极限公式

Table of Contents

1. 极限公式

Suppose that c is a constant and the limits $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ and $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exist. Then

Sum Law $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Difference Law $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Constant Multiple Law $\lim\limits_{x \to a} \left(cf(x)\right) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Product Law $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Quotient Law $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\text{if } \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Power Law $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$

Root Law $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, where n is a positive integer

Constant Law $\lim\limits_{x \to a} c = c$

Direct Substitution Law $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

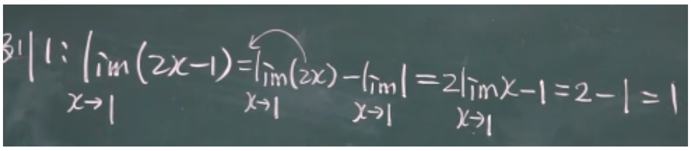
---

2. 若有 $\lim f(x) = A, \ \lim g(x) = B$, 则有:

2.1. $\lim \ [f(x) \pm g(x)] = \ \lim \ f(x) \pm \ \lim \ g(x) = A \pm B$

在使用该定理前, 你必须先保证 f(x) 和 g(x) 的确是有极限存在的!

例:



2.2. $\lim \ [f(x) \cdot g(x)] = \ \lim \ f(x) \cdot \ \lim \ g(x) = AB$

2.3. $\lim \ \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim \ f(x)}{\lim \ g(x)}$, 注意首先分母上不能等于0.

---

3. 若 $\lim f(x)$ 存在的话, 则:

3.1. $\lim\ [c \cdot f(x)] = c \cdot\ \lim\ f(x)$ ← 常数c 可以提出去.

3.2. $\lim\ [f(x)]^n = [\ \lim\ f(x)]^n$

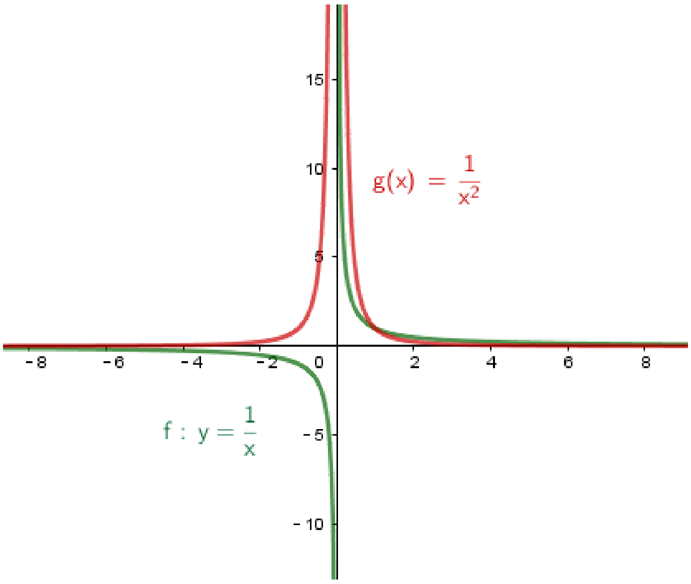
---

4. 若 $f(x) > g(x)$, 则: $\lim\ f(x) \geq\ \lim\ g(x)$

如, 这两个函数: $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$, 显然:

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$$

但它们的极限却是相等的(当x趋近于无穷大时). 它们的极限值都 $= 0$.即 : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}$ -

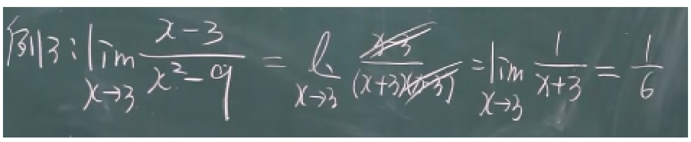


---

5. 一个函数是分数, 其极限, 只看它分子分母上的最高次数的情况

$\frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n}$: ①若 m>n, 则函数极限值=∞. ② 若 m=n, 则函数极限值 = $\frac{a}{b}$, ③ 若 n>m, 则函数极限值=0

做题时, 把x的极限值, 代入进去做就行了.
当发现分母为零时, 就用因式分解来做.



Example 1. 标题

例:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty$$

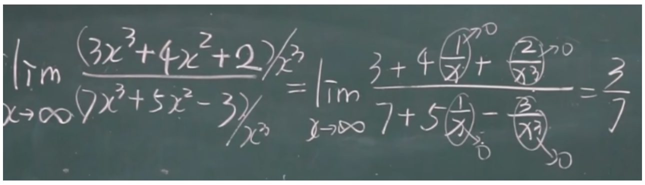
因为当你把 x=1 代入进去时, 发现分母为0, 分子为 -1, 其实就是 $\frac{-1}{0}$, 那就是负的无穷大了.

Example 2. 标题

例:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$$

如果把x的极限是无穷大, 代入进去, 会发现, 分子分母都是无穷大, 就变成了 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式.
我们这样来处理: 把分子分母, 都除以 x^3, 于是就:



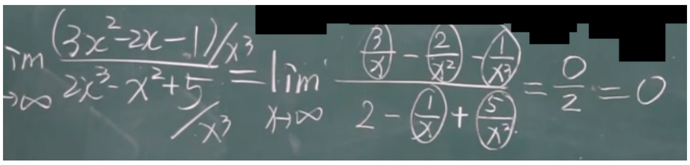
其实你能发现规律了: 当满足 ① x → ∞, ② 分子分母的最高次的次数相同, 比如本例最高都是 x^3次, 则: → 极限值, 就取分子分母最高次的系数. 如 本例就取 $\frac{3x^3}{7x^3}$ 的系数, 即 $\frac{3}{7}$, 这个就是极限值了.

Example 3. 标题

例:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^3+x^2+5}$$

同样, 先分子分母, 都除以 x^3, 于是就:



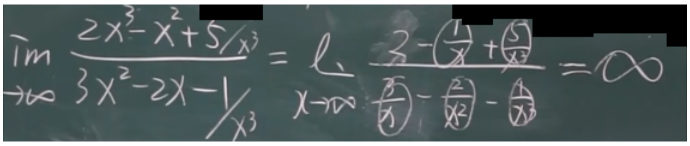
这里也有规律: 当满足 ① x→ ∞, ②分母的最高次的次数, 要比分子的最高次次数还大时, 比如本例"分母的最高次次数"是 x^3, 而"分子的最高次次数"只有 x^2, 则: → 极限就是0.

Example 4. 标题

例:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1}$$

同样,先分子分母,都除以最高次的 x^3,于是就:



规律就是: 如果 ① x→ ∞, 且 ②"分子的最高次数", 比"分母的最高次数"大, 如本例就是 $\frac{x^3}{x^2}$, 则: → 极限值 = ∞