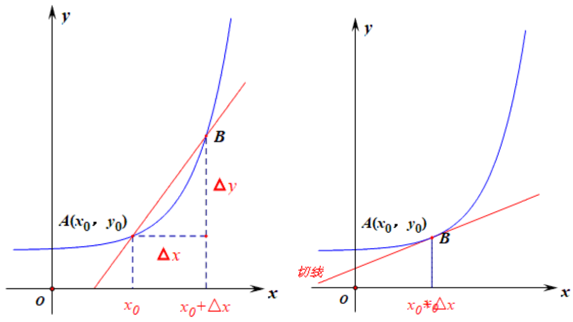
目录

导数 Derivative

第一部分　什么是导数?

某点处的"导数", 就是该点处"切线的斜率".
导数, 就是一个"极限值", 比如, y 在点x_0 处的导数, 就是: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



可导, 就意味着图像很"光滑". 即图像没有"尖角"存在 (因为尖角处的左右导数不相等).
并且, 切线不能垂直于x轴. 如果切线是垂直于x轴的, 它的斜率就会是 $+\infty$或 -∞了.

x_0 点处的导数, 其实可以有下面4种写法来表示:
(1) $y'|_{x=x_0}$
(2) $f'(x_0)$
(3) $\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$
(4) $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

"位置"的瞬时变化率(变换趋势, 能预测未来), 就是"速度". 所以速度是位置的导数.
"速度"的瞬时变化率, 就是"加速度". 所以"加速度"是"速度"的导数. "加速度"就是"位置"的二阶导.

单侧导数, 就是从"某一侧"逼近某一x点时, 该点的切斜斜率.
所以, 左导数, 就是"从左侧向右"逼近了. 右导数, 就是"从右边向左"逼近了.
- 左导数 : $f_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- 右导数 : $f_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

第二部分　导数公式

1　常用的导数

1.1　(常数C)$' = 0$

常数不会变化, 自然没有"瞬时变化率"存在, 所以常数的导数就=0.

1.2 $(x^n)' = nx^{n-1}$

(1) 当指数 n=1时, 其导数=1.
(2) 当 n>1 时, 其导数是 $(x^n)' = nx^{n-1}$

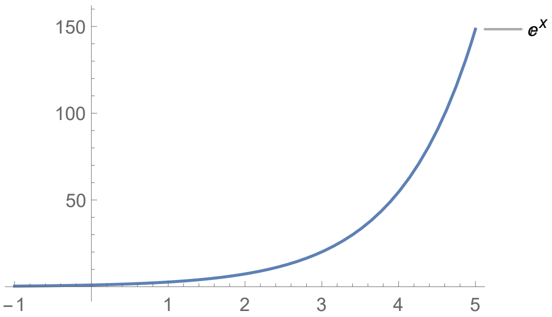
例

求 $y = \frac{1}{x}$ 在点(1/2, 2)处的切线的斜率(即导数), 并求出该切线的方程.
其导数是: $y' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -1x^{-2}$
然后把点(x=1/2, y=2) 代入进去, 得到: $y' \,|_{x=\frac{1}{2}} = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -4 \leftarrow$ 这个数值, 就是函数在点(1/2, 2)处的切线的斜率.
然后再套用直线的"点斜式方程" $y - y_1 = k(x - x_1)$
本例的切线即: $y - \underbrace{y_1}_{=2} = \underbrace{k}_{\text{即}y'=-4}\left(x - \underbrace{x_1}_{=\frac{1}{2}}\right)$

1.3 $(a^x)' = a^x \ln a$

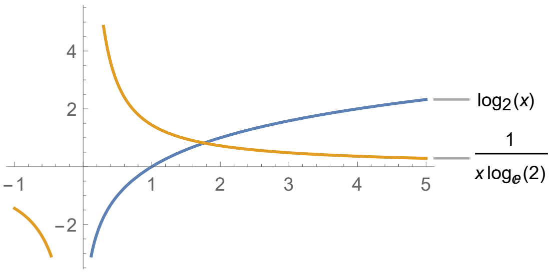
即直接后面跟个尾巴: ln a
例如, $(2^x)' = 2^x \ln 2$

1.4 $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$



1.5 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

即把 x 提到前面去, 把log 变成 ln, 整体再放在分母上. 分子为1.



1.6 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

例如: $(\log_e x)' = \frac{1}{x \underbrace{\ln e}_{=\log_e e=1}} = \frac{1}{x}$

对"对数函数"求导, 有一种技巧: 换底成ln后再来做. 因为转成ln后, 操作会变得简单.

例

$$y = x^x, \text{ 求}y'$$
$$\ln(y) = \ln(x^x) \leftarrow \text{两边同时取} \ln$$
$$\ln(y) = x \ln x$$
$$(\ln y)' = (x \ln x)' \leftarrow \text{两边同时对}x\text{求导,注意}y\text{是个复合函数,要用剥洋葱法}$$
$$\ln\text{'}y \cdot y' = x' \ln x + x(\ln x)\text{'}$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}$$
$$y' = (\ln x + 1)\, y \leftarrow \text{再把}y\text{这个复合函数的具体内容} = x^x\text{代进去}$$
$$y' = (\ln x + 1)\, x^x$$

2 反函数的导数：$\boxed{[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{原函数的导数f'(x)}}$

反函数的导数, 和其原函数的导数, 呈“倒数关系”.
原函数是 y=f(x), 其反函数是 x=f(y), 则, 反函数的导数, 就是“原函数导数”的倒数.
换言之, 原函数的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, , 则其反函数的导数就是 $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.
“原函数”和“反函数”, 它们“导数”的乘积 =1.
“原函数”与其“反函数”的图像, 是关于 y=x 对称的.

