

目录

1 二阶与三阶行列式 3

1.1 二阶行列式 3

1.2 三阶行列式 3

2 全排列和对换 3

3 n 阶行列式 4

3.1 三阶行列式 4

3.2 n 阶行列式 – 按行展开 5

3.2.1 下三角行列式 = 主对角线上元素的乘积 6

3.2.2 上三角行列式 = 主对角线上元素的乘积 6

3.2.3 对角形行列式 = 主对角线上元素的乘积 6

3.2.4 伪下三角行列式 =  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$  6

3.2.5 伪上三角行列式 =  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$  6

3.3 n 阶行列式 – 按列展开 7

4 行列式的性质 7

4.1 性质:  $(D^T)^T = D$  7

4.2 性质:  $D^T = D$  7

4.3 性质: 行列式中两行 (两列也行) 互换, 行列式的值, 就改变正负号 7

4.4 性质: 行列式, 若两行 (或两列) 的元素相等, 则该行列式的值 =0 8

4.5 性质: 某一行都乘以 k, 等于用 k 乘以这个行列式 D 8

4.6 性质: 行列式的两行 (或两列) 元素, 对应成比例, 则该行列式的值 =0 8

4.7 性质: 某一行全为 0, 则 D=0 8

4.8 性质: 某一行上的元素, 是两个元素的和的话, 则该行列式就可以拆成这两个行列式相加 9

4.9 ★ 性质: 某一行乘以一个数, 加到另一行上去, 行列式 D 的值不变 9

5 行列式值的计算 9

5.1 方法是: 把行列式, 先化成 “上三角行列式” 9

5.2 如果某一行的首元素是 1, 就把该行移到第一行上去 11

6 行列式按行 (列) 展开 11

6.1 余子式  $M_{ij}$  11

6.2 代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  12

6.3 按某一行 (列) 展开的展开公式:  
 $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \ (j = 1, 2, \dots, n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \ (i = 1, 2, \dots, n)$  12

7 异乘变零定理 13

8 拉普拉斯定理 13

8.1 k 阶子式 13

8.2 拉普拉斯展开定理 14

9 行列式相乘 14

9.1 两个 “同阶” 行列式相乘 14

9.2 两个 “不同阶” 行列式相乘 14

10 n 阶行列式 15

11	行列式的性质	15
11.1	性质 1: 行列互换, 其值不变. 即 $ A  =  A^T $	15
11.2	性质 2: 某行 (列) 元素全为零, 则行列式为零	15
11.3	性质 3: 两行 (列) 元素相等, 或对应成比例, 则行列式为零	15
11.4	性质 4: 某行 (列) 元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和	15
11.5	性质 5: 两行 (列) 互换, 行列式的值反号	15
11.6	性质 6: 某行 (列) 元素有公因子 $k (k \neq 0)$ , 则 $k$ 可提到行列式外面去	15
11.7	性质 7: 某行 (列) 的 $b$ , 倍加到另一行 (列) 上去, 行列式的值不变	15
12	行列式的展开定理	15
12.1	余子式 $M_{ij}$	15
12.2	代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$	15
12.3	按某一行 (列) 展开的展开公式: $ A  = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} (j = 1, 2, \dots, n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} (i = 1, 2, \dots, n)$	15
13	具体型行列式的计算: $a_{ij}$ 已给出	15
13.1	化为 “12+1” 型行列式	15
13.1.1	主对角线行列式	15
13.1.2	副对角线行列式	15
13.1.3	拉普拉斯展开式	15
13.1.4	范德蒙德行列式	15
13.2	加边法	15
13.3	递推法 (高阶 $\rightarrow$ 低阶)	15
13.3.1	建立递推公式, 即建立 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的关系	15
13.3.2	$D_n$ 与 $D_{n-1}$ 要有完全相同的元素分布规律, 只是 $D_{n-1}$ 比 $D_n$ 低了一阶	15
13.4	数学归纳 (低阶 $\rightarrow$ 高阶)	15
13.4.1	第一数学归纳法	15
13.4.2	第二数学归纳法	15
14	抽象型行列式的计算: $a_{ij}$ 未给出	15
14.1	用行列式性质	15
14.2	用矩阵知识	15
14.2.1	设 $C=AB$ , $A, B$ 为同阶方阵, 则 $ C  =  AB  =  A  B $	15
14.2.2	设 $C=A+B$ , $A, B$ 为同阶方阵, 则 $ C  =  A+B $ , 作恒等变形, 转化为矩阵乘积的行列式	15
14.2.3	设 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 则 $ A^*  =  A ^{n-1}$ , $ (A^*)^*  = \left   A ^{n-2} A \right  =  A ^{(n-1)^2}$	15
14.3	用相似理论	15
14.3.1	$ A  = \prod_{i=1}^n \lambda_i$	15
14.3.2	若 $A$ 相似于 $B$ , 则 $ A = B $	15

