第一积分换元法 — 凑微分法

Table of Contents

1. ★ 别忘了: dx 这部分的意思, 就是对x做"微分". 同样, "d□", 就是对"□"做微分.

你会发现,对一个数做“微分”,可以写成下面三种形式:

1. $\frac{d}{dx}(\text{某数})=\text{该数的导数}$

2. $\frac{d(\text{某数})}{dx}=\text{该数的导数}$

3. $d(\text{某数})=\text{该数的导数}\ dx$

如:对 $\ln x$ 做微分,可以写成:$\to \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$

$$\to \frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\to d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

微分公式表如下:

一、基本导数公式：

$1.(kx)'=k$

$2.(x^n)'=nx^{n-1}$

$3.(a^x)'=a^x\ln a$

$4.(e^x)'=e^x$

$5.(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$6.(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$7.(\sin x)'=\cos x$

$8.(\cos x)'=-\sin x$

$9.(\tan x)'=\sec^2 x$

$10.(\cot)'=-\csc^2 x$

$11.(\sec x)'=\sec x\tan x$

$12.(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$13.(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$14.(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$15.(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$16.(\mathrm{a}rc\cot)'=-\frac{1}{1+x^2}$

二、基本微分公式：

$1.d(kx)=k$

$2.d(x^n)=nx^{n-1}dx$

$3.d(a^x)=a^x\ln adx$

$4.d(e^x)=e^x dx$

$5.d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

$6.d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$

$7.d(\sin x)=\cos xdx$

$8.d(\cos x)=-\sin xdx$

$9.d(\tan x)=\sec^2 xdx$

$10.d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

$11.d(\sec x)=\sec x\tan xdx$

$12.d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$

$13.d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$14.d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$15.d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

$16.d(arc\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

Differentiation of Trigonometry Functions

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

---

2. 能使用"凑微分法"的前提条件:

$$\int f(\square)\underbrace{dx}\rightarrow\int f(\square)\quad\underbrace{d\square}_{\substack{\text{对}\square\text{做“微分”}\\ \text{微分后的值}=k\cdot dx}}$$

凑微分法，能使用的前提，必须是要满足：$d\square=k\cdot dx$，即 $d\square$ 和 dx 是 常数k倍的关系.

如果两者不是“常数倍”的关系，就不能使用“凑微分法”来做了.

换言之，要想是“常数倍”的关系，这个$\square$就一定得是一个一次函数，即：$\square=kx+b$

比如：$\int(2x-1)^{10}\leftarrow$ 其中的$(2x-1)$满足是个“一次函数”的条件，可以用“凑微分法”来做.

而$\int(2x^2-1)^{10}$ $\leftarrow$其中的$(2x^2-1)$ 不是个“一次函数”，就不能用“凑微分法”来做.

回到一开始的话题，如果$\int f(\square)\underbrace{dx}\rightarrow\int f(\square)\ \underbrace{d\square}_{=k\cdot dx}$ 即如果$\square$是dx的k倍的话，

则：$$\int f(\square)dx=\frac{1}{k}\int\underbrace{f(\square)}_{\text{导函数}}\ \underbrace{d\square}_{=k\cdot dx}$$
$$=\frac{1}{k}\underbrace{F(\square)}_{\text{原函数}}+C$$

---

3. 凑微分法 (即"第一类换元积分法") Integration By Substitution (核心思想就是"凑")

口诀:

一看 : 看哪个部分能作为"整体block",

二凑 : 将d后的内容, 强制改成和"整体block"一样,

三比较 : 将"原式"和 "修改了d的内容后的值", 相比较, 并做微调, 来维持住"原式"的值不变.

凑微分法，基本公式是：$\int f(x)dx=F(x)+C\leftarrow$ 即这三个x的地方要完全一致!

即，这里的模型就是：$\int f(\square)\ d\square=F(\square)+C$ ←这三个红色方块地方的内容，要完全一样!

