目录

向量组的线性相关性

1 线性组合 linear combination

1.1 线性组合: $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$

【线性组合】:

有 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$, 它们都是 n 维向量. 若存在 $k_1, k_2, ..., k_n$ 这些系数 (即权重), 能使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n$, 则就称 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ 的一个 "线性组合", 或称 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ 来 "线性表示".

那么这组系数 k, 可不可以全取 0? 可以. 这样的话, $\beta = 0$ 了.

例

有 $\beta = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{vmatrix}$, 问 β 能否用 $\alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ 来线性表示?

解: 设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

即 $\begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 - k_3 = -3 \\ \quad\quad k_2 + k_3 = 2 \\ k_1 \quad\quad - 2k_3 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 3 \end{cases}$$

所以 $\beta = 2\alpha_1 + -\alpha_2 + 3\alpha_3$

1.2 线性组合的性质

1.2.1 性质: 0 向量, 可由任意向量组来表示. 即: 0向量 $= 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + ... + 0\alpha_n$

1.2.2 性质: 向量组 A 中, 任取出其中的一个向量 $_i$ 出来, 它可以由这个向量组 A 来表示. 如: $\alpha_3 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 ... + 0\alpha_n$

1.2.3 任意一个向量组, 都可由这些个向量 (即 "n 维单位向量") 来表示: $\varepsilon_1=(1,0,...,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,...,0)$, ... , $\varepsilon_n=(0,0,...,1)$

例如: $\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

1.3 线性相关 and 线性无关

1.3.1 线性相关 and 线性无关的几何意义

见本章的 "张成"部分.

1.3.2 线性相关

【线性相关 linearly dependent】:
对于 n 个 m 维的向量 $\vec{v_1},\vec{v_2},...\vec{v_n}$, 若存在一组 k (系数, 倍数) 不全为 0, 使得 $k_1\vec{v_1}+k_2\vec{v_2}+...+k_n\vec{v_n}=0$, 则称 $\vec{v_1},\vec{v_2},...\vec{v_n}$ 是 "线性相关" 的.

例

例如：下面这三个向量, 是否线性相关?

$$\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix} \tag{1}$$

那么就看下面这个式子, 是否能存在非零的系数 (只要有一个 k 是不为零的, 就满足了我们的条件)

$$k_1\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}+k_2\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}+k_3\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

那么显然, 当 k_1 取 2, k_2 取 3, k_3 取 1 时, 该式子能成立. 即, 的确存在一组非零的 k. 这就说明, 这三个向量, 是 "线性相关" 的. (不需要所有的系数 k 都不为 0, 只要有一个系数 k 不为零就行了.)

若只能是 k 全为 0 时, 该等式才成立, 那么这些向量 $\vec{v_1},\vec{v_2},...\vec{v_n}$ 就是 "线性无关" 的 (linearly independent).

"线性无关" 就表示, 这组向量中的任何一个, 都无法表示成其他向量的 "线性组合". 即, 它们中每一个向量, 都是 "独当一面" 的, 无法被其他向量所替代.

1.3.3 线性无关

不是线性相关, 就是 “线性无关” 了.

1.4 线性相关的性质, 定理

1.4.1 向量组中, 若其中有两个向量成比例, → 则该向量组中的所有成员, 就都 “线性相关”.

如:

$$\underbrace{(-1)\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} + (-\frac{1}{2})\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}}_{\text{注意: 这两个向量成比例}} + 0\begin{vmatrix} 5 \\ 19 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 \\ 99 \end{vmatrix} = 0$$

1.4.2 含有 0 向量的任一向量组, 必 “线性相关”.

如:

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \underbrace{k}_{\text{随便取值}} \cdot \underbrace{\vec{0}}_{\text{零向量}} = 0$$

该向量组, 最后含有一个零向量, 该零向量前的 k 可以随便取值, 都不影响 $k\vec{v} = \vec{0}$. 既然 k 可以随便取值, 那我们就有了一组不全为 0 的系数 $(k_1, k_2, ...k_n)$, 所以这些 v 向量, 就是 “线性相关” 的关系了.

1.4.3 只有一个零向量, 则它必 “线性相关”.

如: $k\vec{0} = \vec{0}$
k 可以随便取值, 都不妨碍 $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$. 既然 k 可以随便取值, 那我们就有了一组不全为 0 的系数 ($k_1, k_2, ...k_n$) , 所以这些 v 向量 (本例中只有一个向量), 就是” 线性相关” 的关系了.

1.4.4 一个向量 $\vec{v}$, 线性相关的充要条件是: 它本身就是零向量, 即 $\vec{v} = 0$

如: $k\vec{v} = \vec{0}$.
k 可以随便取值, 我们就有了一组不全为 0 的系数 ($k_1, k_2, ...k_n]$, 所以这些 v 向量, 就是 “线性相关” 的关系了.