# 行列式

## 1 二阶与三阶行列式

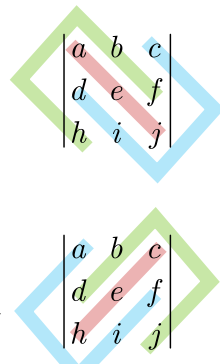
### 1.1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad}_{\text{主对角线}} - \underbrace{bc}_{\text{副对角线}}$$

### 1.2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} = (aej + bfh + cdi) - (ceh + dbj + aif)$$

即:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} = \underbrace{(aej + bfh + cdi)}_{\text{正项}} - \underbrace{(ceh + dbj + aif)}_{\text{负项}}$$


## 2 全排列和对换

【排列】:

由 1,2,...,n 组成的一个“有序”数组,叫“n 级排列”.

注意: (1) 它是有“顺序”的. 比如: 123, 132, 213, 231, 312, 321. ← 这个就叫“3 级排列”.

(2) 它中间不能缺数, 必须是包含 1,2,3... 到 n 的全部这 n 个数字, 中间不能缺少任何一个数字.

那么 n 个数字, 它的全排列 (就是排列组合中的排列), 有多少种可能性呢? 那就是: 第 1 个数字的位置上, 可以从这种 n 个数字中任取一个出来放. 第二个位置上, 就是从 n-1 的数字中, 任取一个出来摆放..., 一共就有:  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$  种排列方式.

【逆序】:

“大的数字”排在“小的数字”的前面, 就叫“逆序”. 比如: 4213, 4 这个大数字, 排在了 2 这个小数字的前面.

【逆序数 negative】:

就是逆序的总数, 你只要数一数有多少个“逆序”存在, 这个总数就是“逆序数”.

比如, 4213, 它的逆序有:

- 4 后面, 有 3 个数字比它小 (即 2, 1, 3)
- 2 后面, 有一个比它小 (即数字 1).
- 1 后面, 没有比它小的.
- 3 后面, 没有比它小的.

所以, 逆序的总数, 就是  $3+1+0+0=4$

我们用 N 来代表 “逆序数”. 即写成:  $N(4213)=4$   
又如:  $N(1,2,3,...,n)=0 \leftarrow$  它也叫 “n 级标准排列”, 或 “n 级自然排列”

例

求逆序数:  $N(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = ?$

数一数:  $\underbrace{n}_{\text{后面有 } n-1 \text{ 个比它小的}} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\text{后面有 } n-2 \text{ 个比它小的}} \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot \underbrace{2}_{\text{后面有 } 1 \text{ 个比它小的}} \cdot 1$

全加起来就是:  $(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$  个

【偶排列】:  
如果 “逆序数 N” 是偶数, 就是 “偶排列”.

【奇排列】:  
如果 “逆序数 N” 是奇数, 就是 “奇排列”.

【对换】:  
即交换两个数. 如: 把 54123 中的 12 交换一下, 就变成了 54213  
那么我们来看看它们的逆序数:

-  $N \left( \underbrace{5}_{\text{后面有 4 个比它小的.}} \quad \underbrace{4 \quad 1 \quad 2 \quad 3} \right) = 4 + 3 + 0 + 0 + 0 = 7 \leftarrow$  是奇排列

-  $N \left( 54 \quad \underbrace{2}_{\text{后面有 1 个比它小的}} \quad \underbrace{1 \quad 3} \right) = 4 + 3 + 1 + 0 + 0 = 8 \leftarrow$  是偶排列

所以我们就有定理: 一个排列中的任意两个元素, 做一次 “对换”, 排列会改变其 “奇偶性”.  
那么做两次对换呢? 奇偶性又回来了, 即奇偶性就不变了.

