目录

第一部分　累积函数 Cumulative Distribution Function (CDF) **2**

1 累积函数 $\boxed{F\left(x\right)=P\left\{X\leq x\right\}=\sum\limits_{x_k\leq x}p_k}$ ← 是对“概率函数”值的累加结果 **2**

2 ★累加函数的计算公式 **5**

3 对“概率函数f(x)”求积分，就得到“累加函数F(x)”．反之，对“累加函数F(x)”求导，就得到“概率函数f(x)”．即：① $\int$ 概率函数$f\left(x\right)=$ 累加函数$F\left(x\right)$，② (累加函数$F\left(x\right))'=$ 概率函数$f\left(x\right)$ **5**

4 性质 **7**

4.1 性质1: 有界性. $F\left(x\right)=P\left\{\text{随机变量}X\leq\text{随机变量的取值}x\right\}$, $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$. 即 $0\leq F\left(x\right)\leq1$ . . . 7

4.2 性质2: 单调不减性. 即对于任意的 $x_1<x_2$, 有: $F(x_1)\leq F(x_2)$ . . . 8

4.3 性质3: 规范性. F(-∞)=0 , F(+∞)=1 . . . 8

4.4 性质4：右连续性. $\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$ . . . 9

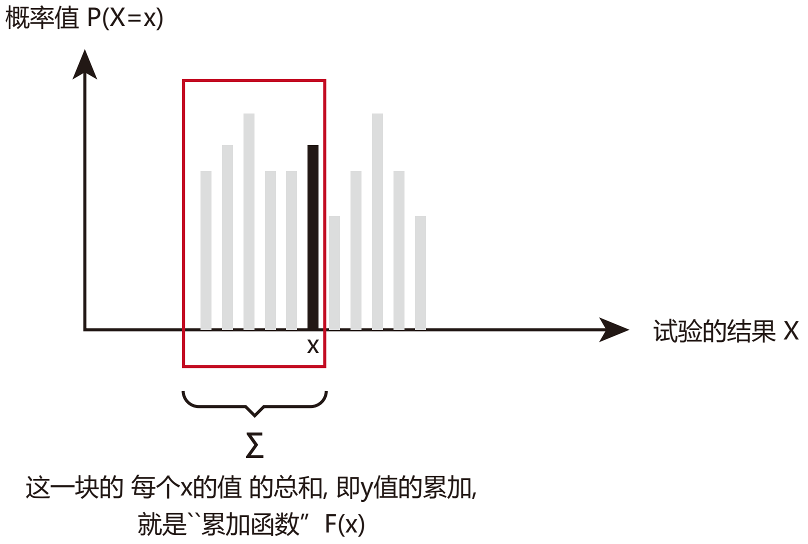
文件名

第一部分　累积函数 Cumulative Distribution Function (CDF)

1　累积函数 $\boxed{F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k}$ ← 是对"概率函数"值的累加结果

对于随机变量, 我们通常关心的, 并不是它取某个值的概率(即我们并不关心它的分布律), 而是更关心它落在某个区间内的概率.
比如, 对某考试, 我们更关心的是"不及格的总人数", 和比如 "分数≥80分的总人数".

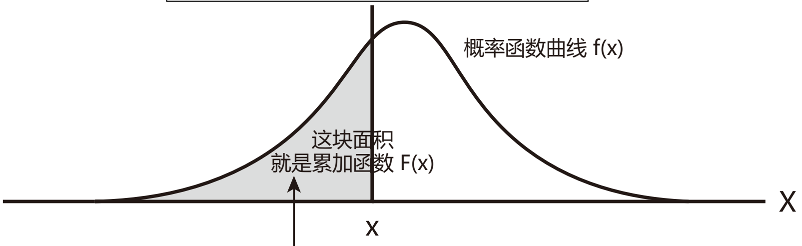
累积函数 Cumulative Distribution Function (CDF) ← 是对"概率函数"值的累加结果 . 即对"概率密度函数"的积分.



在这些个区间段所占的概率值, 就是用"累加函数"(又叫"分布函数")来表示的. 即:
(随机变量$X \le$ 自变量x) $= \underbrace{F(x)}_{\text{累加函数}}$ ← 它表示随机变量X 落在 (-∞, x] 这段区间上的概率.