如果红色方块不一样，比如d后面的红色方块，和$f()$中的红色方块不一样，

你就要把d后面的红色方块，凑成和 $f()$中的一样!

然后才能对整体使用“积分公式”，求出其“原函数”.

Example 1. 标题

例如：

原式 $\int(2x-1)^{10}dx$ ① ← 我们可以把$(2x-1)$看做为一个“整体”，
那么，我们就要把原式，变成这种模式：
$$\int(\square)^{10}d\square$$

我们先强行把d后的内容变成$(2x-1)$：即 $\int(2x-1)^{10}\ d(2x-1)$ ②
其中的 $d(2x-1)$，其实就是对$2x-1$做微分，
根据“微分公式”：$d(x^n)=nx^{n-1}dx$
所以本例的 $d(2x-1)$ 即 $=(2x-1)'\ dx\ =2dx$

所以②式的 $\int(2x-1)^{10}\ \underbrace{d(2x-1)}_{=2dx}$

$$=\int(2x-1)^{10}\ 2dx$$

$$=2\int(2x-1)^{10}\ dx$$ ← 和原式①相比，多了2倍. 即：①式 $=\frac{1}{2}$(②式)

所以原式① $=\frac{1}{2}(\underbrace{\int(2x-1)^{10}\ d(2x-1)}_{②式})$ ← 这样，经过凑微分法(即将d后面的内容，凑成和前面导数部分的内容一样，作为相同的整体)，我们就能来使用“积分公式”了.

此处，我们使用这个积分公式：$\int x^n=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10+1}(2x-1)^{10+1}+C$$

$$=\frac{1}{22}(2x-1)^{11}+C$$

Example 2. 标题

例如:

原式 $\int e^{\overbrace{-3x}^{\text{整体}}} dx$ ① ← 我们把指数上的 $-3x$ 作为一个整体,
这个整体满足是一个"一次函数",所以我们就可以使用"凑微分法"来做.

先强行把 d 后的内容变成 $-3x$,即:

$\int e^{-3x} \underbrace{d(-3x)}_{=-3dx}$ ② ← $d(-3x)$ 这部分,就是对 $-3x$ 做微分.
$d(-3x)=(-3x)'dx=-3dx$
所以完整的②式 $=-3\int e^{-3x}dx$

②式 和 ①式,相差 -3 倍,所以原式 ①式就是 $=-\frac{1}{3}\cdot$ ②式

$$\text{原式} \int e^{\overbrace{-3x}^{\text{整体}}} dx = -\frac{1}{3}\cdot\int e^{-3x} \underbrace{d(-3x)}_{=-3dx} \quad \leftarrow \text{利用积分公式} \int e^{x}dx=e^{x}+C$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$$

Example 3. 标题

例如:

原式 $\int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4-3x}_{\text{看作一个整体}}}}dx$ ① $\leftarrow \sqrt{4-3x}$ 不能看做一个整体，因为它不是一次函数，

但里面的 $4-3x$ 可以看做一个整体. 假设我们用 y 来代表这个整体，

那么本例原式，就是我们想让它变成:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}y^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= 2y^{\frac{1}{2}} + C$$

既然我们把 $4-3x$ 看做一个整体. 我们就先强行让 d 后面的内容变成 $4-3x$

即: $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}d(4-3x)$ ② $\leftarrow d(4-3x)$ 就是对 $4-3x$ 求微分

$= (4-3x)'dx$

$= -3dx$

完整的②式 $= -3\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$，比原式①多出 -3 倍.

所以原式① $= -\frac{1}{3}\cdot$ ②式

原式 $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx = -\frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}d(4-3x)}_{\text{②式}}$ ←根据上面我们做出的 $\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = 2y^{\frac{1}{2}} + C$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2(4-3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

---

4. $\int f(\square)g(x)dx$ 这种题型的做法

原式 $\int f(\square)g(x)\,dx$ ← 对于这种题型，我们先把 $\underbrace{g(x)}_{\text{导函数}}dx$ 看做一个整体，

那么它的值等于什么呢？其实就是求 $g(x)$ 的原函数.

