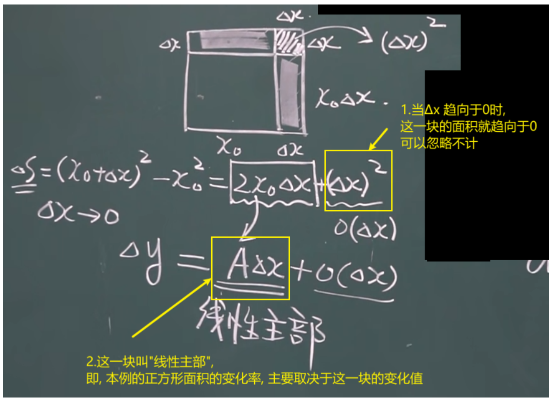
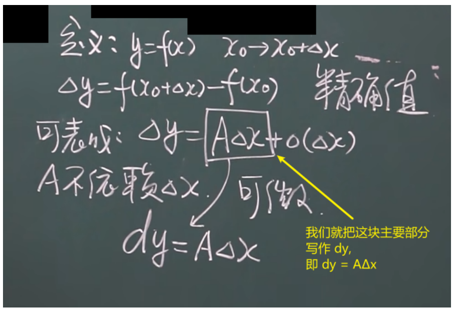
微分

Table of Contents

1. 微分 Differential → y的变化量的 近似值 $dy = f'(x) \cdot dx$ ← 别忘了: dx = Δx





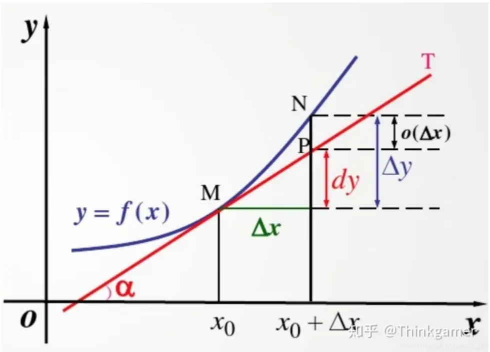
所以:

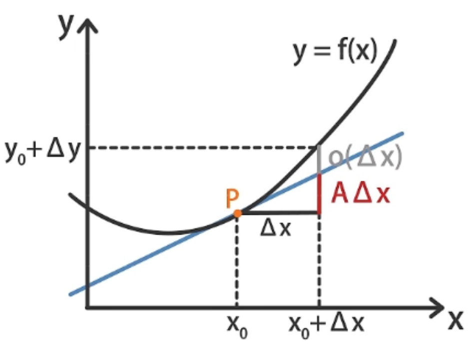
- 函数变换的"精确值"是: $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ← o(Δx)是比 Δx 高阶的无穷小。
- 函数变换的"近似值"是: $dy = A\Delta x$ ← 即"线性主部"部分.

A不依赖于 Δx, ← 其意思是说: A相对于Δx来说, **A可以看成是个"常数". 所以我们可以认为, Δy (此处用 dy来近似) 是关于 Δx 的"线性化函数"。 这也是微分的实质：微分 本质是一个微小的线性变化量，用一个线性函数 作为原函数变化的逼近。**

我们用"微分 Differential"的时候, 都是用的"近似值 dy"来表示函数的变化情况. 即, 用 dy(近似值) 来代替 Δy(精确值).
另外注意: dx = Δx, 这两个不是近似关系. 就是 x的变化量.

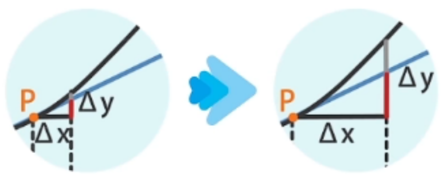
$$\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{\substack{\text{即 }dy\text{，线性主部.} \\ \text{因为 }A\text{ 可看做是个常量，} \\ \text{所以 }dy\text{ 是 }dx\text{ 的线性函数}}} + \underbrace{o\,(\underbrace{\Delta x}_{dx})}_{\text{这块是个无穷小量}}$$



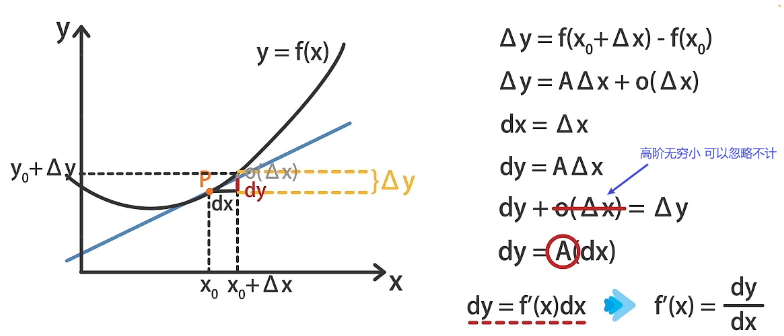


上图:

