目录

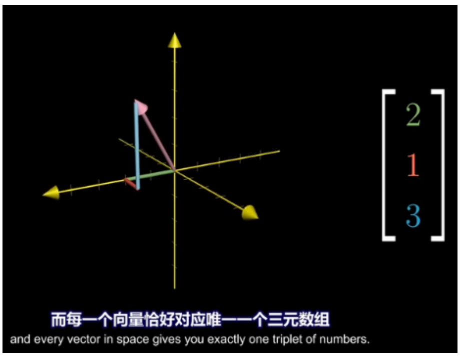
向量组的线性相关性

1 向量 vector 的几何意义

1.1 向量, 就是箭头线段的 "终点" 坐标

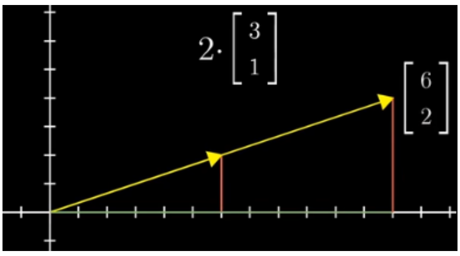
通常, 当你考虑 "一个" 向量时, 就把它看成是 "箭头".
当你考虑 "多个" 向量时, 就把它看成是 "箭头终点" 的那个点 (point).

注意: 向量的值, 表示的是坐标轴的位置, 而不是该向量线段的长度 (即不是 '模" 的概念).



1.2 向量的 "数乘" : 系数 k 的作用, 是把向量伸缩 k 倍

$$2\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix}$$



$text \quad : \quad k = 0,$ 或要么 $\alpha = 0$向量

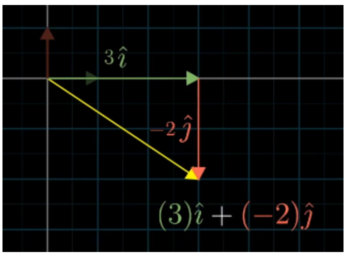
1.3 单位向量: 基 basis

The **basis** of a vector space /is a set of linearly independent vectors /that span the full space.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\imath}=1\\ \hat{j}=1\end{array}\right\}\leftarrow \text{称为“单位向量”或“基”}$$

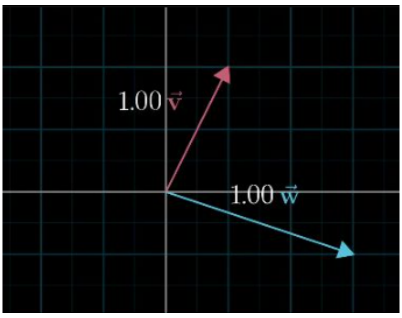
事实上, 每当我们描述一个向量时, 它都依赖于我们正在使用的 "基".

$$\vec{v}=\left|\begin{array}{c}3\\-2\end{array}\right|=3\hat{\imath}+(-2)\hat{j}$$

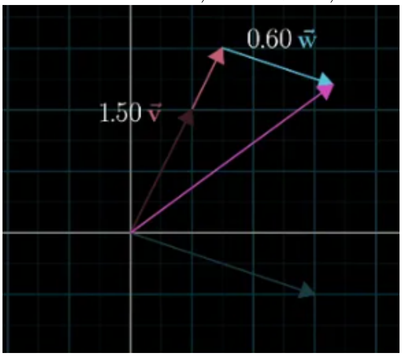


向量的终点坐标, 其实就是系数倍的 "基向量" 的线性组合.

【你可以选择任意两个方向作为 "基", 只要它们互相垂直即可.】
比如，你可以选择指向右上方的向量 v, 和指向右下方的向量 w, 作为基向量.



这组新的基向量, 进行缩放, 再相加，同样能构造出其他的向量.



