
Лабораторная работа №4.8
Резонанс напряжений
Мещеряков Всеволод, Б02-001, 13.10.2021

Введение

Цель работы заключается в изучении последовательной цепи переменного тока и наблюдении резонанса напряжений. Для этого используются регулировочный автотрансформатор, катушка индуктивности с выдвижным сердечником, магазин емкостей, резисторы, амперметр, три вольтметра, ваттметр, осциллограф, универсальный мост.

Теоретическая справка: импеданс

Параметры основных элементов цепи задаются их импедансами, то есть некоторыми комплексными числами. Такая условность носит название метода "комплексных амплитуд". Поймем, в чем заключается выгода такого приёма.

Рассмотрим стандартный RLC-контур, подключенный к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t$. Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_c , ток, идущий в контуре, I . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции плюс ЭДС источника:

$$RI + U_c = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 \cos \Omega t. \quad (1)$$

Пусть на конденсаторе заряд q , учтем зависимость от времени $q = \int I dt$:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \varepsilon_0 \cos \Omega t. \quad (2)$$

Решением линейного этого ДУ состоит из общего однородного решения и какого либо частного решения уравнения с учетом правой части. Для поиска этого решения используется метод комплексной амплитуды: пусть некоторая комплексная функция является решением линейного

ДУ с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции является решением этого же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть – решением уравнения с мнимой частью. Исходя из сказанного, запишем уравнение (2) в комплексной форме:

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} + \frac{\int \hat{I} dt}{C} = \hat{\varepsilon}_0 e^{i\Omega t}. \quad (3)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_0$ – комплексная амплитуда внешнего напряжения: $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 e^{i\varphi}$.

Если начальная фаза равна нулю, то $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$. Правая часть (2) является вещественной частью правой части (3). Будем искать решение (3) в том же виде, что и ЭДС. Тогда получим:

$$\hat{I}_0 [R + i(\Omega L - \frac{1}{\Omega C})] = \varepsilon_0. \quad (4)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, называется импедансом – это характеристика контура, не зависящая ни от токов, ни от напряжений. Выражение (4) является обобщением законом Ома для переменных токов. Действительная часть импеданса называется активным сопротивлением контура, а мнимая – реактивным сопротивлением контура или реактансом. Так импеданс индуктивности равен $i\Omega L$, емкости $\frac{1}{i\Omega L}$, сопротивления R .

Вернемся к началу выкладок и скажем, что фаза ЭДС не равна нулю:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \varphi. \quad (5)$$

Решаем аналогичные уравнения, обозначаем импеданс Z :

$$\hat{\varepsilon}_0 = Z\hat{I}_0. \quad (6)$$

Тогда получаем окончательно:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\Omega t + \varphi - \psi), \quad (7)$$

где $\psi = \arctg \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$.

Теоретическая справка: измерения

$$\hat{U}_R = \hat{I}R, \quad \hat{U}_L = \hat{I}(r_L + i\Omega L), \quad \hat{U}_{R+L} = \hat{I}(R + r_L + i\Omega L). \quad (8)$$

3

$$\begin{aligned}
U_R &= I \cdot R & \operatorname{tg} \psi_1 &= 0 \\
U_L &= I \sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2} & \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{\Omega L}{r_L} \\
U_{R+L} &= I \sqrt{(R + r_L)^2 + (\Omega L)^2} & \operatorname{tg} \psi_3 &= \frac{\Omega L}{R + r_L}
\end{aligned}$$

Рассчитаем среднюю мощность переменного тока, выделяемую в катушке:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = I^2 r_L. \quad (9)$$

Активное сопротивление катушки r_L можем измерить, если включим катушку в последовательный контур с известными R и C – рисунок 2. В контуре, настроенном в резонанс на частоту Ω внешнего источника (собственная частота контура и внешняя совпадают: $\omega_0 = \Omega$), реактивные сопротивления индуктивности совпадают:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10)$$

Тогда, определив каким либо образом добротность контура Q , можно рассчитать полное сопротивление контура R_Σ в резонансе, поскольку:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma}. \quad (11)$$

