目录

文件名

第一部分　中心极限定理 central limit theorem

1　“中心极限定理” 说的是什么?

“中心极限定理” 有好几种不同的表述方式, 但其核心的数学性质只有一条 — **大量 “独立” 的随机变量相加, 无论这些各随机变量的 “本身分布” 是怎样的, 它们相加后的结果, 必定会趋向于” 正态分布”.** 换言之, 这就意味着 — 正态分布是必然产生的.

中心极限定理告诉我们: 只要随机事件 A, 是由很多 “相互独立 (而互不影响) 的因素” 共同起作用而决定的, 则无论每个因素本身是什么分布, 这个随机事件 A, 最终都会形成 “正态分布”.

比如:
- 影响人身高的因素很多，营养、遗传、环境、族裔、性别等都有影响, 这些因素的综合效果, 就会使人的身高, 服从正态分布.
- 同样, 影响考试成绩的因素也很多，自身的能力、家庭教育、智商、专注力, 考前的情绪、身体状况等也都有影响. 这些因素互相独立. 但当这些影响因素加总在一起后, 对考试成绩的整体影响 — 即考试的分数结果, 就会服从 “正态分布”.

所以, 我们现在就明白了: 世界上为什么会有这么多事情, 都服从 “正态分布”? 就是因为很多事情, 都是由多个 “独立” 的随机因素, 共同起作用后的结果.

因为**任何分布叠加, 最终都会形成正态分布**，所以无论是 “对数分布” 还是 “幂律分布”，无论是 “指数分布” 还是其他什么分布，只要自身不断演化，不断自己叠加自己，最终也一样会变成正态分布. 所以**我们可以这么说，所有的分布，不是 “正态分布”, 就是在变成 “正态分布” 的路上.**
所以, “中心极限定理” 是因，“正态分布” 是果. **正因为这个宇宙中有 “中心极限定理” 存在, 所以才会推导出 “正态分布”.**

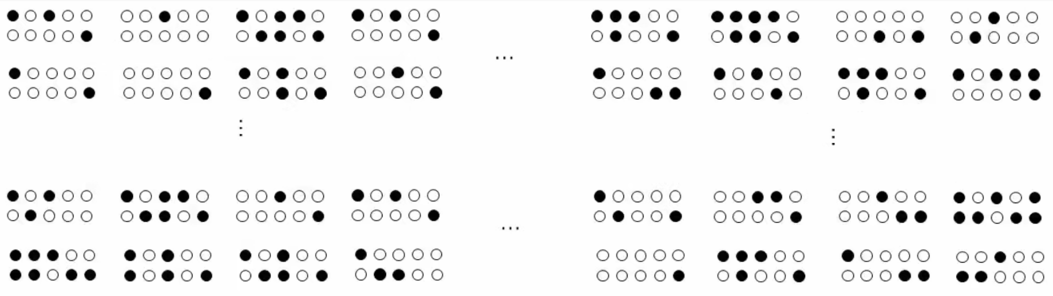
当然, 现实世界里，影响一个随机事件的各种因素，不可能完全是理想状态下的 “相互独立”, 而是会互相影响的. 所以, 我们身边依然存在各种各样的其他分布.

2 大量 “n 重伯努利试验” 的结果, 就能产生 “正态分布” 的概率函数曲线

例

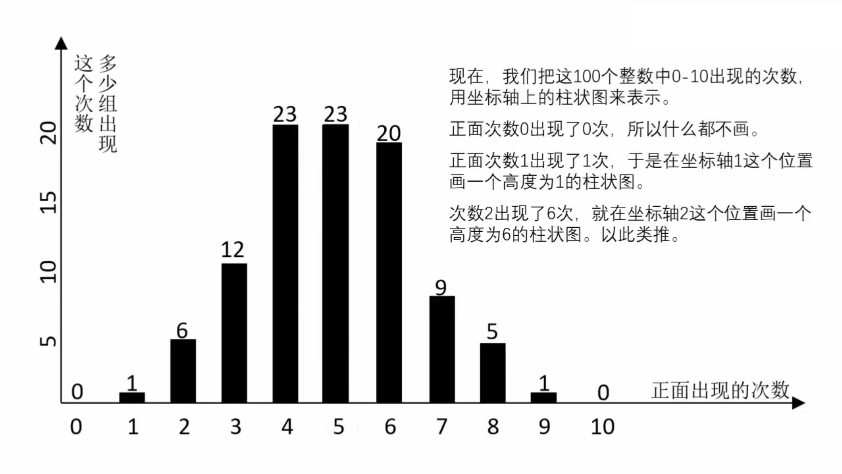
比如, 抛硬币 (以连续抛 10 次硬币, 为一次 (一组) 试验). 下面图中, 白色代表 “得到正面”, 黑色代表 “得到反面”.
- 第一次 (组) 试验, 得到结果: 7 正, 3 反.
- 第一次 (组) 试验, 得到结果: 9 正, 1 反.
- ...