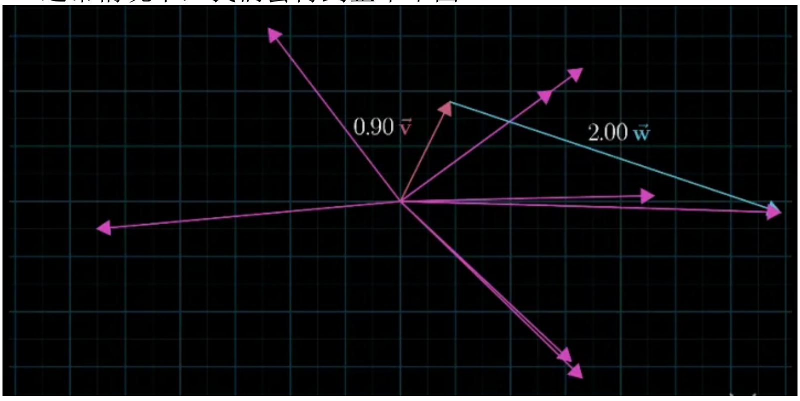
所以, 一组 "基向量", 就对应一个坐标系. 选择不同的基向量, 就构造出了不同的坐标系. 同一个向量，在不同的坐标系下 (即采用不同的基向量)，其坐标值也要相应地发生变化.

上面, 反复出现 **"将向量进行缩放, 再相加" 的操作, 这样的操作，我们称之为 "线性组合".**

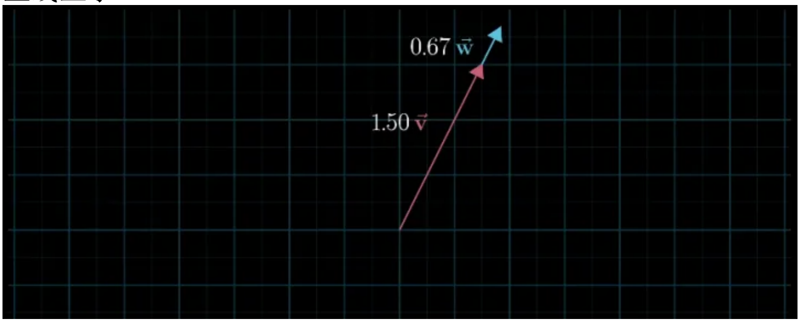
1.4 张成 span

【二维空间中】:
在二维平面中，选取 2 个向量, ，然后考虑它们所有可能的 “线性组合”, 我们会得到什么呢? 这取决于我们选择的 2 个向量.

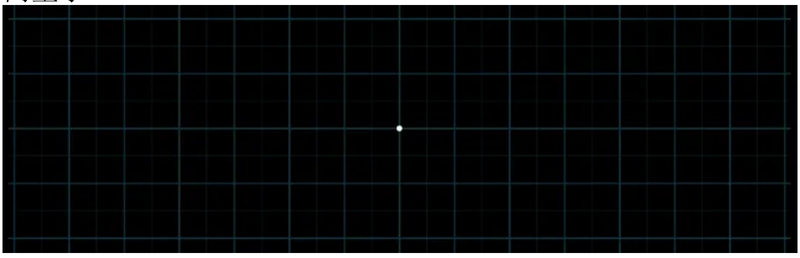
→ 通常情况下，我们会得到整个平面.



→ 但如果选择的 2 个向量，恰好 “共线” 的话，那它们的线性组合, 就被局限在一条过原点的直线上了.



→ 最极端的情况是，如果选择的 2 个向量都是零向量，那么它们的线性组合, 就只可能是零向量了.



“数乘” 和 “加法”, 是向量的两个最基础的运算. **当我们谈论向量所 “张成” 的空间时，我们实际上就是在问：仅仅通过 “数乘” 和 “加法” 这两种运算，你能获得的所有可能的向量集合是什么.**

在线性代数中，向量的起点, 始终固定在 “原点” 的位置，因此, 向量的终点就唯一确定了向量本身. 这样，我们便可以将向量, 看成是 “空间中的点”（即 “向量的终点”）.

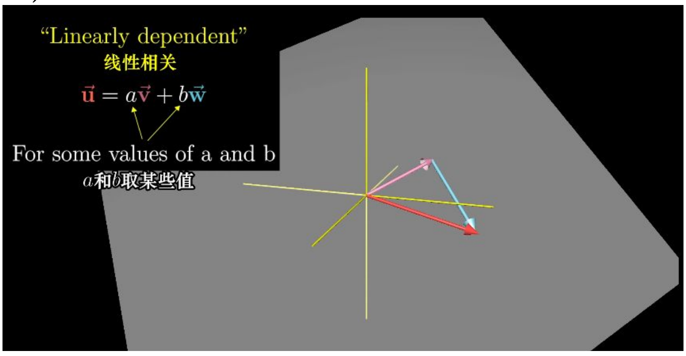
【三维空间中】:
将线性组合的想法扩展到 3 维空间中。想象 3 个三维向量，它们所张成的空间会是什么样的

