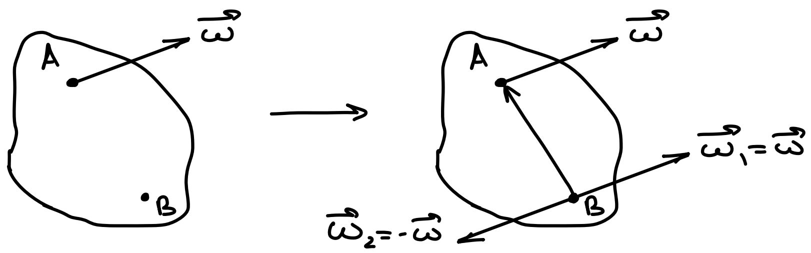
Общий случай сложения движений твердого тела.

$\vec v$ – свободный, $\vec\omega$ – скользящий

Утв

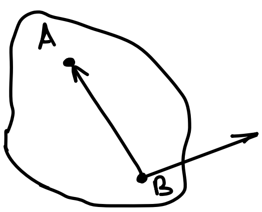
Без изменения состояния тв. тела $\vec\omega$ можно переносить из одной точки АТТ в любую другую, добавив при этом поступ. движ. со ск. равной моменту $\vec\omega$ относ. новой т. приложения.

Δ:



$(\vec\omega,\vec\omega_2)$ – пара вращений ~

~ поступ. дв. с $\vec v=\vec{BA}\times\vec\omega=\vec M_B(\vec\omega)$



$\vec\omega_1=\vec\omega$ + поступ. дв. $\vec v=\vec M_B(\omega)$ □.

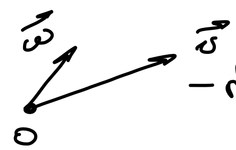
Пусть ТТ участвует в n поступ. движ. и m вращениях с т. приложения $P_1,\dots P_m$.

1. n поступ. движ $\Leftrightarrow$ 1 поступ. движ $\vec v'=\sum_{k=1}^{n}\vec v_k$

2. т. O – полюс. Все $\omega_1,\dots\omega_n$ переносятся туда + $\vec v_l=\vec{OP_l}\times\vec\omega_l$

$\Rightarrow \vec\omega=\sum_{l=1}^{m}\vec\omega_l \Rightarrow \vec v''=\sum_{l=1}^{m}\vec{OP_l}\times\vec\omega_l$

$\vec\omega=\sum_{l=1}^{m}\vec\omega_l$, $\vec v=\sum_{l=1}^{m}\vec{OP_l}\times\vec\omega_l+\sum_{k=1}^{n}\vec v_k$ т.е.



– простое движение.

Кватернионы и их использование при описании движения тв. тела с неподвижной точкой.

Алгебра кватернионов

$\Lambda=\lambda_0\vec i_0+\lambda_1\vec i_1+\lambda_2\vec i_2+\lambda_3\vec i_3$, $\lambda_k\in\mathbb{R}$, i_k – кват. ед.

Сложение: $\Lambda=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\vec i_k$, $M=\sum_{k=0}^{3}\mu_k\vec i_k$: $\Lambda+M=\sum_{k=0}^{3}(\lambda_k+\mu_k)\vec i_k$

Умножение:

$\vec i_0\circ\vec i_0=1$, $\vec i_0\circ\vec i_k=\vec i_k\circ\vec i_0=\vec i_k$ $(k=1,2,3)$

$\vec i_k\circ\vec i_k=-1$, $\vec i_1\circ\vec i_2=\vec i_3$, $\vec i_2\circ\vec i_3=\vec i_1$, $\vec i_3\circ\vec i_1=\vec i_2$, $\vec i_k\circ\vec i_l=-\vec i_l\circ\vec i_k$ $(l,k=1,2,3)$.

$\vec{i}_0 = 1$ (веществ. ед.)

