目录

概率

第一部分　基本概念

1　排列 and 组合

1.1　加法原理, 乘法原理

- 一件事, 只需“一步”就能完成. 但这一步中有几种不同的方案可供选择, 就用“加法”原理.
- 一件事, 要分成“几步骤”才能完成. 每一步, 又有几种不同的选择方案. 就用“乘法”原理.

1.2　不重复排列：$\mathbf{P}_{\text{总数}\mathbf{n}}^{\text{选出的数量}\mathbf{m}} = \dfrac{\text{总数!}}{(\text{总数} - \text{选数})!}$

不重复排列: 就是从n个不同的元素中, 取出m个来排列, 排过的元素不放回, 没有下次排列资格了.

则, 所有可能的排列(Permutation)方案, 就是:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数n}}^{\text{选出的数量m}} = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)...(\mathrm{n}-\mathrm{m}+1) = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{m})!} = \frac{\text{总数!}}{(\text{总数}-\text{选数})!}}$$

例

10人选5人上岸, 共有多少种选择?

$\mathrm{P}_{\text{总}10}^{\text{取}5} = \frac{\text{总!}}{(\text{总}-\text{选})!} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$

1.3　全排列：$\mathbf{P}_{\text{总数}\mathbf{n}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{n}!$

全排列, 就是从n个里面, 取出全部n个来排列, 即所有的元素都参与了排列.

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{总数n}}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathrm{n}!}$$

例如:

- $\mathrm{P}_2^2 = 2! = 2$
- $\mathrm{P}_1^1 = 1! = 1$

例

一套书,共5本, 排在一起. 问: 自左向右, 或自右向左, 是按着1,2,3,4,5编号顺序的概率是?

即 $= \dfrac{\text{顺序排是1种情况} + \text{倒序排是1种情况}}{\mathrm{P}_{\text{总}5}^{\text{选}5}} = \dfrac{2}{\mathrm{P}_5^5} = \dfrac{1}{60} = 0.0166667$

- $0! = 1$. 因为:

(1) 解释1: $m! = m(m-1)!$, 如 $10! = 10 \cdot 9!$. 所以 $1! = 1 \cdot 0!$, 即得到 $0! = 1$

(2) 解释2: P_0^0 就是从0个元素里面, 取出0个元素来排列. 这只有一种情况: 即 “不选”. 因为不存在任何元素, 所以没法选. 所以 $P_0^0 = 0! = 1$

- $5^0 = 1 \leftarrow$ 因为 $5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = 1$
- 0^0 无意义. $\leftarrow$ 因为 $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$, 而分母不能为0, 所以该式子无意义.

1.4 重复排列

即: 排过队的元素, 可以拿回去, 重复参加后面的排队. (但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。)

重复排列: $\underbrace{\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}\cdot\ldots\cdot\mathrm{n}}_{\text{共取了m次的n}} = \mathrm{n}^{\mathrm{m}}$

1.5 “送利益”模型 (放球模型)

将$n_{benefit}$种利益, 随机投送给N_{man}个人 ($N_{man} \geq n_{benefit}$). 问: 每个人中, 最多只拿到1种利益的概率?

$\rightarrow$ 先看样本空间: 第1种利益, 有N_{man}个人的去向可供选择; 第2种利益, 同样如此, ... 所以, 根据“分步骤”法, 全部$n_{benefit}$种利益, 它们的所有去向, 就共有: $\underbrace{N_{man}\cdot N_{man}\cdot\ldots\cdot N_{man}}_{\text{共}n_{benefit}\text{个}} = N^n$ 个.

$\rightarrow$ 再来看“每个人中, 最多只拿到1种利益”: 第1个人,

未完待续... 这里没看懂

1.6 组合 combination : $\mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{选}} = \frac{\text{总}!}{\text{选}!(\text{总}-\text{选}!)} = C_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}$

组合: 是从n个不同元素中, 每次取出m个不同元素 ($0 \leq m \leq n$) , 合成一组, 而不需要管排队顺序, 就称为: 从n个元素中不重复地选取m个元素的一个组合.

即: 有顺序, 就用排列; 无顺序, 就用组合.