3 三角函数的导数

3.1 $(\sin x)' = \cos x$

3.2 $(\cos x)' = -\sin x$

3.3 $(\tan x)' = \sec^2 x$

3.4 $(\cot x)' = -\csc^2 x$

3.5 $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

3.6 $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

4 反三角函数的导数

4.1 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4.4 $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

第三部分 求导的各种方法, 方法论

5 求导法则：和差积商

5.1 $(a+b)'=a'+b'$

例: $(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x$

5.2 $(a+b)'=a'+b'$

5.3 $(a+b+c)'=a'+b'+c'$

5.4 $(a-b)'=a'-b'$

5.5 $(ab)'=a'b+ab'$

例: $(x^3e^x)'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'=3x^2e^x+x_3e^x$

5.6 $(abc)'=a'bc+ab'c+abc'$

5.7 $(\text{常数}\mathbf{C}\cdot a)'=C\cdot a'$

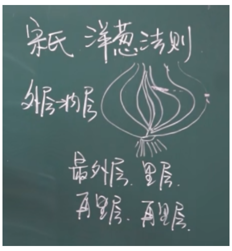
← 直接把常数提到外面去就行了
例: $(5sinx)'=5(sinx)'=5cosx$

5.8 $(\frac{a}{b})'=\frac{a'b-ab'}{b^2}$

即: $\left(\frac{\text{上}}{\text{下}}\right)'=\frac{\text{上'}\cdot\text{下}-\text{上}\cdot\text{下'}}{\text{下}^2}$

6 对“复合函数”求导的方法: 链式法则 / 剥洋葱法

$$\text{有}\begin{cases}\text{大}=f(\text{中})\\ \text{中}=g(\text{小})\\ \text{小}=h(\text{微})\end{cases},\quad \text{则:}\frac{d\text{大}}{d\text{微}}=\frac{d\text{大}}{d\text{中}}\cdot\frac{d\text{中}}{d\text{小}}\cdot\frac{d\text{小}}{d\text{微}}$$



例

我们用“剥洋葱法”(从外向内一层层求导), 来求下面的复合函数的导数

$$y=\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$y'=\left[\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]'\cdot\left(1-2x^2\right)'=\frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(-2\cdot 2x)$$

7 对“参数方程”求导的方法

比如, 有这个参数方程, t是参数 :

$$d(x)=\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$$

要求“y对x求导”. 则:

其“一阶导数”是: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}=\dfrac{y\text{对}t\text{的导数}}{x\text{对}t\text{的导数}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

其“二阶导数”是: $\dfrac{d^2(y)}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\frac{dy}{dx}\text{对}t\text{的导数}}{x\text{对}t\text{的导数}}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

8 对“隐函数”求导的方法

- 显函数: 能清晰的写成 y= ...x 的形式.
- 而隐函数: 虽然 x和y之间有关系, 但无法写成清晰的 $y=f(x)$ 的形式. 即无法变换成“能把y单独提取出来, 放在等号左边”的这种形式.

对“隐函数”求导的方法是: 等号两边同时对 x 求导.

例

$$\begin{aligned}&\text{有隐函数 } e^y+xy-e=0,\text{求}y'\\&(e^y+xy-e)\text{'}=0'\\&(e^y)\text{'}y'+(xy)\text{'}-e'=0\ \leftarrow\text{常数}e\text{的导数也}=0\\&e^yy'+(x'y+xy')=0\\&e^yy'+y+xy'=0\\&(e^y+x)y'=-y\\&y'=-\frac{y}{(e^y+x)}\end{aligned}$$

因为是隐函数, y 无法写成 ...x的形式, 所以我们就会发现, y’的结果里面, 也无法只有纯粹的x, 会带着y.

例

$$y = e^x x^2 \ln x \tan x \ \leftarrow \text{先两边取}\ln\text{,转成对数}$$

$$\ln y = \ln\left(e^x x^2 \ln x \tan x\right) \ \leftarrow \text{根据公式}\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln y = \ln e^x + \ln x^2 + \ln(\ln x) + \ln(\tan x) \ \leftarrow \text{再两边求导}$$

$$(\ln y)' \cdot y' = \underbrace{(\ln e^x)'}_{\substack{=(x\ln e)' \\ =(x\cdot 1)' \\ =1}} + \underbrace{\left(\ln x^2\right)'}_{\substack{=\frac{1}{x^2}2x \\ =\frac{2}{x}}} + \underbrace{(\ln(\ln x))'}_{=\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}} + \underbrace{(\ln(\tan x))'}_{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x}\right) y \ \leftarrow \text{然后把}y\text{的具体值} = e^x \cdot x^2 \cdot \ln x \cdot \tan x\text{代入进去}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)\left(e^x \cdot x^2 \cdot \ln x \cdot \tan x\right)$$