导数_高阶导数

Table of Contents

1. 高阶导

只求一次导数, 即"一阶导", 写作 $\frac{dy}{dx}$ 或 y'

连续求两次导数, 即"二阶导", 写作 $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ 或 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 或 y'', 表示 y 对 x 求两次导数.

同理, "三阶导", 就写作:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)\right] \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^3} \text{ 或 } \mathrm{y}'''$$

一般都优先写前一种形式. 为什么很少用 y''' 呢? 因为后者看不出"到底是对谁求导". 不是所有的求导都

是对x求导的.

从"四阶"以上的导数, 就只写成类似这样的形式了: $y^{(4)}$
n阶导数, 就是 $y^{(n)}$

Example 1. 标题

例如:
$\mathrm{y}=\mathrm{ax}+\mathrm{b}$, 求$\mathrm{y}^{(2)}$,即求二阶导
$\mathrm{y}'=\mathrm{a} \leftarrow$ 先求一阶导
$\mathrm{y}''=\mathrm{a}'=0 \leftarrow$ 再对一阶导,再求一次导, 即得到'二阶导'

Example 2. 标题

例如:
$\mathrm{y}=\sin\ \mathrm{x}$, 求$\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}$

$$\mathrm{y}'=\cos\ \mathrm{x} = \sin\left(\mathrm{x}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{y}''=\cos\left(\mathrm{x}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\mathrm{x}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

同理

$$\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}=\sin\left(\mathrm{x}+\mathrm{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

---

2. n阶导 的通用公式

2.1. $(Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}$

2.2. $(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)...(a-n+1)x^{a-n}$

$$(x^a)^{(n)} = [\prod_{k=0}^{n-1}(a-k)]x^{a-n} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$$

2.3. $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

2.4. $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$

2.5. $(e^x)^{(n)} = e^x$

2.6. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

Example 3. 标题

例如：$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

2.7. $(a \pm b)^{(n)} = a^{(n)} \pm b^{(n)}$

2.8. $(ab)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{(n-k)} b^{(k)}$

高阶导数的莱布尼茨公式：

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

初等数学中与之相对应的二项式定理：

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2.9. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

2.10. $(\sin(kx+a))^{(n)} = k^n \sin\left((kx+a) + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

2.11. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

2.12. $(\cos(kx + a))^{(n)} = k^n \cos\left((kx + a) + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$