定理: 在所有的 n 级排列中 (一个 “n 级排列” 的排列数 = n!), 奇排列和偶排列, 各占一半, 即  $= \frac{n!}{2}$ .

### 3 n 阶行列式

#### 3.1 三阶行列式

首先看这个三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

等号右边:

- 每一项的 “行标”( 六项各自的行标, 分别是: 123, 123, 123, 123, 123, 123), 取的是 “标准排

列”。

- “列标”：取 “排列的所有可能”(即所有可能的排列顺序，都取到了)。比如，4 阶行列式，有 4 列，那么 4 个数字的全排列的总数 = 4!=24 种不同的排序。即这个 4 阶行列式展开后，共有 24 项。即：

	列标是	逆序数是	
$+a_{11}a_{22}a_{33}$	123	$0+0+0=0$	偶排列
$+a_{12}a_{23}a_{31}$	231	$1+1+0=2$	偶排列
$+a_{13}a_{21}a_{32}$	312	$2+0+0=2$	偶排列
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	321	$2+1+0=3$	奇排列
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	213	$1+0+0=1$	奇排列
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	132	$0+1+0=1$	奇排列

可以看出：各项前的正负符号，是由 “列标” 的奇偶性 (奇排列还是偶排列) 决定的 (奇负，偶正)。

- 每一项，就是从这个行列式的 “不同行，不同列” 中，取出 3 个元素，来相乘。

上面这个，即 “n 阶行列式” 的第一种定义方式。也就是 “按行展开”。

### 3.2  n 阶行列式 – 按行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

=

$$\sum_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

把**所有项**，即共  $n!$  项，全加起来

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)}$$

每一项前的正负号，  
由列标排列，  
即  $j_1 j_2 \dots j_n$   
的奇偶性决定

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

这个整体，就是**每一项**。  
这每一项的**行标**，取 “标准排列”  $1, 2, 3, \dots, n$ 。  
这每一项的**列标**，取  $n!$  的全排列。

注意：本处公式中这个列标，  
看上去好像是按  $1, 2, 3, \dots, n$  的顺序来排的，  
其实不是这样！  
而是我们并不知道这每一项的列标到底是怎么排的，  
我们只知道它一定是  $n!$  中的一种排列顺序而已。  
即这每一项的列标的数字顺序，是不固定的。

n 阶行列式的展开，一共有多少项呢？共有 n! 项。

行列式，用 D (determinant) 来表示。写成:  $D = |a_{ij}|$

例

determinant : n. ( formal ) a thing that decides whether or how sth happens 决定因素；决定条件

只有一个元素的行列式，就等于该元素本身，即:  $|a_{11}| = a_{11}$

$|8|=8$

$|-1|=-1$

例

$$\begin{vmatrix} & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{N(2341)} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = -24$$

3.2.1 下三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下三角行列式

$$= \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

---

3.2.2 上三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上三角行列式

$$= \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

---

3.2.3 对角形行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角形行列式

$$= \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

---

3.2.4 伪下三角行列式 =  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \dots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} \underbrace{a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}}_{\text{“右上”到“左下”的对角线上元素的乘积}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$$

---

3.2.5 伪上三角行列式 =  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & a_{2,n-1} & \\ \dots & \dots & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} \underbrace{a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \dots \cdot a_{n,1}}_{\text{“右上”到“左下”的对角线上元素的乘积}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$$

---

3.3 n 阶行列式 – 按列展开

- 【行列式, 按列展开】:
- “列标” 取自然排列 1,2,3,...,n.
  - “行标” 取 n 个数的“全排列”的所有排序可能.
  - 从不同行, 不同列, 取 n 个元素来相乘, 就得到每一项.
  - 每一项前的正负号, 由“行标排列”的“奇偶性”来决定.

行列式“按列展开”的公式即:

$$n \text{ 阶行列式, 按列展开} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \dots i_n)}$$

每一项的正负号,  
由“行标排列”的奇偶性决定.

$$a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \dots \cdot a_{i_n n}$$

取不同行, 不同列的  $n$  个元素相乘,  
相乘的结果, 就是每一项的值.  
注意: 这里面, 所取出的每个元素  
的列标, 是取自然排列.  
行标, 是  $n$  个数的全排列的排序所有可能性.