既然“做微分”是：$d(\text{原函数}) = \text{导函数}\,dx$,

那么 就是 $d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{g(x)}_{\text{导数}}dx$，?就是 $g(x)$ 的原函数.

如：$\underbrace{x^2}_{\text{导函数}}dx = \underbrace{d}_{\text{做微分}}\left(\underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{\text{原函数}}\right)$ ←这个例子正过来写，就是：$\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3) = x^2$

所以原式 $\int f(\square)\overbrace{\underbrace{g(x)}_{\text{导函数}}dx}^{\text{看做整体}} = \int f(\square)\;d\left(\underbrace{\odot}_{g(x)\text{的原函数}}\right)$ ←下面的问题，我们就是要把 $\odot$ 变成 $\square$

$\rightarrow \int f(\square)\;\underbrace{d(\square)}_{=k\cdot d(\odot)}$ ← 同样，“$d(\square)$” 和 “$d(\odot)$” 之间会有一个常数倍的关系.

即：$d(\square) = k\cdot d(\odot)$

所以原式 $= \frac{1}{k}\int \underbrace{f(\square)}_{\text{导函数}}d(\square) = \frac{1}{k}\underbrace{F(\square)}_{\text{原函数}} + C$

Example 4. 标题

例如：

$\int e^x\cos(e^x)\,dx$ ←我们把 $e^x dx$ 合并在一起先做，即做微分：$d(\underbrace{?}_{\text{原函数}}) = \underbrace{e^x}_{\text{导函数}}dx$，显然? $= e^x$

$= \int \cos(e^x)\;\underbrace{e^x dx}_{=d(e^x)}$

$= \int \cos(e^x)\;d(e^x)$ ← 这样就能直接套用积分公式了.

$= \sin(e^x) + C$

Example 5. 标题

例如：

原式 $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ ←除法，可以改写成“乘法”形式

$=\int e^x \cdot \frac{1}{e^x+1}dx$ ←我们让 e^x和dx先合并起来，先运算

$=\int \frac{1}{e^x+1} \cdot \underbrace{e^x dx}_{=d(e^x)}$ ① ← 绿色部分就是问，做微分时：$d(\underbrace{?}_{原函数})=\underbrace{e^x}_{导函数}dx$，$?=e^x$，所以$d(?)=d(e^x)$

$=\int \frac{1}{e^x+1}\ d(e^x)$ ←我们把分母上的e^x+1 看做是一个整体，把d后面的部分强制变成 e^x+1

$\rightarrow \int \frac{1}{e^x+1}\ \underbrace{d(e^x+1)}_{e^x dx}$ ② ← $d(e^x+1)=(e^x+1)'dx=e^x dx$

所以完整的②式 $=\int \frac{1}{e^x+1}\ e^x dx$ ，发现和原式①没有区别，无倍数关系

所以原式＝②式

$=\int \frac{1}{e^x+1}\ d(e^x+1)$ ←能直接使用不定积分公式了 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$=\ \ln|e^x+1|+C$

Example 6. 标题

例如：

$\int x\cdot(2x^2-1)^{10}dx$ ←先把x和dx合并在一起，先算

$=\int (2x^2-1)^{10}\ \underbrace{xdx}_{=d\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$ ← 蓝色部分就是问：$d(\underbrace{?}_{原函数})=\underbrace{x}_{导数}dx$，$?=\frac{1}{2}x^2$

$=\frac{1}{2}\int(\underbrace{2x^2-1}_{看做整体})^{10}\ d(x^2)$ ← 把d后的内容，强制变成 $2x^2-1$

$d(2x^2-1)=(2x^2-1)'dx=(2\cdot 2x)dx=4xdx$ ②

而原式中的$d(x^2)$是$=(x^2)'dx=2xdx$ ①

所以发现，原式① $=\frac{1}{2}\cdot$②式

原式 $=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\int\overbrace{(2x^2-1)^{10}}^{导函数}\ \overbrace{d(2x^2-1)}^{做微分}}_{②式}$ ← 就能套用积分公式了：$\int \underbrace{x^n}_{导函数}dx=\underbrace{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}_{原函数}+C$

