极限

Table of Contents

---

1. 基础预备

f:D → 实数域R
表示从D 到 R 的映射.

f(X自变量) = y因变量.
- f: 是函数规则
- f(x) : 就是某个特定的具体的函数值了, 即 y值.

1.1. [x] ← 表示不超过 x 的最大整数. 如:

- [3.1] = 3
- [5] = 5 ← 后面的5 没有超过前面的5, 它们是相等关系
- [0] = 0
- [-1.6] = -2

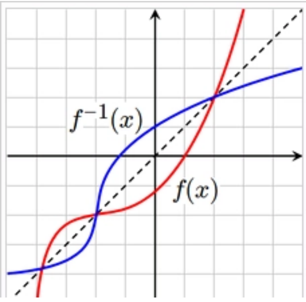
1.2. 存在 ∃, 任意 ∀

∀ (Arbitrary, Any)
∃ (Exist)

1.3. 反函数

- "原函数f", 是从定义域x 向 值域y 映射. 即, 输入x值, 输出y值.
- 而"反函数 f^{-1}", 是倒过来, 从值域y, 向 定义域x 映射. **即, 输入y值, 输出x值. 相当于时间倒流, 把原函数的功能倒过来**. 很像线性代数中的"逆矩阵"变换功能.

f 和 f^{-1} 的图像, 关于 y=x 轴对称



Example 1. 标题

例如：有函数 y = 3x+5, 即输入x, 输出y. 它可以变为:

$$\begin{aligned} 3x &= y-5 \\ x &= \frac{y-5}{3} \leftarrow \text{这样, 就是输入}y\text{, 输出}x\text{的形式了, 即就变成了 " 反函数 ".} \end{aligned}$$

但一般我们习惯于将输入值, 用x表示; 输出值，用y值表示, 所以上面的反函数, 就索性写成 $y=\frac{x-5}{3}$, 但你不要混淆这里的x和y的意义. 这里的x是原y值, 这里的y是原x值.

1.4. 两个函数的运算

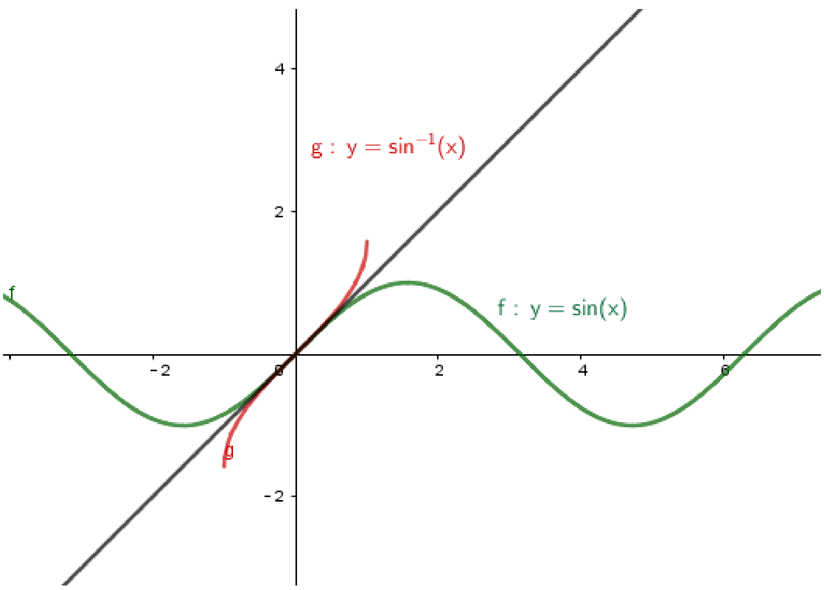
$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm f(g) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