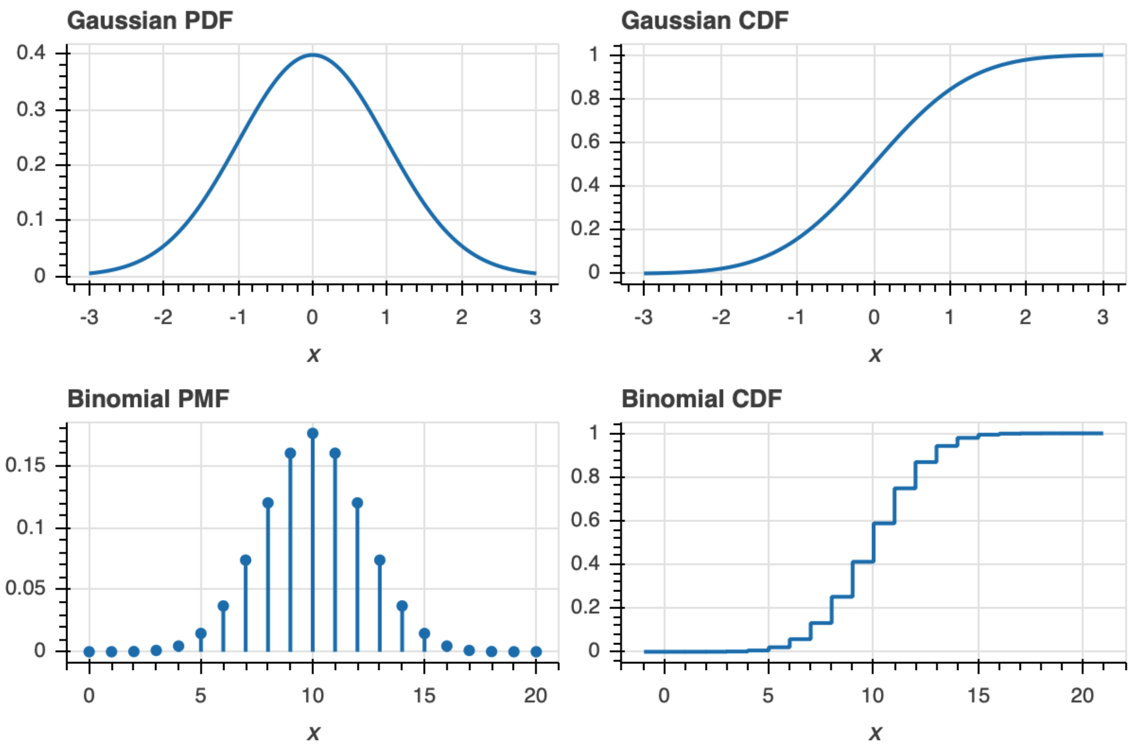
$$\boxed{\text{累加函数} F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k}$$

累加函数 F(x) 就是 "X取≤x 的所有值x_k" 的概率之和.
P(X≤x) 即"X的取值不超过x" 的概率. 这里P后面写()或{}都行, 意思是一样的.



$$F(x)=P(X\leq x)=S_{\text{阴影部分面积}}=\int_{-\infty}^{x}f\left(t\right)d$$

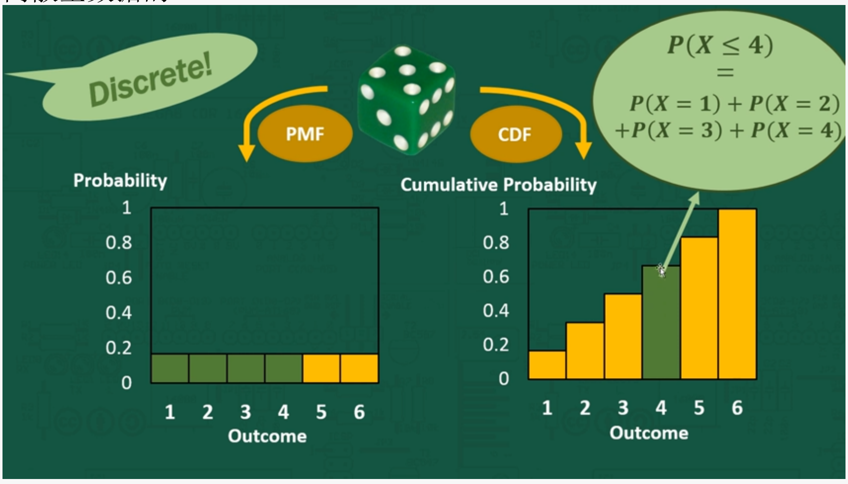
下图, 左边两张是“概率函数”, 右边两张就是“累加函数 CDF”.



