目录

第一部分 条件概率 **2**

1 “条件概率”的意思 **2**

2 条件概率的性质 **3**

2.1 性质: $P(A|条件B) >= 0$ . . . 3

2.2 性质: $P(\Omega|条件B) = 1$ . . . 3

2.3 性质: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \,|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \,|\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \,|\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \,|\mathrm{B})$ . . . 4

2.4 性质: $\mathrm{P}(\mathrm{A} —\mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \,|\mathrm{B}\right)$ . . . 4

2.5 性质: 可列可加性: 若$A_1, A_2, ...A_n, ...$是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \leftarrow$ 即: “和的概率”, 等于“概率的和” . . . 4

3 “条件概率”的乘法公式：$\boxed{P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)}$ **4**

4 传染病模型 **6**

5 全概率公式 **7**

文件名

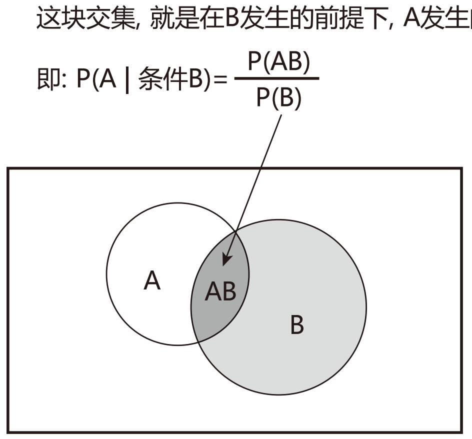
第一部分　条件概率

1　“条件概率”的意思

条件概率是: 有A, B 两个事件, 和样本空间Ω. 其中 $P(B) > 0$, 则, 在B已经发生的条件下, A发生的概率, 就叫做A对B 的“条件概率”. 记作: P(A— 条件B), 读作“在B发生的条件下, A发生的概率”.

$$\text{即, 条件概率公式是: } \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\text{— 条件}\mathrm{B}\right) = \frac{\overbrace{\text{在B发生条件下,A发生的样本点数}}^{\text{这个分子即: AB同时发生了}}}{\text{B里面有多少个样本点}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$$

$$\text{还可写成: } \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\text{— 条件}\mathrm{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)} = \frac{\frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n}}}{\frac{\mathrm{n_B}}{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{n_{AB}}}{\mathrm{n_B}}$$



如上图所示, 注意: 概率是个比值, 所以你光有分子那块的交集值, 是没用的, 它还需要与另一个数(分母)去比.

上面公式中, P(AB) 的计算公式是什么呢?
- 如果事件A, 和事件B 是相互独立的, 则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件A, 和事件B 不相互独立, 则只能用“条件概率”公式, 来求P(AB), 即: $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意: “条件概率”, 和“分步骤法”的区别:
- 分步骤法: 前后每一步骤的事件是相互独立的, 彼此没有条件关系.
比如, 第一步你结婚, 第二步我结婚. 我们这两件事发生的概率互不影响.

- 条件概率: 前面的事件, 有可能会(但并不一定)影响到后面事件的发生概率. 即前后事件之间并不互相独立.
会影响的例子: 比如一共有100个上岸机会, 则第一步你上岸的成功概率, 会影响到第二步我上岸的成功概率. (你若成功, 留给我的名额数量就会更少.)

彼此独立的例子: 比如在你回国的条件下, 我出门的概率. 两者发生的概率毫无关系. 你回不回国, 跟我会出不出门没半毛钱关系.

例

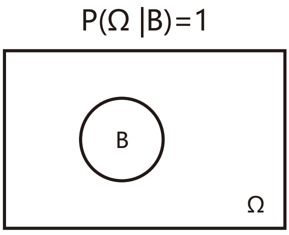
有6个球, 各有编号. 我们先定义下这些事件:
- B: 取到偶数编号的球
- A_1: 取到1号球
- A_2: 取到2号球
- A_5: 取到大于4号的球

则:
- $\overbrace{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}^{\text{取到1号球的概率}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1号球选1}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^1}_{\text{全6选1}}} = \frac{1}{6} = 0.166667$
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 | \mathrm{B}\right) = \frac{\text{在B条件里面,取到}\mathrm{A}_1\text{(即1号球)}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{0}^{\text{偶数编号的球里面, 取不到奇数编号的球}}}{\underbrace{\mathrm{C}_3^1}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = 0$
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 | \mathrm{B}\right) = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_1^1}^{\text{1个编号2的球里面,取1个}}}{\underbrace{\mathrm{C}_6^3}_{\text{3个偶数球里面取1个}}} = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_5 | \mathrm{B}\right) = \frac{\text{在B条件里面,取到大于4号的球}}{\text{B: 取到偶数编号的球}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{5,6号与偶数的交集, 只有6号一个球}}}{3}$

