目录

行列式

1 二阶与三阶行列式

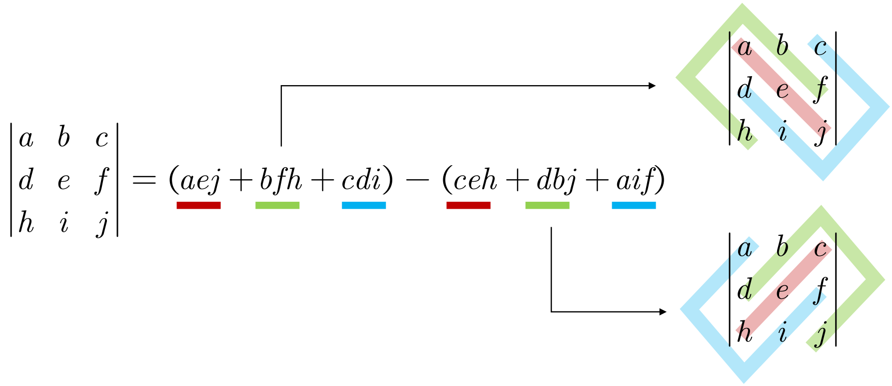
1.1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad}_{\text{主对角线}} - \underbrace{bc}_{\text{副对角线}}$$

1.2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} = (aej + bfh + cdi) - (ceh + dbj + aif)$$

即:



2 全排列和对换

【排列】:

由 1,2,...,n 组成的一个 "有序" 数组, 叫 "n 级排列".

注意: (1) 它是有" 顺序" 的. 比如: **1**23, 132, **2**13, 231, **3**12, 321. ← 这个就叫 "3 级排列".

(2) 它中间不能缺数, 必须是包含 1,2,3... 到 n 的全部这 n 个数字, 中间不能缺少任何一个数字.

那么 n 个数字, 它的全排列 (就是排列组合中的排列), 有多少种可能性呢? 那就是: 第 1 个数字的位置上, 可以从这种 n 个数字中任取一个出来放. 第二个位置上, 就是从 n-1 的数字中, 任取一个出来摆放..., 一共就有: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 种排列方式.

【逆序】:

"大的数字" 排在 "小的数字" 的前面, 就叫 "逆序". 比如: 4213, 4 这个大数字, 排在了 2 这个小数字的前面.

【逆序数 negative】:
就是逆序的总数, 你只要数一数有多少个 "逆序" 存在, 这个总数就是 "逆序数".
比如, 4213, 它的逆序有:
- 4 后面, 有 3 个数字比它小 (即 2, 1, 3)
- 2 后面, 有一个比它小 (即数字 1).
- 1 后面, 没有比它小的.
- 3 后面, 没有比它小的.
所以, 逆序的总数, 就是 3+1+0+0=4

我们用 N 来代表 "逆序数". 即写成: N(4213)=4
又如: N(1,2,3,...,n)=0 ← 它也叫 "n 级标准排列", 或 "n 级自然排列"

例

求逆序数: $N\left(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1\right)=?$
数一数: $\underbrace{n}_{\text{后面有}n-1\text{个比它小的}}\cdot\underbrace{(n-1)}_{\text{后面有}n-2\text{个比它小的}}\cdot(n-2)\cdot...\cdot 3\cdot\underbrace{2}_{\text{后面有 1 个比它小的}}\cdot 1$
全加起来就是: $(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ 个

【偶排列】:
如果 "逆序数 N" 是偶数, 就是 "偶排列".

【奇排列】:
如果 "逆序数 N" 是奇数, 就是 "奇排列".

【对换】:
即交换两个数. 如: 把 54<u>12</u>3 中的 12 交换一下, 就变成了 54<u>21</u>3
那么我们来看看它们的逆序数:
- $N\left(\underbrace{5}_{\text{后面有 4 个比它小的.}}\ 4\underbrace{1\ 2}\underbrace{\ 3}\right)=4+3+0+0+0=7$ ← 是奇排列
- $N\left(54\underbrace{2}_{\text{后面有 1 个比它小的}}\underbrace{1\ 3}\right)=4+3+1+0+0=8$ ← 是偶排列
所以我们就有定理: **一个排列中的任意两个元素, 做一次 "对换", 排列会改变其 "奇偶性".**
那么做两次对换呢? 奇偶性又回来了, 即奇偶性就不变了.

定理: 在所有的 n 级排列中 (一个 "n 级排列" 的排列数 = n!), 奇排列和偶排列, 各占一半, 即 $=\dfrac{n!}{2}$.

