目录

第一部分 数学期望 mathematic expectation **2**

1 加权平均数: $\overline{x}=\frac{\sum\left(x\cdot\text{对应权重}w\right)}{\sum\left(\text{对应权重}w\right)}$ **2**

2 “期望”：是对长期价值的数字化衡量. **2**

3 “离散型” 随机变量的 “数学期望”: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k P_k)$ **3**

4 “连续型” 随机变量的 “数学期望”：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\cdot f\left(x\right)\right]dx$ ← 其中的 f(x) 是 “概率 (密度) 函数”. **4**

5 “随机变量函数” 的 “数学期望” **6**

5.1 由 “离散型随机变量 X” 构造出的新函数 Y=g(X) : 其数学期望是: $E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}\left[g(x_i)\cdot P_i\right]$ 6

5.2 由 “连续型随机变量 X” 构造出的新函数 Y=g(X) : 其数学期望是: $E\left(Y\right)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\left[g\left(x\right)f\left(x\right)\right]dx$ 6

文件名

第一部分　数学期望 mathematic expectation

1　加权平均数: $\overline{x}=\frac{\sum\left(x\cdot \text{对应权重} w\right)}{\sum\left(\text{对应权重} w\right)}$

加权平均数, 和本章要讲的 “数学期望”, 没什么关系. 但两者的公式, 确有相似之处. 所以就把 “加权平均数” 也写在这里.

若 n 个数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的 “权重”, 分别是 $w_1, w_2, ..., w_n$ ，那么, 这 n 个数的 “加权平均值” 就是:
$\overline{x}=\frac{x_1 w_1+x_2 w_2+\ldots+x_n w_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}$. 即: $\overline{x}=\frac{\sum\left(x\cdot \text{对应权重} w\right)}{\sum\left(\text{对应权重} w\right)}$

例

各考试	平时测验 = 得到了 80 分	期中考试 =90 分	期末考试 =95 分
权重	0.2	0.3	0.5

则, 你成绩的 “加权平均值” :
$\overline{x}=\frac{\sum\left(x\cdot \text{对应权重} w\right)}{\sum\left(\text{对应权重} w\right)}=\frac{(80\cdot 0.2)+(90\cdot 0.3)+(95\cdot 0.5)}{0.2+0.3+0.5}=90.5$

2　“期望”：是对长期价值的数字化衡量.

各个股票的价格有涨有跌, 那你怎么判断它们各自的价值, 到底几何? 方法就是 — 数学期望.
“期望” 是对 “长期价值” 的数字化衡量. — 即 “长期中会得到的数学均值”. 即在长期中 (无数次试验) 的状态下, 能取到的稳定结果 (即均值) 为何.

“数学期望” 之所以有效, 是因为 “大数定律” 在背后起作用.
- 大数定律把 “随机变量 x” 在局部上的 “随机性数值变化”, 固定到 “整体上的确定性”，也就是概率.
- 而 “数学期望”, 又把 “概率” 代表的长期价值, 变成了一个具体的数字，方便我们比较.

几乎所有的金融产品的价值, 如基金, 股票, 都可以用 “数学期望” 来衡量它们是否值得投资. 如果 “赢的期望” 超过 “输的期望”，即**数学期望是正的, 它就值得长期投资.**
对于游戏开发者来说, **如何保证游戏的平衡性?** 即不让某些游戏中的职业过强或过弱? **方法就是衡量每个角色职业能活下来的 “数学期望”. 然后调整参数, 达到 “数学期望” 上的平衡.**

不过注意: 数学期望, 有时也会有“主观价值判断”的涉入. 因为每个人, 对同一样事物赋予的“价值高低”的判断不同, 所以不同个体的数学期望, 也不一样. 比如, 俄罗斯轮盘赌, 那些把赢钱看得比自己生命更重的人, 他们赋予这个游戏的数学期望就更高.

3 “离散型”随机变量的“数学期望”: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k P_k)$

该公式的意思就是: 将该随机变量的一切可能的“取值”, 各自乘以其对应的“概率”, 然后将这些乘积“求总和”. 如果该求和, 能得到一个“绝对收敛”的数, 那么这个收敛数, 就是该“离散型随机变量”的”数学期望 E”. 记为 $E(x)$.
它其实是简单算术平均的一种推广，类似“加权平均”。

具体就是:
离散型随机变量 X 的取值为: $X_1, X_2, ...X_n$, 其每个 X 的取值, 对应的概率为 $p(X_1), p(X_2), ..., p(X_n)$.
这些概率, 也可理解为数据 $X_1, X_2, ...X_n$ 出现的频率 $f(X_i)$. 则:

$$\boxed{X_1 \cdot p(x_1) + X_2 \cdot p(x_2) + ... + X_n \cdot p(x_n) = \sum_{k=1}^{n}(x_k \cdot p_k) = \underbrace{E(X)}_{\text{随机变量}X\text{的期望}}}$$

← 这个公式和“加权平均数”的公式很像, 只不过是把“权重”换成了“概率”.