2 条件概率的性质

2.1 性质: $P(A|\text{条件}B) >= 0$

2.2 性质: $P(\Omega|\text{条件}B) = 1$



2.3 性质: $\mathbf{P(A_1 \cup A_2 |B) = P(A_1 |B) + P(A_2 |B) - P(A_1A_2 |B)}$

2.4 性质: $\mathbf{P(A —B) = 1 - P(\overline{A} |B)}$

2.5 性质: 可列可加性: 若$A_1, A_2, ...A_n, ...$ 是“互不相容”的事件, 则有: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ ← 即: “和的概率”, 等于“概率的和”

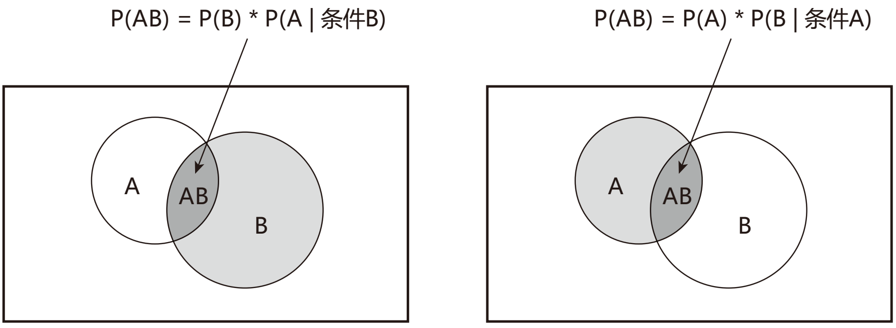
3 “条件概率”的乘法公式 :

$$\boxed{P(前后) = P(后) \cdot P(前|后) = P(前) \cdot P(后|前)}$$

推导过程:

$$因为\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow 即\ P(AB) = \underbrace{P(B) \cdot P(A|B)}_{乘法，是交集\cap的概念} & ① \\ P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow 即\ P(AB) = \underbrace{P(A) \cdot P(B|A)}_{乘法，是交集\cap的概念} & ② \end{cases}$$

①和②，就是“乘法公式”. 即 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
其中 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$



同理, 多个事件的乘法公式就是:
→ $\boxed{P(ABC) = \underbrace{P(A)}\cdot\underbrace{P(B—A)}\cdot\underbrace{P(C—BA)}}$
↑ 上面“从右往左”看, 就是按 A,B,C 的顺序

→ $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2A_1) \cdot P(A_3A_2A_1) \cdot ... \cdot P(\overbrace{A_n}^{即最后一个数字n写在前面.} \ | \ \overbrace{A_{n-1}}^{后面的条件, 最后一个数字是: n少一位} ...A_2A_1)$
↑ 上面“从右往左”看, 就是按$A_1, A_2, ..., A_n$的顺序

> **例**
>
> 有100件产品, 次品率=10%, 即有10件次品. 做不放回抽样, 问: 第3次才取到合格品的概率是?
> 我们先令:
> - A_1 表示第1次取, 就取到了合格品
> - A_2 表示第2次取, 取到了合格品
> - A_3 表示第3次取, 取到了合格品
>
> 那么第3次才取到合格品, 就是:

$$
\underbrace{P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)}_{\text{分步骤来做}}=\underbrace{P\left(\overline{A_1}\right)}_{\text{第1次取,取到次品}}\cdot\underbrace{P\left(\overline{A_2}\,|\overline{A_1}\right)}_{\substack{\text{在第1次取到次品的条件下,}\\\text{第2次取到也是次品}}}\cdot\underbrace{P\left(A_3\,|\overline{A_2}\,\overline{A_1}\right)}_{\substack{\text{在第1,2次取到次品的条件下,}\\\text{第3次取到正品}}}
$$

$$
=\frac{\overbrace{C_{10}^1}^{\text{第一步, 10次品里面取1}}}{C_{100}^1}\cdot\frac{\overbrace{C_9^1}^{\substack{\text{第二步,因为第一步}\\\text{已经拿走1件次品,}\\\text{这第二步就只能在9件次品}\\\text{里面取1件次品了}}}}{C_{99}^1}\cdot\frac{\overbrace{C_{90}^1}^{\substack{\text{既然第三步要拿到正品,}\\\text{我们就从90件正品里面取1了}}}}{C_{98}^1}
$$

$$
=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=0.00834879
$$

例

某产品:
- 甲公司占60%市场份额, 且其产品合格率是 90%
- 乙公司占40%市场份额, 且其产品合格率是 80%

我们先定义下这些事件:
- J: 表示产品是甲的
- $\bar{J}$: 表示产品是乙的
- Q (qualified)：表示产品是"合格"的
- $\overline{Q}$：表示产品是"不合格"的

问, 你买一个产品, 是甲公司的, 并且是合格的概率是?