例

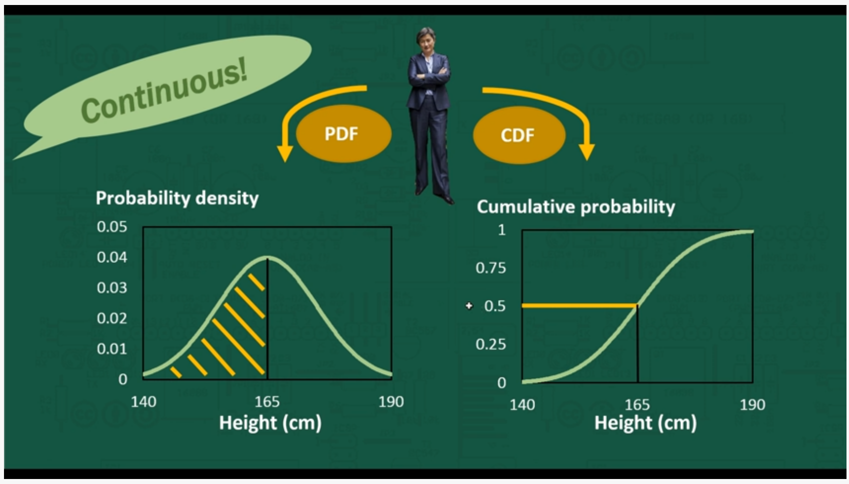
下面的图, 左边是“概率函数”, 右边是“累加函数”.

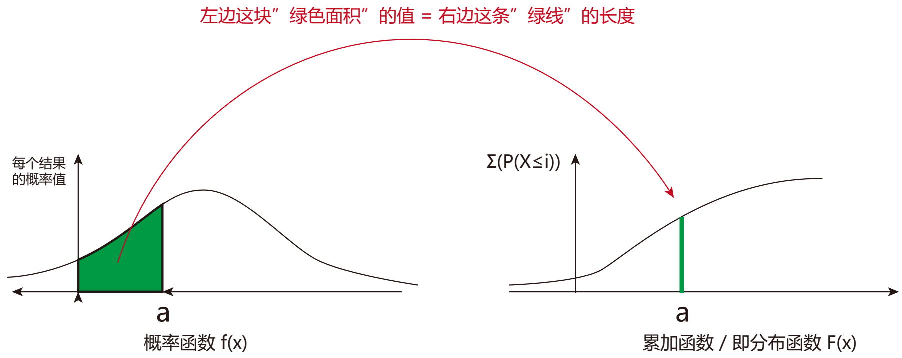
离散型数据的:

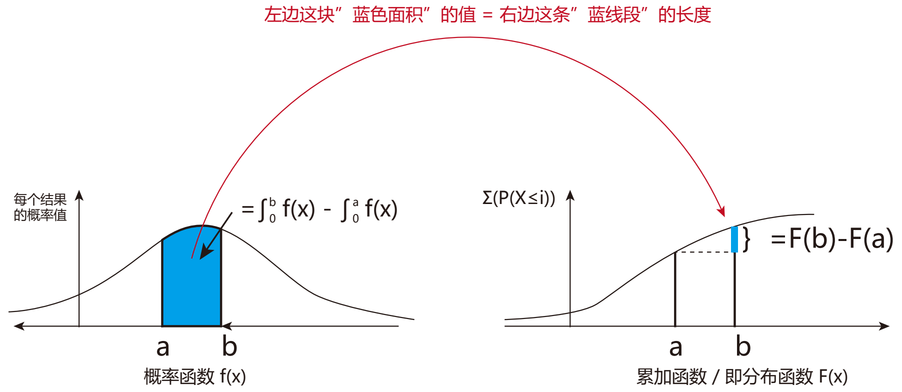


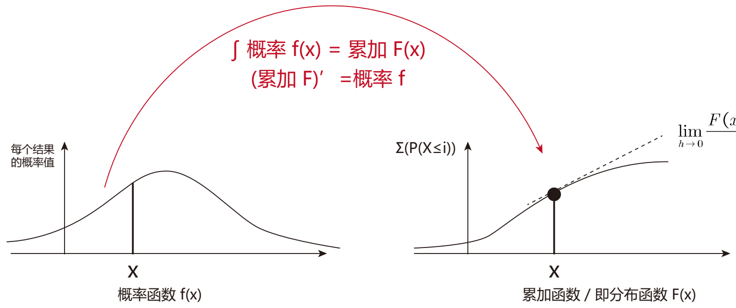
连续型数据的:

1 累积函数 $\boxed{F(X)=P\{X\leq X\}=\sum_{X_K\leq X} P_K}$ ← 是对"概率函数"值的累加结果





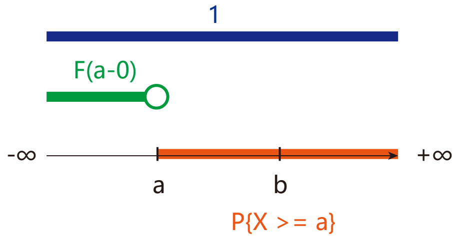
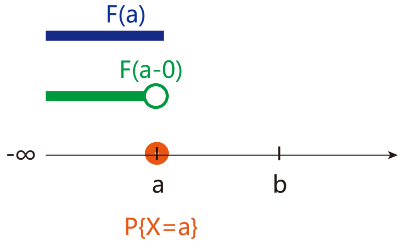
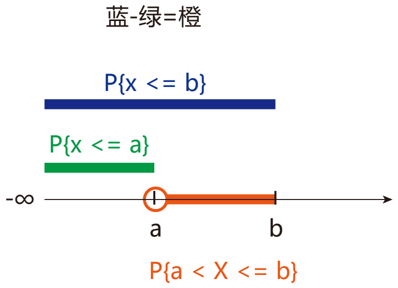
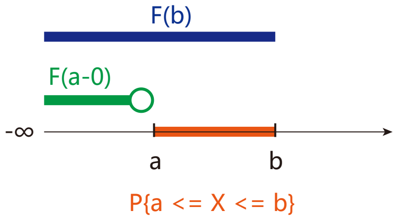




$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ = 累积函数 F, 在 x 点处的斜率（即导数）

或者说，它反映了概率在 x 点处"密集程度".

2 ★累加函数的计算公式

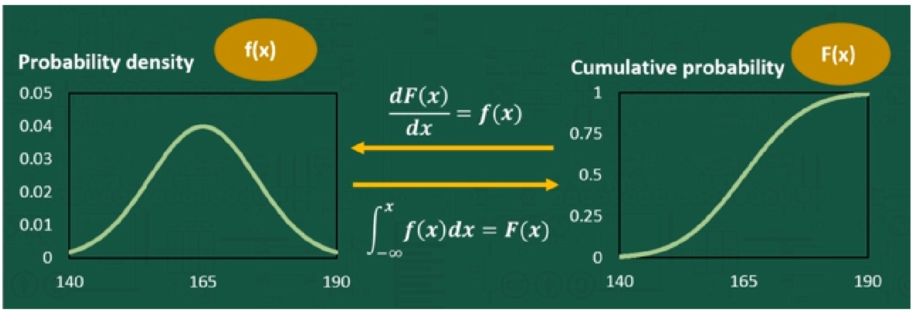
<table>
<tr><td>累加函数 $F(x) = PX \le x$ 的公式有</td><td>图中：蓝-绿=橙</td></tr>
<tr><td>(1) $P\{X \le a\} = F(a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>(2) $P\{X < a\} = F(a-0) \leftarrow$ 其中的 F(a-0)：就是从左边逼近a，不包括a点．所以是“左极限”．就是(-∞,a)这段区间的概率之和，不包括a点上的概率.</td><td></td></tr>
<tr><td>(3) $P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>(4) $P\{X \ge a\} = 1 - F(a-0)$</td><td></td></tr>
<tr><td>(5) $P\{X = a\} = F(a) - F(a-0)$</td><td></td></tr>
<tr><td>(6) $P\{a < X \le b\} = P(X \le b) - P(X \le a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>(7) $P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a-0)$</td><td></td></tr>
</table>

