目录

文件名

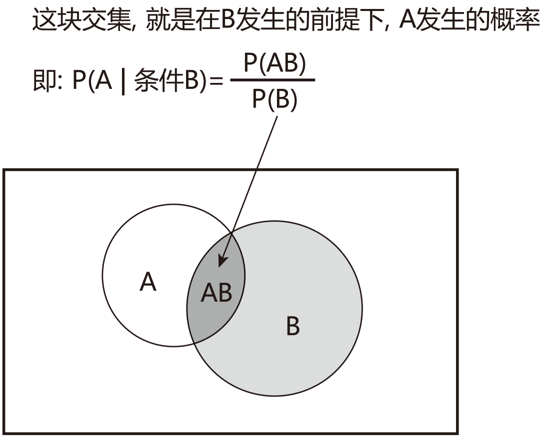
第一部分　条件概率

1　“条件概率” 的意思

条件概率是: 有 A, B 两个事件, 和样本空间 Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则, 在 B 已经发生的条件下, A 发生的概率, 就叫做 A 对 B 的 “条件概率”. 记作: P(A| 条件 B), 读作 “在 B 发生的条件下, A 发生的概率” .

即, 条件概率公式是: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}|\text{ 条件 }\mathrm{B}\right) = \dfrac{\overbrace{\text{在 B 发生条件下,A 发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB 同时发生了}}}{\text{B 里面有多少个样本点}} = \dfrac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$

还可写成: $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}|\text{ 条件 }\mathrm{B}\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)} = \dfrac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \dfrac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数 (分母) 去比.

例

有 6 个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到 1 号球
- A_2: 取到 2 号球
- A_5: 取到大于 4 号的球

则:

- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到 1 号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全 6 选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{\text{在 B 条件里面, 取到 }\mathrm{A}_1\text{(即 1 号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = 0$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{B}) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号 2 的球里面, 取 1 个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取 1 个}}} = \frac{1}{3}$

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_5|\mathrm{B}) = \frac{\text{在 B 条件里面, 取到大于 4 号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有 6 号一个球}}}{3}$

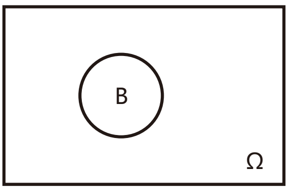
---

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$

P(Ω |B)=1



2.3 性质: $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \ |\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ |\mathbf{B})$

2.4 性质: $\mathbf{P}(\mathbf{A} \ |\mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\mathbf{A}} \ |\mathbf{B}\right)$

2.5 性质: 可列可加性: 若 $A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是 “互不相容” 的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于 “概率的和”

---

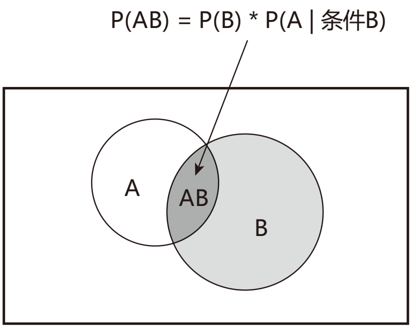
3 乘法公式: $P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前) \leftarrow$ 规律就是 "前后前后" 这样交错, 或反过来交错.

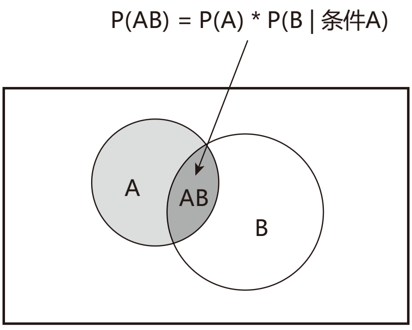
推导过程:

$$\text{因为}\begin{cases} \mathrm{P(A|B)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} \rightarrow \text{即 } \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)}}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} \quad ① \\ \mathrm{P(B|A)} = \dfrac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}} \rightarrow \text{即 } \mathrm{P(AB)} = \underbrace{\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}}_{\text{乘法，是交集}\cap\text{的概念}} \quad ② \end{cases}$$

①和②，就是"乘法公式". 即 $\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B|A)}$

其中 $\mathrm{P(A)} > 0$, $\mathrm{P(B)} > 0$





同理, 多个事件的乘法公式就是:

$$\boxed{\mathrm{P(ABC)} = \underbrace{\mathrm{P(A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(B|A)}} \cdot \underbrace{\mathrm{P(C|BA)}}}$$

↑ 上面 "从右往左" 看, 就是按 A,B,C 的顺序

$$\mathrm{P(A_1A_2 \cdots A_n)} = \mathrm{P(A_1)} \cdot \mathrm{P(A_2A_1)} \cdot \mathrm{P(A_3A_2A_1)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{P(} \overbrace{\mathrm{A_n}}^{\text{即最后一个数字n写在前面.}} \mid \overbrace{\mathrm{A_{n-1}}}^{\text{后面的条件，最后一个数字是: n少一位}} \ldots \mathrm{A_2A_1)}$$

↑ 上面 "从右往左" 看, 就是按 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的顺序