$=\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{11}(2x^2-1)^{11}}_{原函数}+C$

Example 7. 标题

例如:

$$\int \sin^3 x\ dx \quad \leftarrow \text{先变形，再来凑微分}$$

$$= \int \sin^2 x \cdot \underbrace{\sin x\ dx}_{\text{先做}}$$

$$= \int \sin^2 x\ d(-\cos x) \quad \leftarrow \text{因为}\ d(-\cos x) = (-\cos x)' dx = \sin x\ dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)\ d(-\cos x)$$

$$= \underbrace{\int (1) d(-\cos x)}_{\int 1 d(\square) = \square + C} - \underbrace{\int (\cos^2 x) d(-\cos x)}$$

$$= (-\cos x + C) + \left(\frac{1}{2+1} (\cos x)^{2+1} + C\right)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Example 8. 标题

例如:

$$\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 2} dx$$

$$= \int \frac{1}{(2x+1)^2 + 1} dx \quad \leftarrow \text{来凑成} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \text{ 的形式}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x+1)^2 + 1} d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(2x+1) + C$$

Example 9. 标题

例如:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$$

$$=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\ln x)\ dx$$

$$=\int \frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\ln x)\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{d(\ln x)}\ \leftarrow \text{先把}\frac{1}{x}dx\ \text{组合在一起做，即}\ d(?)=\frac{1}{x}dx,\quad ?=\ln x$$

$$=\int \ln(\ln x)\cdot\underbrace{\frac{1}{\ln x}d(\ln x)}_{d(\ln(\ln x))}\leftarrow\ \text{再把}\frac{1}{\ln x}\ \text{和}\ d(\ln x)\ \text{组合在一起做，}$$

$$\text{即}\ d\left(\underset{\text{原函数}}{\underset{\smile}{?}}\right)=\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{导函数}}d(\ln x),\ \leftarrow\ \text{即}\ d(?)=\frac{1}{\square}d(\square),$$

$$\text{显然，有微分公式}\ d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$\text{所以}\ ?=\ln\square,$$

$$\text{所以本处的}?=\ln(\ln x)$$

$$=\int \underbrace{\ln(\ln x)}_{\text{导函数}}\ d(\ln(\ln x))\leftarrow\text{这个就是问}\int\square^1 d\square,\ \text{这里面的导函数是个指数，}$$

