

目录

第一部分	反函数	2
第二部分	初等函数	2
1	power function 幂函数: $y = x^{exp}$	2
2	exponential function 指数函数: $y = base^x$	2
2.1	为什么 $base^0 = 1$?	2
2.2	重要公式 $a^n = e^{n \cdot \ln a}$	3
3	Logarithmic function 对数函数: $\log_{底} 幂 = 指$	3
3.1	$底^{\log_{底} 幂} = 幂$	3
3.2	$\log_{底} 底^指 = 指$	3
3.3	$\log_{底} \left(\frac{幂1}{幂2} \right) = \log_{底} 幂1 - \log_{底} 幂2$	4
3.4	$\log_{底} 幂1 + \log_{底} 幂2 = \log_{底} (幂1 \cdot 幂2)$	4
3.5	$\log_{原底} 幂 = \frac{\log_{任意底} 幂}{\log_{任意底} 原底}$ ← 这个就是“换底公式”	4
3.6	$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$	4
4	trigonometric function 三角函数: $y = base^x$	5
4.1	sin & arcSin	5
4.2	cos & arcCos	5
4.3	tan & arcTan	5
4.4	cot & arcCot	5
4.5	sec & arcSec	5
4.6	csc & arcCsc	5

函数

第一部分 反函数

函数f 是: 输入x, 输出y.	f(x自变量) = y因变量.
反函数 f^{-1} 是: 输入y, 输出x.	相当于时间倒流, 把原函数的功能倒过来. 就像线性代数中的”逆矩阵”变换功能.

“反函数”和“原函数”, 图象关于直线 $y=x$ 对称.

例

有函数 $y = 3x+5$, 即输入x, 输出y. 它可以变为:

$$\begin{aligned} 3x &= y - 5 \\ x &= \frac{y - 5}{3} \end{aligned}$$

这样, 就是输入y, 输出x 的形式了, 即就变成了“反函数”.
但一般我们习惯于将输入值, 用x表示; 输出值, 用y值表示, 所以上面的反函数, 就索性写成 $y = \frac{x - 5}{3}$, 但你不要混淆这里的x和y的意义. 这里的x是原y值, 这里的y是原x值.

第二部分 初等函数

1 power function 幂函数: $y = x^{exp}$

变量x 作为“底”的, 就是幂函数. 形如 $y = x^2$, 格式是 $y = x^{exp}$

2 exponential function 指数函数: $y = base^x$

变量x 在肩膀上做为次方来用的, 就是“指数函数”. 形如 $y = 100(1 + 0.1)^x$. 格式是 $y = base^x$.
其中, $base > 0$ 并且 $base \neq 1$.

其实, “投资回报率”终值计算公式 $F = P(1 + i)^n$, 就是指数函数. 如: $y = 100(1 + 0.1)^x$

2.1 为什么 $base^0 = 1$?

因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
而 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} \leftarrow$ 分母上不能为0, 所以无意义

2.2 重要公式 $a^n = e^{n \cdot \ln a}$

证明过程, 我们倒过来做:

例

$$e^{b \cdot \ln a} \leftarrow \text{指数部分的 } b \cdot \ln a = b \cdot \log_e a = \log_e (a^b)$$
$$\text{所以原式} = e^{\overbrace{\log_e (a^b)}^{\text{即 } e^? = a^b}} = a^b$$
$$\text{即得出了: } e^{b \cdot \ln a} = a^b$$

即:

$$e^{\text{指} \cdot \ln \text{底}} = e^{\text{指} \cdot \log_e \text{底}}$$
$$= e^{\log_e \overbrace{\text{底}^{\text{指}}}^{\text{即 } e^? = \text{底}^{\text{指}} \text{ 幂}}}$$
$$= \text{底}^{\text{指}} = \text{幂}$$

记忆法: 把底数(a)换成e, 把指数(n)换成: 原指数后面再乘个“ln底” (n × ln a). 即 $a^n = e^{n \cdot \ln a}$

3 Logarithmic function 对数函数: log_底 幂 = 指

- 底数 Base Number
 - 指数 Exponent
 - 幂 Power
- 有: 底^指 = 幂, 则: → log_底 幂 = 指

- log₁₀ 幂 = lg 幂
- log_e 幂 = ln 幂

显然, 就有:

3.1 底^{log_底 幂} = 幂

即 $\overbrace{\text{底}^{\log_e \text{幂}}}^{\text{底}}$ = 幂

例

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3} = (2^{-3})^{\log_2 3} = \underbrace{\left(2^{\overbrace{\log_2 3}^{\text{即 } 2^? = 3}}\right)^{-3}}_{= 3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