1.4.5 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ **"线性相关" 的充要条件是: 至少一个向量, 可以由其余向量来表示**

1.4.6 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ **是 "线性无关" 的, 如果给它们再加一个向量** β **, 即** $\alpha_1, ..., \alpha_s, \beta$ **变成了是 "线性相关" 的话, 则可以证明:** β **可由** $\alpha_1, ..., \alpha_s$ **来唯一的线性表示.**

1.4.7 **若** $\vec{v_1}, ...\vec{v_r}$ **这组向量是" 线性相关" 的, 则给它们添加一些新的向量, 它们整体** $(\vec{v_1}, ...\vec{v_r}, \vec{v_{r+1}}, ...\vec{v_s}$ **) 依然是" 线性相关" 的.**

证明过程, 如:
已知 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 是 "线性相关" 的, 即:
$k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3} = 0$

把它扩充一下, 就有:
$(k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3}) + (0\vec{v_4} + 0\vec{v_5}) = 0$

这 5 个系数 k, 就是: $k_1, k_2, k_3, 0, 0$, 不全为 0! 说明这组向量 $\vec{v_1}, ...\vec{v_5}$ 是 "线性相关" 的. 证毕.

即: 一个向量组中, 只要其中一部分向量是 "线性相关" 的, 则就可知道: 整个向量组中的全部向量, 都是 "线性相关" 的.
这里的本质就是: **比如一个队伍, 有 1 个女的, n 个男的. 它满足 "有女" 性质. 之后无论往队伍里添加多少人, 它依然满足 "有女" 性质. 因为这个性质, 在最早的队伍中, 就已经被满足了.**

即:
部分 "线性相关"$\xrightarrow{\text{能推导出}}$ 整体 "线性相关"
整体 "线性相关"$\xrightarrow{\text{能推导出}}$ 部分 "线性相关"

同样就是说: **整体 "无女" 的话, 则其中的子集部分也 "无女".**

1.4.8 **在一个 n 维空间中, 存在 m 个 n 维向量的话, 并且是** $m > n$ **话, 则这个向量组 (即含有 m 个向量的), 一定是 "线性相关" 的. 即: n+1 个 n 维向量, 一定 "线性相关".**

比如, 在 3 维空间中, 存在 4 个三维的向量, 则由这 4 个向量所组成的 "向量组", 一定是 "线性相关" 的. 即这个向量组中, 最多只有 3 个向量可以做基轴, 还有一个向量是多余的.

1.5 线性无关的性质, 定理

1.5.1 任意一个非零向量, 必 "线性无关".

如: $k\vec{v}$. 因为 $\vec{v} \neq \vec{0}$, 则只能系数 k=0, 这样本例中, 我们就找不到一组不全为 0 的 k, 那么这一向量必 "线性无关".

1.5.2 (1)"线性无关" 的向量组, 把每个向量的内部的维度, 往后接长, 则新的向量组, 依然是" 线性无关" 的. (2)"线性相关" 的向量组, 把每个向量的内部的维度, 截短后, 则新的向量组, 依然是 "线性相关" 的.

例

例如：若 $\underbrace{\alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}}_{\text{这个向量箭头，由三个坐标来表示，即处在三维空间中.}}$, $\alpha_2 = \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{vmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{vmatrix}$ 这三个向量(轴)，线性无关. 即它们彼此无法互相取代，而是独挡一面，张成的是 3 维空间

即 $\begin{cases} k_1 + 6k_2 - 3k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 0 \\ 5k_1 + 8k_2 + 9k_3 = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ 即 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3 = 0$
即得出：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$

则：$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \end{vmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$, $\gamma_3 = \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \\ 8 \end{vmatrix}$ 这三个 5 维向量，也线性无关的. 即在五维空间中，有这三个向量存在

1.5.3 n 个 n 维向量 (即, 此处是 "向量的个数"="每个向量自己的维数") 所构成的行列式, 则: (1) 若 $|D| \neq 0$, 则这些向量就是 "线性无关" 的. (2) 若 D=0, 则这些向量是 "线性相关" 的.

例

如: 这三个向量是 "线性相关" 还是 "无关" 的?

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

那么我们就来算算它们作为一个整体的行列式的值, 是否 =0?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

1.5.4 n 维的 "单位向量" 组 (单位向量, 显然就是 "基轴" 本身了), 是它们是 "线性无关" 的.

1.5.5 替换定理: 在线性空间中, 给出两个有限向量组: $a_1, a_2, ..., a_t$, 与 $b_1, b_2, ..., b_s$. 若向量组 1 是 "线性无关" 的, 并且 "向量组 1" 可由 "向量组 2" 来线性表示的话, 则: $t \leq s$.

向量组 1 中向量, 是 "线性无关" 的. 所以它的 t 轴 (都属于基轴了), 彼此独立, 成为独当一面的维度.
向量组 2 中的向量, 可以用来表示向量 1 中的轴. 这就意味着, 向量组 2 中可能存在多余的 "伪轴". 所以 "向量组 2" 中的向量数量 s, 一定是 $\geq$ "向量组 1" 中的向量数量 t 的.
