1. Математические построения.

Исходные уравнения.

$$
\begin{aligned}
&m \cdot \ddot{x} = -\frac{x}{L} \cdot T, \\
&m \cdot \ddot{y} = -\frac{y}{L} \cdot T - m \cdot g;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m = 1, \\
&L = \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{— const}, \\
&T = -\frac{y}{L} \cdot m \cdot g, \\
&g(t) = 9.81 + 0.05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t).
\end{aligned}
$$

Преобразования уравнений.

$$
\begin{aligned}
&m \cdot \ddot{x} = -\frac{x}{L} \cdot \Big(-\frac{y}{L} \cdot m \cdot g \Big), \\
&m \cdot \ddot{y} = -\frac{y}{L} \cdot \Big(-\frac{y}{L} \cdot m \cdot g \Big) - m \cdot g;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m \cdot \ddot{x} = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \cdot m \cdot g, \\
&m \cdot \ddot{y} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot m \cdot g - m \cdot g;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \cdot g, \\
&\ddot{y} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot g.
\end{aligned}
$$

Начальные условия.

$$x_0 = 3, \quad y_0 = -4; \quad v_0 = 1.$$
$$L = \sqrt{9+16} = 5, \quad L^2 = 25.$$

$$\dot{x}_0 = \frac{y_0}{L} \cdot v_0, \quad \dot{y}_0 = -\frac{x_0}{L} \cdot v_0,$$
$$\dot{x}_0 = -\frac{4}{5}, \quad \dot{y}_0 = -\frac{3}{5}.$$

Задача Коши для исходных уравнений.

$$\ddot{x}(t) = \frac{x(t) \cdot y(t)}{25} \cdot g(t), \quad \ddot{y}(t) = -\frac{x^2(t)}{25} \cdot g(t),$$
$$g(t) = 9.81 + 0.05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t), \quad t \in [0,\ 100];$$

$$x_0 = 3, \quad y_0 = -4;$$
$$\dot{x}_0 = -\frac{4}{5}, \quad \dot{y}_0 = -\frac{3}{5}.$$

Задача Коши для исходных уравнений в $\mathbb{R}^4$.

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = F(X), \quad F(X)(t) = \begin{pmatrix} \frac{x(t) \cdot y(t)}{25} \cdot g(t) \\ -\frac{x^2(t)}{25} \cdot g(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$
$$g(t) = 9.81 + 0.05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t), \quad t \in [0,\ 100];$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Эталонное уравнение.

$$L \cdot \ddot{\varphi} = -\sin\varphi \cdot g.$$

Задача Коши для эталонного уравнения.

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{\sin\varphi(t)}{L} \cdot g(t),$$
$$g(t) = 9.81 + 0.05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t), \quad t \in [1,\ 100];$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \quad \dot{\varphi}_0 = -\frac{1}{5}.$$

Задача Коши для эталонного уравнения в $\mathbb{R}^2$.

$$X(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = F(X), \quad F(X)(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\varphi(t)}{L} \cdot g(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix},$$
$$g(t) = 9.81 + 0.05 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t), \quad t \in [0,\ 100];$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Модули реализации численного решения.

Модули реализованны в MATLAB 2023a:
- **solution.m** - скрипт для решения заданных дифференциальных уравнений, выведенных в прямоугольной системе координат;
- **reference.m** - скрипт для решения широко используемого дифференциального уравнения динамики маятника, выведенного в полярной системе координат;
- **rk4.m** - функция интегрирования на одном шаге методом Рунге-Кутты 4-го порядка;
- **Pendulum.m** - класс - решение задания путём ООП;
- **PendulumTest.m** - класс тестов ML для тестирования методов интегрирования (решения) уравнений динамики, применяемых в классе Pendulum.