- **y的变化量 Δy = 红色的线段(即 $A\Delta x$) + 灰色的线段(即 $o(\Delta X)$)**
- **点p处的导数, 就是点p处切线的斜率, 就 $= \frac{A\Delta x}{\Delta x} = A$, 所以A 就是点P处的导数, 即 $A = f'(x_0)$.**
- 灰色线段$o(\Delta X)$, 是比红色线段高阶的无穷小, 即, 它是比无穷小 趋近于0的速度更快. 即, 当 Δx → 0 时, 灰色线段,比红色线段趋近于0的速度更快. 所以灰色线段这部分, 可以忽略不计.



这时, **我们将 Δx, 称作自变量的"微分", 记作 dx.**
将 $A\Delta x$, 称作 函数在x_0处相对于"自变量增量Δx"的微分, 也就是**函数值的微分, 记作 dy.**



从微分的定义中, 也可以看出"微分"和"导数"的最大区别为:

- 导数: 是指函数在某一点"变化的快慢", 是一种"变化率".
- 微分: 是指函数在某一点处的"变化量", 是一种"变化的量". 即, **"微分"是一种对"局部变化量"的线性描述.**

可微 differentiability

若函数y= f(x) 有 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 则称:

- 函数 f(x)在点 x处 "可微".
- 并称 $A\Delta x$ 为函数 f(x) 在点 x 的"微分"(即"线性主部"), 记作 dy. 即: $dy = A\Delta x$

"可微"的充分必要条件, 就是"可导". 即: 可微必可导, 可导必可微.

根据 $\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{dy} + o\left(\underbrace{\Delta x}_{dx}\right)$这个公式,

有: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o\left(\Delta x\right)}{\Delta x}$ ① ←对两边求极限

$\underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}_{这个就是导数呀} = A = f'\left(x_0\right)$ ←所以 A 就是x_0处的导数

把 $A = f'\left(x_0\right)$ 代入 ①中:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x_0\right) + \underbrace{\dfrac{o\left(\Delta x\right)}{\Delta x}}_{这一块下面用\alpha代替} = f'\left(x_0\right) + \alpha$

$\Delta y = \underbrace{f'\left(x_0\right)}_{就是A}\Delta x + \underbrace{\alpha\Delta x}_{即\Delta x的高阶无穷小}$ ②

所以, $dy = \underbrace{A}_{x的导数} \underbrace{\Delta x}_{dx} = f'\left(x\right) \cdot dx$

即 $\dfrac{dy}{dx} = f'\left(x\right)$ ←所以, x的导数 可以看做是这两个 “微分” 的商, 叫 “微商”.

即有:

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Example 1. 标题

例如：

$y=x^2$，求$x=1$，$x=3$处的微分

根据微分公式 $dy=f'(x)dx$，即，我们要先知道 $f'(x)$ 和dx的值，才能求出dy

$y=x^2$的导数，$y'=2x$

$dx = \Delta x$

所以，$dy=\underbrace{f'(x)}_{2x}\underbrace{dx}_{\Delta x}$

当$x=1$时，$dy=2\underbrace{(1)}_{x}\Delta x=2\Delta x$

当$x=3$时，$dy=2\underbrace{(3)}_{x}\Delta x=6\Delta x$

Example 2. 标题

例如：

$y=x^3$，$\Delta x=0.02$，求$x=2$处的dy

根据微分公式 $dy=f'(x)dx$

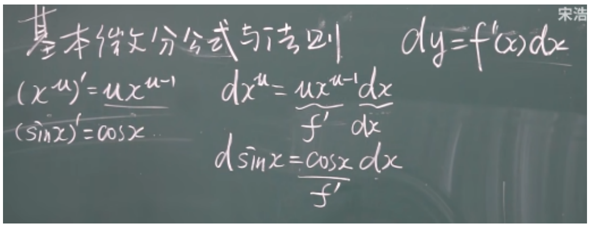
$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\cdot\Delta x \leftarrow$ 把$x=2$代入进去

