Идеальные связи. $\{P_k\}: m_k\vec W_k = \vec F_k + \vec R_k$

Идеальные связи, если работа сил реакции связей на любых виртуальных перемещениях $= 0$: $\sum\limits_{k=1}^{N} \vec R_k\cdot\delta\vec r_k = 0$.

Твердое тело — система с ид. связями.

Общее ур-е динамики. Принцип Даламбера — Лагранжа

$\{P_k\}_{k=1}^{N}$ — система с идеальными и удерживающими связями.

$$m_k\vec W_k = \vec F_k + \vec R_k \quad : \quad \vec F_k - m_k\vec W_k = -\vec R_k \;\Big|\cdot\delta\vec r_k \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{N}(\vec F_k - m_k\vec W_k)\cdot\delta\vec r_k = \cancelto{0}{-\sum_{k=1}^{N}\vec R\cdot\delta\vec r_k}$$

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{N}(\vec F_k - m_k\vec W_k)\cdot\delta\vec r_k = 0$ (*) — необх. и дост. условие, чтобы движение с ид. связями соответствовало данной системой активных сил.

Принцип Лагранжа

Среди всех сравниваемых типов движение истинным выделяется тот, что для него и только для него сумма работ активных сил и сил инерции на вирт. движениях равна нулю.

Замечание

(*) не содержит реакций идеальных связей

(*) содержит $3N$ вариаций $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$, из кот. $n = 3N - r - s$ независимы.

Общее ур-е динамики в обобщ. координатах

$$\vec r_k \to q_1, \dots q_m, \quad m = 3N - r \quad : \quad \vec r_k = \vec r_k(q_1, \dots q_m, t)$$

$$\vec v_k = \dot{\vec r}_k = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \vec r_k}{\partial t}, \quad \delta\vec r_k = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\delta q_j$$

I Работа активных сил

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N}\vec F_k\delta\vec r_k = \sum_{k=1}^{N}\vec F_k\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{m}\overbrace{\left(\sum_{k=1}^{N}\vec F_k\cdot\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\right)}^{Q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{m}Q_j\delta q_j$$

обобщенная сила в обобщенных координатах

II Работа сил инерции

$$\delta A = -\sum_{k=1}^{N}m_k\vec W_k\delta\vec r_k = -\sum_{k=1}^{N}m_k\vec W_k\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\delta q_j = -\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\vec W_k\cdot\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j \;=$$

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\vec W_k\cdot\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N}m_k\frac{\partial \dot{\vec r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N}m_k\left[\frac{d}{dt}\Big(\dot{\vec r}_k\cdot\underbrace{\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}}_{=\frac{\partial \dot{\vec r}_k}{\partial \dot q_j}}\Big) - \dot{\vec r}_k\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\right] \;=$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \vec r_k}{\partial t} = \frac{\partial \dot{\vec r}_k}{\partial q_j}$$

$= \frac{\partial \dot{\vec r}_k}{\partial \dot q_j}$ из скорости

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad = -\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

$\Rightarrow$ (*): $\sum\limits_{j=1}^{m}\left(Q_j - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0$ (**) — ОУО.

Пусть система голономна: $s=0$, $m=n$ $\Rightarrow$ все δq_j в (**) независимы и произвольны

Тогда рав-во будет выполнено, когда каждая $(\ldots)=0$ (л.н.з. система)

$\Rightarrow$ $Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$ — ур-е Лагранжа второго рода

$L = T - \Pi$ — кинетический потенциал, $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*$