---

3 对“概率函数f(x)”求积分，就得到“累加函数F(x)”．反之，对“累加函数F(x)”求导，就得到“概率函数f(x)”．即：① $\int$ 概率函数$f(x)$ = 累加函数$F(x)$，② (累加函数$F(x))'$ = 概率函数$f(x)$

对“概率函数f(x)”求积分，就得到“累加函数 F(x)”
对“累加函数 F(x)” 求导，就得到“概率函数f(x)”.

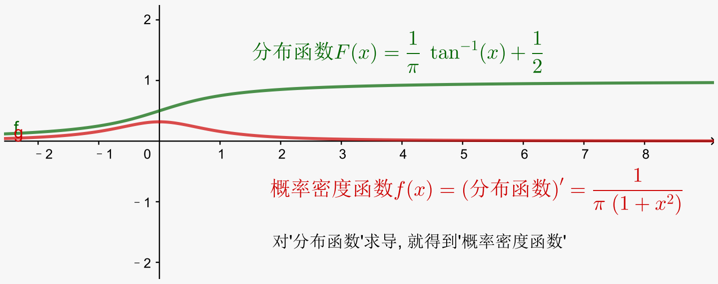
3 对“概率函数$F(X)$”求积分, 就得到“累加函数$F(X)$”. 反之, 对“累加函数$F(X)$”求导, 就得到“概率函数



例

$$\underbrace{f(x)}_{\text{概率函数(相当于导函数)}} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$\underbrace{F(x)}_{\text{累加函数}} = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{\text{概率函数}} dt = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\frac{1}{\pi(1+t^2)}}_{\text{导函数}} dt = \frac{1}{\pi}\left(\arctan |_{-\infty}^{x}\right) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$$



例

$$\text{有累加函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ Ax^2 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

$$\to \text{求常数A}: \underbrace{\lim_{x \to 1^-} Ax^2}_{\text{从}x=1\text{的左侧,逼近}x=1} = A(1)^2 = A = \underbrace{F(1) = 1}_{\text{因为当}x\ge 1\text{时,}F(x)=1}$$

$$\to \text{求概率函数f(x)}: f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0' = 0 & (x<0) \\ (Ax^2)' = (x^2)' = 2x & (0 \le x < 1) \\ 1' = 0 & (x \ge 1) \end{cases}$$

$\to$ 求:

$$P\{0.3 < X < 0.7\} = \underbrace{F(0.7)}_{=\int_{-\infty}^{0.7} f(t)dt} - \underbrace{F(0.3)}_{=\int_{-\infty}^{0.3} f(t)dt}$$