$dy=3(2)^2\cdot 0.02=0.24$

---

2. 基本微分方式与法则

基本微分公式的核心，依然是基于这个公式 $dy = f'(x)dx$



微分法则：

$d(cu)=c\cdot du$

$d(u\pm v)=du\pm dv \leftarrow$ 其实 $=(u\pm v)'dx$

$d(uv)=u\cdot dv+du\cdot v \leftarrow$ 其实 $=(uv)'dx$

$d\left(\frac{u}{v}\right)=-\frac{u\cdot dv-du\cdot v}{v^2}=\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2} \leftarrow$ 其实 $=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx$

---

3. 复合函数的微分 → f(g(x))的微分dy = f对g求导 * g对x求导 * dx

复合函数的微分

有复合函数：$y=f(u)$，$u=g(x)$，则：

$dy=\boxed{\underbrace{y_x{}'}_{y\text{对}x\text{求导}}}dx=\boxed{\underbrace{f'(u)}_{y\text{对}u\text{求导}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{u\text{对}x\text{求导}}}\cdot dx=f'(u)\cdot du$

这一块其实就 $=du$

这两块其实是一样的

Example 3. 标题

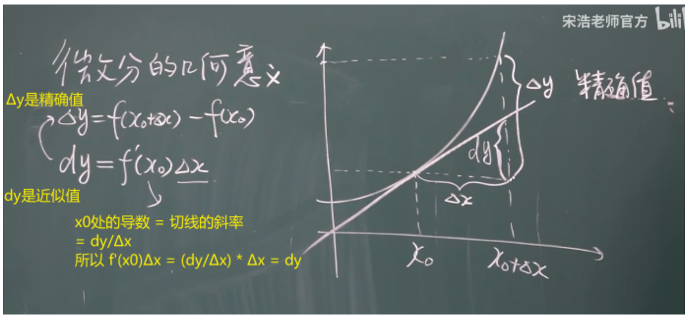
例如:
有 $y = \sin(2x+1)$
则 $dy =$ 从外向内一层层求导,连乘,最后再乘以一个dx就行了
即 $dy = \underbrace{(\sin(2x+1))'}_{\text{即 } d(\sin(2x+1))} \cdot \underbrace{(2x+1)'}_{\text{即 } d(2x+1)} \cdot dx$
$= \cos(2x+1) \cdot 2 \cdot dx$
$= 2\cos(2x+1)dx$

Example 4. 标题

例如:
有 $y = \ln(1+e^{x^2})$, *求* dy
$dy = (\ln(1+e^{x^2}))' \cdot (1+e^{x^2})' \cdot (x^2)' \cdot dx$
$= \dfrac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x \cdot dx$

---

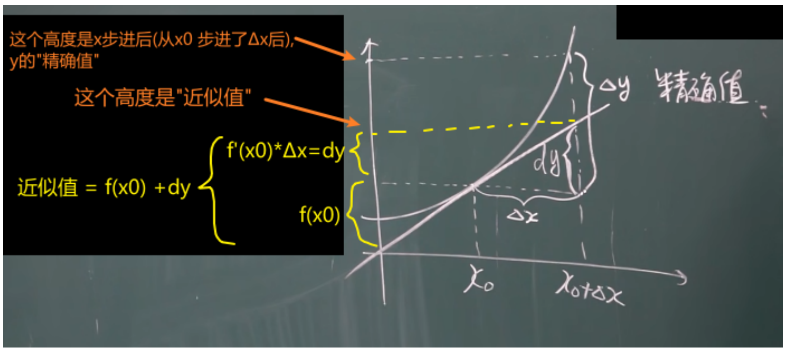
4. 微分的几何意义 → 某x点处的微分dy = 该点处的切线的斜率(即导数) * Δx



---

5. 微分在"近似计算"中的运用 → 变化后的y总长值, 即 $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

- y的变化量的 "精确值"是 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- y的变化量的 "近似值"是 $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$
- 即, dy ≈ Δy, 所以, 变化后的y总长值, 即 $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$



Example 5. 标题

例如:
有一个半径为$1cm$的球，在表面镀铜$0.01cm$厚，问:所镀的铜的体积是多少?

球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，题目要求的就是ΔV

我们用 dy来近似Δy，$dy=f'(x_0)\Delta x$，本例中，$y=V$，$x=r$

$dy=f'(x_0)\Delta x=V'\Delta r=(\frac{4}{3}\pi r^3)'\Delta r=4\pi r^2\Delta r$

题目已经给出，球体的$r=1$，$\Delta r=0.01$
所以 $dy=4\pi r^2\Delta r=4\pi(1)^2\cdot 0.01=0.04\pi=0.125664\ cm^3$

Example 6. 标题

例如:
求 $\sin(30°30')$ ←很明显这是个 $f(x)=\sin x$的形式.
角度的度分秒制:1度$=60$分，1分$=60$秒 (度°，分′，秒″)