呢？这取决于我们选择的 3 个向量的箭头位置:

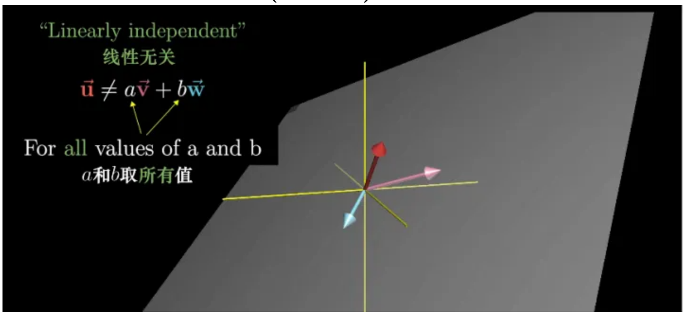
→ 通常情况下，我们会得到整个 3 维空间.
→ 当选择的 3 个向量是 “共面” 时 (即 3 个向量, 存在在两个维度的世界上)，它们所张成的空间, 就是一个过 “原点” 的二维平面.
→ 当 3 个向量 “共线” 时 (即 3 个向量, 共同挤在一个维度上)，它们所张成的空间, 就是一条过原点的一维直线.
→ 当 3 个向量都是零向量时 (即三个向量, 都挤在 0 维度的世界上)，它们所张成的空间, 就只扩展到零向量.

显然，在满足能够 “张成” 一个空间时，只需要最低的维度数量就行了．比如张成 2 维空间，只需要最低 2 个向量 (即轴) 就行了．用 3 个向量去 “张成” 二维空间，那其中有 1 个向量是多余的．数学上，我们就是用 “线性相关” 来描述这样的 “多余向量” 的现象．

→ 当我们说：“几个向量所构成的向量组，‘线性相关’” 时，意思就是说：向量组中的 (任意) 一个向量，都可以用 “向量组” 中其他向量的 “线性组合”，来表示出来。也就是说：这个向量，已经落在其他向量所 “张成” 的空间中，它对整个向量组张成的空间是没有贡献的，把它从 “向量组” 中拿掉，并不会影响向量组所张成的空间的维度 (即空间维度不会塌缩，不会降维)．



→ 那么 “线性无关” 就指的是：向量组中的（任意）一个向量，都无法用 “该向量组” 中其他向量的 “线性组合” 来表示出来。换句话说：向量组中的每一个向量，都为该向量组所张成的空间贡献了一个维度 (一个轴)．少了任何一个向量，都会让空间降维．

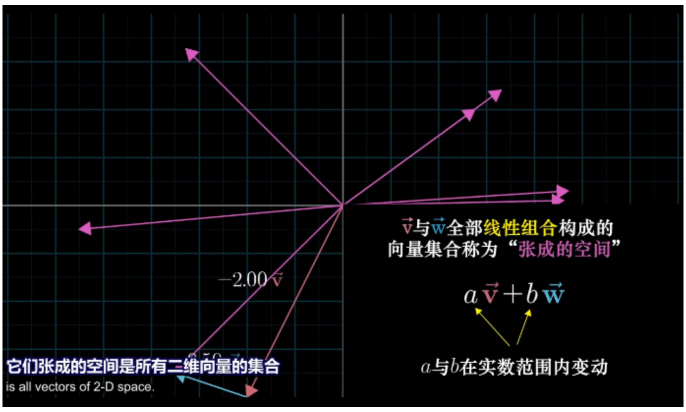


所以：向量空间的一组 “基”(即维度，轴)，就是 “张成” 该空间的一个 “线性无关” 的 “向量集”. The basis of a vector space /is a set of linearly independent vectors /that span the full space.

the span of $\vec{v}$ and $\vec{w}$ /is the set of all their linear combinations.
the set of all possible vectors /than you can reach /is called the span of those two vectors. ← 相当于 “势力范围”, 就是张成.

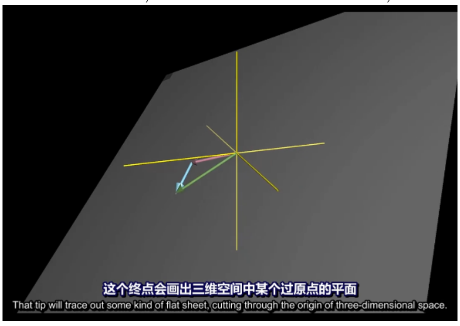
两个斜率不同的向量 (a,b), 自由伸缩, 它们的和 (即 a+b=c), 即新向量 c 的终点, 能遍及二维

平面上的任何点处.

