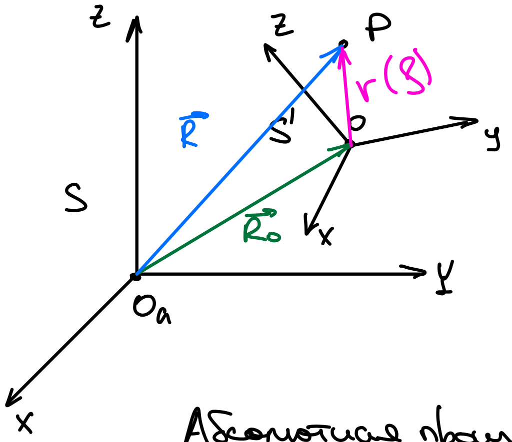


т.P двин. в Oxyz(S') – относительное дв.

S' двин в OXYZ(S) – переносное дв.

т.P двин в OXYZ(S) – абсолютное дв.

$\vec{OP} - \left[\begin{array}{l} \vec r \text{ (компоненты в S)} \\ \vec\rho \text{ (компоненты в S')} \end{array}\right.$: $\vec r = A\vec\rho$, $A: S \to S'$

Абсолютная производная $\vec{OP}$ – ск. изм. в S : $\frac{d\vec r}{dt}$

Локальная производная $\vec{OP}$ – ск. изм. в S' : $\frac{d\vec\rho}{dt}$ (комп. в S') $\frac{\tilde d\vec r}{dt} = A\frac{d\vec\rho}{dt}$ (комп. в S)

Связь между абс. и лок. производными

$$\vec r = A\vec\rho \ : \ \frac{d\vec r}{dt} = A\dot{\vec\rho} + \dot A\vec\rho = \frac{\tilde d\vec r}{dt} + \overbrace{(\dot A A^{-1})}^{\text{кососим. матр}}\cdot\overbrace{(A\vec\rho)}^{r} = \frac{\tilde d\vec r}{dt} + \overbrace{\vec\omega}^{\text{угл. ск. вращ. } S'}\times\vec r$$

Теорема о сложении ск. и уск. при сложном движении точки

$\vec v_r$ ($\vec W_r$) – относ. ск. (уск.) – ск. (уск.) точки в подвижной с.к. S'

$\vec v_e$ ($\vec W_e$) – перенос. ск. (уск.) – ск. (уск.) той точки подвижной с.к. S', с кот. в данный момент совпадает т.P

$\vec v_a$ ($\vec W_a$) – абс. ск. (уск.) – ск. (уск.) в неподвижной с.к. S

$$\vec R = \vec R_0 + \vec r \ \Big| \ \frac{d}{dt} \ :$$

$$\frac{d\vec R}{dt} = \frac{d\vec R_0}{dt} + \frac{d\vec r}{dt} \ : \quad \vec v_a = \vec v_0 + \frac{\tilde d\vec r}{dt} + \vec\omega\times\vec r = \overbrace{\vec v_0 + \vec\omega\times\vec r}^{\text{формула Эйлера}} + \vec v_r = \vec v_e + \vec v_r$$

– доказна т. о сложении скоростей

$$\dot A \cdot A^{-1} = \omega.$$

$$\vec v_a = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec r + A\dot{\vec\rho} \ \Big| \ \frac{d}{dt}$$

$$\vec W_a = \vec W_0 + \underbrace{\dot{\vec\omega}}_{=\vec\varepsilon}\times\vec r + \vec\omega\times\underbrace{\dot{\vec r}}_{=(\vec\omega\times\vec r + A\dot{\vec\rho})} + \dot A\dot{\vec\rho} + \overbrace{A\ddot{\vec\rho}}^{\text{относ. уск. } \vec W_r}$$

$$\vec W_a = \overbrace{\vec W_0 + \vec\varepsilon\times\vec r + \vec\omega\times\vec\omega\times\vec r}^{\text{формула Ривальса}} + \vec\omega\times\overbrace{A\dot{\vec\rho}}^{\text{относ. ск. } \vec v_r} + \underbrace{(\dot A A^{-1})}_{\vec\omega}\overbrace{(A\dot{\vec\rho})}^{\vec v_r} + \vec W_r$$

$$\vec W_a = \vec W_e + \vec W_r + \vec W_c, \quad \vec W_c = 2\vec\omega\times\vec v_r \text{ – ускорение Кориолиса}$$

