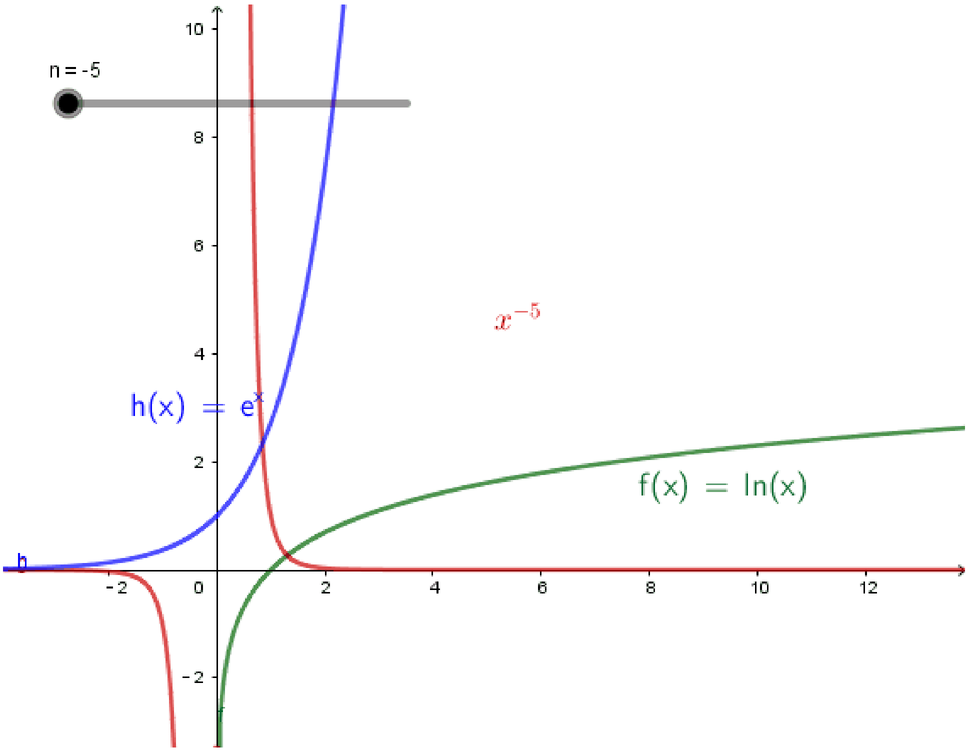
无穷大 & 无穷小

Table of Contents

1. 无穷大

有规律: $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x < \lim\limits_{x \to \infty} x^n < \lim\limits_{x \to \infty} e^x$



2. 无穷小

无穷小是一个趋势, 而不是一个确定的数.

$$\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}\text{未必是个无穷小, 要看分母和分子, 谁缩小地更快.}$$

无穷大∞ : 可以是"正无穷大", 也可以是"负无穷大". 所以:

Header 1	Header 2
∞ + ∞ = ?	结果未必是 ∞, 因为前后的正负号可能相反. 一个是正无穷, 一个是负∞.
∞ - ∞ = ?	结果也是未知的
$\infty \times \infty = \infty$	
$\frac{\infty}{\infty} = ?$	
$c \times \infty$	如果 常数c=0, 结果就是0

Header 1	Header 2
无穷小 * 无穷大 = ?	结果未知. 即可能是无穷小, 也可能是0, 也可能是无穷大.

2.1. 性质

2.1.1. 有限个"无穷小"的和, 是无穷小.

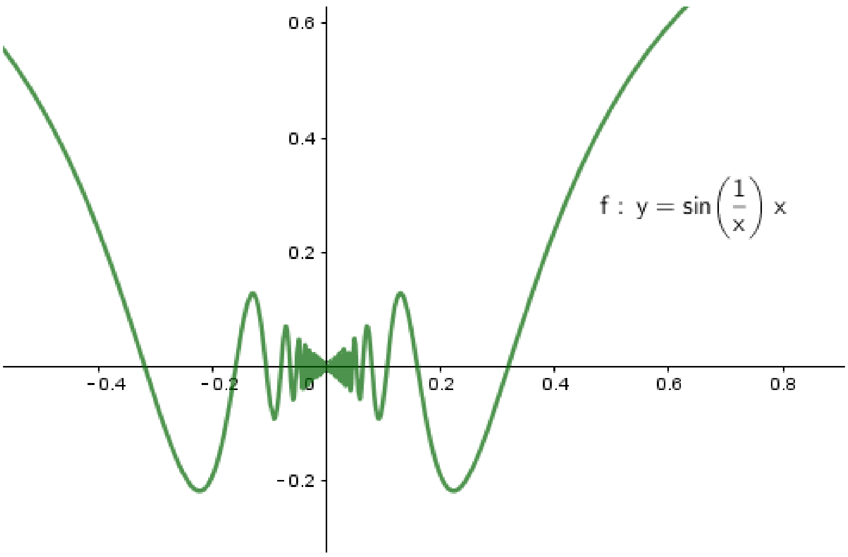
2.1.2. 有界函数 * 无穷小 = 无穷小

什么是"有界函数"? 是说函数的值域是有限区间，这个函数就是有界函数。 如 sin, cos三角函数, 就是有界的.