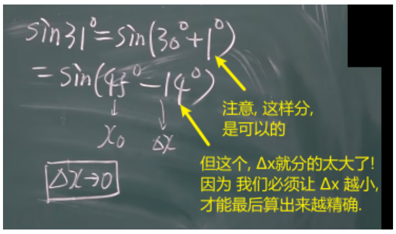
所以 $\sin(30°30')=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)$

由于根据公式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{dy}$ ←$f(\ )$函数中的参数,可以拆成两部分的和$(=x_0+\Delta x)$

而我们的sin()中的参数x，也已经拆成了两部分的和$(=30°+30')$,
所以，就可以和上面的公式一一对应了，用上面的公式来做

即：$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)}_{\sin x=f(x)}=f\left(\underbrace{x_0}_{\frac{\pi}{6}}+\underbrace{\Delta x}_{\frac{\pi}{360}}\right)\approx\underbrace{f(x_0)}_{\sin\frac{\pi}{6}}+\underbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{(\sin\frac{\pi}{6})'}\underbrace{\Delta x}_{\frac{\pi}{360}}}_{dy}\approx 0.5076$

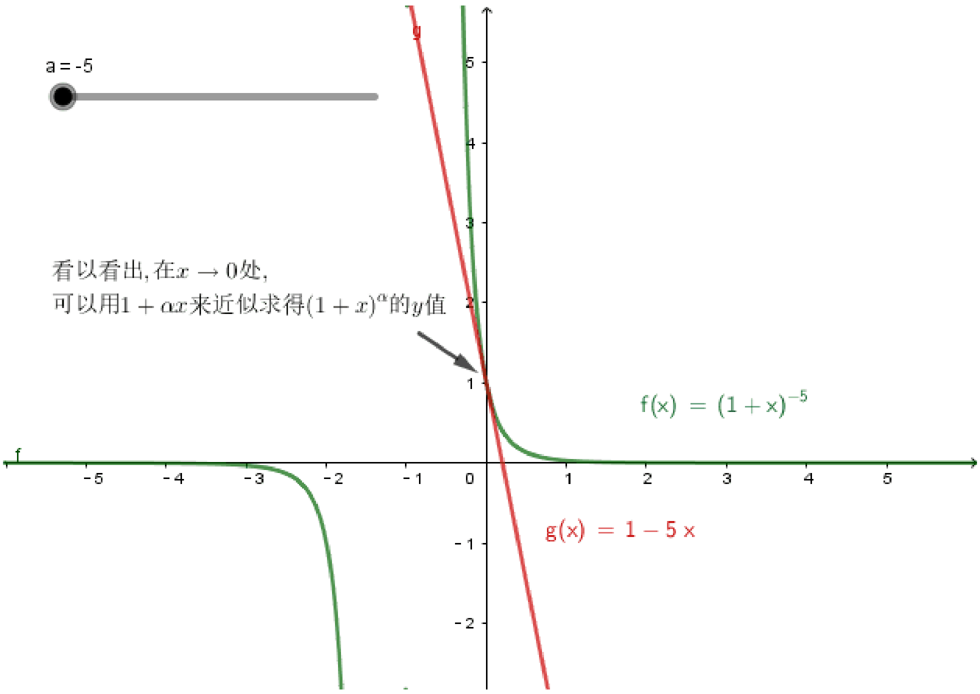
但注意, 使用此方法时, Δx 必须越小越好!



---

6. "可以求出近似值"的公式

6.1. 当 x → 0 时, $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$



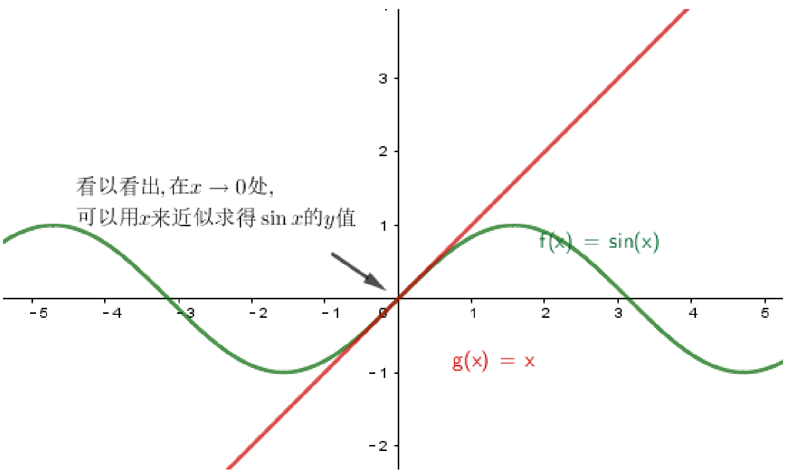
Example 7. 标题

例如:
如 $y = (1 + x)^5$, 当$x = 0.1$时, 问$y = ?$
套用公式 $(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$
$y = (1 + 0.1)^5 = 1 + 5 \cdot 0.1 = 1.5$