因为在$0 \le x < 1$的区间上,$F(x) = Ax^2$,而其中的A我们上面已经算出$=1$,

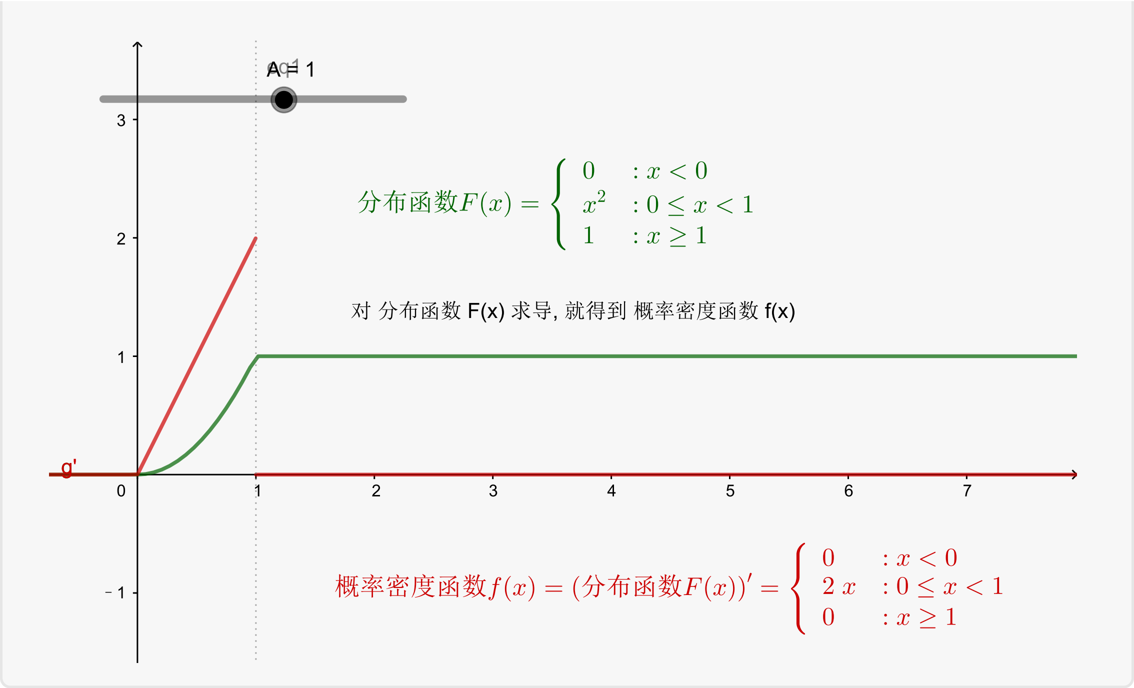
所以$F(x) = Ax^2 = (1)x^2 = x^2$

所以: $F(0.7) = (0.7)^2 = 0.49$

$F(0.3) = (0.3)^2 = 0.09$

因此: $P\{0.3 < X < 0.7\} = F(0.7) - F(0.3) = 0.49 - 0.09 = 0.4$

$$\text{事实上,本例的 } P\{0.3 < X < 0.7\} = \int_{0.3}^{0.7} \underbrace{(2x)}_{\text{即概率函数}f(x)} dx$$

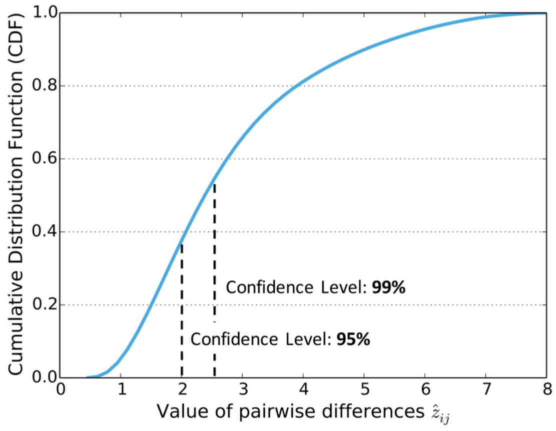


---

4 性质

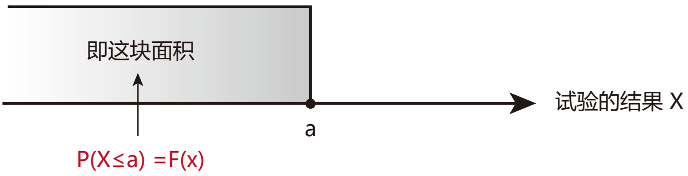
4.1 性质1: 有界性. $F\left(x\right) = P\left\{随机变量X \leq 随机变量的取值x\right\}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 即 0 $F\left(x\right) \leq 1$

累加函数(CDF) F(x), 就是一个普通的实函数. 其定义域是 $x \in (-\infty, +\infty)$. 值域是 $y \in [0, 1]$.

