Ньютон 1687 г — Математические начала натуральной философии

Абсолютное пространство — трехмерное, однородное и изотропное неподвижное Евклидово пространство

Абсолютное время — одномерная непрерывно меняющаяся величина одинаковая во всех точках пространства и не зависящая от свойств материи.

Система отсчета — совокупность тела отсчета и связанных с ним координатных осей и часов

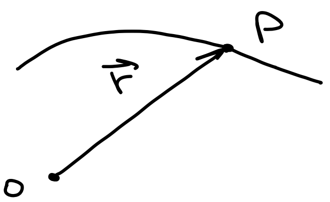
Модели материальных объектов:

1. Материальная точка — частица материи, достаточно малая, чтобы при изучении её движения можно было пренебрегать её размерами и вращением.

2. Система материальных точек (Механическая система) — каким либо образом выделенная совокупность материальных точек.

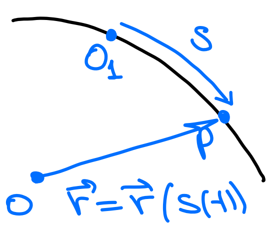
3. Абсолютно твердое тело — механическая система, у которой расстояние между точками постоянно.

Кинематика.



$\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ $\quad \vec{w} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Естественный способ задания движения



$s = s(t)$ — длина дуги — закон движения точки по траектории. $s(t) = \pm O_1P$.

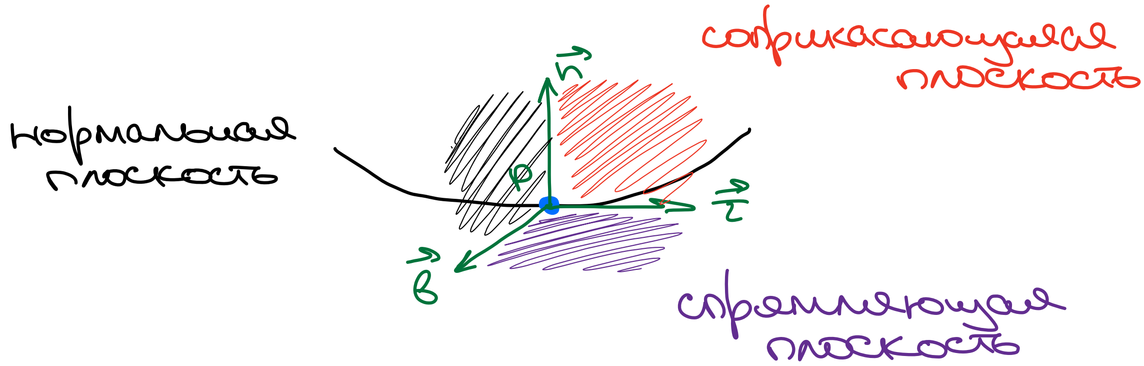
Трехгранник Френе — правая тройка единичных векторов $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$.

$\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ — ед. вектор касательной

$\vec{k} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ — ед. вектор кривизны, характеризует скорость поворота $\vec{\tau}$

$\vec{k} = |k| \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ — ед. вектор главной нормали $\vec{n} \perp \vec{\tau}$.

$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ — ед. вектор бинормали



В случае двумерного движения траектория целиком лежит в соприкасающейся плоскости

$$\vec v = \frac{d\vec r(\vec s(t))}{dt} = \frac{d\vec r}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec\tau\cdot v_\tau \,, \quad v_\tau = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec W = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot s\cdot\vec\tau) = \dot v\cdot\vec\tau + v\,\frac{d\vec\tau}{dt} = \dot v\cdot\vec\tau + v\cdot\overset{=\vec k}{\frac{d\vec\tau}{dS}}\cdot\overset{=v}{\frac{dS}{dt}} =$$

$$= \underbrace{\dot v\cdot\vec\tau}_{W_\tau} + \underbrace{v^2\vec k}_{W_n}$$ — получили т. Гюйгенса: $\vec W = \vec W_n + \vec W_\tau$

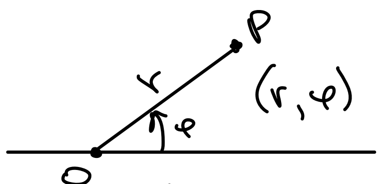
$W_\tau = \dot v$ — изменение модуля $\vec v$ $\quad W_n = \frac{v^2}{\rho}$ — изменение направления $\vec v$

Декартова система

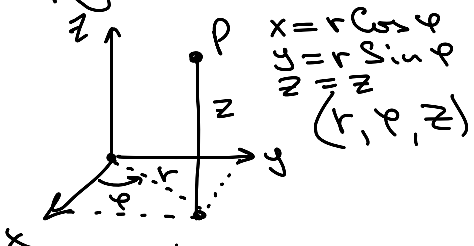
$$\vec r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \,, \quad \vec v = (\dot x, \dot y, \dot z) \,, \quad v = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}$$

$$\vec w = (\ddot x, \ddot y, \ddot z) \,, \quad w = \sqrt{\ddot x^2 + \ddot y^2 + \ddot z^2}$$

