目录

文件名

1 随机变量 random variable

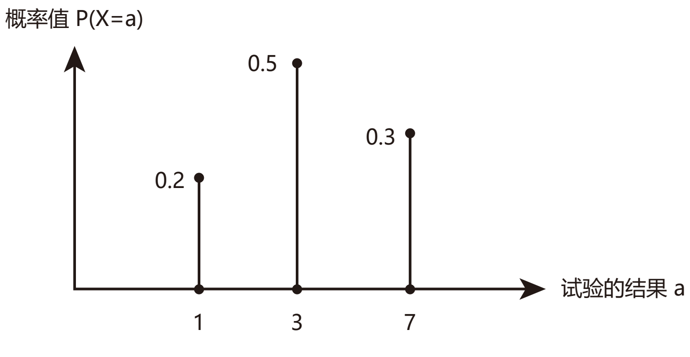
随机变量: 常用大写字母 X,Y,Z 或希腊字母来表示.
随机变量的取值: 用小写字母 x,y,z 等表示.

比如, 随机变量 X, 其 =a 的话, 我们就把这个事件记作 $\{X = a\}$. 其概率就是 $P\{X = a\}$, 或写作 $P(X = a)$.

2 概率函数: PMF (离散型数据的, 称为 "概率质量函数 Probability mass function") & PDF (连续性数据的, 称为 "概率密度函数 Probability Density Function")

2.1 离散型数据的 PMF

描述 "离散型数据" 的概率分布情况的曲线, 称为 "概率质量函数"（PMF）.



概率函数曲线 PMF

比如，掷骰子, 不同点朝上的概率为: $\underbrace{p_i}_{\text{骰子在第}i\text{点的概率}} = \underbrace{P(X = a_i)}_{\text{随机变量}X\text{在第}i\text{点时的概率}}, \quad i \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$

在上面这个函数里:
- 自变量 X : 是 "随机变量" 的取值.
- 因变量 p_i 是 "自变量 X 所取到某个值 a_i" 的概率.

从公式上来看, **"概率函数", 一次只能表示一个取值的概率.** 比如 $P(X = 1) = 1/6$ 就表示: 当随机变量 X 取值为 1 时 (即骰子投到点数为 1 时) 的概率为 1/6. 所以说, 它一次只能代表 "随机变量的一个取值" 的概率. **(即: P 后面的小括号里, 只能写成 X= ..., 而不能写成 X>... 或 X<..., 大于小于符号这些, 就是属于 "累加函数" 了.)**

典型的 "离散概率分布" 包括: 伯努利分布，二项分布，几何分布，泊松分布等.

2.2 连续性数据的 PDF

"连续型数据" 的概率分布, 称为 "概率密度函数"（PDF）.

"概率密度函数" 的某区间上的概率值 = 该区间的函数曲线段, 与 x 坐标轴之间围成的面积. 实际上就是对 "概率密度函数" 进行定积分.

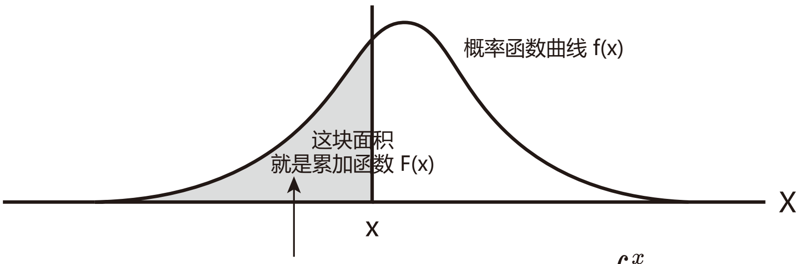
典型的 "连续概率分布" 包括: 正态分布, 指数分布等.