进行 100 次 (组) 试验后, 得到 100 个结果.



把每组试验的结果中的 “正面朝上” 数量, 记下来, 分别是: 7,9,4,..., 共 100 个数据.
然后, 统计这 100 个数据里面, 有多少个 “正面数量是 1” 的; 有多少个 “正面数量是 2” 的, ..., 统计在直方图上.

研究任何统计数据，核心工具都是 “直方图 (Histogram)”. 直方图能让我们了解 “数据集的分布情况”.



我们可以发现, 它呈现出 “正态分布” 的钟形曲线形状.

其实. **抛一次硬币试验, 它属于 “伯努利试验”. 抛 10 次硬币, 叫做 “10 重伯努利试验”.**
我们进行 100 组这样的试验, 就叫做 “100 次 10 重伯努利试验”.
统计结果表明, **大量的 “n 重伯努利试验” 的结果, 能产生 “正态分布” 曲线.**

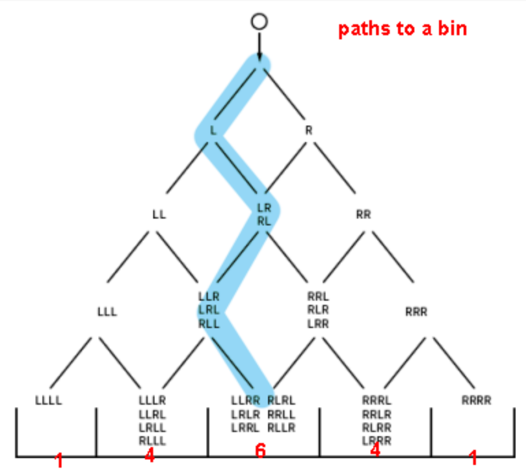
例

其实, 我们可以用一种更简单的方法, 来模拟 “n 重伯努利试验”. — Galton knocked boards 高尔顿钉板.

顶端的珠子往下落, 遇到钉子时, “往左” 或 “往右” 落下的概率, 各是 0.5. 这就可以看做 “抛了一次硬币”. 珠子向左, 可以看成 “硬币正面朝上”; 向右, 可以看成 “反面朝上”.

假设我们有 10 行钉子, 下方的槽就会有 11 个. **我们可以根据珠子落入哪个槽, 来判断它经过 10 行钉子时, 经历了几次向左, 几次向右.**
- 比如, 假如 1 颗珠子落入中间的槽, 那么它肯定是经过了 5 次向左, 5 次向右.
- 如果 1 颗珠子, 经过 10 行钉子后, 落入最左边第 1 个槽, 我们就可以看做是: 抛了 10 次硬币, 共出现 10 次正面 (珠子 10 次向左).
- 如果落入第 2 个槽, 就可看做: 出现 9 次正面, 1 次反面.
同理, 假如落在最右边的槽, 就可看做: 出现了 10 次反面.

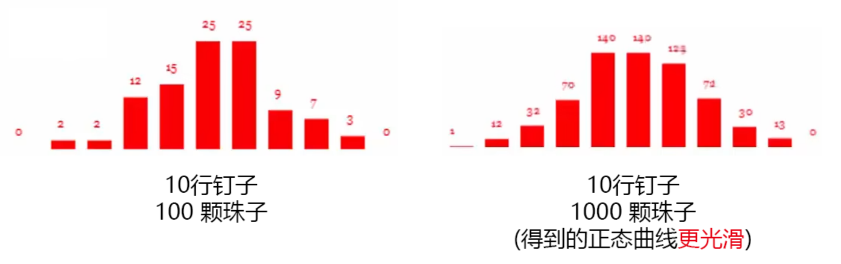
即: 从 “最上” 落到 “最下面” 的路径走一次, 就相当于做了一组 (10 次的 “得到正面或反面” 的抛硬币) 试验.
在每一行钉子处 (往左还是往右), 就代表做一次抛硬币试验 (伯努利试验).
所以一条路径, 代表 “做了 1 次 10 重伯努利试验”.
100 颗钉子落下来 (走 100 条路径), 就代表做了 “100 次 10 重伯努利试验”.