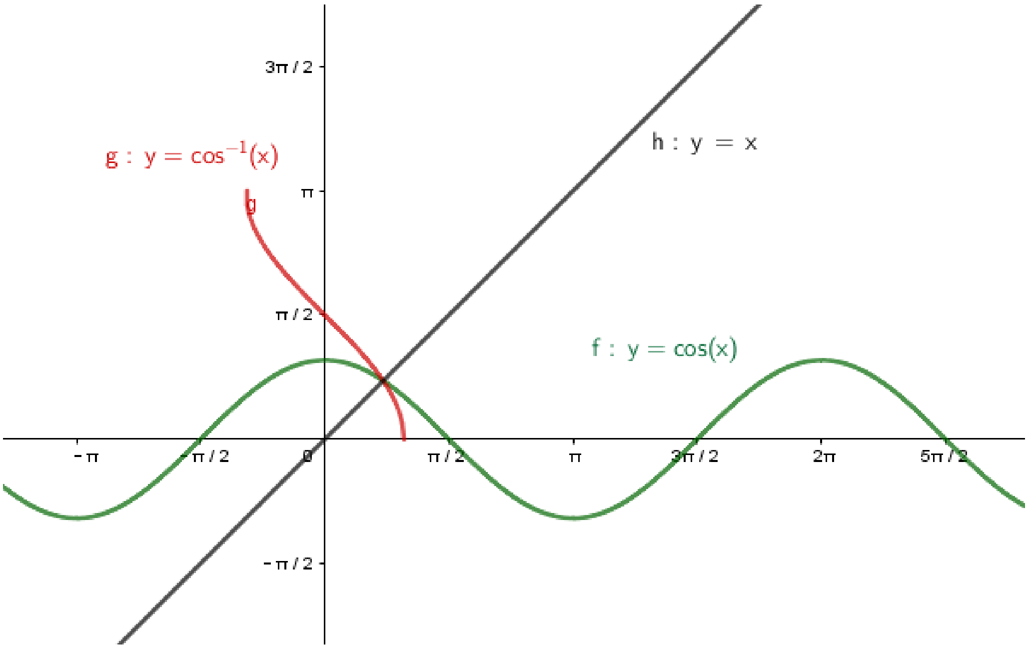
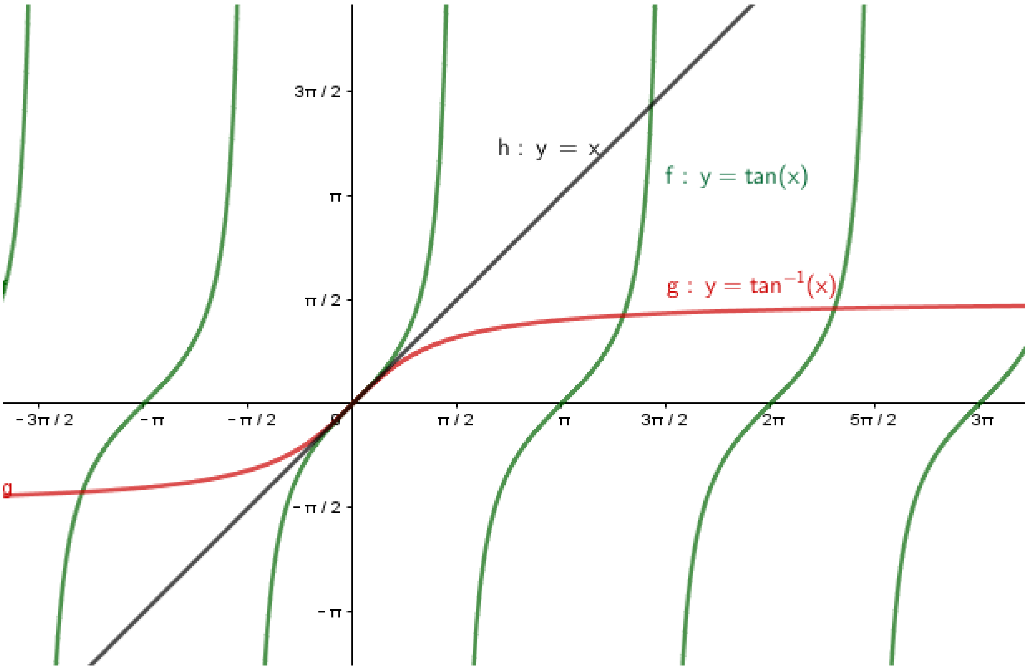
1.5. 初等函数

Header 1	**例如**
$y=x^a$ power function. 幂函数	$y=x^2$ $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$, 此时$x \neq 0$
$y=a^x$ (a>0 且 a≠1) exponential function 指数函数	自变量 x 在指数上. 如: $y=2^x$