---

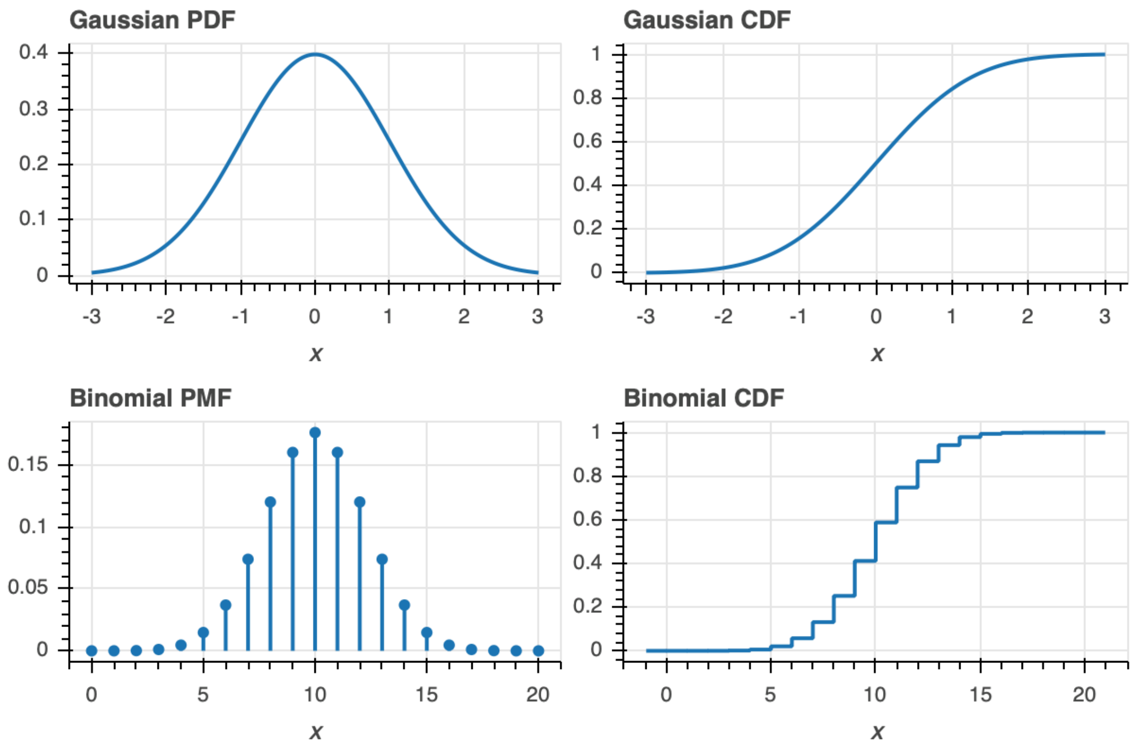
3 累积函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$: Cumulative Distribution Function (CDF) ← 是对 "概率函数" 值的累加结果

对于随机变量, 我们通常关心的, 并不是它取某个值的概率 (即我们并不关心它的分布律), 而是更关心它落在某个区间内的概率.
比如, 对某考试, 我们更关心的是 "不及格的总人数", 和比如 "分数 80 分的总人数".

在这些个区间段所占的概率值, 就是用 "累加函数"(又叫 "分布函数") 来表示的. 即:
(随机变量$X \leq$ 自变量x) = $\underbrace{F(x)}_{\text{累加函数}}$ ← 它表示随机变量 X 落在 (-∞, x] 这段区间上的概率.