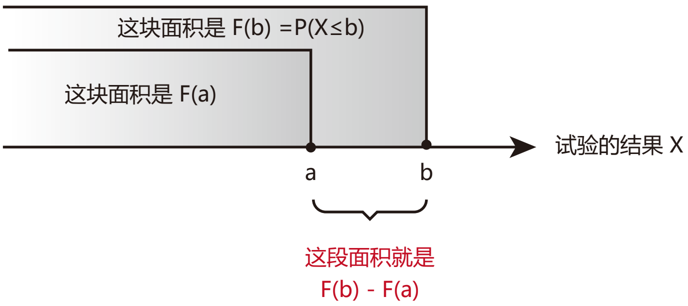


累加函数：

$$\boxed{F(x) = P(X \leq a) = \int_{lower\lim it}^{a} f\left(x\right) dx}$$



$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f\left(x\right) dx = F\left(b\right) - F\left(a\right)}$$



$$P(x_1 < X \le x_2)\ \text{¸对于随机变量}X\text{在}(x_1,x_2]\text{这段区间上的概率,它的值}$$
$$= F(x_2) - F(x_1)$$
$$= P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

对于“连续型随机变量”，有没有两端的端点，无所谓，不影响概率值(因为它在任何一个“确定点”的概率都是0嘛)．即：

$$P\{a \le X \le b\}$$
$$= P\{a < X \le b\} \quad \leftarrow \text{即，两端是否有“等于号”，无所谓.}$$
$$= P\{a \le X < b\}$$
$$= P\{a < X < b\}$$

同样:
$P\{X < a\} = P\{X \le a\} \leftarrow$ 有没有有“等于号”无所谓
$P\{X > a\} = P\{X \ge a\}$

4.2 性质2：单调不减性．即对于任意的 $x_1 < x_2$，有：$F(x_1) \le F(x_2)$

F(x)是关于x的“不减函数”，类似于“单调递增”的概念．“不减”的意思就是，该函数的y值不会下降，只会“增长”或“平移向前”．

比如，“分数小于等于70分的人” 其概率一定是小于等于 “分数小于80分的人”． 即 $F(70) \le F(80)$.

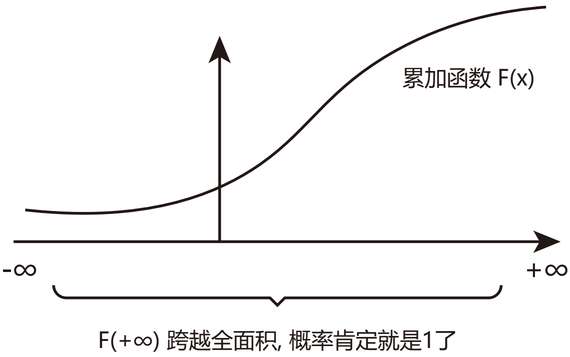
4.3 性质3：规范性．F(-∞)=0 ，F(+∞)=1

$$\boxed{\underbrace{F(-\infty)}_{=P(X\le-\infty)} = \lim_{x\to-\infty} F(x) = P(X < -\infty) = P(\Phi) = 0} \leftarrow \text{称之为 “不可能事件”.}$$

如果随机变量X的取值，比 -∞还小，那其概率，就只能是0了．

$$\boxed{\underbrace{F(+\infty)}_{=P(X\le+\infty)} = \lim_{x\to+\infty} F(x) = P(X < +\infty) = P(\Omega) = 1} \leftarrow \text{称之为 “必然事件”.}$$

如果随机变量X的取值，在 +∞以下，那其概率，肯定就是100%了，就是1．



4.4 性质4：右连续性. $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

这个等式的意思就是说: 累加函数在x_0点的右极限, 就等于累加函数在该点处的函数值.

右连续	所谓“右连续”, 就是“函数从x在某点的右侧, 逼近该点”的极限值, 就等于“该点处的y值”, 即: $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$.
左连续	同理, “左连续”就是: $\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a)$.
连续	同时满足“左连续”和“右连续”的函数, 就称为是“连续”的. 即 $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$.

满足上面4条性质的, 就一定是“累加函数”. 反之, “累加函数”也一定有这4条性质.