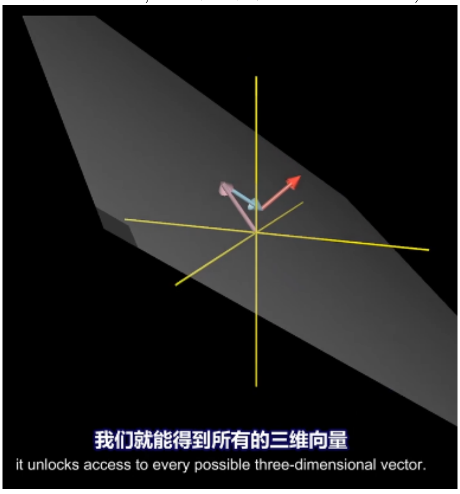


但如果两个向量都是 “零向量” 的话, 它们的系数倍的和, 也永远被束缚在原点 (0,0) 了. $k_1\vec{0}+k_2\vec{0}=0$

三维空间中, 两个斜率同的向量, 能 “张成” 出 “过原点” 的一个平面.



三维空间中, 三个斜率不同的向量, 它们的和, 能张成出三维空间中所有的地方.



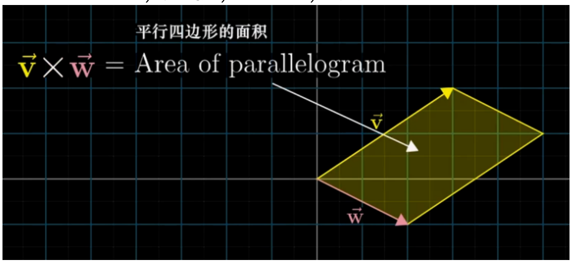
2 向量的叉积 (外积) : $\vec{v} \times \vec{w}$

向量的叉积 (外积) exterior product 或 cross product

2.1 叉积 (外积) 的几何意义: (1) 在二维空间中, 是由这两个向量围成的 "平行四边形" 的面积, 即是一个数值. (2) 在三维空间中, 是一个垂直于这个 "平行四边形" 平面的 "新向量".

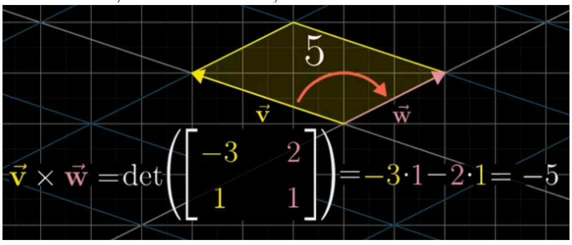
【在二维空间中】:

几何意义上, 叉积, $\vec{v} \times \vec{w}$, 就是由这两个向量围成的 "平行四边形" 的面积.



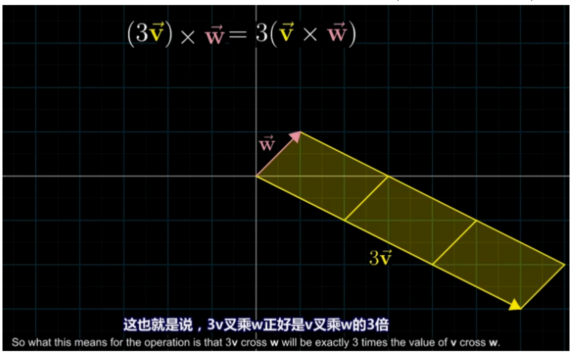
注意: 顺序会对 "叉积" 有影响: 如果 $\vec{v} \times \vec{w}$ 是正数, 则 $\vec{w} \times \vec{v}$ 就是负数. 即: 交换叉乘时的顺序, 值要变号.

之前说过, 行列式的值, 就是表示的是: 将基 $i \times j$ 的面积, 缩放多少倍.