组合的公式是:

$$\boxed{\mathrm{C}_{\text{总数}}^{\text{选数}} = \frac{\mathrm{P}_{\text{总}}^{\text{选}}}{\text{选}!} = \frac{\text{总}!}{\text{选}!\,(\text{总}-\text{选}!)}}$$

$$\boxed{\mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{选}} = \mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{总}-\text{选}}}$$

上面第二个公式的意思是: 比如你有100人, 选其中10人上岸, 就相当于是选90人不上岸. 即: $\mathrm{C}_{100}^{10} = \mathrm{C}_{100}^{100-10} = \mathrm{C}_{100}^{90}$

同理, 有 : $\boxed{\mathrm{C}_{\text{总}}^{0} = \mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{总}-0} = \mathrm{C}_{\text{总}}^{\text{总}}}$

例

有共N人, 其中有w个女, 你任抽n人, 其中恰好有x个女人 ($x \leq w$) (记为事件A) 的概率是?

我们用“分步骤法”来做: 第一步, 先取x个女人. 第二步, 再取男人(数量就是= n-x).

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{取到x女}}{\text{从总N人中取n人}} = \frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总w女}}^{\text{取x女}}}^{\text{第一步:先从全部女人里面,取x个女人}} \cdot \overbrace{\mathrm{C}_{\text{总N人}-\text{总w女}=\text{总男人数}}^{\text{总取n人}-\text{x女}}}^{\text{第二步:再从总男人里,取剩下的男人数量}}}{\mathrm{C}_{\text{总N人}}^{\text{取n人}}}$$

上面这个公式, 其实就是“古典概型”里面的“超几何分布”.

例

有共9球, 5白, 4黑. 任取3球, 问:

(1) 是 2白1黑的概率: $P(2白1黑) = \frac{\overbrace{C_5^2}^{第一步:5白取2} \cdot \overbrace{C_4^1}^{第二步:4黑取1}}{\underbrace{C_9^3}_{总9取3}} = 0.47619$

(2) 取到的3球中, 无黑球 : $P(3白) = \frac{\overbrace{C_5^3}^{5白取3}}{\underbrace{C_9^3}_{总9取3}} = 0.119048$

(3) 取到的3球中, 颜色相同 : $P(3球同色) = \frac{\overbrace{C_5^3}^{5白取3} \overbrace{+}^{或} \overbrace{C_4^3}^{4黑取3}}{\underbrace{C_9^3}_{总9取3}} = 0.166667$

或, 也可用第二种思路来解:

$$
\begin{aligned}
&P(3球同色) = 1 - P(3球存在不同色) \\
&= 1 - \frac{1白2黑, 或2白1黑}{9取3} \\
&= 1 - \frac{\overbrace{C_5^1 \quad C_4^2}^{5白取1;4黑取2} \overbrace{+}^{或} \overbrace{C_5^2 \quad C_4^1}^{5白取2;4黑取1}}{C_9^3} \\
&= 0.166667
\end{aligned}
$$

2 交集 ∩ , 与并集 ∪

A, B, C 是试验E 的随机事件. 则表示法是:
- A发生 : A

下面, 加法即表示“或” :
- A, B, C 恰有一个发生 : $A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$
- A, B, C 至少一个发生(即 ¿=1) : A+B+C 或 $A \cup B \cup C \leftarrow$ 即3选1, 还有两个发不发生, 不用管, 随意, 都行.
- A, B, C 至多一个发生(即 ¡=1) : $\underbrace{A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C}_{3选1} + \underbrace{\overline{ABC}}_{3选0}$
- 恰有两个发生: $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$
- 至少两个发生(即,¿=2) : $\underbrace{AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC}_{3选2} + \underbrace{ABC}_{3选3} + \quad \underbrace{AB + BC + AC}_{3选2,\ 还有一个发不发生不用管,随意}$

下面, 乘法即表示“同时” :
- 只有A发生 : $A\overline{BC}$
- A, B, C 同时发生 : ABC

例

一次射击试验, 整个流程是打三枪, 用 $A_i, (i = 1, 2, 3)$ 来表示“在第i次时击中了目标”.
记住: 加法(+) 代表“或,并 ∪”; 乘法代表“交∩”.
- $A_1 + A_2$: 表示第一次击中了, 或第二次击中了. 即前两次至少击中一次.
- $\overline{A_2}$: 表示第二次没击中.
- $A_1 + A_2 + A_3$: 表示仅第一次击中, 或仅第二次击中, 或仅第三次击中.
- $A_1A_2A_3$: 表示三次全中.