Header 1	例如
$y=\log_a x \ \ (a>0 \text{ and } a\neq 1)$ Logarithmic Function 对数函数	$$\log_{10}Y=\lg Y \Rightarrow X$$ $\leftarrow$ 即从底数a和幂Y, 来倒推出原底数X. 即原式为：$10^X=Y$ $$\log_e Y=\ln Y \Rightarrow X$$ $\leftarrow$ 即原式为：$e^X=Y$ 意思就是: 如果有 $a^X=Y$, 则有 $X=\log_a Y$ → a是底数 → X是指数 → Y是幂（power）：是指数运算的结果
三角函数	

1.6. 反三角函数

原函数	← 其反函数
$y=\sin x$	对于原函数 $y=\sin x$ 它的反函数其实是 $x=\ldots y$ (即: 输入y值, 输出x值)这种形式的. 但 ... 这块是什么呢? 我们就引入一个符号, 对应于"将 sin 效果反过来的操作(即 时光倒流)". 该符号就取名叫 arcsin. 于是, 就能将 $y=\sin x$ 的反函数, 写成: $x=\arcsin y$ 的形式了.  如图, 注意: 为什么反函数, 只有一段? 因为如果像 sin那样(循环)延长的话, 就会造成: 一个x值, 会对应n个y值, 不符合函数的定义. 所以, 我们就只取一段.

原函数	← 其反函数
$y = \cos x$	$x = \arccos y$ 
$y = \tan x$	$x = \arctan y$ 

2. 极限

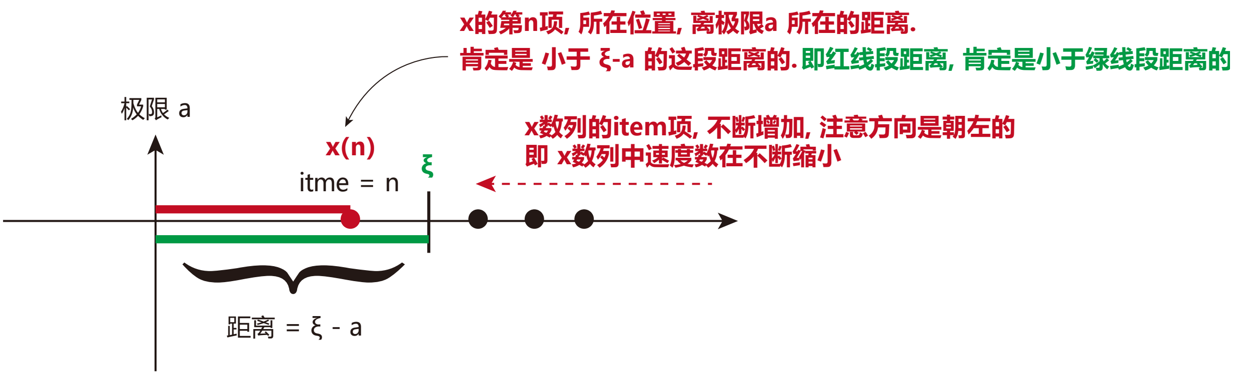
2.1. ε-δ语言 (epsilon-delta语言)

epsilon-delta 语言, 是数学分析（历史上称为“无穷小分析”）中, 用来严格定义"极限"概念的数学语言.

与 ε - δ 语言类似的, 是 ε - N 语言。它是用来定义"数列极限"的严密化语言.

2.2. 极限

"极限"的定义是: 对于一个数列 x, 假设它的数值不断缩小, 趋近于某个极限a. 在数轴上, 如果存在一个任意小的数ε, 则随着数列x里的item项的增加, 一定会有一个item, 即x_n, 它与极限a 的距离, 一定会小于 ε与极限a 的距离.
换言之, 无论ε离极限a 的距离有多近, 数列 x 一定会有 第item 项 能比 ε与a 的关系更密切! 更接近a.



即: 给定①任意一个极小值ε, ②一个确定的极限值, ③一个数列(里面的元素值不断变小). → 则随着数列中item的增张, 必定会有一个 item项, 该"item项的值"与"极限值"的距离, 必定会小于 "极小值ε"与"极限值"之间的距离 (这个距离其实就是ε本身).