– доказна т. о сложении ускорений

Возникновение Кориолисова ускорение есть результат взаимного влияния относительного и переносного составляющих сложного движения:

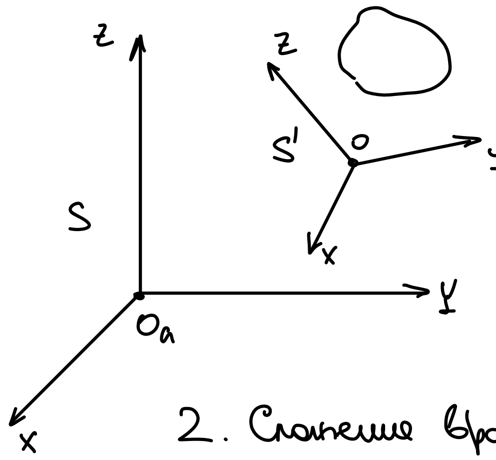
1. $\vec{v}_r \neq 0$: меняется положен. т. P в S' : меняется $\vec{v}_e$: значит есть уск.

2. $\vec{\omega} \neq 0$: $\vec{v}_r$ поворачивается в S : значит есть уск.

$\vec{W}_c = 0$:

1. $\omega = 0$ 2. $v_r = 0$ 3. $\vec{v}_r \parallel \vec{\omega}$

Сложное движение тв. тела



1. Сложение поступательных движений:

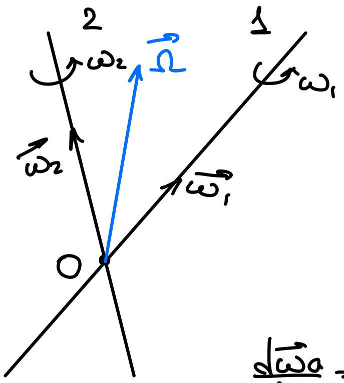
тело с $\vec{v}_1$ в S', S' с $\vec{v}_2$ в S.

$\forall$ т. P тела $\Rightarrow$ $\vec{v}_{a_P} = \vec{v}_{e_P} + \vec{v}_{r_P} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$

$\Rightarrow$ результирующее дв. тела – поступ. со ск. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

2. Сложение вращений тв. тела вокруг пересек. осей

тело с ω_1 вокруг оси 1 в S'; S' вращ. с $\vec{\omega}_2$ вокруг оси 2 в S



оси 1 и 2 пересек. в т. O

т. O неподвижна $\Rightarrow$ тело вращ. вокруг нее с иск. $\vec{\Omega}$:

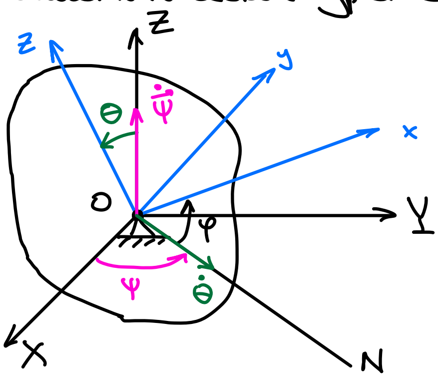
$\forall$ т. P $\Rightarrow$ $\vec{v}_P = \vec{\Omega} \times \vec{OP}$, с другой стороны: $\vec{v}_{P_a} = \vec{v}_{P_e} + \vec{v}_{P_r}$:

$\vec{v}_P = \vec{\omega}_2 \times \vec{OP} + \vec{\omega}_1 \times \vec{OP}$ $\Rightarrow$ $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ или $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$

$$\frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_r}{dt} : \vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \frac{\tilde{d}\vec{\omega}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$