- $A_2\overline{A_3} = A_2 - A_3$：表示第二次击中, 并且第三次失败.
- $\overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 + A_3}$：表示第一次没中, 并且第三次也没中.
- $\overline{A_1} + \overline{A_3}$：表示第一次没中, 或第三次没中.

3 频率

做n次试验, A事件发生了m次, 我们就把 $\dfrac{A\text{事件发生的次数}m}{\text{共}n\text{次试验}}$ 叫做"频率". 记作$\omega_n\left(A\right)$.
比如丢硬币, 丢10次, 丢100次, 丢1000次, 每次的"频率"可能都不一样, 比如结果是 $\frac{7}{10}, \frac{55}{100}, \frac{508}{1000}$.
所以这就是"频率"和"概率"的区别.
但你可以发现, 随着试验次数n的增大, A事件的"频率"的值, 会接近与"概率"的值. 即: $\lim_{n ß0} \omega_n\left(A\right) \rightarrow P$

4 频率的性质:

规范性:
- $\omega_n\left(\Omega\right) = 1 \leftarrow$ 做n次试验, 里面"必然事件"发生的频率, 是1. 既然是"必然事件Ω", 它肯定会发生, 所以频率肯定是1.
- $\omega_n\left(\Phi\right) = 0 \leftarrow$ 做n次试验, 里面"不可能事件"发生的频率, 是0.

可加性:
比如做1000次试验, 即Ω_{1000}, 则有:

$$\omega_{1000}\left(A_1 + A_2\right) = \underbrace{\omega_{1000}\left(A_1\right)}_{1000\text{次试验中},A1\text{事件发生的频率}} + \underbrace{\omega_{1000}\left(A_2\right)}_{1000\text{次试验中},A2\text{事件发生的频率}}$$

即: "和的频率", 就等于"频率的和".

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\omega_n}_{\text{做}n\text{次试验}} \underbrace{\left(A_1 + A_2 + ... + A_m\right)}_{\text{里面有}m\text{个事件}}}_{\text{做}n\text{次试验,里面有}m\text{个事件发生了的频率}} = \omega_n\left(A_1\right) + \omega_n\left(A_2\right) + ... + \omega_n\left(A_m\right)}$$

5 公理化

5.1 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

5.2 对于"完备事件组"中的所有事件来说: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) = P(\Omega) = 1$

完备事件组 collectively exhaustive events 就是: 如果事件 B1, B2, B3, ... Bn 满足:
1. 它们两两互不相容(即两两的交集=空集),
2. 其"和"为全集Ω.
换言之, 若n个事件两两互斥, 且这n个事件的"并"是Ω，则称这n个事件为"完备事件组".

全概率公式

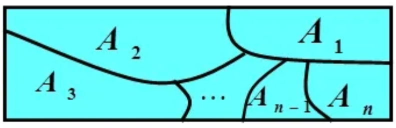
一、样本空间的划分（完备事件组）

定义　设 Ω 为试验 E 的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 E 的一组事件，若

(i)　$A_iA_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n$;

(ii)　$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分．



例

有20件衣服，质量分3等，其中一等的6件，二等的10件，三等的4件.
问："任取3件，至少2件是同质量"的概率?

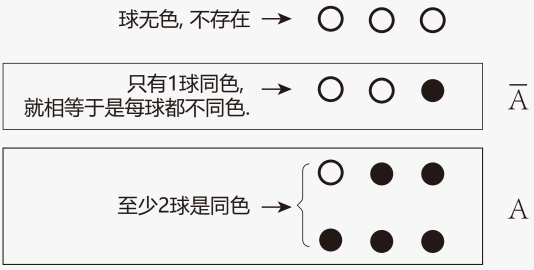
这个问题其实可转化为有色球问题：

20球,三色,每色数量分别是6 , 10 , 4球. 问3取2球，至少2球是同色的概率.