面积的概念, 也就证明了: $3(\vec{v} \times \vec{w}) = 3\vec{v} \times \vec{w}$

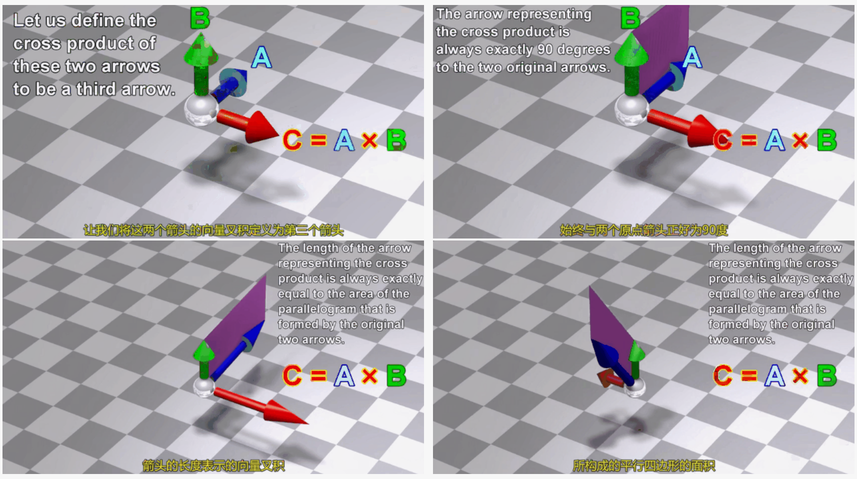
把平行四边形其中的任一一条边, 延长 3 倍, 变成 $3\vec{v}$ 或 $3\vec{w}$, 面积也就是 $= 3(\vec{v} \times \vec{w})$



【在三维空间中】:

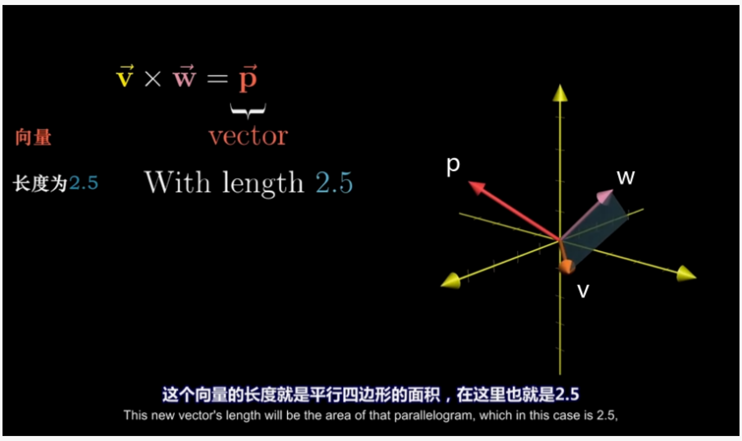
其实, 真正的 "叉积", 是通过两个三维向量, 来生成一个新的三维向量. **注意: 在三维空间中, 叉积的结果不是一个数, 而是一个向量!**

> 例
>
> 如下面的图中所示, A,B 两个箭头的向量的 "叉积", 就是第三个向量 C. 这个 C 向量, 始终与两个原点箭头 (即 A,B) 正好为 90 度. C 向量箭头的长度, 就表示 A,B 向量的叉积, 它总是完全等于 A,B 所构成的平行四边形的面积.



例

又如: 假设 $\vec{v} \times \vec{w} = 2.5$, 在三维空间中, 这两个向量构成一个平面 (平行四边形). 它们的 "叉积" 构成一个新向量 $\vec{p} = 2.5$, 它与 "平行四边形" 所在的面 "垂直".

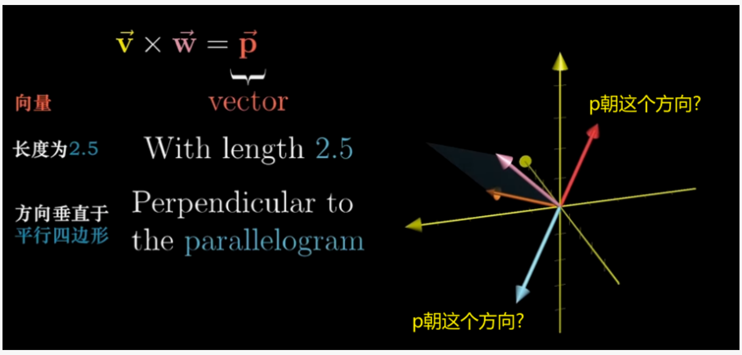


即: **三维叉积, 得到一个三维矢量.**

$\vec{v} \times \vec{w}$ 得到新的向量 $\vec{p}$, 新向量 $\vec{p}$ 的长度, 等于向 $\vec{v}$ 与向量 $\vec{w}$ 组成的平行四边形的面积, 并且向量 $\vec{p}$, 与向量 $\vec{v}$ 和向量 $\vec{w}$ 所在平面垂直.