例

你在一游戏中, 要么会得到 0 元, 要么 100 元, 具体概率如下. 则你的期望为?

X(元)	0	100
P(概率)	3/4	1/4

$E(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k \cdot p_k)=\left(0 \cdot \frac{3}{4}+100 \cdot \frac{1}{4}\right)=25$元

例

某股票, 现在价格 50 元. 它有 40% 的概率涨到 60 块, 有 30% 的概率保持不变，还有 30% 的概率跌到 35 块. 即:

收益 X(元)= 未来价格-现在价格 (50 元)	=60-50	=50-50	=35-50
P	0.4	0.3	0.3

那么它未来涨跌收益的“数学期望”就是:
$E(X)=(60-50)\cdot 0.4+(50-50)\cdot 0.3+(35-50)\cdot 0.3=-0.5$
这个收益的期望, 是负数. 说明长期来看, 这只股票趋向于是亏钱的, 不值得买.

例

投篮得分 X ↓	← 命中概率	← 数学期望
近距离篮下投, 得 2 分	0.55	2×0.55=1.1 分
中距离投篮, 得 2 分	0.45	2×0.45=0.9 分
远距离投三分球, 得 3 分	0.35	3×0.35=1.05 分

每种进攻方式的价值, 原本没办法比较，有了“数学期望”后, 就可以进行比较了. 所以要多采用“近距离”和“远距离”投篮 (因为它们的数学期望值更高), 少投”中距离”.
事实上, 在 NBA 篮球联赛中, 不少球队就是照这个思路制定策略的.

例

某城市, 家庭中拥有孩子的数量, 是一个随机变量 X, 取值为 0,1,2,3.

	孩子数量 X=0	x=1	x=2	x=3
概率	P=0.01	P=0.9	P=0.06	P=0.03

该城市的家庭, 孩子数量的期望就是:

$E(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.01)+(\underbrace{1}_{1\text{个孩子}}\cdot\underbrace{0.9}_{\text{概率是}0.9})+(2\cdot 0.06)+(3\cdot 0.03)=1.11$

例

有甲乙两人,

- 甲会生产出“次品的数量”和“相应概率”的数据为:

次品数量 X_1	0	1	2	3
概率 P	0.3	0.3	0.2	0.2

- 乙会生产出“次品的数量”和“相应概率”的数据为:

次品数量 X_2	0	1	2	3
概率 P	0.2	0.5	0.3	0

问: 两人谁的技术水平高? 那么我们就来看他们两人各自的“期望”:

- “甲生产出次品的数量”的期望是:

$E(X_1)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.3)+(1\cdot 0.3)+(2\cdot 0.2)+(3\cdot 0.2)=1.3$

- “乙生产出次品的数量”的期望是:

$E(X_2)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\cdot p_k)=(0\cdot 0.2)+(1\cdot 0.5)+(2\cdot 0.3)+(3\cdot 0)=1.1$

所以, 甲的次品期望 > 乙的. 即乙的水平高.

4 “连续型”随机变量的“数学期望”: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x\cdot f(x)]\,dx \leftarrow$ 其中的 f(x) 是“概率 (密度) 函数”.

如果这个积分: $\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\cdot\underbrace{f(x)}_{\text{概率函数}}\right]dx}$ 的值, 是绝对收敛的. 则, 该积分的值, 就是“连续型”随机变量的“数学期望”.

例

求概率函数 $f(x)=\begin{cases}2x\ (0<x<1)\\ 0\ (else)\end{cases}$ 的期望值.

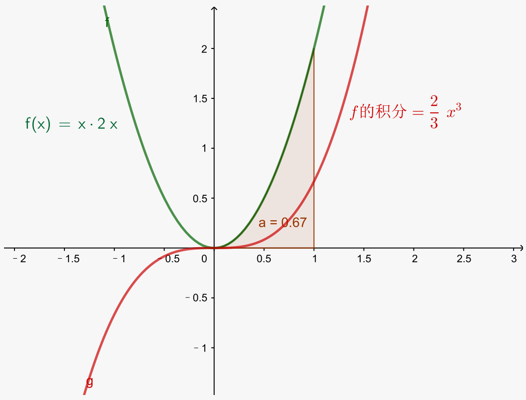
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\cdot\underbrace{f(x)}_{\text{概率函数}}\right]dx$$

$$=\int_{x\text{的下限}=0}^{x\text{的上限}=1}\left[x\cdot\underbrace{2x}_{\text{即本例的概率函数}f(x)}\right]dx$$

$$=\int_0^1 2x^2dx=2\int_0^1 x^2dx \leftarrow \text{根据公式: }\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=2\cdot\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}x^3\,|_0^1=\frac{2}{3}$$



例

某产品, 根据寿命长短 (用随机变量 X 表示), 分为三档, 每档有不同的定价.
该随机变量 X(寿命), 符合 $\lambda=\frac{1}{10}$ 的“指数分布”.
(别忘了, 指数分布的“概率函数”公式是: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\ (x\ge 0)\\ 0\ (x<0)\end{cases}$)