Example 2. 标题

例如: 有数列 $2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$ 的极限是 1. 问, 数组中取到哪一项item 时(取到第n项, n=?时), 它与极限之间的距离, 就小于"任意最小值ε"了呢?

根据极限的定义, 数列一定存在一个item项, "其值,与极限间的距离", 小于"给出的任意最小值ε".

即:

$$|\text{数列中必有一项}x_n - \text{极限值}1| < \text{任意最小值}\varepsilon \leftarrow x_n\text{与本例极限}1\text{之间的距离,要用绝对值表示,免得它是个负}$$

$$\text{本例数列的通项是}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\text{,把它带入上式}$$

$$\begin{aligned} |\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1| &< \varepsilon \\ |\frac{(-1)^{n-1}}{n}| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

说明数列中的 item 项数n, 只要达到 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 这项时,它的值 与极限间的距离, 就小于一开始给出的"任意最小值ε".

不过, 还有个问题, $\frac{1}{\varepsilon}$ 未必是个整数, 而 item 项是要求整数的. 那么就要把 item项稍微调整一下, 就取 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 就行了, 即: 先把 $\frac{1}{\varepsilon}$ 取整数, 但会小于 $\frac{1}{\varepsilon}$ (比如, 3.1取整数, 会变成 3), 所以我们还要给它加上1位, 即变成 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 项 (即 n = 3+1 = 4, 第4项), 就是整数了. (数列中取第4项, 就能比ε更小.)

Example 3. 标题

例如：有数列 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$,极限为0.

根据极限定义,就应该是当数列达到某一项$item$时,其值x_n,与极限0之间的距离,必定会小于任意最

$|x_n - 0| < \varepsilon$

将数列的通项公式代入进去

$$|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon$$

$$(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

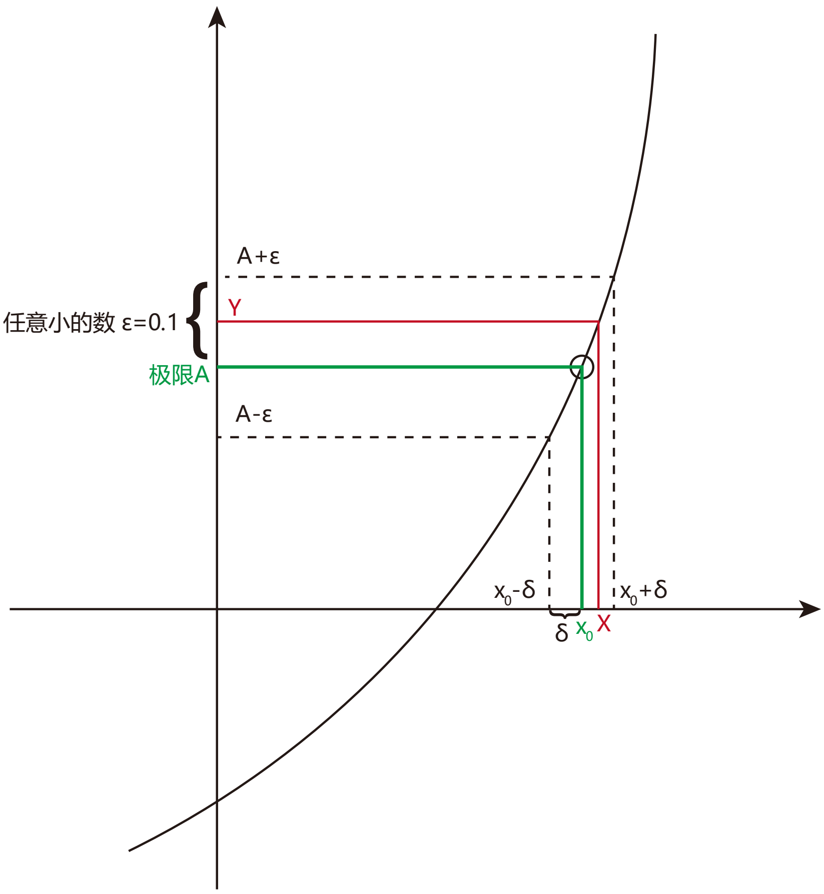
$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$$

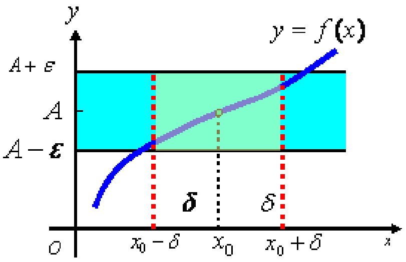
但$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$未必是整数,所以我们还要处理一下,把它取整,再加上1位

即：n就取$[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1] + 1$

只要数列的$item$项达到这个n的数值,它与极限0之间的距离,就小于ε了.