$\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – двойственные $\begin{cases} \text{правая тройка ед. векторов} \\ \text{мнимые единицы} \end{cases}$

$$\Lambda = \underbrace{\lambda_0}_{\text{скал. ч.}} + \underbrace{\lambda_1\vec{i}_1 + \lambda_2\vec{i}_2 + \lambda_3\vec{i}_3}_{\text{вект. часть } \vec{\lambda}} = \lambda_0 + \vec{\lambda}$$

Дистрибутивность относ. сложения — аксиома

$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$, $M = \mu_0 + \vec{\mu}$: $\Lambda \cdot M = (\lambda_0\mu_0 - \vec{\lambda}\vec{\mu}) + (\lambda_0\vec{\mu} + \mu_0\vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu})$

1° $\Lambda \cdot \Lambda = \Lambda^2 = \lambda_0^2 - |\vec{\lambda}|^2 + 2\lambda_0\vec{\lambda}$

2° $\vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} = \vec{\lambda} \times \vec{\mu} - (\vec{\lambda}, \vec{\mu})$

3° $\vec{\lambda} \circ \vec{\lambda} = -|\vec{\lambda}|^2$

– кватернионное умножение.
1. некоммутативно при $\vec{\lambda} \not\parallel \vec{\mu}$
2. ассоциативно
3. дистрибутивность

Сопряженный кватернион $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$: $\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$

$\overline{\Lambda \circ M} = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$: $\overline{\Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n} = \overline{\Lambda}_n \circ \ldots \circ \overline{\Lambda}_1$

Норма кватерниона $\|\Lambda\| = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 - \vec{\lambda} \circ \vec{\lambda} = \lambda_0^2 + |\vec{\lambda}|^2 = \sum_0^3 \lambda_k^2$

Если $\|\Lambda\| = 1$, то Λ нормированный

$\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \circ \|M\|$

Обратный кватернион Λ^{-1}

$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1$:

$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1 \quad | \overline{\Lambda} \circ$: $\overline{\Lambda} \circ \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \overline{\Lambda}$: $\|\Lambda\| \circ \Lambda^{-1} = \overline{\Lambda}$: $\Lambda^{-1} = \dfrac{\overline{\Lambda}}{\|\Lambda\|}$.

Тригонометрическая форма записи кватерниона

Λ – нормир., $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$, $\lambda_0^2 + |\vec{\lambda}|^2 = 1$.

$\vec{e} = \vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|$: $\Lambda = \cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi$

Если Λ - не нормир., то $|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$: $\Lambda = |\Lambda|(\cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi)$

Перемнож. кватерн. с коллин. вект. частями:

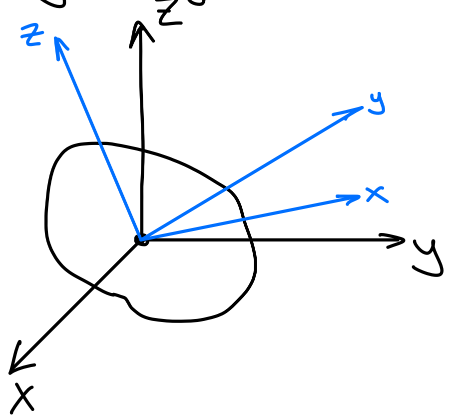
$\Lambda = |\Lambda| \cdot (\cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi)$

$M = |M| \cdot (\cos\psi + \vec{e}\sin\psi)$

: $\Lambda \circ M = |\Lambda| \cdot |M| \cdot (\cos\varphi\cos\psi + \vec{e}\cos\varphi\sin\psi + \vec{e}\sin\varphi\cos\psi + \underbrace{\vec{e} \circ \vec{e}}_{=-1}\sin\varphi\sin\psi) = |\Lambda| \cdot |M| \cdot (\cos(\varphi+\psi) + \vec{e}\sin(\varphi+\psi))$

$\Lambda\circ\Lambda = |\Lambda|^2(\cos 2\varphi + \vec e \sin 2\varphi) \dots \Lambda^n = |\Lambda|^n(\cos n\varphi + \vec e \sin n\varphi)$ – аналог формулы Муавра

Задание движения тела с неподвижной точкой



$OXYZ$ – неподв. с.к. (I, i_1, i_2, i_3)

$Oxyz$ – связ. с.к. (E, e_1, e_2, e_3).