$$\text{那么就能根据积分公式}\ \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

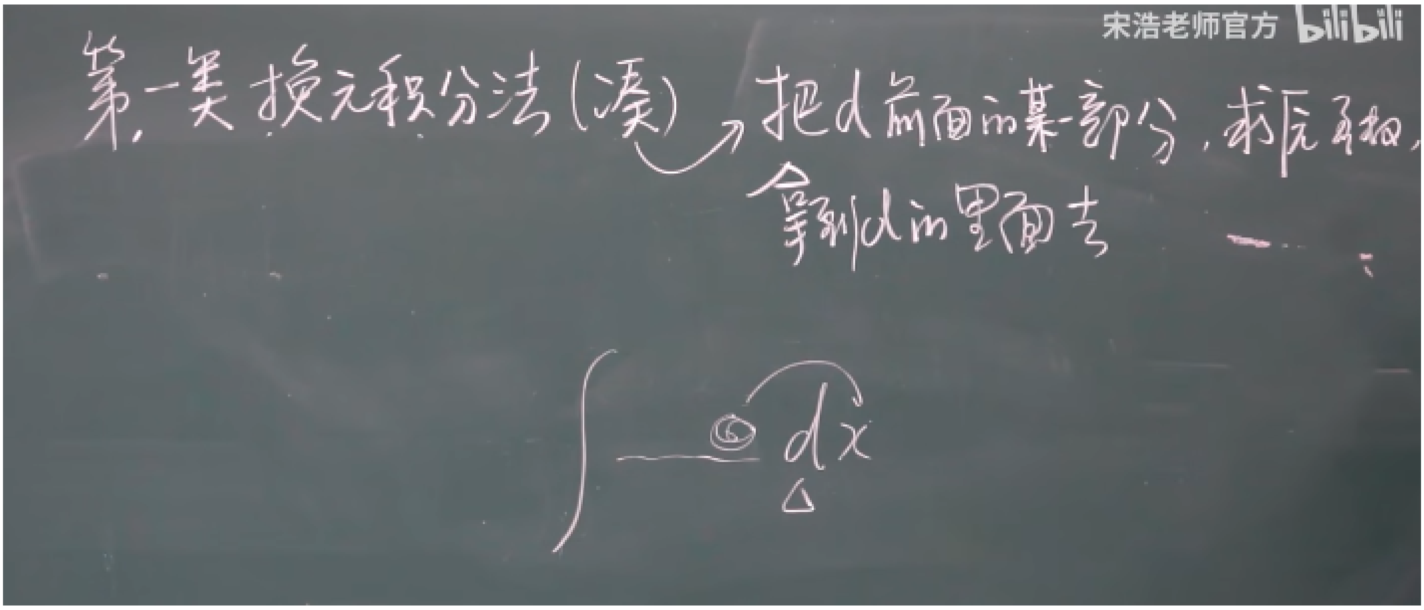
$$\text{即}\int\square^1 d\square=\frac{1}{1+1}\square^{1+1}+C$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(\ln x))^2+C$$

5. 各种例题: 用"凑微分法", 来求"不定积分"(即原函数)

换元积分法（Integration By Substitution）是求积分的一种方法，主要通过引进"中间变量"作变量替换，来使原式简易，从而来求较复杂的不定积分。它是由链式法则, 和微积分基本定理推导而来的。

$$\int 1dx = x + C$$
$$\int 1du = u + C$$
$$\int 1d(x^2 - 3) = x^2 - 3 + C = x^2 + C$$
$$\int 1dF(u) = F(u) + C$$
$$\int 1d[F(\varphi(x))] = F(\varphi(x)) + C$$



首先，我们知道 $\int 1dx = x + C$

并且 $\int 1du = u + C$

所以就有 $\int 1dF(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$

$\leftarrow$ 假设 $[\underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}}]' = \underbrace{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}_{\text{导数}}$ ←"复合函数"求导的"链式法则"

则就有: $\int [\underbrace{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}_{\text{导数}}]dx = \underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}} + C$

进一步变化,就有: $\int f(\varphi(x))\ d\varphi(x) = \underbrace{F(\varphi(x))}_{\text{原函数}} + C$ ← "凑"的思想,就是把 d 前面的某一部分,
先求出这部分它的原函数是什么,
然后把这个原函数，拿到 d 的里面(后面)去.

凑, 就是把 d 前面的某一部分, 先求出其原函数, 再拿到 d 的里面(后面)去. 但是到底是拿"哪一部分"呢? 就要靠猜测了. 即最终都要向"积分公式"里面的形式靠齐, 才能作为一个"整体"来应用积分公式.

Example 10. 标题

例如:

$$\int (2\cos 2x)\,dx \leftarrow \text{我们先把}2\text{求原函数,即}(?)'=2,\ ?=2x$$

然后把 2 (是导数)的原函数 $2x$，拿到 d 的里面去，

就变成:

$$=\int (\cos 2x)\,d2x \leftarrow \text{现在，就有两个}2x\text{，我们把}2x\text{看做一个整体，}$$

就来问:cos什么，对什么求原函数?