所以 "三维叉积" 很容易拿来算平面的 "法向量".

但垂直于一个平面的向量, 可以有正反两个方向, $\vec{p}$ 到底是朝哪个方向呢? 这就要用到" 右手螺旋法则".

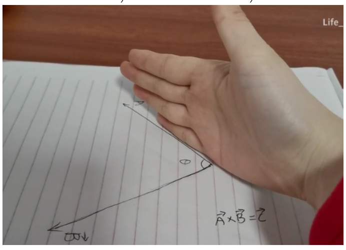


2.2 右手螺旋法则

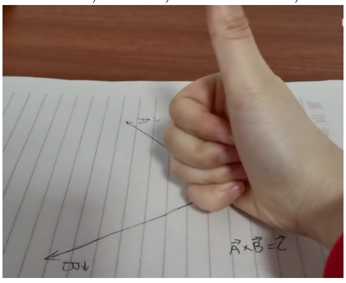
注意顺序: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, 和 $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$, ← $\vec{c}$ 的方向朝向是不同的.

2.2.1 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

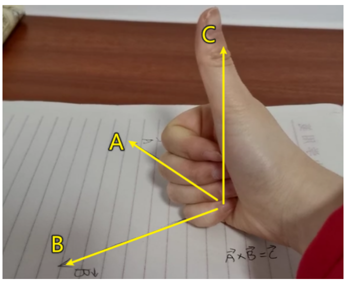
1. 用右手, 伸展手指, 朝向 $\vec{a}$



2. 然后, 握拳, 手指收回, 朝向 $\vec{b}$ 的方向.



3. 则, 大拇指朝向的方向, 就是 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ 中, $\vec{c}$ 的朝向.



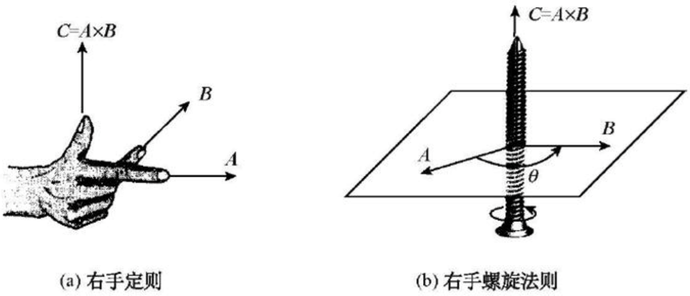
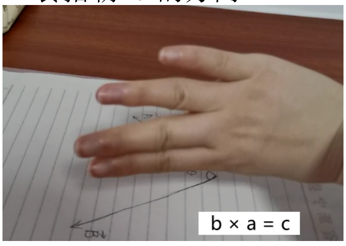


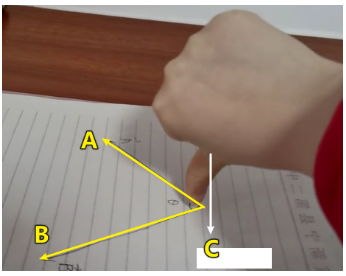
图 1.1.8 右手定则和右手螺旋法则

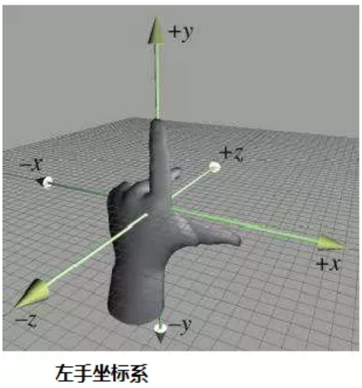
2.2.2 $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$

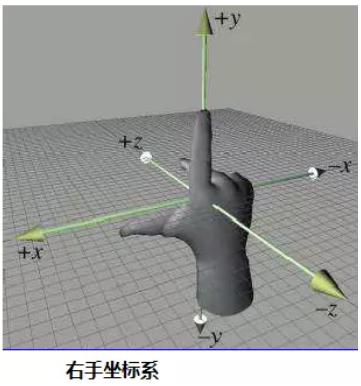
1. 食指朝 $\vec{b}$ 的方向.