3 n 阶行列式

3.1 三阶行列式

首先看这个三阶行列式:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}
$$
$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$
$$
-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
$$

等号右边:
- 每一项的 “行标”(六项各自的行标, 分别是: 123, 123, 123, 123, 123, 123), 取的是 “标准排列”.
- **“列标”: 取 “排列的所有可能”(即所有可能的排列顺序, 都取到了). 比如, 4 阶行列式, 有 4 列, 那么 4 个数字的全排列的总数 = 4!=24 种不同的排序. 即这个 4 阶行列式展开后, 共有 24 项.** 即:

	列标是	逆序数是	
$+a_{11}a_{22}a_{33}$	123	$0+0+0=0$	偶排列
$+a_{12}a_{23}a_{31}$	231	$1+1+0=2$	偶排列
$+a_{13}a_{21}a_{32}$	312	$2+0+0=2$	偶排列
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	321	$2+1+0=3$	奇排列
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	213	$1+0+0=1$	奇排列
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	132	$0+1+0=1$	奇排列

可以看出: 各项前的正负符号, 是由 “列标” 的奇偶性 (奇排列还是偶排列) 决定的 (奇负, 偶正).
- 每一项, 就是从这个行列式的 “不同行, 不同列” 中, 取出 3 个元素, 来相乘.

上面这个, 即 “n 阶行列式” 的第一种定义方式. 也就是 “按行展开”.

3.2 n 阶行列式 – 按行展开

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{j_1j_2\dots j_n}}_{\text{把所有项，即共}n!\text{项，全加起来}} \underbrace{(-1)^{N(j_1j_2\dots j_n)}}_{\text{每一项前的正负号，}} \underbrace{a_1j_1 \cdot a_2j_2 \cdot \dots \cdot a_nj_n}_{\text{这个整体，就是每一项.}}
$$

每一项前的正负号，
由列标排列，
即 $j_1j_2\dots j_n$
的奇偶性决定

这个整体，就是每一项.
这每一项的行标，取“标准排列” $1, 2, 3 \dots n$.
这每一项的列标，取 $n!$ 的全排列.

注意： 本处公式中这个列标，
看上去好像是按 $1, 2, 3, \dots, n$ 的顺序来排的，
其实不是这样！
而是我们并不知道这每一项的列标到底是怎么排的，
我们只知道它一定是 $n!$ 中的一种排列顺序而已.
即这每一项的列标的数字顺序， 是不固定的.

n 阶行列式的展开, 一共有多少项呢? 共有 n! 项.

行列式, 用 D (determinant) 来表示. 写成: $D = |a_{ij}|$

例

determinant : n. (formal) a thing that decides whether or how sth happens 决定因素；决定条件

只有一个元素的行列式, 就等于该元素本身, 即: $|a_{11}| = a_{11}$
|8|=8
|-1|=-1

例

$$\begin{vmatrix} & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{N(2341)}\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = -24$$

3.2.1 下三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{下三角行列式}} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

3.2.2 上三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{上三角行列式}} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

3.2.3 对角形行列式 = 主对角线上元素的乘积

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{对角形行列式}} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}}_{\text{即主对角线元素相乘}}$$

3.2.4 伪下三角行列式 $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \dots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} \quad \underbrace{a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}}_{\text{“右上”到“左下”的对角线上元素的乘积}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$$

3.2.5 伪上三角行列式 $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & a_{2,n-1} & \\ \dots & \dots & & \\ a_{n,1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} \underbrace{a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n,1}}_{\text{“右上”到“左下”的对角线上元素的乘积}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdot a_{n,1}$$

4 行列式的性质

5 行列式按行（列）展开

6 n 阶行列式

7 行列式的性质

7.1 性质 1: 行列互换, 其值不变. 即 $|A| = \left|A^T\right|$

7.2 性质 2: 某行（列）元素全为零, 则行列式为零

7.3 性质 3: 两行（列）元素相等, 或对应成比例, 则行列式为零

7.4 性质 4: 某行（列）元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和

7.5 性质 5: 两行（列）互换，行列式的值反号

7.6 性质 6: 某行（列）元素有公因子 $k\,(k \neq 0)$, 则 k 可提到行列式外面去

7.7 性质 7: 某行（列）的 b, 倍加到另一行（列）上去, 行列式的值不变

8 行列式的展开定理

8.1 余子式 M_{ij}

8.2 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,M_{ij}$

8.3 按某一行（列）展开的展开公式:

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ \ (j = 1, 2, ..., n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ \ (i = 1, 2, ..., n)$

9 具体型行列式的计算: a_{ij} 已给出

9.1 化为 “12+1” 型行列式

9.1.1 主对角线行列式

9.1.2 副对角线行列式

9.1.3 拉普拉斯展开式

9.1.4 范德蒙德行列式

9.2 加边法

9.3 递推法 (高阶 $\rightarrow$ 低阶)

9.3.1 建立递推公式, 即建立 D_n 与 D_{n-1} 的关系

9.3.2 D_n 与 D_{n-1} 要有完全相同的元素分布规律, 只是 D_{n-1} 比 D_n 低了一阶

9.4 数学归纳 (低阶 $\rightarrow$ 高阶)

9.4.1 第一数学归纳法

9.4.2 第二数学归纳法

10 抽象型行列式的计算: a_{ij} 未给出

10.1 用行列式性质

10.2 用矩阵知识

10.2.1 设 C=AB, A,B 为同阶方阵, 则 $|C| = |AB| = |A||B|$

10.2.2 设 C=A+B, A,B 为同阶方阵, 则 $|C| = |A + B|$, 作恒等变形, 转化为矩阵乘积的行列式

10.2.3 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$, $|(A^*)^*| = \left||A|^{n-2}\,A\right| = |A|^{(n-1)^2}$