Ур-е Лагранжа в НеИСО

относ. коорд. $q_1, \dots q_n$.

1. $T_{абс}(q,\dot q,t)$, $Q_i(q,\dot q,t) \to$ ур-е Лагранжа без сил инерции — они учтены.

2. $T_{отн}(q,\dot q,t)$, силы инерции считаем активными $Q_i(q,\dot q,t) \to$ ур-е Лагранжа

Структура кинет. энергии системы, как ф-ии обобщ. скоростей

$$\vec r_k = \vec r_k(q_1,\dots q_m,t) : \quad T=\frac12\sum_{k=1}^N m_k\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \vec r_k}{\partial t}\right)^2 = \frac12\sum_{i,j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec r_k}{\partial q_j}\right)}_{a_{ij}}\dot q_i\dot q_j +$$

$$+\sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial\vec r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec r_k}{\partial t}\right)}_{a_i}\dot q_i + \underbrace{\frac12\sum_{k=1}^N m_k\left(\frac{\partial\vec r_k}{\partial t}\right)^2}_{a_0} = T_2+T_1+T_0$$

- T явл. квадратичной ф-ей относ. обобщ. скоростей $\dot q_i$.

У склерономной системы $\frac{\partial \vec r_k}{\partial t}=0 \Rightarrow T=T_2$, т.е. T — квадратичная форма отн. $\dot q_i$

$T_2=0 \Leftrightarrow \dot q_i=0$, T_2 явл. неотриц.опр. кв. формой

Разрешимость ур-й Лагранжа относ. обобщ. ускор.

$$T=\frac12\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot q_i\dot q_j+\sum_{i=1}^n a_i\dot q_i + a_0 : \quad \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}=\sum_{j=1}^n a_{ij}\dot q_j + a_i : \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}=\sum a_{ij}\ddot q_j + f_i(q,\dot q,t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=g_i(q,\dot q,t) : \quad Q_i=Q_i(q,\dot q,t)$$

↳ ур-е Лагранжа $\sum_{j=1}^n a_{ij}\ddot q_j = F(q,\dot q,t)$ — лин. система относ. $\ddot q_j$
$\det\|a_{ij}\|\neq 0$

$$\Rightarrow \ddot q_i = G_i(q,\dot q,t)$$

Теорема об изм. полной мех. энергии голономной системы.

$$\underbrace{T(\dot q,q,t)}_{2n+1 \text{ аргумент}} : \quad \frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\cdot\ddot q_i+\sum_{i=1}^n\frac{\partial T}{\partial q_i}\cdot\dot q_i+\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\dot q_i\right) - \sum_{i=1}^n\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\cdot\dot q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i}\cdot\dot q_i + \frac{\partial T}{\partial t}$$

из ур-я Лагранжа Q_i

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i = 2T_2+T_1 : \Rightarrow \frac{d}{dt}(2T_2+T_1) - \sum_{i=1}^n\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\dot q_i + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt}(2T_2+2T_1+2T_0) -$$

$$-\frac{d}{dt}(T_1+2T_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\dot q_i}_{\frac{d\Pi}{dt}-\frac{\partial \Pi}{\partial t}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n Q_i^*\cdot\dot q_i}_{N^* \text{ — мощность непотенциальных сил}} + \frac{\partial T}{\partial t} :$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt}=N^*+\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)+\frac{\partial\Pi}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial t}}$$

если бы система
не была голономной,
не могли бы воспользоваться ур-ем Лагранжа.

если система не склерономна, все силы потенциальны и $\frac{\partial\Pi}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial t}=0$:

$$\frac{d(T_1+T_2+T_0+\Pi)}{dt}=\frac{d(T_1+2T_0)}{dt} : \quad T_2-T_0+\Pi=const$$ — интеграл Якоби
обобщенный инт. энергии

обобщенно-консервативная система.

Циклические координаты

Система в потенциальном поле сил. $L = T - \Pi$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Координата q_i наз. циклической, если она явно не входит в лагранжиан: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \text{const}$ — первый интеграл, отвечающий цикл. координате q_i

Два типа непотенциальных сил

I гироскопические силы

непотенциальные силы наз. гироскопическими, если их $N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot q_i = 0 \ \forall \{\dot q_i\}$

пусть система склерономна, $\frac{\partial E}{\partial t} = N^* = 0 \Rightarrow E = \text{const}$.

Критерий гироскопичности

$Q_i^* = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot q_j \Rightarrow N^* = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot q_i \dot q_j = 0 \ \forall \{\dot q_i\} \Rightarrow \gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, т.е. γ_{ij} кососимм.

Обычные силы: $\sum_{k=1}^{N} \vec F_k^* \vec v_k = \sum_{k=1}^{N} \vec F_k^* \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec r_k}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial \vec r_k}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\vec F_k^* \frac{\partial \vec r_k}{\partial q_i}}_{Q_i^*} \dot q_i + \sum_{k=1}^{N} \vec F_k^* \frac{\partial \vec r_k}{\partial t} =$

у гироскоп.

$= \cancelto{0}{N^*} + \sum_{k=1}^{N} \vec F_k^* \frac{\partial \vec r_k}{\partial t} \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \vec F_k^* \left(\vec v_k - \frac{\partial \vec r_k}{\partial t}\right) = 0$

II Диссипативные силы

непотенциальные силы наз. диссипативными, если их $N^* \le 0$

N^* — отриц. опр. отн. $\dot q_i$ — диссипация полная
N^* — отриц. полуопр. отн. $\dot q_i$ — диссипация частичная.

в склерономной системе с $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \to \frac{dE}{dt} = N^* \le 0 \Rightarrow E$ рассеивается.

$R = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot q_i \dot q_j$: $Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot q_i} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot q_j$: $N^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot q_i = -2R$

R — диссипативная ф-я Релея