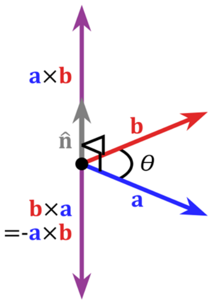
2. 握拳, 食指等收回. 此时大拇指的方向, 就是 $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$ 中 $\vec{c}$ 的朝向.

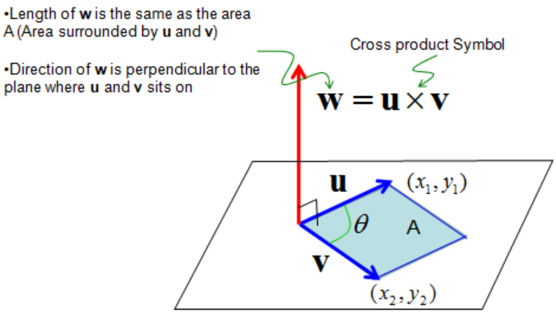






所以, 在 3D 图像学中，叉乘的概念非常有用，可以通过两个向量的 “叉乘”，生成第三个垂直于 a，b 的 “法向量”，从而构建 X、Y、Z 坐标系.



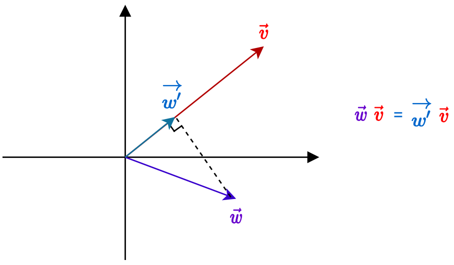


---

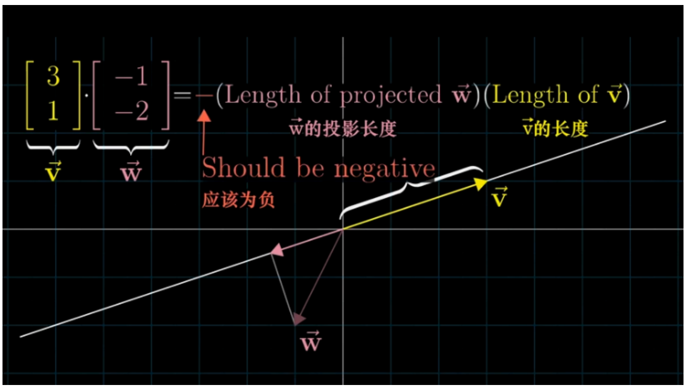
3 向量的点积 (内积) : $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots$

3.1 点积的几何意义: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w'} \leftarrow$ 其中,$\vec{w'}$ 是 $\vec{w}$ 在 $\vec{v}$ 上的投影长度.

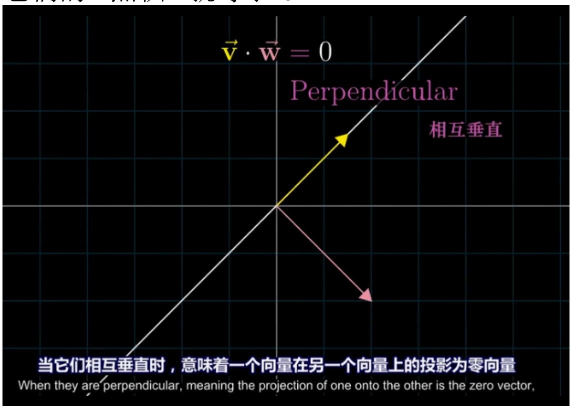
$\rightarrow$ 如果 $\vec{w'}$ 是 $\vec{w}$ 在 $\vec{v}$ 上的投影长度.
则: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w'}$



$\rightarrow$ 如果 $\vec{w}$ 的投影, 是在 $\vec{v}$ 的反方向延长线上, 则此时:
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w'} =$ 是负值



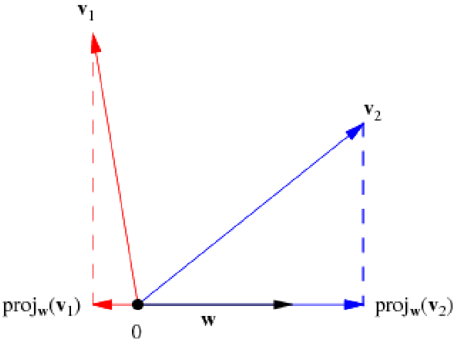
→ 如果这两个向量, 本身就互相垂直, 则一个向量在另一个向量上的投影长度, 就为 0. 这时它们的 “点积” 就等于 0.