2.3. 函数的极限

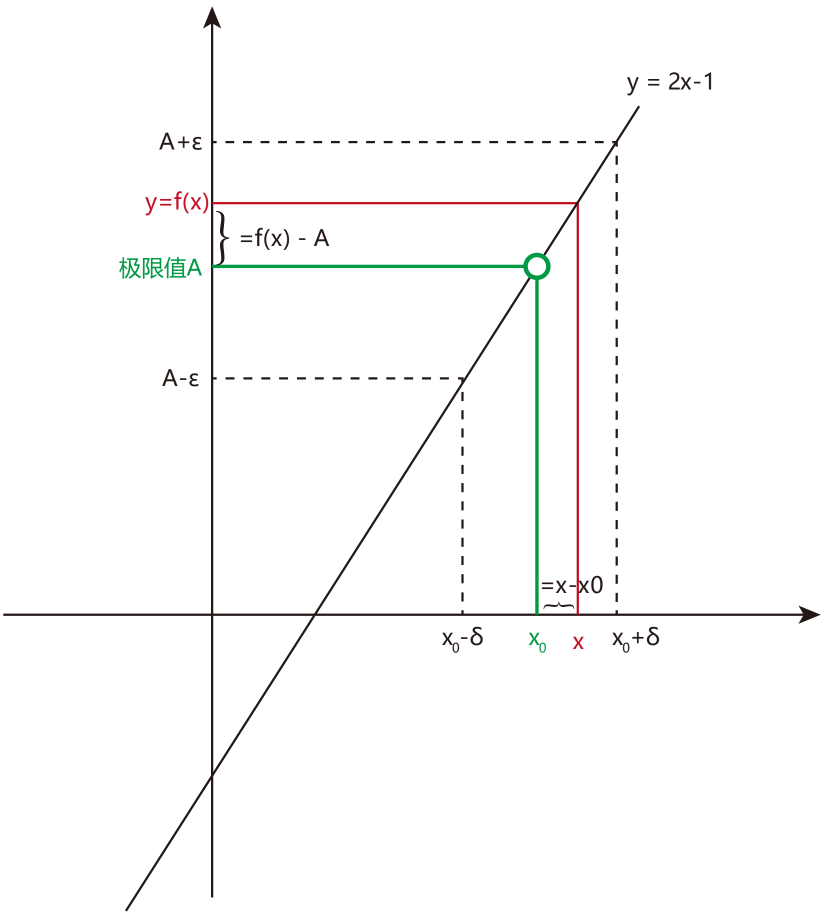




用上图来解释: 若"函数输出值y"的极限值是A (即 $\lim_{x \to x0} f(x) = A$), 并我们在y轴上 A的附近给出一个任意小的值ε, 则我们一定能在输入值x_0 的附近, 即在 $x_0 - \delta$ 到 $x_0 + \delta$ 的这段范围内, 找到一个x值, 它所对应的y值, 能满足 $f(x) - A < \varepsilon$.

Example 4. 标题

例如: y = 2x-1, 当输入值x 取 $x_0 = 1$时, 输出值y的极限值就是1 (即绿线部分), 问 x轴上的δ 取值是什么?