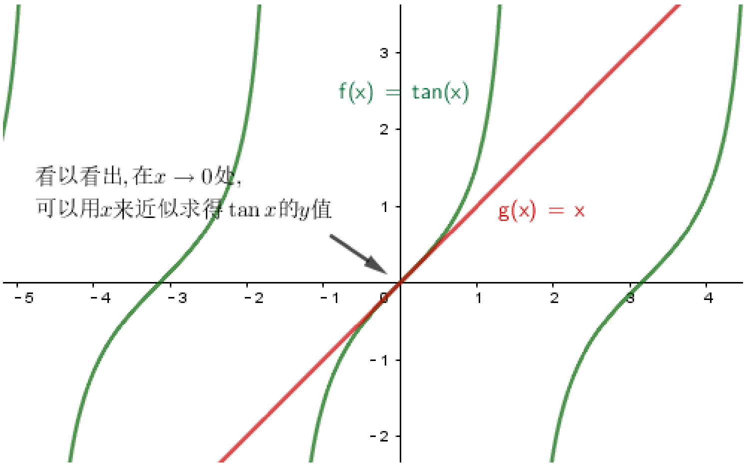
Example 8. 标题

例如:
问 $y = \sqrt{1.05} = ?$
套用公式 $(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$
$y = (1 + 0.05)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.05 = 1.025$

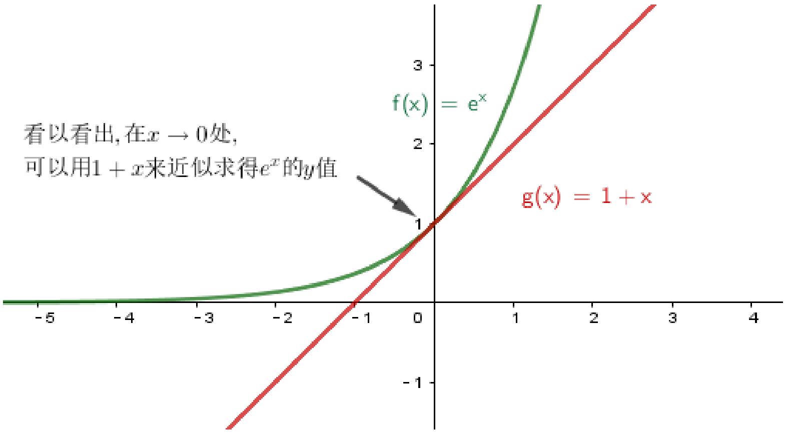
6.2. 当 x → 0 时, $\sin x \approx x$



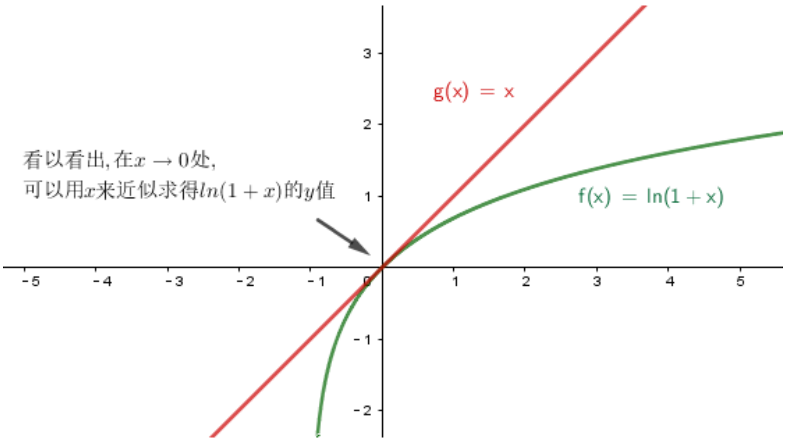
6.3. 当 x → 0 时, $\tan x \approx x$



6.4. 当 x → 0 时, $e^x \approx 1 + x$



6.5. 当 x → 0 时, $\ln(1 + x) \approx x$



上面这些快捷计算公式, 其意义就是: 能帮助我们用(等号右边目的) x 的多项式, 来近似计算(等号左边的)复杂的函数.