所以, 注意: “点积”(inner product) 运算的结果, 是一个 “数”(投影的长度, 就是一个数呀). 这和向量的其他操作是有区别的. 比如:

→ 两个向量做 “加法”, 结果依然是个 “向量”.

→ 向量的 “数乘”, 结果也依然是个 “向量”.



若两个向量 $\vec{x}, \vec{y}$ 间的夹角 $< 90°$	$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0$
若 $\vec{x}, \vec{y}$ 间的夹角 $> 90°$	$\vec{x} \cdot \vec{y} < 0$, 即是个负值.
若 $\vec{x}, \vec{y}$ 间的夹角 $= 90°$	$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

3.2 点积的做法公式 1 : $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

两个向量的” 点积” (inner product 或 dot product 或 scalar product) : $\vec{x} \cdot \vec{y}$, 也有写作 <x,y> 的形式.

点积的做法公式就是:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}, \ y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix},$$

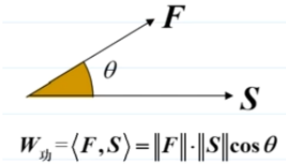
$$\text{则}: \boxed{x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}$$

即: $x \cdot y = x^T \cdot y \leftarrow$ 即把 $\vec{x}$ 横过来, 变成一行, 再和 $\vec{y}$ 的一列相乘. 规则和矩阵的乘法完全一样.

其实: $x \cdot y = x^T \cdot y = y^T \cdot x$

3.3 点积的做法公式 2: $x \cdot y = \mathbf{x}$ 的模 $\cdot$ $\mathbf{y}$ 的模 $\cdot cos\theta$

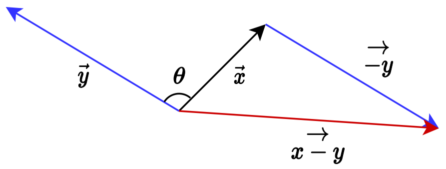
两个向量的点积 = 每个向量 "模长" 的乘积, 再乘以它们的夹角的 cos 值.



根据" 余弦定理", 有: $a^2 = b^2 + c^2 - 2(bc \cdot \cos A)$

或: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

那么对于由两个向量组成的三角形, 如下图, 就有:



证明过程:

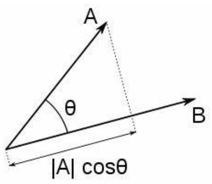
余弦定理: $|x-y|^2 = x^2 + y^2 - 2|x||y|\cos\theta$

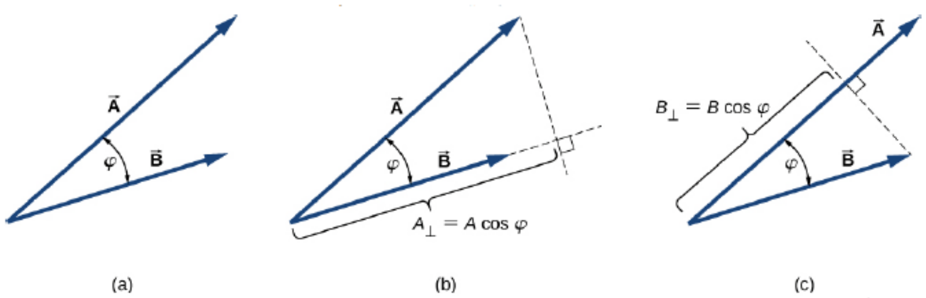
经过变换..., 就有: $\boxed{x \cdot y = |x||y|\cos\theta}$

若向量x和y 都不是零向量的话, 则有:

$\boxed{\theta = \arccos\frac{x \cdot y}{|x||y|}}$ ←这就是 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的夹角公式.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2$





The scalar product of two vectors. (a) The angle between the two vectors. (b) The orthogonal projection $A_\perp$ of vector $\vec{\mathbf{A}}$ onto the direction of vector $\vec{\mathbf{B}}$. (c) The orthogonal projection $B_\perp$ of vector $\vec{\mathbf{B}}$ onto the direction of vector $\vec{\mathbf{A}}$.

根据这个公式, 就可以计算向量 a 和向量 b 之间的夹角。从而就可以判断这两个向量是否是同一方向，是否正交 (也就是垂直), 等方向关系. 具体对应关系为：