即 $P(\underbrace{同色 \geqslant 2球}_{事件A}) = 1 - P(\underbrace{3球都不同色}_{事件\bar{A}})$

$$= 1 - \frac{\overbrace{C_6^1}^{色1中的共6球取1个.}\ \overbrace{C_{10}^1}^{色2中的共10球取1个.}\ \overbrace{C_4^1}^{色3中的共4球取1个}}{\underbrace{C_{20}^3}_{总20球取3}}$$

$$= \frac{15}{19} = 0.789474$$



例

n个人中，至少2人生日相同的概率是?

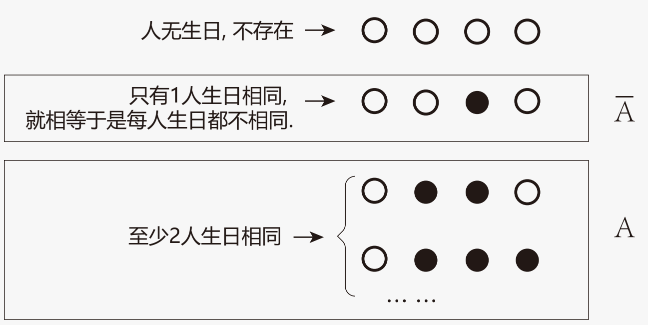
$P(\underbrace{至少2人生日相同}_{事件A}) = 1 - P\ (\underbrace{只有1人生日相同}_{即n个人每人生日都不相同.\ 即事件\bar{A}})$

$$= 1 - \frac{n个人生日都不相同}{n个人，随便选生日，无所谓充不重复}$$

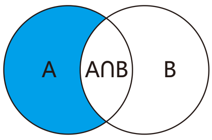
$$= 1 - \frac{\overbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365-n+1}^1}^{共n人的}}{\underbrace{C_{365}^1 \cdot C_{365}^1 \cdot \ldots \cdot C_{365}^1}_{共n人的}}$$

比如，若总人数n = 55人，则：

$$P(A) = 1 - \frac{\overbrace{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 54)}^{共55个数}}{(C_{365}^1)^{55}} = 0.99$$



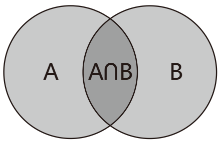
5.3 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$



P(A-B) = P(A) - P(AB)

5.4 若A包含着B，则有：$P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(A)>=P(B)$

5.5 加法公式：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



P(A+B) = P(A) +P(B)- 它们的交集部分 P(AB)

例

A事件的概率是0.4，即 P(A)=0.4;

P(B)=0.3;

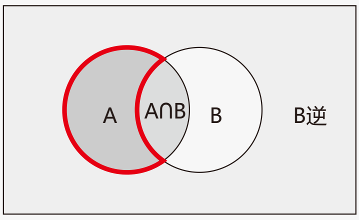
且P(A+B)=0.6，← 说明A与B有交集部分存在．否则，如果A与B是不相容的话，它们和的概率，应该是 0.4+0.3=0.7.

所以它们的交集 P(AB) 就是=0.1：

$$\underbrace{P(A+B)}_{0.6}=\underbrace{P(A)}_{0.4}-\underbrace{P(B)}_{0.3}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}$$

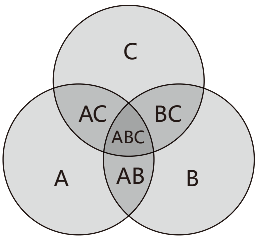
求$P\left(A\overline{B}\right)$，即求$A\cap B$逆 的概率:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A-B)=\underbrace{P(A)}_{=0.4}-\underbrace{P(AB)}_{=0.1}=0.3$$



A∩B逆：就是红色面积的那块

5.6 加法公式：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$



P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)
−P(AB)−P(AC)−P(BC)
+P(ABC)