先看y轴, 从图上可以知道: 看y轴, "绿线"与"红线"间的距离, 小于"绿线"与"ε"的距离. 即:

$$\begin{aligned}
&|f(x) - \text{极限值}A| < \varepsilon \\
&|(2x-1) - A| < \varepsilon \leftarrow \text{本例已知道,当}x_0 = 1\text{时,}y\text{的极限值}(A)\text{是}1\text{,代入进去} \\
&|2x-2| < \varepsilon \\
&2|x-1| < \varepsilon \\
&|x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ①
\end{aligned}$$

再看x轴, 绿线到δ 间的距离, 要小于绿线(x_0处)到红线(x处)的距离. 即:

$$\begin{aligned}
&0 < |x - x_0| < \delta \leftarrow \text{绿线}x_0\text{就是}1\text{,代进去} \\
&0 < |x-1| < \delta \quad ②
\end{aligned}$$

把公式② 和 ① 连起来看, 就能看出: $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

2.4. 左极限 & 右极限

左极限

是从x轴左边, 向"y值极限点 在x轴上的位置"逼近.

写做:

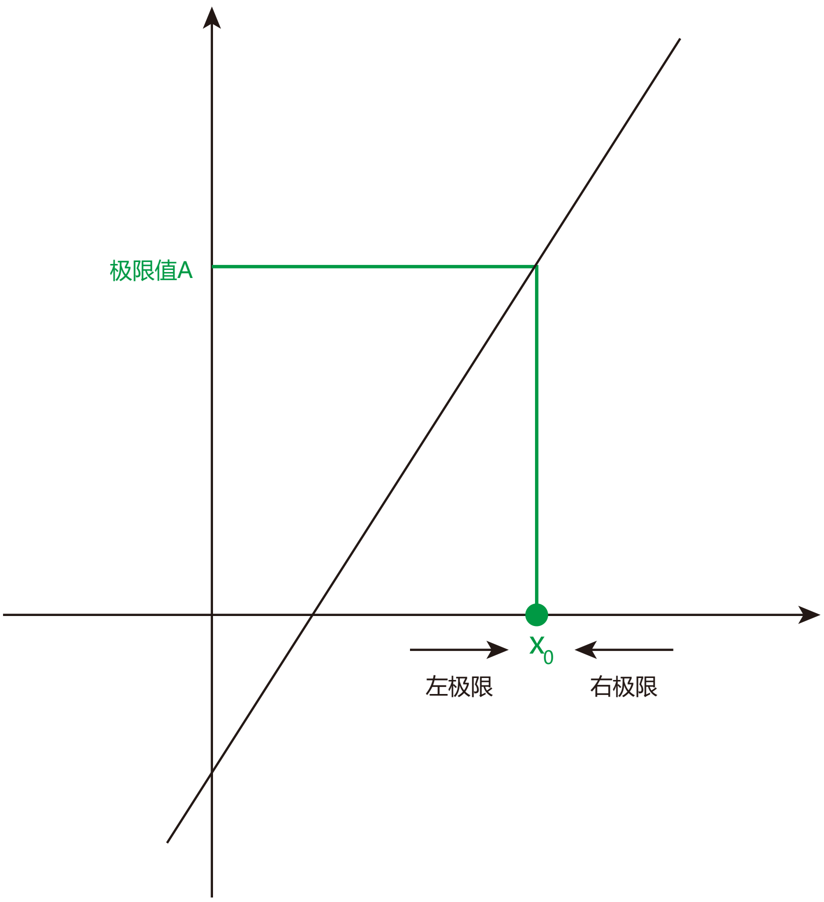
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y\text{轴上的极限值}A$$

右极限

是从x轴右边, 向"y值极限点 在x轴上的位置"逼近.

写做:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = y\text{轴上的极限值}A$$



当 x 趋近于 → x_0 时, y轴上的极限 (即 f(x))存在的"充要条件"是 ⟵⟶ 左右极限均存在, 且相等.

2.5. 单调有界数列, 必有极限.

收敛的, 它必有界.
但反过来则不成立, 即 有界的, 未必收敛. (如sin函数, 永远在上下震荡, 而不会收敛到一个数值上.)

2.6. 一个数列是收敛的, 其必要充分条件是:

有一个数列 $\{x_n\}$, 给出任意小的一个数ε, 当数列到达某一项 item = N 时, 其后面的任意两项 m 和n (即 m>N , n>N), 若满足这个条件: $|x_n - x_m| < \varepsilon$, 则该数列 $\{x_n\}$ 就是收敛的.
换言之, 就是说明 这个数列后面的点, 越来越密, 两个点之间的距离永远能达到比 ε 还要小的程度.