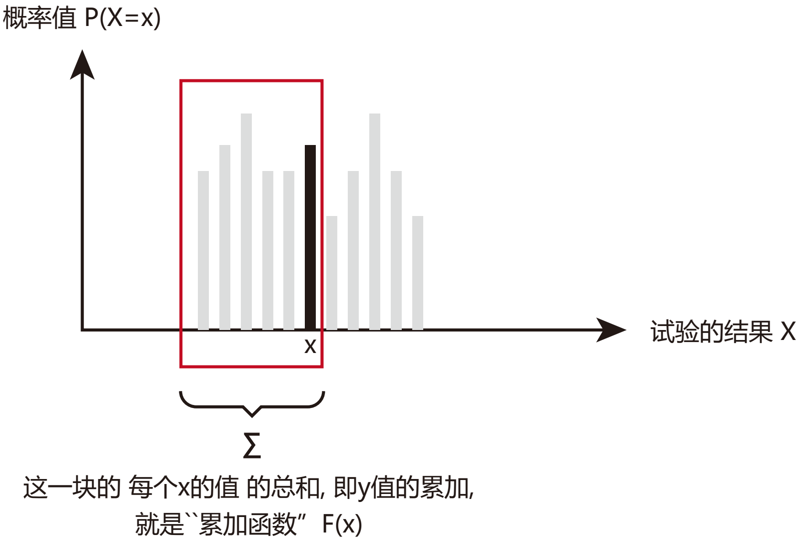


$$F(x) = P(X \leq x) = S_{\text{阴影部分面积}} = \int_{-\infty}^{x} f(t) d$$



上图, 左边两张是 “概率函数”, 右边两张就是 “累加函数 CDF”.

累积函数 Cumulative Distribution Function (CDF) ← 是对 “概率函数” 值的累加结果. 即对 “概率密度函数” 的积分.

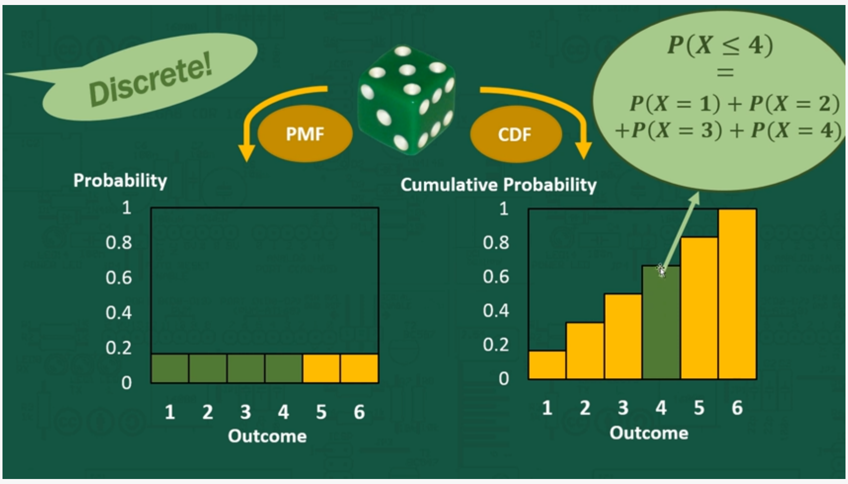


例

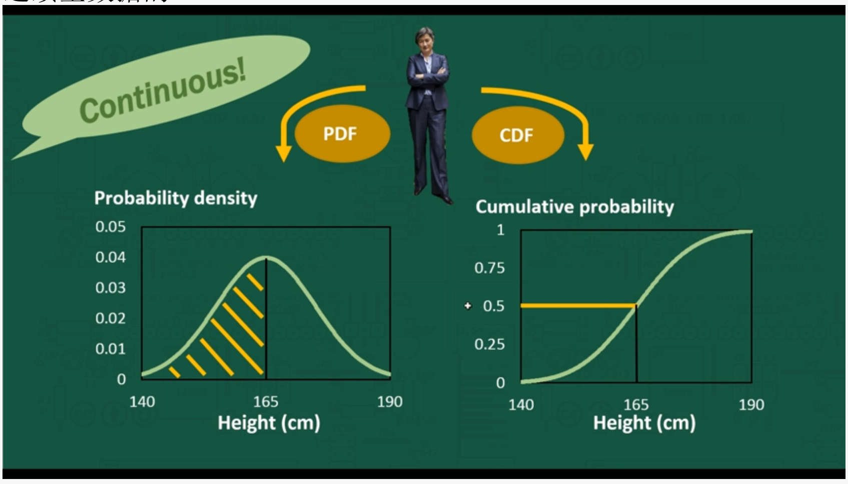
下面的图, 左边是 “概率函数”, 右边是 “累加函数”.