说明:

$$P(A+B+C)$$
$$=\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分,被加了3次}}\underbrace{-P(AB)-P(AC)-P(BC)}_{\text{这里,}ABC\text{交集部分,又减了3次}}+\underbrace{P(ABC)}_{\text{所以最后,我们还要把镂空的}ABC\text{交集部分,加上一份上去}}$$

> 例
>
> 已知 $\begin{cases} P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4} \\ P(AB)=0 \\ P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16} \end{cases}$，求 $\begin{cases} 1.\ A,B,C \text{ 至少一个发生的概率} \\ 2.\ A,B,C \text{ 都不发生的概率} \end{cases}$
>
> 我们先来算 $P(ABC)$，因为下面会用到.
> 因为 $ABC\subset AB$，所以 $P(ABC)\le\underbrace{P(AB)}_{=0}$，因此 $P(ABC)=0$
>
> → 至少一个发生，就是用“并∪”，用加法:
> 所以 $P(A+B+C)=\underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{P(B)}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{P(C)}_{=\frac{1}{4}}-\underbrace{P(AB)}_{=0}-\underbrace{P(AC)}_{=\frac{1}{16}}-\underbrace{P(BC)}_{=\frac{1}{16}}+\underbrace{P(ABC)}_{=0}$
> $=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{16}=\dfrac{5}{8}=0.625$
>
> → 都不发生，即 $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=1-\underbrace{P(A+B+C)}_{\text{任意一个发生}}=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}=0.375$

> 例
>
> 有两台机床，$\begin{cases} \text{第}1\text{台：不需要照看的概率是}0.9\text{，则需要照看它的概率就是}0.1 \\ \text{第}2\text{台：不需要照看的概率是}0.8\text{，则需要照看它的概率就是}0.2 \\ \text{两台都需要照看的概率，是}0.02 \end{cases}$
>
> 问：至少1台需要照看的概率是?
>
> 思路1：$P(\text{至少1台要照看})=1-P(\text{都不需要照看})$
> $=1-(0.9\cdot0.8)=0.28$
>
> 思路2：至少1台需要照看，就是要照看1台或2台呗，“或”就是用加法，并集
> $=P(A_1+A_2)=\underbrace{P(A_1)}_{=0.1}+\underbrace{P(A_2)}_{=0.2}-\underbrace{P(A_1A_2)}_{=0.02}=0.28$

6 古典概型：$\mathrm{P(A)}=\frac{\text{A中包含的“基本事件”有多少个}}{\text{S中“基本事件”的总数}}$

满足这些条件的, 就属于“古典概率 classical models of probability 模型”:

- 样本点是有限的
- 所有样本点出现的可能性, 是相同的. 即“等可能性”.

古典概型模型:

事件$\mathrm{A}=\{\mathrm{e_{i_1}},\mathrm{e_{i_2}},...,\mathrm{e_{i_k}}\}$ 发生的概率为:

$\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}=\frac{\text{A中包含的“基本事件”有多少个}}{\text{S中“基本事件”的总数}}$

古典概率模型的性质:

- $0 <= P(A) <= 1$
- $P(\Omega)=1, \quad P(\Phi)=0$
- 有限可加：$A_1, A_2, ...A_n$ 是互不相容的. 即 $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_n)$

古典概率模型:

- 其优点是: 可以直接套公式来算.
- 但其缺点是:

(1) 其结果必须是“有限个”的结果 (如, 掷骰子, 结果就是6个基本事件, 而不是无限个事件.)

(2)其结果, 必须是“等可能性”.

例

有 a个白, b个黑, 问: 从中连续取出 m个球 (连续取, 就是不放回的意思了) $(1 \le m \le a+b)$, 第m个是白球的概率= ?

思路1：其实我们只要考虑第 m 个位置的这一个球的情况就行了, 其他位置的球,随便它们什么颜色, 我们不用考虑的.