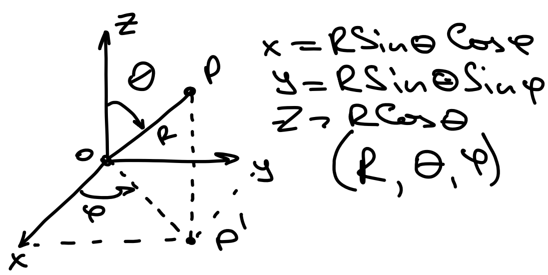
Криволинейные координаты



полярные



цилиндрические



сферические

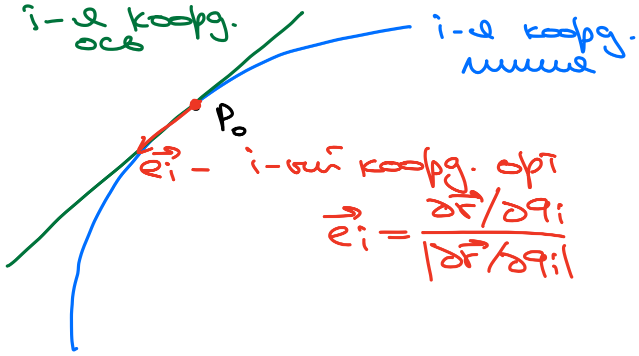
Криволинейные координаты общего вида — любая тройка чисел, (q_1, q_2, q_3) позволяющая однозначно задать положение точки в пространстве. $q_i = q_i(t)$.

$$\vec r(q_1, q_2, q_3) = (x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)).$$

$\forall\ P_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$, введем координатные линии:

1-я координатная линия $\vec r = \vec r(q_1, q_{20}, q_{30})$,

2-я $\vec r = \vec r(q_{10}, q_2, q_{30})$, 3-я $\vec r = \vec r(q_{10}, q_{20}, q_3)$.



$$\vec e_i = \frac{\partial \vec r/\partial q_i}{|\partial \vec r/\partial q_i|}$$

$$\vec e_i = \frac{\partial \vec r/\partial q_i}{|\partial \vec r/\partial q_i|} = \frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}$$

$$\left|\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = H_i,\ i=1,2,3$$

– коэффициенты Ламе

$$\vec v = \frac{\partial r(q_1,q_2,q_3)}{\partial t} = \frac{\partial \vec r}{\partial t}\dot q_1 + \frac{\partial \vec r}{\partial t}\dot q_2 + \frac{\partial \vec r}{d t}\dot q_3 = H_1\vec e_1\dot{\vec q}_1 + H_2\vec e_2\dot{\vec q}_2 + H_3 e_3\dot{\vec q}_3$$

$$\vec v = \sum_{i=1}^{3}\vec v_{q_i}\vec e_i,\quad v_{q_i} = H_i\dot q_i,\quad v^2 = \sum_{1}^{3}(H_i\dot q_i)^2,\quad v_{q_i} = pr_{\vec e_i}\vec v = \vec v\cdot\vec e_i$$

В цилиндрических координатах (Скорости)

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}^{\,0}} = 1 \\ H_\varphi &= \ldots = r \\ H_z &= \ldots = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_r &= H_r\cdot\dot r = \dot r \\ v_\varphi &= H_\varphi\cdot\dot\varphi = r\dot\varphi \\ v_z &= H_z\cdot\dot z = \dot z \end{aligned}$$

В сферических координатах (Скорости)

$$\left.\begin{aligned} H_R &= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \\ H_\theta &= \sqrt{R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + R^2\sin^2\theta} = R \\ H_\varphi &= \sqrt{R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 0} = R\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_R &= \dot R \\ v_\theta &= R\dot\theta \\ v_\varphi &= R\sin\theta\,\dot\varphi \end{aligned}$$

Ускорения

$$\frac{\partial \vec r}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec v}{\partial \dot q_i}$$

$$W_{q_i} = \vec W\cdot\vec e_i = \frac{d\vec v}{dt}\cdot\frac{1}{H_i}\frac{\partial \vec r}{d q_i} = \frac{1}{H_i}\cdot\left[\frac{d}{dt}\left(\vec v\cdot\frac{\partial \vec r}{d q_i}\right) - \vec v\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\right)\right] =$$

если $\vec r$ дважды непрерывно дифференц.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec r}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec v}{\partial q_i}$$

$$= \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec v\cdot\frac{\partial \vec v}{\partial \dot q_i}\right) - \vec v\frac{\partial \vec v}{\partial q_i}\right] \Rightarrow$$

$$W_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q_i}\right),\ i = 1,2,3.$$

В цилиндрических координатах (Ускорение)

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2$$

$$W_r = \frac{1}{1}\left(\frac{d\dot{r}}{dt} - r\dot{\varphi}^2\right) = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$W_z = \ddot{z}$$