10 行钉子, 得到的这个正态分布曲线, 还不够光滑. 这是因为我们只放了 100 颗珠子,

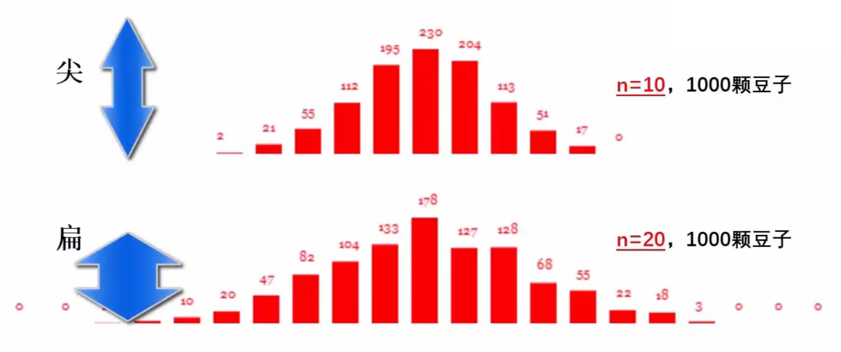
规律表现得还不够明显.

我们放 1000 颗珠子, 经过 10 行钉子, 得到的正态曲线, 就会更光滑. 这说明: **重复试验次数越多, 我们观察到的规律性就越强.**



下面, 我们把钉子的行数, 从 n=10 行, 加大到 n=20 行. 再来看 1000 个珠子的下落结果.

- 钉子行数 n 越多, 下面的槽数就更多, 正态分布曲线越矮胖 (即其方差 σ^2 越大).
- 钉子行数 n 越少, 下面的槽数就越少, 珠子就只能落在这更少数量的槽里面, 正态分布曲线越高瘦 (即其方差越小).



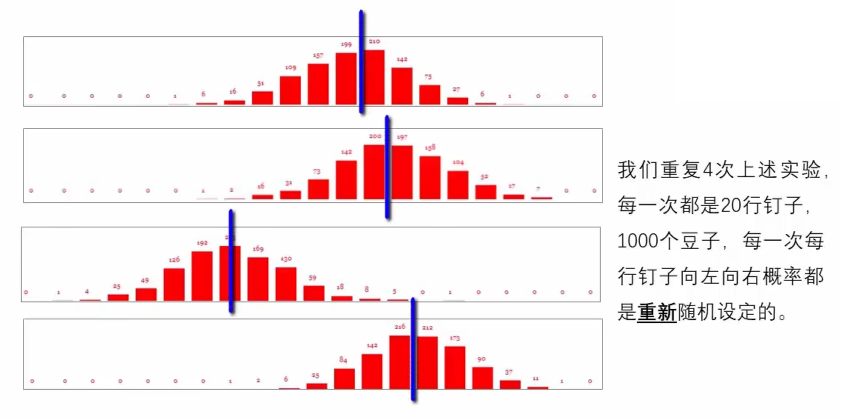
结果显示，仍然是一条光滑的正态分布曲线。我们比较n=10和n=20的曲线发现，n=20的曲线，比n=10的曲线要扁一点。