$\mathrm{P}\,(\text{第m位置是白球})=\frac{\text{在第m个位置上, 从a个白球里取1个放上去. 剩下数量的其他位置上, 依然做全排列}}{\text{所有球的全排列}}$

$$\text{即 P}\,(\text{第m位置是白球})=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白}}^{\text{取1}}}^{\text{第一步, 先取1个白球,占位放在第m个位置上.}}\cdot\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白+总b黑}-1}^{\text{总a白+总b黑}-1}}^{\text{第二步:剩下的所有球, 依然做全排列}}}{\mathrm{P}_{\text{总a白+总b黑}}^{\text{总a白+总b黑}}}$$

思路2：或者我们也只需考虑前m个数量的球就行了, 后面其他的球, 爱怎样颜色怎样颜色, 不用我们考虑.

$$\mathrm{P}\,(\text{第m位置是白球})=\frac{\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白}}^{\text{取1}}}^{\text{第一步, 先取1个白球,占位放在第m个位置上}}\cdot\overbrace{\mathrm{C}_{\text{总a白+总b黑}-1}^{\mathrm{m}-1}}^{\text{第二步:m个数中的剩下的所有球, 依然做全排列}}}{\underbrace{\mathrm{P}_{\text{总a白+总b黑}}^{\mathrm{m}}}_{\text{m个球的全排列}}}$$

其实你有没有发现? “在第m个位置上出现白球” 这个“m索引位置”, 其实是个障眼法. 白球出现在任何其他位置, 它出现在第1个位置, 第10个位置, 最后一个位置, 对我们的计算结果没有任何影响. 因为不管白球出现在第几个位置上, 它出现的概率都是相同的, 因为是古典概率嘛! 所以, “位置为几”其实不重要.

所以, 我们就有了第三种思路: 我们就把这个白球, 让它直接出现在第1个位置就好了:

$$P\left(\text{第1个位置是白球}\right)=\frac{\overbrace{C^1_{\text{总a白}}}^{\text{(在第1个位置上,) 从白球里, 取1个 的取法数量}}}{\underbrace{C^1_{\text{总a白+总b黑}}}_{\text{(在第1个位置上,) 从总数里, 取1个 的取法数量}}}=\frac{a}{a+b}$$

---

7 几何概型

几何概型 geometric models of probability, 即这类概率问题, 能够转换成用"几何问题"来求解.

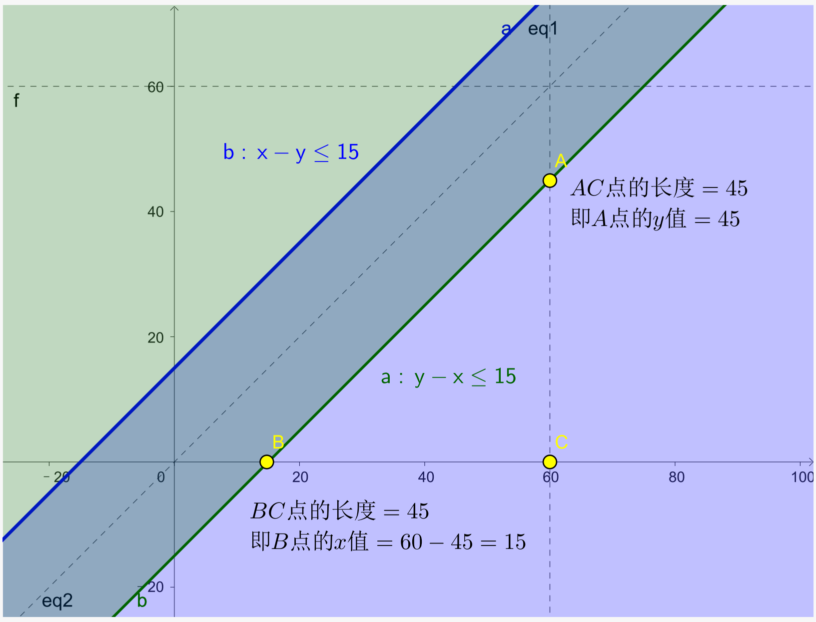
例

有甲乙两人, 相约在 6-7点见面 (其实这个具体的时间点也是个障眼法, 只要在1个小时的区间就行). 先到者, 最多等对方15分钟, 然后就离开了.
甲乙两人, 在这1小时内的任意时刻, 都可能到达.
问, 他们能相见的概率是多少?