3.2 log_底 底^指 = 指

即 $\log_e \overbrace{\text{底}^{\text{指}}}^{\text{幂}} = \text{指}$

3.3 log_底 (幂₁ / 幂₂) = log_底 幂₁ - log_底 幂₂

即 :

$$\underbrace{\log_{\text{底}} \left(\frac{\text{幂}^1}{\text{幂}^2} \right)}_{\text{即: 底}^? = \frac{\text{幂}^1}{\text{幂}^2}} = \overbrace{\log_{\text{底}} \text{幂}^1}^{\text{指}^1} - \overbrace{\log_{\text{底}} \text{幂}^2}^{\text{指}^2}$$

反过来, 即是: $\log_{\text{底}} \text{幂}1 - \log_{\text{底}} \text{幂}2 = \log_{\text{底}} \left(\frac{\text{幂}1}{\text{幂}2} \right)$

.....

3.4 $\log_{\text{底}} \text{幂}1 + \log_{\text{底}} \text{幂}2 = \log_{\text{底}} (\text{幂}1 \cdot \text{幂}2)$

.....

3.5

$\log_{\text{原底}} \text{幂} = \frac{\log_{\text{任意底}} \text{幂}}{\log_{\text{任意底}} \text{原底}}$

 ← 这个就是 “换底公式”

由换底公式, 可以推导出以下一些常用的结论:

→ $\log_{\text{原底}} \text{幂} = \frac{\log_{\text{幂}} \text{幂}}{\log_{\text{幂}} \text{原底}} = \frac{1}{\log_{\text{幂}} \text{原底}}$ ← 看一头一尾, 即就有:

$\log_{\text{底}} \text{幂} \cdot \log_{\text{幂}} \text{底} = 1$

→

$\log_{\text{底}1} \text{幂}1 \cdot \log_{\text{幂}1} \text{幂}2 = \log_{\text{底}1} \text{幂}2$

即:

$$\begin{aligned} \log_{\text{底}1} \text{幂}1 \cdot \log_{\text{幂}1} \text{幂}2 &= \frac{\log_{\text{任意底}} \text{幂}1}{\log_{\text{任意底}} \text{底}1} \cdot \frac{\log_{\text{任意底}} \text{幂}2}{\log_{\text{任意底}} \text{幂}1} \\ &= \frac{\log_{\text{任意底}} \text{幂}2}{\log_{\text{任意底}} \text{底}1} \\ &= \log_{\text{底}1} \text{幂}2 \quad \leftarrow \text{即 } \log_a b \cdot \log_b C = \log_a C \end{aligned}$$

你可以这样记忆: $\log_a \textcolor{teal}{b} \cdot \log_{\textcolor{teal}{b}} C = \log_a C$

→

$\log_{\text{原底}} \text{幂}: \rightarrow \text{根据换底公式, 有 } = \frac{\log_{10} \text{幂}}{\log_{10} \text{原底}} = \frac{\lg \text{幂}}{\lg \text{原底}}$

即有, 例如: $\log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg a}$

.....

3.6 $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$

← 简单记忆法: 把 m 和n, 上下保持不动, 直接向左平移到 log 外面去就行了.

例

$$\log_2 \frac{2}{\sqrt[3]{3}} + \log_8 3 \quad \leftarrow \text{加号右边的 } \log_8 3 = \log_2 3^1 = \frac{1}{3} \log_2 3 = \log_2 3^{\frac{1}{3}}$$

所以, 原式 = $\log_2 \frac{2}{\sqrt[3]{3}} + \log_2 3^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} &= \log_2 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{3} \right) = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

这个公式可以推导出:

→ $\log_{\text{底}} M^n = \log_{\text{底}^1} M^n = \frac{n}{1} \log_{\text{底}} M = n \cdot \log_{\text{底}} M$

→ $\log_{a^n} b^n = \frac{n}{n} \log_a b = \log_a b$

→ $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n} \log_a a = \frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n}$

→ $\ln a^b = \log_{e^1} a^b = \frac{b}{1} \log_e a = b \ln a$

4 trigonometric function 三角函数: $y = base^x$

4.1 sin & arcSin

4.2 cos & arcCos

4.3 tan & arcTan

4.4 cot & arcCot

4.5 sec & arcSec

4.6 csc & arcCsc