离散型数据的:

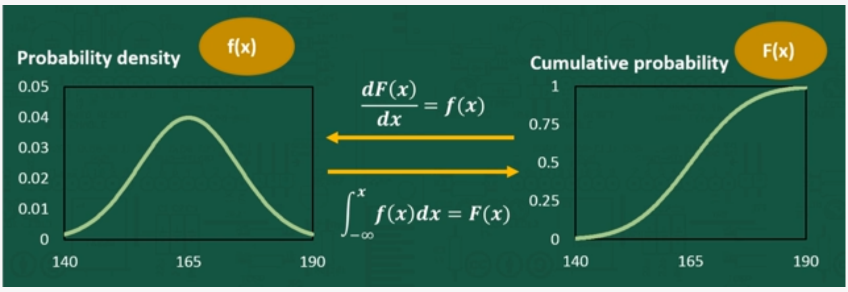
3 累积函数 $F(X) = P\{X \le X\}$: *CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION (CDF)* ← 是对 "概率



连续型数据的:

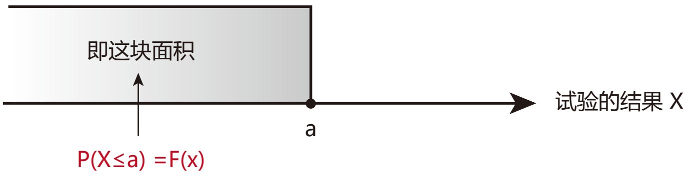


对 "概率函数 f(x)" 求积分, 就得到 "累加函数 F(x)"
对 "累加函数 F(x)" 求导, 就得到 "概率函数 f(x)".



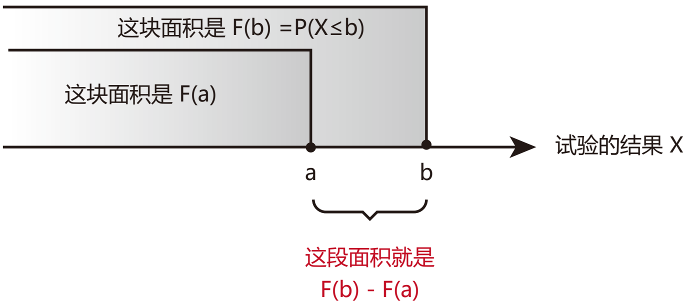
累加函数:

$$\boxed{F(x) = P(X \le a) = \int_{lower\lim it}^{a} f(x)\,dx}$$



$$\boxed{P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

3 累积函数 $F(X) = P\{X \leq X\}$: *CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION (CDF)* ← 是对 “概率



$$
\begin{aligned}
&P(x_1 < X \leq x_2) \leftarrow \text{对于随机变量}X\text{在}(x_1, x_2]\text{这段区间上的概率, 它的值}\\
&= F(x_2) - F(x_1)\\
&= P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\}
\end{aligned}
$$

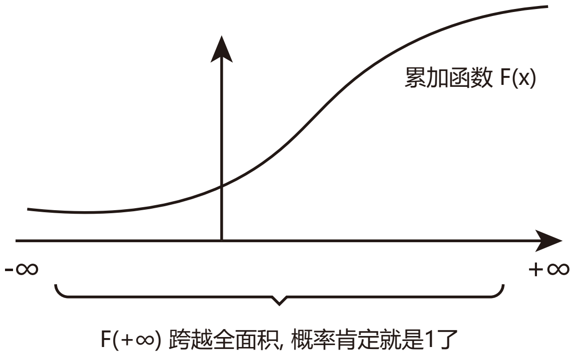
3.1 单调不减性：即对于任意的 $x_1 < x_2$，有：$F(x_1) \leq F(x_2)$

比如, “分数小于等于 70 分的人” 其概率一定是小于等于 “分数小于 80 分的人”. 即 $F(70) \leq F(80)$.

3.2 F(-∞)=0 , F(+∞)=1

$\underbrace{F(-\infty)}_{=P(X\leq-\infty)} = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \leftarrow$ 称之为 “不可能事件”.

$\underbrace{F(+\infty)}_{=P(X\leq+\infty)} = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \leftarrow$ 称之为 “必然事件”.



3.3 右连续性：$\lim_{x->x_0^+} F(x) = F(x_0)$