显然是 $\cos 2x$，对 $2x$ 求原函数 $\leftarrow$ 根据积分公式: $\int \cos x\ dx=\sin x+C$

就有:

$$=\sin 2x+C$$

Example 11. 标题

例如:

$$\int \frac{1}{3+2x}dx \leftarrow \text{我们怎么凑? 能变成}\int (?)\,d\,(?)\ \text{的形式呢?}$$

既然导数部分(即 $\frac{1}{3+2x}$)是分式，那我们就来看看，

能不能凑成“积分公式”中的 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 的形式，

就能应用这个积分公式来做了.

另外,所拿取的部分，要先求原函数，再拿到 d 后面，

并且这个原函数,还要和导数部分的数值一致，即 $\int (?)\,d\,(?)$ 成为一个整体，

才能运用积分公式.

那么本例选取哪一部分来凑，怎么凑，才能让该部分的原函数，和导数数值一致呢?

我们看到，既然导数部分中有个 $2x$，那我们就来想，哪一部分的原函数，能变成 $2x$ 呢?

显然，2 (导数)的原函数就是 $2x$，那我们就来把分子上的 1，凑成 2，再对它求原函数. 来做下去.

$$=\int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{3+2x}dx\ \ =\frac{1}{2}\int \frac{2}{3+2x}dx \leftarrow \text{分子上的}2\text{(导数)，其原函数是}2x+C\text{，可以进一步凑成分母上的数值}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d\,(2x+C) \leftarrow C\text{可以是任意常数，当然}C\text{也能是}3\text{了}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d\,(2x+3) \leftarrow \text{就可以应用“积分公式”中的}\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$$

Example 12. 标题

例如：

$$\int\left(2x\cdot e^{x^2}\right)dx \leftarrow \text{的}2x\text{部分求原函数} = x^2\text{，拿到}d\text{的后面去}$$

$$=\int\left(e^{x^2}\right)d\left(x^2\right) \leftarrow \text{就能用积分公式} \int e^x dx = e^x + C$$

$$=e^{x^2}+C$$

Example 13. 标题

例如：

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \leftarrow \text{把}x\text{取原函数} = \frac{1}{2}x^2\text{，放到}d\text{中}$$

$$=\int\sqrt{1-x^2}\;d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\;d\left(x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\;d\left(-x^2\right) \leftarrow \text{为了凑导数中的} -x^2\text{，将}d\text{后的}x^2\text{前面加个负号，同时导数部分就也要再加个负号了}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\;d\left(1-x^2\right) \leftarrow \text{为了凑导数中的 } 1-x^2\text{，}d\text{后就加个}1\text{，因为}d\text{后的部分可以任意加减常数}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{1+\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

Example 14. 标题

例如：

$\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx \leftarrow$ 这种分母的最高次数，比分子的最高次数大（即“头小屁股大”）的题目，
我们就用“换元法”来做，给个 $u=x+2$，来先代入进原式中.

$=\int \frac{(u-2)^2}{u^3}dx$

$=\int \frac{u^2-4u+4}{u^3}dx$

$=\int \left(\frac{1}{u}-4\frac{1}{u^2}+\frac{4}{u^3}\right)dx$

$=\left(\int \frac{1}{u}dx\right)-\left(4\int u^{-2}dx\right)+\left(4\int u^{-3}dx\right) \leftarrow$ 其中的 $\int \frac{1}{u}dx$ 部分，能否用指数形式来做？

即 $\int u^{-1}dx=\frac{1}{-1+1}u^{-1+1}+C \leftarrow$ 发现分母为0，所以不能用指数形式来做.

只能套用公式 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 来做

$=\ln|u|-4\cdot\frac{1}{-2+1}u^{-2+1}+4\cdot\frac{1}{-3+1}u^{-3+1}+C$

$=\ln|u|+4u^{-1}-2u^{-2} \leftarrow$ 然后再把 $u=x+2$ 代入回来

$=\ln|x+2|+4(x+2)^{-1}-2(x+2)^{-2}+C$

Example 15. 标题

例如：

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad (a\neq 0) \leftarrow$ 我们看看能不能凑成能用 $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ 的公式