我们令
- 事件A : 表示两人见到了面
- x : 表示甲到达的时间点
- y : 表示乙到达的时间点

他们要能见到面, 即 $|y-x|\leq 15$分钟. 那么这就有两种可能性:
- 甲先到. 即 $x\leq y$ (甲来到的时间点x, 比乙来到的时间点y 要小 (早)), 即 $y-x\leq 15$
- 乙先到. 即 $y\leq x$, 即 $x-y\leq 15$

这两组不等式, 能用函数图形来表示出来, 如下图. x和y轴上的60, 分别代表两人的1小时区间(60分钟) . 中间的交集区域, 就是两人可以见到面的时间段.

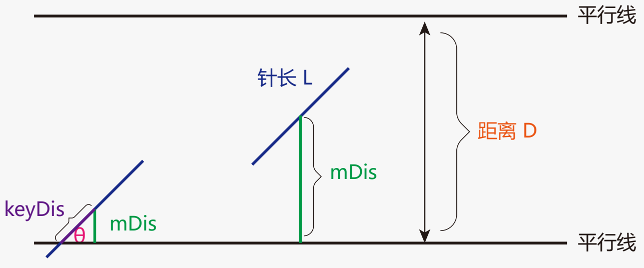


显然, 这就是求几何面积的问题.

$$\text{即: } \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{60 \cdot 60 - \overbrace{\frac{45 \cdot 45}{2}}^{\text{上面的“边长为45”的三角形的面积}} - \overbrace{\frac{45 \cdot 45}{2}}^{\text{下面的“边长为45”的三角形的面积}}}{\underbrace{60 \cdot 60}_{\text{即“边长为60分钟”的矩形}}} = 0.4375$$

例

(法国)布丰(1707-1788) 投针 Buffon's needle problem.
说: 有两条平行的直线, 相聚为 D(distance), 距离单位不重要. 你哪一个针 (长度为 L (length), $L < D$), 随机地投向针. 问: 针与那两条平行直线相交的概率是?



思路: 针投上去后的位置状态, 是由两个参数决定的:
(1) 针的中点, 距离"最近那根直线"的最短距离. ← 该距离用变量 mDis (midpoint distance)来表示.
(2) 针倾斜的位置, 与直线的夹角. ← 我们用变量 θ 来表示.
用上面这两个变量, 我们能分别作为 x轴(表示 θ 变量) 和 y轴(表示 mDis变量), 来画出函数图像.

针投出后, 所有可能的状态, 其全集就是:

$$\Omega = \left\{ (\theta,\ \mathrm{mDis}) \mid 0 \le \underbrace{\theta}_{\text{夹角}} \le \pi;\quad 0 \le \underbrace{\underbrace{\mathrm{mDis}}_{\text{针的一半长度}} \le \underbrace{\frac{D}{2}}_{\text{两条平行线间距的一半}}}_{\text{因为针的长度L，是小于两条平行线的间距D的}} \right\}$$

那么, 什么状态下, "针"就与"直线"相交了呢? – 当"从针的中点(沿着针的身体走)到直线"的距离 (下面用变量 keyDis (key distance) 来表示这个距离) $\le$ 针的一半长度时. 它们就相交了. 否则, 它们就不想交.
即, 就有:

$\rightarrow$ 因为 θ角度有sin值： $\sin\theta = \dfrac{\text{mDis}}{\text{keyDis}}$,

则有： $\text{keyDis} = \dfrac{\text{mDis}}{\sin\theta}$，$\leftarrow$当该值 $\leq \dfrac{\text{针长L}}{2}$时，针与直线相交.

$\rightarrow$ 因为y轴是代表 mDis变量，所以我们要写出 mDis 曲线的函数值：

根据 上面的 $\text{keyDis} = \dfrac{\text{mDis}}{\sin\theta} \leq \dfrac{\text{针长L}}{2}$

就有： $\text{mDis} \leq \dfrac{\text{针长L}}{2} \cdot \sin\theta$

即： $\text{mDis} \leq \dfrac{1}{2}\text{针长L} \cdot \sin\theta$ $\leftarrow$这个就是$y = \text{mDis}$曲线的函数表达式内容了.
既然这里是 小于等于符号，则mDis的值，
就是$\dfrac{1}{2}\text{针长L} \cdot \sin\theta$这条曲线下方的面积了，

$$\text{即 } \text{mDis} = \int_0^{\pi} \left(\overbrace{\frac{1}{2}\text{针长L} \cdot \sin\theta}^{\text{即 mDis 函数曲线}} \right) d\theta$$