如:

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\left(sin \frac{1}{x} \right)}_{\text{有界函数}} \underbrace{x}_{\text{无穷小}} = 0$$

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 是有界函数.
- 当x趋近于0时, 后面的x就是无穷小了.
- 从下图可以看出, 它们的乘积, 的确趋近于0, 是无穷小.



2.1.3. 常数C * 无穷小 = 无穷小

常数C可以为0

2.1.4. "有限个"无穷小的乘积, 依然是无穷小.

2.2. 无穷小的比较

无穷小: 就是以数0为极限的变量。 它是一个"变量". 是指自变量在一定变动方式下, 其极限为数量0. 称一个函数是无穷小量，一定要说明"自变量x"的变化趋势。

两个数都趋向于无穷小 , 但两者趋向于0 的速度有快有慢, 所以它们就能进行比较了.

Header 1	Header 2
$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x} = 0$ ← 2次方的, 肯定比1次方的, 趋向于0的速度更快. 所以这里分母比分子大.	若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就称: β是α的"高阶无穷小" infinitesimal of higher order. 意思是在某一过程($x \to x_0$ 或 x→∞ 这类过程)中，β→0 比 α→0快一些. 记作: $\beta = o(\alpha)$ ← 中间的o是 希腊字母 omicron.
$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^2} = \infty$ ← 同理, 分母比分子趋向于0的速度更快. 所以这里分母比分子小.	若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就称: β是α的"低阶无穷小" Low order infinitesimal.
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$ ← 指数次数相同.	若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 常数C, \quad C \neq 0$, 就称: β 和 α 为"同阶无穷小" Infinitesimal of the same order. 意思是两者趋近于0的速度相仿。
	若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = 常数C, \quad C \neq 0, k > 0$, 就称:β是关于α的"k阶无穷小".

Header 1	Header 2
	若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 就称:β 与 α 是"等价无穷小".记为β~α. 等价, 就可以"相互替换"来使用. 如: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 即 sinx ~ x (当 x→0 时)

2.3. 等价无穷小 (等价用符号 ~ 表示.)

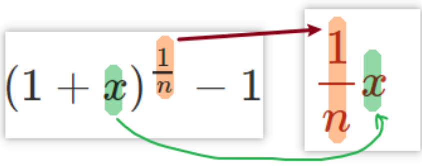
2.3.1. sin x ~ x

2.3.2.

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

即:

$$\boxed{[(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1] \text{等价于} [\frac{1}{n}x]}$$



即把这两块, 直接拿下来就行了

例如:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{1}{3}x^2$$

2.3.3. "β与α等价" 的充要条件是 ←→ $\beta = \alpha + o(\alpha)$

2.3.4.

$$a \sim \alpha, b \sim \beta, \text{且} \lim \frac{\alpha}{\beta} \text{存在, 则} \lim \frac{a}{b} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$$

← 即, 等价的东西, 可以相互替换使用. 但注意, 这个用法是有前提条件的: ① 只有在 x→0 的时候, 才能用"等价无穷小". 如果x 不是趋于0时, 是不能用"等价无穷小"的. ②, 只有在求的是 两个"等价无穷小"的比值 的时候, 才能用"等价物"来替换. 如果求的是 两个"等价无穷小"的相加, 相减, 相乘, 都不能用 "等价物"来替换.

所以我们做题的"方法论"就是: 把复杂的东西, 用它等价的简单东西, 来替换掉. 即, "以简替繁".

Example 1. 标题

例:

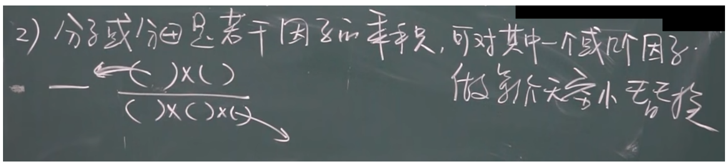
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x} \leftarrow \text{因为} \tan x \sim x, \sin x \sim x, \text{所以} \tan 2x \sim 2x, \sin 5x \sim 5x\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Example 2. 标题

例:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x} \leftarrow \text{因为} \sin x \text{和} x \text{等价, 就用} x \text{来替换} \sin x\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2.3.5. 分子或分母, 可拆成若干因子的乘积时, 就可对其中的一个或几个因子, 做等价替换.



注意: 必须是"乘积"才行, 如果只能拆成若干因子的"相加减", 则不能用"等价替换"的方法.