那么本例，我们先把分母上的 a^2 变成1

$$=\int \frac{1}{a^2\cdot\frac{a^2+x^2}{a^2}}dx$$

$$=\int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$$

$=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx \leftarrow$ 现在，我们还要把 d 后面的内容，凑成 $\frac{x}{a}$ 的形式

$=a\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\left(\frac{x}{a}\right) \leftarrow$ 即积分 $\int$ 前面的常数部分，可以直接运算 d 后面的部分里去

$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\left(\frac{x}{a}\right) \leftarrow$ 也能就用 $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ 的积分公式了

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

Example 16. 标题

例如：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0) \leftarrow \text{我们看看能否凑成用公式} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

先把本例分母中的a^2凑成1

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot \frac{a^2-x^2}{a^2}}} dx$$

$$= \int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} dx \leftarrow \text{把}d\text{后面的}x\text{ 凑成}\frac{x}{a}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} d(\frac{x}{a}) \leftarrow \text{积分符号}\int\text{ 前面的常数,可以直接拿到}d\text{后面，做乘法运算}$$

这里就是能变成 $d(\frac{1}{a} \cdot x) = d(\frac{x}{a})$

$$= \arcsin(\frac{x}{a}) + C$$

Example 17. 标题

例如:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}dx \leftarrow$$ 先把分数部分做拆分,即“裂项”:

暂且先拆成 $\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}$

$$= \frac{x-a-x-a}{(x+a)(x-a)}$$

$$= \frac{-2a}{(x+a)(x-a)}$$ ←和原导数(即绿色部分)相差 $-2a$ 倍

所以,原导数部分 $\frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{-2a}(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a})$

$$= \frac{1}{-2a}\int(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a})dx$$

$$= \frac{1}{-2a}\left[\int\left(\frac{1}{x+a}\right)dx - \int\left(\frac{1}{x-a}\right)dx\right] \leftarrow$$ 我们看看每项,能不能凑成 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ 这种形式

$$= \frac{1}{-2a}\left[\int\left(\frac{1}{x+a}\right)d(x+a) - \int\left(\frac{1}{x-a}\right)d(x+a)\right]$$ ←因为 d 里面可以随意加减常数

$$= \frac{1}{-2a} \cdot (\ln|x+a| - \ln|x-a|) + C$$

$$= \frac{1}{-2a} \cdot \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

Example 18. 标题

例如:

$$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+2\ln x}\ dx$$

$$= \int \frac{1}{1+2\ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{=d(\ln x)} \leftarrow$$ 我们先把 $\frac{1}{x}dx$ 合并在一起做,即问:$d(?) = \frac{1}{x}dx$, $? = \ln x$

$$= \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x) \leftarrow$$ 我们将 d 后面的部分,强行变成 $1+2\ln x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(2\ln x+1)$$ ←这里就能套用积分公式 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + C$$

Example 19. 标题

例如：

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int e^{3\sqrt{x}} \underbrace{x^{-\frac{1}{2}} dx}_{\text{合并先做}} \leftarrow x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ 就是问：} \begin{aligned} d(?) &= x^{-\frac{1}{2}} dx, \\ ? &= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \int e^{3\sqrt{x}} \; d\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\int e^{3\sqrt{x}} d\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\int e^{\color{blue}{3\sqrt{x}}} d\left(\color{blue}{3\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{2}{3} e^{\color{blue}{3\sqrt{x}}} + C$$

Example 20. 标题

例如:

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \ dx$$

$$= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \ \underbrace{\cos x dx}_{=d(\sin x)}$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \ d(\sin x)$$

$$= \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \ d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \ d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x) d(\sin x) - \int (2\sin^4 x) d(\sin x) + \int (\sin^6 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - 2 \cdot \frac{1}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin x^7 x + C$$

Example 21. 标题

例如：

$$\int \tan dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos x} \underbrace{\sin x dx}_{= d(-\cos x)}$$

$$= - \int \frac{1}{\cos x} \ d(\cos x) \leftarrow \text{根据积分公式} \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= - \ln|\cos x| + C$$