4 行列式的性质

- 【行列式的转置 transpose】:
- 转置, 就是, 行变列, 或列变行. 如:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D^T$$

也可写成  $D'$ ,  
但容易和微积分中的  
导数相混淆,  
所以一般都写  $D^T$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

4.1 性质:  $(D^T)^T = D$

4.2 性质:  $D^T = D$

行列式转置与否, 其值不变.  
对“行”成立的性质, 对“列”也成立.

4.3 性质: 行列式中两行 (两列也行) 互换, 行列式的值, 就改变正负号

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

则

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

对  $D$  做 1, 3 行互换得来

$$= -D$$

4.4 性质：行列式，若两行（或两列）的元素相等，则该行列式的值 =0

有这个行列式，其第 1,3 行上的元素，完全相同.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

我们对它的 1,3 行做交换，得到的  $D_1 = -D$  (因为交换两行，行列式的值要变号). 而新的  $D_1$  的内容，和老 D 依然是完全一样的. 于是我们就有:  $D=-D$ , 即  $2D=0$ , 即  $D=0$ .  
于是我们就得到了这个性质：行列式，若两行（或两列）的元素相等，则该行列式的值 =0.

4.5 性质：某一行都乘以 k，等于用 k 乘以这个行列式 D

即:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

换言之就是：如果行列式中的某行，有公因子 k，则 k 可以提到行列式外面去.

如果每行都有 k，则每行都要提一次 k. 比如一共有 3 行，就提 3 次 k.

$$\begin{vmatrix} 1k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

即：如果一个 n 阶行列式的所有元素，均有公因子 k，则 k 就向外提 n 次 (因为有 n 行，每行只需提一次，就是提 n 行次).

4.6 性质：行列式的两行（或两列）元素，对应成比例，则该行列式的值 =0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第2,3行元素对应成比例.} \\ \text{第3行, 可以把公因子8提出去.} \end{matrix}$$
$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{现在, 有两行元素对应相等.} \\ \text{该行列式的值} = 0 \end{matrix}$$
$$= 0$$

4.7 性质：某一行全为 0，则 D=0

现在，我们就有了：

$$\left. \begin{matrix} \text{两行上的元素, 对应成比例} \\ \text{某一行元素, 全为0} \\ \text{两行相等} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{则 } D = 0$$

上面，左边可以推导出右边. 但反过来，右边是无法推导出左边的. 即  $D=0$  的行列式，未必是属于左边的三种情况之一.



4.8 性质：某一行上的元素，是两个元素的和的话，则该行列式就可以拆成这两个行列式相加

即：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7+8 & 2+3 & 9+10 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

注意：拆分的时候，只能拆“是和那一行”，其他行的元素要保持不变！如：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{vmatrix} \leftarrow \text{这种拆分是错的!}$$

正确的拆分是如下（比如拆第一行的话）：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} b & c & a \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

4.9 ★ 性质：某一行乘以一个数，加到另一行上去，行列式 D 的值不变

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} \leftarrow \text{将第一行} \times 5, \text{加到第二行上去} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+(1 \cdot 5) & 1+(2 \cdot 5) & 0+(3 \cdot 5) \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+5 & 1+10 & 0+15 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} \leftarrow \text{第二行的元素是两个数的和, 可以拆分成两个行列式} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}}_{\text{第 1,2 行成比例, 这个行列式的值}=0} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 10 \end{vmatrix} = D \end{aligned}$$

5 行列式值的计算

5.1 方法是：把行列式，先化成“上三角行列式”

方法论：一般，我们要把行列式，化成“上三角行列式”。则该行列式的值，就是“主对角线”上元素的乘积了。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

← 为了化成上三角行列式，  
先把第二行的第一个元素2，化成0，  
我们把第一行  $\times (-2)$ ，加到第二行上去

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 + (1 \cdot -2) & 3 + (2 \cdot -2) & 10 + (0 \cdot -2) & 0 + (1 \cdot -2) \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

← 为了把第四行的第一个元素5化成0，  
我们把第一行  $\times (-5)$ ，加到第四行上去

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 + (1 \cdot -5) & 10 + (2 \cdot -5) & 15 + (0 \cdot -5) & 4 + (1 \cdot -5) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