$$P(JQ)=\underbrace{P(J)}_{=0.6}\cdot\underbrace{P(Q\,|J)}_{\text{甲的合格率}=0.9}=0.54$$

问, 你买一个产品, 是乙公司的, 并且是合格的概率是?

$$P(\bar{J}Q)=\underbrace{P(\bar{J})}_{=0.4}\cdot\underbrace{P(Q\,|\bar{J})}_{\text{乙条件下的合格率}=0.8}=0.32$$

例

抽签, 共10签, 其中有4个为"成功上岸"的好签. 甲乙丙三人, 按顺序依次去抽, 不放回.
我们先设定事件:
- A: 表示甲抽到"成功"
- B: 表示乙抽到"成功"
- C: 表示丙抽到"成功"

问, (1) 甲抽到"成功"的概率? $P(A)=\dfrac{C_{4\text{好签}}^1}{C_{10\text{签}}^1}=\frac{4}{10}=0.4$

(2) 甲乙都抽到"成功"的概率?

$$P(AB)=\underbrace{P(A)}_{\text{第1步:甲先成功}}\cdot\underbrace{P(B\text{ —}A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\overbrace{C_{4\text{好签}}^1}^{\text{甲先抽掉一张好签}}}{C_{10\text{签}}^1}\cdot\frac{\overbrace{C_{4\text{好签}-1}^1}^{\text{乙就只能从剩下的3张好签中来抽了}}}{C_{10\text{签}-1}^1}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=0.133333$$

(3) 甲失败, 乙成功的概率?

$$P(\overline{A}B)=\underbrace{P(\overline{A})}_{\text{第1步:甲先失败}}\cdot\underbrace{P(B|\overline{A})}_{\text{第2步:在甲失败的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{\overbrace{C_{6\text{坏签}}^{1}}^{\text{甲先从共6张坏签中取1}}}{C_{10\text{签}}^{1}}\cdot\frac{\overbrace{C_{4\text{好签}}^{1}}^{\text{乙从共4张好签中取1}}}{C_{10\text{签}-1}^{1}}=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=0.266667$$

(4) 甲乙丙都抽到“成功”的概率?

$$P(ABC)=\underbrace{P(A)}_{\text{第1步:甲先成功}}\cdot\underbrace{P(B|A)}_{\text{第2步:在甲成功的前提下, 乙再成功}}$$

$$=\frac{C_{4\text{好签}}^{1}}{C_{10\text{签}}^{1}}\cdot\frac{C_{\text{还剩3好签}}^{1}}{C_{\text{还剩9签}}^{1}}\cdot\frac{C_{\text{还剩2好签}}^{1}}{C_{\text{还剩8签}}^{1}}=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=0.0333333$$

4 传染病模型

例

有红球a个, 黑球b个. 你从中取出一个球, 看到其颜色后, 把它放回, 并同时再放入c个与你看到的颜色相同的球. 问: 连续3次都是取出红球的概率?

先设定事件:

- A_1 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_2 : 表示你第1次, 取出的是红球
- A_3 : 表示你第3次, 取出的是红球

$$\underbrace{P(A_1A_2A_3)}_{\text{连续3次取到红球}}=\underbrace{P(A_1)}_{\substack{\text{第一步:}\\ \text{第一次就取到红球}}}\cdot\underbrace{P(A_2|A_1)}_{\substack{\text{第二步:}\\ \text{在第一次取到红球的前提下,}\\ \text{第二次也取到红球}}}\cdot\underbrace{P(A_3|A_2A_1)}_{\substack{\text{第三步:}\\ \text{再前两次都取到红球的前提下,}\\ \text{第三次也取到红球}}}$$

$$=\frac{C_{a\text{红}}^{1}}{C_{a\text{红}+b\text{黑}}^{1}}\cdot\frac{\overbrace{C_{a\text{红}+c\text{红}}^{1}}^{\substack{\text{在第一次取到红球后,}\\ \text{又放入c个红球.}\\ \text{所以第二次取时,}\\ \text{红球就一共有}a+c\text{个}}}}{\underbrace{C_{a\text{红}+b\text{黑}+c\text{红}}^{1}}_{\substack{\text{为什么总数没有减1个?}\\ \text{因为是“放回抽样”.}\\ \text{总数不变}}}}\cdot\frac{C_{a\text{红}+2c\text{红}}^{1}}{C_{a\text{红}+b\text{黑}+2c\text{红}}^{1}}$$

上面可以看出:

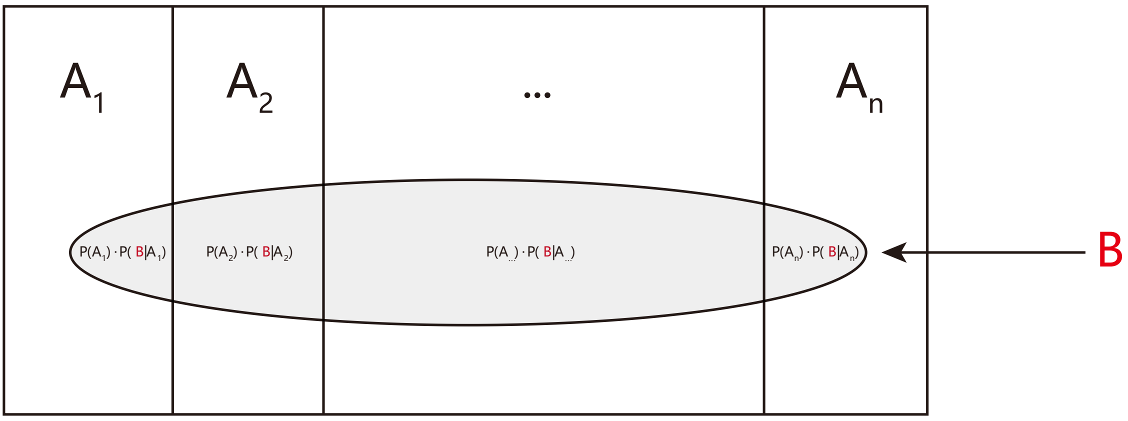
- 当 c红= 0 时, 就是正常的“放回抽样”.
- 当 c红= -1 时, 就是“不放回抽样”. 即把之前步骤中取到的球, 拿走了, 不放回总体中.
- 当 c红¿0 时, 就是本例的“传染病模型”.

5 全概率公式

全概率公式 Total Probability Theorem:
如果 $A_1, A_2, ..., A_n$ 构成一个“完备事件组”, 即: (1) 这些事件两两互不相容, (2)其“和”(或“并集”)为全集 Ω, (3) $P(A_i) > 0$.

则有: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} [P(A_i) \cdot P(B\text{—}A_i)] = P(B)}$

即有: $P(B) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(B\text{—}A_1)} + \underbrace{P(A_2) \cdot P(B\text{—}A_2)} + ... + \underbrace{P(A_n) \cdot P(B\text{—}A_n)}$



Total Probability Theorem
全概率公式

例

一个工厂, 有4条生产线, 情况如下:

	生产线1	生产线2	生产线3	生产线4
产量	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

问: 从该工厂的产品中, 任取一件, 是“不合格品”的概率?

我们先设定事件:
- A_1 : 表示是生产线1 中的产品
- A_2 : 表示是生产线2 中的产品
- A_3 : 表示是生产线3 中的产品
- A_4 : 表示是生产线4 中的产品
- B : 表示是次品

那么, 你任取一件为不合格的概率, 不就是整个工厂总的不合格概率么?! 即 =P(B)

$$\begin{aligned} P(B) &= \underbrace{\overbrace{P(A_1)}^{\text{产品属于生产线1的概率}} \cdot \overbrace{P(B\text{—}A_1)}^{\text{生产线1中的次品率}}}_{\text{第1条生产线中(的条件下), 不合格品的概率}} + P(A_2) \cdot P(B\text{—}A_2) \\ &+ P(A_3) \cdot P(B\text{—}A_3) + P(A_4) \cdot P(B\text{—}A_4) \\ &= (15\% \cdot 0.05) + (20\% \cdot 0.04) + (30\% \cdot 0.03) + (35\% \cdot 0.02) \\ &= 0.0315 \end{aligned}$$

例

有10台机器人, 3台是次品. 已经卖出去了2台(是正品还是次品未知).
问: 再取1台, 是正品的概率?

首先, 我们定义事件:
- B_{00} : B(bad), 表示前两次取, 都是次品(用0表示)
- B_{10} : 表示前两次取, 是一正(用1表示), 一次(用0表示). 至于顺序是“正,次”还是“次,正”, 都行
- B_{11} : 表示前两次取, 都是正品
- G_{xx3} : G(good), 表示第三次取, 是正品

那么, 第3次取到正品 $P(G_{xx3})$ 的情况, 就有这3种可能性:
- (第1次取到)次, (第2次取到)次, (第4次取到)正.
即→ $= \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{00}\right)}_{\text{前两次取到次品}} \cdot \underbrace{\mathrm{P}\left(\mathrm{G}_{\mathrm{xx}3} \mid \mathrm{B}_{00}\right)}_{\text{在前两次取到次品的条件下, 第3次取到正品}}$
- 次,正,正. 即→ $= \mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{10}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{G}_{\mathrm{xx}3} \mid \mathrm{B}_{10}\right)$
- 正,正,正. 即→ $= \mathrm{P}\left(\mathrm{B}_{11}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{G}_{\mathrm{xx}3} \mid \mathrm{B}_{11}\right)$