Теорема 1

$\exists$ норм. кват. Λ : связь между базисами I и E :

$\vec e_k = \Lambda\circ \vec i_k \circ \tilde\Lambda$ $(k=1,2,3)$. Этим ур-ем удовл. два кватерн., различ. знаками.

Δ: $\Lambda = \lambda_0 + \vec\lambda$: $\lambda_0^2 + |\vec\lambda|^2 = 1$.

$$\vec e_k = \Lambda\circ \vec i_k\circ\tilde\Lambda \ \Big|\circ\Lambda$$

$$\vec e_k\circ\Lambda = \Lambda\circ\vec i_k\circ\underbrace{\cancel{\tilde\Lambda\circ\Lambda}}_{1} \ : \ \vec e_k\circ(\lambda_0+\vec\lambda) = (\lambda_0+\vec\lambda)\circ\vec i_k \ :$$

$$\lambda_0\vec e_k + \vec e_k\times\vec\lambda - (\vec e_k,\vec\lambda) = \lambda_0\vec i_k + \vec\lambda\times\vec i_k - (\vec\lambda,\vec i_k)$$: скал = скал, вект = вект:

$$\begin{cases}(\vec e_k,\vec\lambda) = (\vec i_k,\vec\lambda)\\ \lambda_0\vec e_k + \vec e_k\times\vec\lambda = \lambda_0\vec i_k + \vec\lambda\times\vec i_k\end{cases} \qquad \begin{cases}(\vec r_k,\vec\lambda) = 0 & (1)\\ \lambda_0\times\vec r_k = -\vec s_k\times\vec\lambda & (2)\end{cases}$$

обозначим $\vec r_k = \vec e_k - \vec i_k$, $\vec s_k = \vec e_k + \vec i_k$

1сл. Все $\vec r_k = 0$ $(E = I)$ $\Rightarrow 0 = -2\vec i_k\times\vec\lambda \Rightarrow \vec i_1, \vec i_2, \vec i_3 \parallel \vec\lambda \Rightarrow \vec\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 = \pm 1 \Rightarrow \Lambda = \pm 1$. Тривиальный

2сл. $\exists$ по крайней мере два ненулевых $\vec r_k$: пусть $\vec r_1 \neq 0$, $\vec r_2 \neq 0$:

т.к. $(\vec r_1,\vec\lambda) = 0$, $(\vec r,\vec\lambda) = 0 \Rightarrow \vec\lambda = x\cdot \vec r_1\times\vec r_2$.

(2), $k=1$: $\lambda_0\times\vec r_1 = -x\vec S_1\times(\vec r_1\times\vec r_2) = -x(\vec r_1(\vec S_1\cdot\vec r_2) - \vec r_2\underbrace{\cancel{(\vec S_1\cdot\vec r_1)}}_{0}) = -x(\vec S_1,\vec r_2)\vec r_1$

$\Rightarrow \lambda_0 = -x(\vec S_1,\vec r_2)$

(2), $k=2$: $\lambda_0\times\vec r_2 = -x\vec S_2\times(\vec r_1\times\vec r_2) = -x(\vec r_1(\vec S_2,\vec r_2) - \vec r_2(\vec S_2,\vec r_1)) = x(\vec S_2,\vec r_1)\vec r_2$

$\Rightarrow \lambda_0 = x(\vec S_2,\vec r_1)$

т.е. получили $\Lambda = x(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + x(\vec{s}_2, \vec{r}_1)$: x: $\lambda_0^2 + |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{\dots}}$

$$\hookrightarrow \Lambda = \pm \frac{(\vec{s}_2, \vec{r}_1) + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\sqrt{(\vec{s}_2, \vec{r}_1)^2 + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)^2}}$$

– т.е. произв. полож. ТТ с неподв. точкой опред. норм. кватерн. Λ. Это равнос., что мы задаем положение ТТ с помощью $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$.

Из соотношения $\vec{e}_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \hat{\Lambda} \to \vec{r}$ – нач. полож., $\vec{r}'$ – текущ. полож. и пусть при $t=0$ $E = I$, тогда $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ связаны: $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \hat{\Lambda}$.