← 为了把第三行的第二个元素3化成0，  
我们把第二行  $\times (3)$ ，加到第三行上去

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 + (-1 \cdot 3) & 5 + (10 \cdot 3) & 18 + (-2 \cdot 3) \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

← 为了把第四行的第三个元素15化成0，  
我们把第三行  $\times (-\frac{15}{35})$ ，加到第四行上去

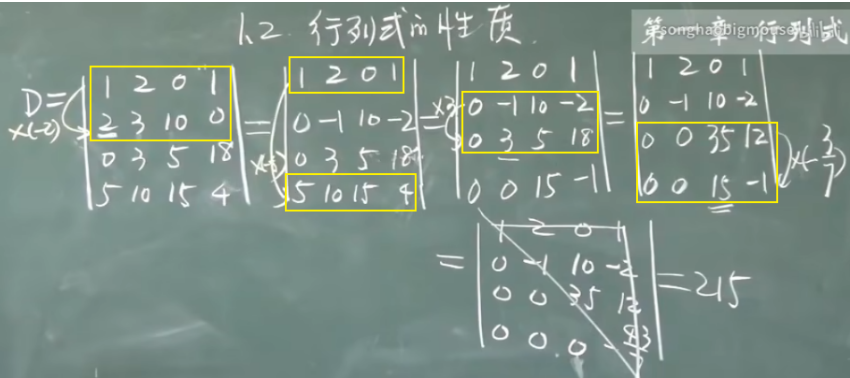
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 + (0 \cdot -\frac{3}{7}) & 0 + (0 \cdot -\frac{3}{7}) & 15 + (35 \cdot -\frac{3}{7}) & -1 + (12 \cdot -\frac{3}{7}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{7} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{7} \end{vmatrix}$$

← 这个就化成了“上三角行列式”了，  
其行列式的值 = 主对角线元素相乘

$$= 1 \cdot -1 \cdot 35 \cdot -\frac{43}{7} = 215$$



- 总结:
- 1. 先处理第 1 列, 再处理第 2 列, 再处理第 3 列.
  - 2. 第 1 列处理完后, 第 1 行就不再参与运算.

5.2 如果某一行的首元素是 1, 就把该行移到第一行上去

比如:

$$\begin{vmatrix} 8 \\ 1 & \dots \\ 3 \end{vmatrix}$$

第二行的首元素是 1, 就把这第二行, 移到第 1 行上去. 变成:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots \\ 8 \\ 3 \end{vmatrix}$$

这样, 能更方便的用第一行元素乘以某个数, 来消去下面行上的数字, 以变成 0. 化成“上三角行列式”.

注意: 在交换两行时, 行列式的值要变号.

6 行列式按行（列）展开

6.1 余子式 minor :  $M_{ij}$

你选定某个元素 x, 把它所在的行去掉, 所在的列去掉, 将剩下的元素按原位置排好, 这个新的行列式, 就是 x 的“余子式”.

比如:

1

1

0

3

1

1

1

1

2

2

3

4

5

5

6

6

→ 2 的余子式就是

1

0

3

1

1

1

5

6

6

把 2 所在的行,  
所在的列,  
去掉

某个元素的余子式, 用  $M_{ij}$  表示. 如, 上例中的 2, 在  $i=$  第 3 行,  $j=$  第 2 列, 所以它的“余子式”就是:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

6.2 代数余子式 Algebraic cofactor :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

在余子式的前面, 加一个负号, 即  $(-1)^{i+j}$ , 就是“代数余子式”.  
某个元素  $x$  的“代数余子式”, 用符号  $A_{ij}$  来表示.  $i$  是  $x$  的行号,  $j$  是  $x$  的列号.

比如上例的“余子式”是:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

那么其“代数余子式”就是:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

6.3 按某一行（列）展开的展开公式:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

有定理: 行列式的值等于: 随便选一行, 把这行上所有的元素, 各自乘以它们的“代数余子式”, 再求和, 所得到的结果, 就是这个行列式的值了.

$$D = \underbrace{a_{i1}}_{\text{某一行的元素}} \cdot \underbrace{A_{i1}}_{\text{该元素的代数余子式}} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

用列来做, 也是一样.

$$D = \underbrace{a_{1j}}_{\text{某一列的元素}} \cdot \underbrace{A_{1j}}_{\text{该元素的代数余子式}} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

