2=-4$，$C_3=4$

所以原式可以分解为 $=\dfrac{C_1}{x+1}+\dfrac{C_2}{x+2}+\dfrac{C_3}{x+3}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-4}{x+2}+\dfrac{4}{x+3}$

6. 分母有"高次幂"的情况，快速裂项法

Example 7. 标题

例如:

原式 $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ ←分母上,$(x-1)$是一次幂，可以直接拆，
但是x^3这个高次幂怎么拆呢？方法是：x^n将它按"降幂"来拆成n个数，
比如这个x^3,是3次方，就是拆成三个数：x^3，x^2，x

$=\dfrac{C_1}{x-1}+\dfrac{A_1}{x^3}+\dfrac{A_2}{x^2}+\dfrac{A_3}{x}$ ← 其中所有的A也是系数

←C_1的求法，依然是在"原式"中划掉 $x-1$，
然后把 $x-1=0$，即$x=1$ 的值代入进"原式"剩下的内容中

即: $\dfrac{1}{x^3}$ ←把$x=1$代进去

$=\dfrac{1}{1^3}=1=C_1$

←三个A的求法呢？就是在"原式"中划掉x^3，然后:

$A_1=$原式剩下的内容$=\dfrac{1}{x-1}$

$A_2=\dfrac{\text{对原式剩下的内容,求1阶导}}{1!}=\dfrac{\left(\frac{1}{x-1}\right)'}{1!}$ ←分子部分就是:

$((x-1)^{-1})'$

$=-1(x-1)^{-1-1}\cdot(x-1)'$

$=-(x-1)^{-2}$

所以$A_2=\dfrac{-(x-1)^{-2}}{1!}=-(x-1)^{-2}$

$A_3=\dfrac{\text{对原式剩下的内容,求2阶导}}{2!}=\dfrac{\left(\frac{1}{x-1}\right)''}{2!}$ ←分子部分就是:

$\left(\dfrac{1}{x-1}\right)''$

=其一阶导的再导数

$=(-(x-1)^{-2})'$

$=-[-2(x-1)^{-2-1}\cdot(x-1)']$

$=2(x-1)^{-3}$

所以$A_3=\dfrac{2(x-1)^{-3}}{2!}=(x-1)^{-3}$

现在，$A_1=\dfrac{1}{x-1}$，$A_2=-(x-1)^{-2}$，$A_3=(x-1)^{-3}$

我们把$x=?$ 代入进去呢？
因为这里的A都是x^3拆分出来的项的系数，所以令$x^3=0$，即得$x=0$，来代入进A中，就有:

$A_1=\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0-1}=-1$

$A_2=-(x-1)^{-2}=-(0-1)^{-2}=-1$

$A_3=(x-1)^{-3}=(0-1)^{-3}=-1$

所以，原式$=\dfrac{C_1}{x-1}+\dfrac{A_1}{x^3}+\dfrac{A_2}{x^2}+\dfrac{A_3}{x}$

$=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{x^3}+\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{-1}{x}$

Example 8. 标题

例如:

原式 $\dfrac{x-1}{(x+1)^1\left(\underbrace{x^2+x+2}_{\Delta<0}\right)}$ ←分母中的二次项那部分，其Δ(即b^2-4ac) 一定是<0的(即意味着方程无实数根)，否则，该二次项就能继续因式分解下去，变成一次项，就不必用本例所讲的方法来做了.

分母上的$(x+1)$是一次项，可以直接拆分，分子上的系数用C_1代表.
分母上的x^2+x+2，拆分处理后，其分子上的系数用$Ax+B$代表.

$=\dfrac{C_1}{x+1}+\dfrac{Ax+B}{x^2+x+2}$ ←求C_1，即先把原式的$x+1$ 划掉，然后让$x+1=0$，得到$x=-1$，再代入进原式剩下的内容中. 即:

$\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$ ← 把$x=-1$代入进去

$=\dfrac{-1-1}{(-1)^2-1+2}=-1=$系数$C_1$

←求$Ax+B$，同样，把原式中的 x^2+x+2 划掉，然后让 $x^2+x+2=0$，即 $x^2+x=-2$，代入进原式剩下的内容中. 即:

$\dfrac{x-1}{(x+1)^1}$ ← 我们先分子分母同时乘上一个x

$=\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}=\dfrac{x^2-x}{\underbrace{x^2+x}_{=-2}}$ ← 就能代入 $x^2+x=-2$ 了

$=\dfrac{x^2-x}{-2}$ ←注意，我们要的系数是$Ax+B$ 这种一次项式子，所以还要继续把 $x^2+x+2=0$ ，即$x^2=-x-2$ 代入进去

$=-\dfrac{1}{2}(\underbrace{-x-2}_{\text{即上式的}x^2}-x)$

$=-\dfrac{-2x-2}{2}=x+1=$系数$Ax+B$

所以现在，系数都求出来了，$C_1=-1$，$Ax+B=x+1$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{C_1}{x+1}+\frac{Ax+B}{x^2+x+2}\\&=\frac{-1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+x+2}\end{aligned}$$