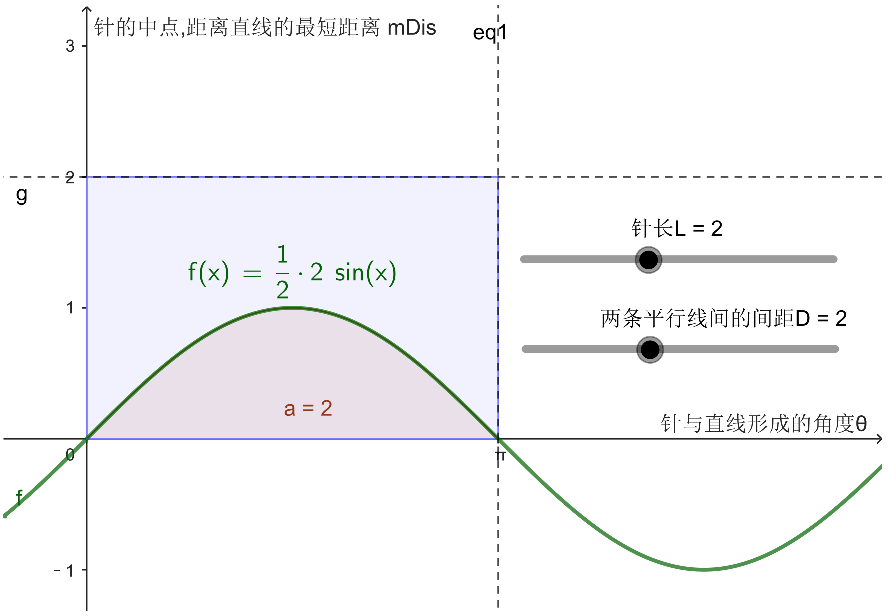
$\rightarrow$ 所以，相交的概率

$$= \frac{\text{“针”与“直线”相交时的 mDis 与 } \theta \text{ 的所有取值范围}}{\text{针投出后的 所有可能的 mDis 与 } \theta \text{ 的取值范围}}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} \left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\text{针长L}}_{\text{常数}} \cdot \sin\theta}^{\text{即 mDis 函数曲线}} \right) d\theta}{\underbrace{\pi}_{\substack{\text{x轴上代表的}\\ \text{“θ角”的取值范围}}} \cdot \underbrace{\frac{D}{2}}_{\substack{\text{y轴上代表的}\\ \text{“针的一半长度mDis”}\\ \text{的取值范围}}}}$$

$\leftarrow$分子上积分的下限是0，上限是π，
这个也就是 θ角度的所有区间$(0-\pi)$

$$= \frac{\frac{1}{2}\text{针长L} \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}}{\frac{1}{2}\pi D} = \frac{\text{针长L} \cdot \overbrace{\left[-\cos\pi - (-\cos 0)\right]}^{=2}}{\pi D} = \frac{\overbrace{2\text{针长L}}^{\text{即函数图中红色区域的面积}}}{\underbrace{\pi D}_{\text{即函数图中蓝色区域的面积}}}$$



7.1 “古典概率模型”和“几何概率模型”的区别

- 古典概率模型：

具有 “有限可加性” (finite additivity)：是指“有限个”两两互不相容事件的“和事件”的概率, 等

于“每个事件概率”的和.

即: $\underbrace{P\underbrace{\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right)}_{\text{和}}}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{P\left(A_i\right)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

- 几何概率模型 :

具有“完全可加性”: 即先求和, 再求概率, 等于先求每个事件概率, 再求和.

即: $\underbrace{P\underbrace{\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}_{\text{和}}}_{\text{的概率}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P\left(A_i\right)}_{\text{概率}}}_{\text{的和}}$

注意两者的区别: 一个是“有限(到n)”的加, 一个是“无限(到∞)”的加.