例

1

1

2

0

1

0

2

3

5

←我们若按第一行展开

1

$a_{11}$ 元素

$\cdot$

$(-1)^{1+1}$

$\cdot$

1

0

3

5

$\underbrace{\hspace{1cm}}$   
 $a_{11}$ 元素的代数余子式

1

$a_{12}$ 元素

$\cdot$

$(-1)^{1+2}$

$\cdot$

0

0

2

5

$\underbrace{\hspace{1cm}}$   
 $a_{12}$ 元素的代数余子式

2

$a_{13}$ 元素

$\cdot$

$(-1)^{1+3}$

$\cdot$

0

1

2

3

$\underbrace{\hspace{1cm}}$   
 $a_{13}$ 元素的代数余子式

从上例, 你就能发现, “行列式” 按行或列展开后, 它的每一个元素的代数余子式, 都“降阶”了. 即原行列式是 3 阶的, 现在展开后, 你只要计算 2 阶的行列式 (即代数余子式) 了. 大大减轻了我们的计算负担.

其实, 上面的这个例子, 我们按第二行展开更方便, 因为它有 0 元素存在啊, 0 元素和其代数余子式相乘, 就是 0. 根本就不需要我们去计算了. 所以, 我们要选 0 元素最多的那一行来展开:

例

1

1

2

0

1

0

2

3

5

←要选 0 元素最多的那一行来展开, 本例即第二行

$0$

$a_{22}$ 元素

$+$

$1$

$\cdot$

$(-1)^{2+2}$

$\cdot$

1

2

2

5

$\underbrace{\hspace{1cm}}$   
 $a_{22}$ 元素的代数余子式

$+ 0$

7 异乘变零定理

即：某行上的元素，与另一行（即别人的行）上对应元素的”代数余子式”相乘，将所有的乘积值，再全加起来，其和 =0.

如: (1)

1	1	2	3
0	0	8	9
2	5	5	4
9	9	9	10

用第 4 行，与第 1 行元素的“代数余子式”相乘，再把相乘后的值，全加起来，则：

$D = a_{41}A_{11} + a_{42}A_{12} + a_{43}A_{13} + a_{44}A_{14} = 0$

“异乘变零定理”的证明过程:

比如这个行列式 (2):

9	9	9	10
0	0	8	9
2	5	5	4
9	9	9	10

其中, 1,4 行相同. 即两行相同, 则该行列式的值 =0.

若用第 1 行展开, 你会发现, 展开的式子, 与上面的行列式 (1), 完全相同. 既然这边的 (2) 是 0, 那么上面的 (1) 也是 0 了. 证毕.

8 拉普拉斯定理

8.1 k 阶子式

就是从一个 n 阶行列式中, 随便取 k 行, 取 k 列, 组成的新的行列式, 就是 k 阶子式.

比如:

红框的这块是二阶子式

1	2	3	4
1	1	2	5
1	1	0	8
9	9	9	10

黄框的这块是其”余子式”

我们取出它一个 2 阶子式 (即 2\*2 区域的子集). 比如, 就取第 1,2 行, 和第 1,2 列交叉点, 所组成的子式, 即:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  这个就是一个“二阶子式”.

那么这个二阶子式的“余子式”, 就是:  $\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$

这个二阶子式的“代数余子式”, 就是:

$(-1)^{\overbrace{(1+2)}^{\text{行 1, 行2}} \overbrace{(1+2)}^{\text{列 1, 列2}}} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$

8.2 拉普拉斯展开定理

拉普拉斯展开定理 Laplace expansion：在 n 阶行列式中，任意取定 k 行 (而不仅仅是只取一行展开)，由 k 行元素组成的所有 “k 阶子式” 与 “代数余子式” 的乘积之和，就等于该行列式的值。

例

如: 下面这个 5 阶行列式

1	2	0	0	0
3	4	0	0	0
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1
6	6	8	3	1

我们任取 k=2 行，比如就取第 1, 2 行. 它的 k 阶子式，就是二阶子式. 那么因为这个行列式有 5 列，在其中取 2 列，就有  $C_5^2 = 10$  种取法. 即有 10 个二阶子式存在.