根据寿命, 分档的价格是:

寿命 (年)	$X\le 1$	$1\le X\le 2$	$2\le X\le 3$	$X>3$
价格 (元)	1500	2000	2500	3000

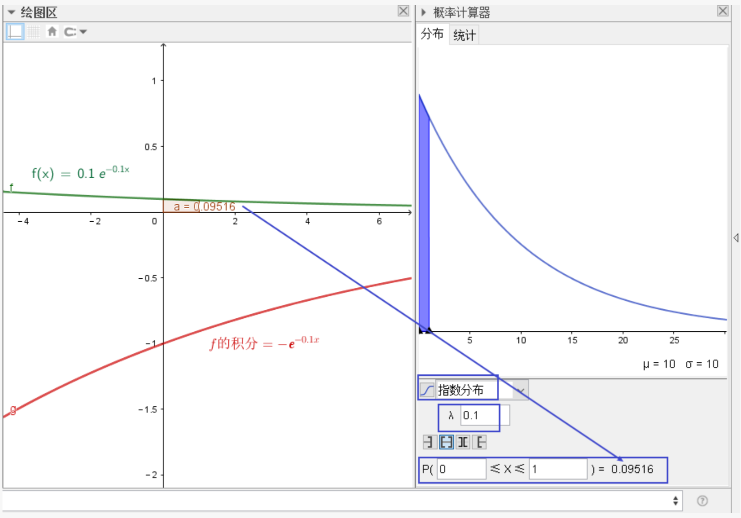
我们要先算出, 产品在“每个价格区间”的概率是多少? 因为下面求“价格期望”时, 要用到这些概率数值.

$$P\{\text{寿命}X\le 1\text{年}\}=\int_{0\text{年寿命}}^{1\text{年寿命}}\underbrace{\left(\underbrace{\lambda}_{=\frac{1}{10}}e^{-\lambda x}\right)}_{\text{指数分布的概率函数}f(x)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.0952$$

$P\{1<X\le 2\}=\int_1^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.0861$
$P\{2<X\le 3\}=\int_2^3\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\int_2^3\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.0779$
$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx=\int_3^{+\infty}\left(\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}\right)dx=0.7408$

现在就有:

寿命 X(年)	(0-1]	(1-2]	(2-3]	>3
价格 Y(元)	1500	2000	2500	3000
概率 P	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408



所以, 该产品的价格期望值, 就是:

$$
\begin{aligned}
E(\text{价格}Y) = & \left(\underbrace{1500}_{\text{“属于该寿命段”产品的价格}} \cdot \underbrace{0.0952}_{\text{“会属于该寿命段产品”的概率}} \right) \\
& + (2000 \cdot 0.0861) \\
& + (2500 \cdot 0.0779) \\
& + (3000 \cdot 0.7408) \\
& = 2732.15\text{元}
\end{aligned}
$$

---

5 “随机变量函数” 的 “数学期望”

即用随机变量 X, 构造出新的函数 Y=g(X), 来求这个 “新函数 Y” 的数学期望.

5.1 由 “离散型随机变量 X” 构造出的新函数 Y=g(X) : 其数学期望是: $E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1} [g(x_i) \cdot P_i]$

	数学期望
“离散型” 的随机变量 X	$E(X) = \sum (X_i P_i)$
由 “离散型随机变量 X” 构造出的新函数 Y=g(X)	$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1} [g(x_i) \cdot P_i]$

例

有 “离散型” 随机变量 X :

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

由 X 构造出的新函数: Y=4X+1, 就有:

Y=4X+1	$4 \times (0) + 1 = 1$	$4 \times (1) + 1 = 5$	$4 \times (2) + 1 = 9$
P	0.1	0.6	0.3

则, Y 的期望就是:
$E(Y)=E(g(X))=\sum_{i=1}[g(x_i)\cdot P_i]=(1\cdot 0.1)+(5\cdot 0.6)+(9\cdot 0.3)=5.8$

5.2 由“连续型随机变量 X”构造出的新函数 Y=g(X)：其数学期望是:

$E\left(Y\right)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}[g\left(x\right)f\left(x\right)]dx$

	数学期望
“连续型”的随机变量 X	$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x\cdot f(x)]dx$
由“连续型随机变量 X”构造出的新函数 Y=g(X)	$E(X)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)\cdot f(x)]dx$

例

有“连续性”随机变量 X, 其概率函数是: $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (0\le X\le 2)\\ 0 & (else)\end{cases}$

由 X 构造出的新函数 Y 是: $Y=4X+1$
则: Y 的数学期望就是:

$$\begin{aligned}E(Y)&=E\left(4X+1\right)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[g(x)\cdot f(x)]dx\\&=\int_{0}^{2}[\underbrace{(4X+1)}_{\text{即}g(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{即}f(x)}]dx=5\end{aligned}$$