导数_隐函数求导

Table of Contents

1. 隐函数
2. 对"隐函数"求导

1. 隐函数

所谓"隐函数", 是和"显函数"相对而言的.

- 显函数: 能清晰的写成 y= ...x 的形式.
- 而隐函数: 虽然 x和y之间有关系, 但无法写成清晰的 $y=f(x)$ 的形式.

2. 对"隐函数"求导

Example 1. 标题

例如:
有隐函数 $e^y+xy-e=0$, 求 y'
方法是:两边同时对 x 求导. 即:

$$(e^y+xy-e)'=0'$$
$$e^y y'+(x'y+xy')-0=0$$
$$e^y y'+y+xy'=0$$
$$(e^y+x)y'=-y$$
$$y'=-\frac{y}{e^y+x} \leftarrow \text{因为是隐函数, } y\text{ 无法写成}...x\text{ 的形式,}$$

所以隐函数求导的结果里面, 会带着 y

Example 2. 标题

例如:
$y^5+2y-x-3x^7=0$, 求y'
两边对x求导:
$(5y^4\ \ y')\ +\ 2y'\ -1\ -7\cdot 3x^6=0 \leftarrow 2y$的导数$=2y'$,因为$(Cu)'=Cu'$
$5y^4\ \ y'+2y'=1+21x^6$
$y'=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$

Example 3. 标题

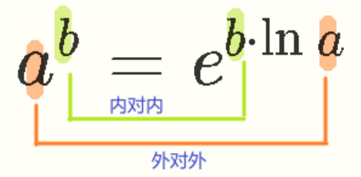
例如:
$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$
两边同时对x求导:
$(\dfrac{1}{16}x^2)'+(\dfrac{1}{9}y^2)'\ =\ 1'$
$\dfrac{2}{16}x+\dfrac{2}{9}y\cdot y'=0$
$y'=-\dfrac{2}{16}x\cdot\dfrac{9}{2y}=-\dfrac{9x}{16y}$

Example 4. 标题

例如:
$y=x^{\sin x}$, 求y'
先两边取$\ln$
$\ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$
两边对x求导
$(\ln y)'=(\sin x\ln x)'$
$\dfrac{1}{y}y'=\sin' x\ \ \ln x+\sin x\ \ \ln' x$
$\dfrac{y'}{y}=\cos x\ \ \ln x+\sin x\dfrac{1}{x}\ \leftarrow$把$y=x^{\sin x}$代入进来
$y'=\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

总结:
遇到$y=u^v$形式,就转成 $=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$ 的形式来做.
上面的转成以e为底的式子,使用的是这个重要公式: $a^b=e^{b\cdot\ln a}$

记忆法:



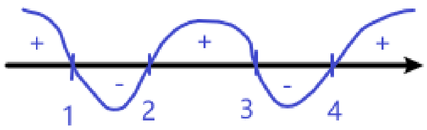
Example 5. 标题

例如:

$$y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}, \text{ 求} y'$$

首先,必须要保证根号内的值 >0, 其次,分母上的值 ≠0.
即,我们要保证 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$

这是解高次不等式了, 使用"数轴穿根法"来做. 可知:



不等式大于0的情况, 只在 x>4, 或 2<x<3, 或 x<1 时发生.

那么 x 就有这三种情况了, 所以我们求 y',也要根据 x 的这三种定义域, 分别来计算y':

①当$\mathrm{x}>4$的情况时:
先两边取$\ln$:
$\ln y=\ln\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$
$=\ln\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right]^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$
再两边对x求导:
$\frac{1}{\mathrm{y}}\mathrm{y}'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{x}-1}+\frac{1}{\mathrm{x}-2}-\frac{1}{\mathrm{x}-3}-\frac{1}{\mathrm{x}-4}\right)$

Example 6. 标题

例如:

$y=\frac{\sin x\cdot x^{5}}{e^{x}\cdot\ln x}$ ←两边取ln

$\ln y=\ln(\sin x)+\ln(x^{5})-\ln(e^{x})-\ln(\ln x)$

再两边求导:

$\ln y\cdot y'=\frac{1}{\sin x}\sin' x+(5\ln x)'-x'-\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\cos x}{\sin x}+5\frac{1}{x}-1-\frac{1}{\ln x\cdot x}$ ← *把* $y=\frac{\sin x\cdot x^{5}}{e^{x}\cdot\ln x}$ *代入进去*

$y'=(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{5}{x}-1-\frac{1}{\ln x\cdot x})\frac{\sin x\cdot x^{5}}{e^{x}\cdot\ln x}$

Example 7. 标题

例如:

$y=e^{x}\cdot x^{2}\cdot\ln x\cdot\tan x$

两边取ln*:*

$\ln y=\ln e^{x}+\ln x^{2}+\ln(\ln x)+\ln(\tan x)$

两边求导*:*

$(\ln y)'=(\ln e^{x})'+(\ln x^{2})'+(\ln(\ln x))'+(\ln(\tan x))'$

$\frac{1}{y}y'=e'+2\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^{2}x$

←然后把 $y=e^{x}\cdot x^{2}\cdot\ln x\cdot\tan x$ 代入进去

$y'=(e'+2\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^{2}x)(e^{x}\cdot x^{2}\cdot\ln x\cdot\tan x)$