При сложении n вращений с $\omega_1, \dots \omega_n$ $\Rightarrow$ вращ. с $\vec{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\omega}_k$

Кинематические ур-я Эйлера:



тело участвует в трех вращениях:

вокруг OZ на ψ ($\dot{\vec{\psi}}$)

вокруг ON на θ ($\dot{\vec{\theta}}$) $\Rightarrow$ $\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}$

вокруг Oz на φ ($\dot{\vec{\varphi}}$)

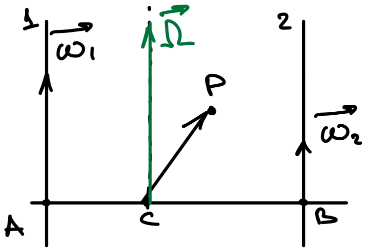
$\vec{\omega}(p, q, r)$ (комп. в Oxyz):

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{cases}$$ – Кинематические ур-я Эйлера

3. Сложение вращений тела вокруг паралл. осей

Тело вращ. с ω_1 вокруг 1 в S'; S' вращ. с ω_2 вокруг оси 2 в S, оси $1 \parallel 2$

а) $\omega_1 \uparrow\uparrow \omega_2$



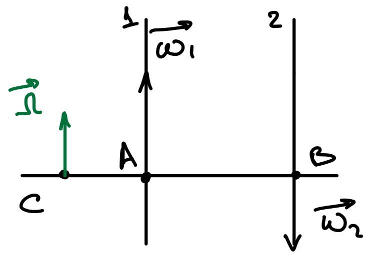
На AB $\exists C$: $\vec{v}_C = 0$: $\vec{v}_C = \vec{v}_{Ce} + \vec{v}_{Cr} = \overset{\odot}{\vec{\omega}_2 \times \vec{BC}} + \overset{\otimes}{\vec{\omega}_1 \times \vec{AC}} = 0$

$\omega_2 BC = \omega_1 AC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. $\vec{v}_C = 0 \Rightarrow$ осущ. вращение вокруг оси с мгн. $\vec{\Omega}$. Тогда $\forall P \in AB$: $\vec{v}_P = \vec{\Omega} \times \vec{CP}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_{Pe} + \vec{v}_{Pr} = \vec{\omega}_2 \times \underset{\vec{BC}+\vec{CP}}{\vec{BP}} + \vec{\omega}_1 \times \underset{\vec{AC}+\vec{CP}}{\vec{AP}} = \underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{BC} + \vec{\omega}_1 \times \vec{AC}}_{=0} +$

$+ (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1) \times \vec{CP} \Rightarrow \vec{v}_P = (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1) \times \vec{CP} = \vec{\Omega} \times \vec{CP} \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 : \Omega = \omega_1 + \omega_2.$

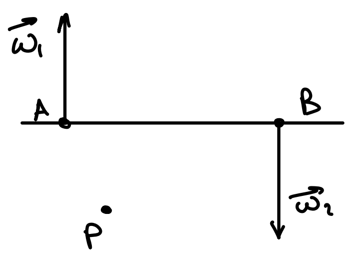
б) $\vec{\omega}_1 \downarrow\uparrow \vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_1 \neq \vec{\omega}_2$ (пусть $\omega_1 > \omega_2$)



$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \Omega = \omega_1 - \omega_2$

при $\vec{\omega}_1 \to \vec{\omega}_2$: $\vec{\Omega} \to 0$ и $C \to \infty$

в) $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$ – пара вращений



$\forall$ т. P : $\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \times \vec{AP} + \vec{\omega}_2 \times \vec{BP} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{AP} - \vec{BP}) = \vec{BA} \times \vec{\omega}_1 = \vec{AB} \times \vec{\omega}_2$

– не зависит от P : $\vec{v}_P = \vec{AB} \times \vec{\omega}_2$ – момент пары вращ.

пример – колесо обозрения