目录

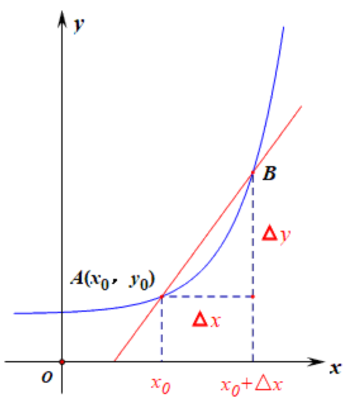
导数 Derivative

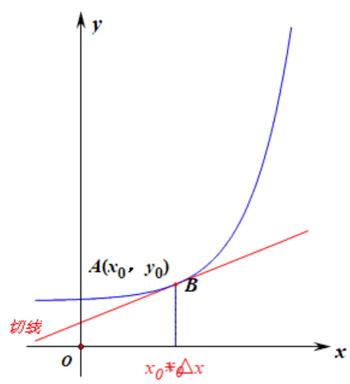
2022 年 12 月 8 日

第一部分　什么是导数?

某点处的“导数”, 就是该点处“切线的斜率”.

导数, 就是一个“极限值”, 比如, y 在点x_0 处的导数, 就是: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$





可导, 就意味着图像很”光滑”. 即图像没有”尖角”存在 (因为尖角处的左右导数不相等).

并且, 切线不能垂直于x轴. 如果切线是垂直于x轴的, 它的斜率就会是 $+\infty$或 -∞了.

x_0 点处的导数, 其实可以有下面4种写法来表示:

(1) $y'|_{x=x_0}$

(2) $f'(x_0)$

(3) $\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$

(4) $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

“位置”的瞬时变化率(变换趋势, 能预测未来), 就是“速度”. 所以速度是位置的导数.

“速度”的瞬时变化率, 就是“加速度”. 所以“加速度”是“速度”的导数. “加速度”就是“位置”的二阶导.

单侧导数, 就是从“某一侧”逼近某一x点时, 该点的切斜斜率.

所以, 左导数, 就是“从左侧向右”逼近了. 右导数, 就是“从右边向左”逼近了.

- 左导数 : $f_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- 右导数 : $f_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

第二部分　导数公式

1　常用的导数

1.1　(常数$C)' = 0$

常数不会变化, 自然没有“瞬时变化率”存在, 所以常数的导数就=0.

1.2　$(x^n)' = nx^{n-1}$

(1) 当指数 n=1时, 其导数=1.
(2) 当 n>1 时, 其导数是 $(x^n)' = nx^{n-1}$

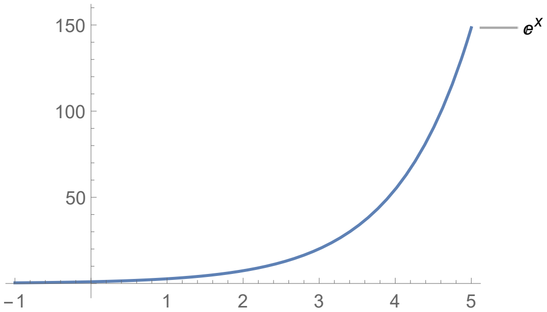
例

求 $y = \dfrac{1}{x}$ 在点(1/2, 2)处的切线的斜率(即导数), 并求出该切线的方程.
其导数是: $y' = \left(x^{-1}\right)' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2}$
然后把点(x=1/2, y=2) 代入进去, 得到: $y' \mid_{x=\frac{1}{2}} = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -4 \leftarrow$ 这个数值, 就是函数在点(1/2, 2)处的切线的斜率.
然后再套用直线的“点斜式方程” $y - y_1 = k(x - x_1)$
本例的切线即: $y - \underbrace{y_1}_{=2} = \underbrace{k}_{\text{即}y'=-4}\left(x - \underbrace{x_1}_{=\frac{1}{2}}\right)$

1.3　$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

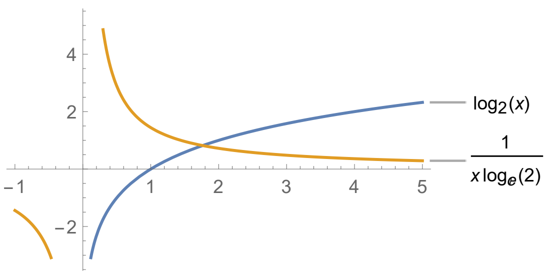
即直接后面跟个尾巴: ln a
例如, $(2^x)' = 2^x \ln 2$

1.4 $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$



1.5 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

即把 x 提到前面去, 把log 变成 ln, 整体再放在分母上. 分子为1.



1.6 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

例如: $(\log_e x)' = \frac{1}{x \underbrace{\ln e}_{=\log_e e=1}} = \frac{1}{x}$

2 反函数的导数：$\boxed{[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{\text{原函数的导数}f'(x)}}$

反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈“倒数关系”.

原函数是 y=f(x), 其反函数是 x=f(y), 则, 反函数的导数, 就是“原函数导数”的倒数.

换言之, 原函数的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, , 则其反函数的导数就是 $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

“原函数”和“反函数”, 它们“导数”的乘积 =1.

“原函数”与其“反函数”的图像, 是关于 y=x 对称的.

3 三角函数的导数

3.1 $(\sin x)' = \cos x$

3.2 $(\cos x)' = -\sin x$

3.3 $(\tan x)' = \sec^2 x$

3.4 $(\cot x)' = -\csc^2 x$

3.5 $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

3.6 $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

4 反三角函数的导数

4.1 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2 $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4.4 $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

第三部分 求导的各种方法, 方法论

5 求导法则：和差积商