这个结果也是可以直观理解的：钉子越多，豆子可以落下的岔路就越多，底下的槽子也越多，豆子必然会更分散。

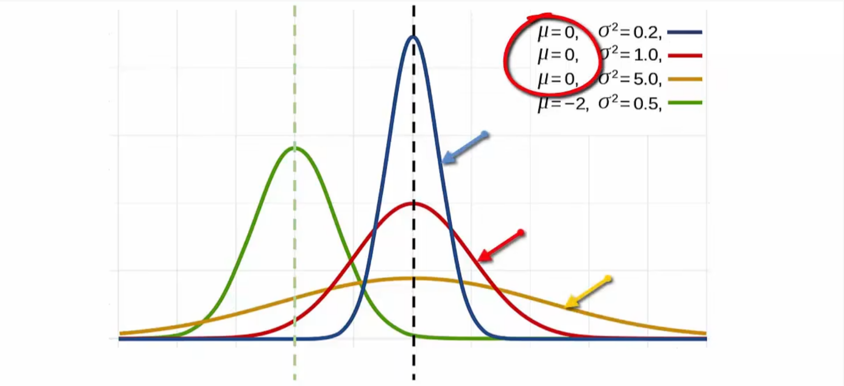
例

如果上例的高尔顿钉板, **在每行的钉子处, 向左或向右的概率不同, 结果会怎样呢? 结果依然会得到"正态分布".**

我们重复做 4 次上述试验, 结果显示, 分布依然是正态分布. **只不过每次曲线的对称轴 μ 的位置有所不同.**



4次实验结果显示，豆子的轮廓都是光滑的正态分布曲线，只是曲线对称轴的位置有所不同。

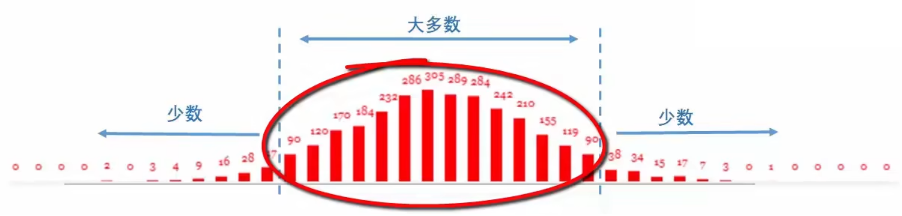


这个图中有四条正态分布曲线，有三条曲线的μ相同，所以对称轴也相同。只有一条绿色的μ不同，所以对称轴也不同。

中心极限定理, 就是说: 如果一个结果是由大量的不相干的因素, 累加导致的，那么其总合的结果, 一定表现为 “正态分布”.

例如, 一个考生的高考英语成绩, 受到了无数 (相关或不相关的) 因素的影响. 每一个因素，都可能使最终英语分数更高一点, 或者更低一点.
每个独立因素对成绩所产生的影响, 就好比一颗豆子经过一颗钉子时，向左向右的概率说不清楚, 但这个概率一般不会是左右各 0.5.
在无数因素影响后, 最终得到了一个高考英语成绩, 就相当于一颗豆子经过了无数行钉子的下落，最终尘埃落定，落到槽子里.

数十万计考生最后的成绩分布，相当于数十万个豆子，经过了无数行钉子落到槽子里. 根据 “中心极限定理”, 其分布必然是 “正态分布”.
考最高分的人，和考最低分的人，必然都只占少数，都分布在曲线两边的尾巴上 (因为一颗豆子，**要想从一开始就一路向左，或一路向右落到槽子里，太难了**). 而大多数人, 必然都是在中间位置, 考一个不高不低的分数.



3 正态分布是这个宇宙的归宿

信息论领域中, 发现了 “熵最大原理” . 也就是说, **在一个孤立系统中，熵总是在不断增大. 而 “正态分布”, 是所有已知均值 (μ) 和方差 (σ^2) 的分布中，信息熵最大的一种分布.** 这就意味着: 如果 “熵不断增长” 是孤立系统确定的演化方向，那熵的最大化，也就是 “正态分布”，就是孤立系统演化的最终必然结果了.

4 当我们不知道某个随机事件, 服从什么分布的时候, 就先假设它服从 “正态分布”, 然后再用实际数据来验证.

为什么要先假设它 (可能会) 服从 “正态分布” 呢? 因为:
- 这个世界中, “正态分布” 太常见了，所以假设一个随机事件是服从 “正态分布” 的, 要比假设它服从其他分布, 成功概率更高.

4 当我们不知道某个随机事件, 服从什么分布的时候, 就先假设它服从"正态分布", 然后再用实际数据

- 如果我们事后的验证后发现，这个**随机事件不服从"正态分布",** 那么我们就知道: **它一定不满足正态分布背后的"中心极限定理".** 进一步, **既然它不满足"中心极限定理", 那么原因就会是 — 要么是它的"独立影响因素"数量不够多; 要么是各种影响因素"不相互独立"; 要么是某种影响因素的影响力太大了等等**... 这些合理的推断, 就为我们接下来的研究, 指明了方向.