Example 22. 标题

例如：

$$\int \cot dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x} \underbrace{\cos x dx}_{= d(\sin x)}$$

$$= - \int \frac{1}{\sin x} \ d(\sin x) \leftarrow \text{根据积分公式} \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= - \ln|\sin x| + C$$

Example 23. 标题

例如：

$$\int \cos^2 x\ dx \leftarrow \text{根据三角倍角公式}\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$\text{所以}\ 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\ dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right) d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\ d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Example 24. 标题

例如：

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\ dx \leftarrow \text{对于偶次方的三角函数，一般都用倍角公式来做}$$

$$\text{根据三角倍角公式}\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

所以：

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\int \frac{1-\cos 2x}{2}(\cos^2 x)^2\ dx$$

$$=\int \Bigg(\underbrace{\frac{1-\cos 2x}{2}}_{2\sin^2 x}\Bigg)\Bigg(\underbrace{\frac{1+\cos 2x}{2}}_{2\cos^2 x}\Bigg)^2 dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int 1dx+\int (\cos 2x)dx-\int (\cos^2 2x)dx-\int (\cos^3 2x)dx\right)$$

$$\rightarrow \int 1dx = x+C$$

$$\rightarrow \int (\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

$\rightarrow \int (\cos^2 2x)dx \quad \leftarrow$ 根据公式 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$=\int \left(\frac{1+\cos 2(2x)}{2}\right) dx$$

$$=\int \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C$$

$\rightarrow \int (\cos^3 2x)dx \ \leftarrow$对于奇数次项的三角函数，一般拆分成单数次 + 偶数次两项

$$=\int \cos^2 2x\ \underbrace{\cos 2x dx}_{=\frac{1}{2}\cos 2x\ d(2x)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos^2 2x\ d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int 1\ d(\sin 2x)\ -\int \sin^2 2x\ d(\sin 2x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\ -\frac{1}{3}\sin^3 2x\ +C\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)-\frac{1}{2}\left(\sin 2x\ -\frac{1}{3}\sin^3 2x\ +C\right)\right)$$

Example 25. 标题

例如：

$$\int \sin^6 x \ dx$$

$$= \int (\sec^2 x)^2 \underbrace{\sec^2 x \ dx}_{d(\tan x)} \leftarrow \text{根据积分公式} \int \sec^2 x \ dx = \tan x + C$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^2 \ d(\tan x)$$

$$= \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x) \ d(\tan x)$$

$$= \tan x + 2\cdot\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$$

Example 26. 标题

例如：

$$\int \csc x \ dx \leftarrow \text{本题直接记住最后的结果就行，证明过程不容易想到}$$

$$= \int \frac{1}{\sin x} dx \leftarrow \text{根据倍角公式：} \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\text{就有：} \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}} dx$$

$$=\int \frac{}{2\frac{sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\ dx\quad\leftarrow \text{ 根据三角函数公式 } \sec x=\frac{1}{\cos x}$$

$$=\int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\underbrace{\sec^2\frac{x}{2}\ dx}_{=2d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}\leftarrow\text{根据积分公式:}\int\ \sec^2 x\ dx=\tan x+C$$

将 d 后的内容强制变为 $\frac{x}{2}$，即:

$$=\underbrace{{\color{blue}2}\sec^2\frac{x}{2}\ d\left(\frac{x}{\color{blue}2}\right)}_{=\tan\frac{x}{2}+C}$$

$$=\int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot 2d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)\leftarrow\text{ 根据积分公式:}\int\ \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$=\ln|\tan\frac{x}{2}|\ +C\ \leftarrow\text{根据三角半角公式: }\tan\frac{x}{2}=\csc x-\cot x$$

$$={\color{red}\ln|\cos x-\cot x|+C}$$

Example 27. 标题

例如：

$$\int \cos 3x \cos 2x \ dx$$

←根据三角函数“积化和差”公式：

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$= \int \frac{1}{2}[\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x)] \ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x + C\right)$$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$$