即, 这个 5 阶行列式的值  $D =$  (第 1 个二阶子式的行列式值  $\times$  其代数余子式)  $+$  (第 2 个二阶子式的行列式值  $\times$  其代数余子式)  $+$  ...  $+$  (第 10 个二阶子式的行列式值  $\times$  其代数余子式)

如果我们取到的是 “列上都是 0 元素” 的那些列的话，那么这个二阶子式的行列式的值就是 0 了. 其 “二阶子式” 与 “代数余子式” 的乘积之和，当然也是 0 了.

所以，在全部 10 个二阶子式中，唯一行列式值不为零的二阶子式，就是取第 1 和第 2 列. 它的 “二阶子式” 值  $\times$  其 “代数余子式”  $=$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$   
二阶子式

 $\cdot (-1)^{(1+2)+(1+2)}$ 

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$   
代数余子式

即, 本例的这个 5 阶行列式的值  $=$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$   
二阶子式

 $\cdot (-1)^{(1+2)+(1+2)}$ 

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$   
代数余子式

 $+ 0 + 0 + \dots$

9 行列式相乘

9.1 两个 “同阶” 行列式相乘

两个同阶行列式，相乘，方法是：前行  $\times$  后列

$a_{11}$

$a_{12}$

$a_{13}$

$a_{21}$  $a_{22}$  $a_{23}$

$a_{31}$  $a_{32}$  $a_{33}$

$\times$

$b_{11}$

$b_{12}$

$b_{13}$

$b_{21}$  $b_{22}$  $b_{23}$

$b_{31}$  $b_{32}$  $b_{33}$

按行看

按列看

$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{31}$

$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$

$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{31}$

$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

$a_{31}b_{11} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{31}$

$a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$

$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{31}$

$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$

$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{31}$

$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

$a_{31}b_{11} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{31}$

$a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$

$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{31}$

$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$

$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$

$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{31}$

$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$

$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

$a_{31}b_{11} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{31}$

$a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$

$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$

9.2 两个 “不同阶” 行列式相乘

那就只能先算出各自行列式的值，再来相乘了。

例

10 n 阶行列式

11 行列式的性质

- 11.1 性质 1: 行列互换, 其值不变. 即  $|A| = |A^T|$
- 11.2 性质 2: 某行 (列) 元素全为零, 则行列式为零
- 11.3 性质 3: 两行 (列) 元素相等, 或对应成比例, 则行列式为零
- 11.4 性质 4: 某行 (列) 元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和
- 11.5 性质 5: 两行 (列) 互换, 行列式的值反号
- 11.6 性质 6: 某行 (列) 元素有公因子  $k (k \neq 0)$ , 则  $k$  可提到行列式外面去
- 11.7 性质 7: 某行 (列) 的  $b$ , 倍加到另一行 (列) 上去, 行列式的值不变

12 行列式的展开定理

- 12.1 余子式  $M_{ij}$
- 12.2 代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- 12.3 按某一行 (列) 展开的展开公式:  
$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

13 具体型行列式的计算:  $a_{ij}$  已给出

- 13.1 化为 “12+1” 型行列式
  - 13.1.1 主对角线行列式
  - 13.1.2 副对角线行列式
  - 13.1.3 拉普拉斯展开式
  - 13.1.4 范德蒙德行列式
- 13.2 加边法
- 13.3 递推法 (高阶  $\rightarrow$  低阶)
  - 13.3.1 建立递推公式, 即建立  $D_n$  与  $D_{n-1}$  的关系
  - 13.3.2  $D_n$  与  $D_{n-1}$  要有完全相同的元素分布规律, 只是  $D_{n-1}$  比  $D_n$  低了一阶
- 13.4 数学归纳 (低阶  $\rightarrow$  高阶)
  - 13.4.1 第一数学归纳法
  - 13.4.2 第二数学归纳法

14 抽象型行列式的计算:  $a_{ij}$  未给出

- 14.1 用行列式性质
- 14.2 用矩阵知识
  - 14.2.1 设  $C=AB$ ,  $A, B$  为同阶方阵, 则  $|C| = |AB| = |A||B|$
  - 14.2.2 设  $C=A+B$ ,  $A, B$  为同阶方阵, 则  $|C| = |A+B|$ , 作恒等变形, 转化为矩阵乘积的行列式
  - 14.2.3 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $|A^*| = |A|^{n-1}$ ,  $|(A^*)^*| = ||A|^{n-2} A| = |A|^{(n-1)^2}$