

从泰勒公式，到麦克劳林公式的演变：

泰勒公式是：

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \quad (1)$$

其中的“余项” $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 中的 ξ ，是一个介于 x_0 与 x 之间的数 (x_0 和 x 谁打谁小，并不一定)

下面：

(1) 我们就用 $\theta \cdot x$ ，来代表 ξ 。 $\leftarrow \theta$ 是个系数 (倍数)

(2) 我们把 x_0 和 x ，也写成带有系数的形式。

$$\rightarrow x_0 = 0 = 0x$$

$$\rightarrow x = 1x$$

因为 $\xi = \theta \cdot x$ ，是一个介于 x_0 与 x 之间的数，即 $\underbrace{x_0}_{=0x} < \underbrace{\theta x}_{=1x} < x$

所以系数 θ 就是： $0 < \theta < 1$

我们把 $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \xi = \theta x \end{cases}$ ，代入泰勒公式 (1) 中。

即得到：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{余项}} \leftarrow 0 < \theta < 1 \quad \leftarrow \text{即“马克劳林公式”}$$