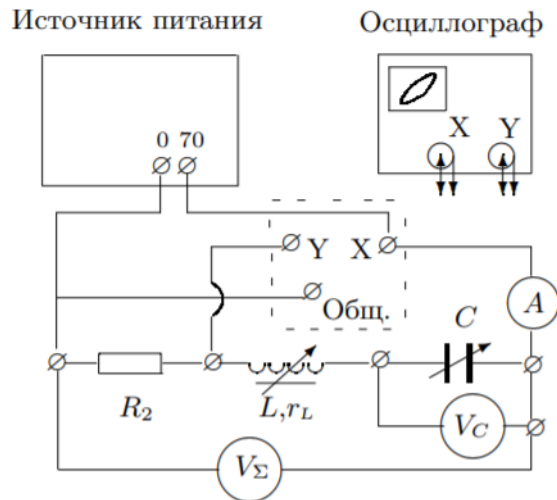


Рис. 2 — Схема установки для наблюдения резонанса напряжений

Ход работы: закон Ома в цепи переменного тока

Подготовим к работе установку, собранную по схеме рисунка 1. Перемещая сердечник катушки малыми шагами по 0.2 мм снимем зависимость тока I , напряжений U_R , U_L , U_{R+L} и мощности P_L от координаты сердечника x . Результаты отразим в таблице 1. Учтем и погрешности: класс точности используемых приборов – 0,5. То есть погрешность – 0,5% от предела измерений.

x , мм	I , дел	σ_I , дел	U_R , дел	σ_{U_R} , дел	U_{R+L} , дел	$\sigma_{U_{R+L}}$, дел	U_L , дел	σ_{U_L} , дел	P_L , дел	σ_{P_L} , дел
5	28	0,01	62	1	121	1	93	1	75	1
7	34	0,01	74	1	118	1	81	1	69	1
9	36	0,01	79	1	116	1	73	1	66	1
11	38	0,01	84	1	115	1	66	1	64	1
13	40	0,01	87	1	113	1	61	1	62	1
15	41	0,01	89	1	112	1	56	1	61	1
17	42	0,01	91	1	112	1	53	1	59	1
19	42	0,01	92	1	111	1	50	1	58	1
21	42	0,01	93	1	111	1	47	1	57	1

Таблица 1 — Результаты измерений до пересчёта, значения указаны в делениях приборов

Пересчитаем деления в соответствующие единицы измерения. Амперметр выставлен на максимальный ток 2.5 А, имеет 100 делений – тогда 1 деление – это 0,025 А. Вольтметры выставлены на максимальное напряжение 150 В, имеют 150 делений – тогда 1 деление – это 1 В. Ваттметр, согласно документации, показывает 1 Вт на деление. Результаты укажем в таблице 2.

x , мм	I , дел	σ_I , А	U_R , В	σ_{U_R} , В	U_{R+L} , В	$\sigma_{U_{R+L}}$, В	U_L , В	σ_{U_L} , В	P_L , Вт	σ_{P_L} , Вт
5	0,70	0,03	62	1	121	1	93	1	75	1
7	0,85	0,03	74	1	118	1	81	1	69	1
9	0,90	0,03	79	1	116	1	73	1	66	1
11	0,95	0,03	84	1	115	1	66	1	64	1
13	1,00	0,03	87	1	113	1	61	1	62	1
15	1,03	0,03	89	1	112	1	56	1	61	1
17	1,05	0,03	91	1	112	1	53	1	59	1
19	1,05	0,03	92	1	111	1	50	1	58	1
21	1,05	0,03	93	1	111	1	47	1	57	1

Таблица 2 — Результаты измерений после пересчёта, значения указаны в соответствующих единицах измерения

По формуле для U_L из (8) и формуле (9) рассчитаем r_L и L для каждого x . Оценим погрешности: $\sigma_x = 0.5\text{мм}$, σ_{r_L} как косвенное измерение через погрешности P и I . Результаты отразим в таблицах 3 и 4, по ним построим графики на рисунках 3 и 4.

Оценка погрешностей в этой работе несет условный характер, так как провода и клеммы вносят неоценимый вклад. Для реактивного сопротивления удалось провести оценку, но для индуктивности адекватной оценки провести не удалось.

x , мм	σ_x , мм	r_l , Ом	σ_{r_l} , Ом
5	0,5	153,06	13,70
7	0,5	95,50	7,06
9	0,5	81,48	5,69
11	0,5	70,91	4,70
13	0,5	62,00	3,91
15	0,5	58,06	3,57
17	0,5	53,51	3,22
19	0,5	52,61	3,16
21	0,5	51,70	3,11

Таблица 3 — Точки для графика зависимости $r_L(x)$

x , мм	σ_x , мм	L , Гн
5	0,5	2,18
7	0,5	1,90
9	0,5	1,61
11	0,5	1,36
13	0,5	1,20
15	0,5	1,02
17	0,5	0,94
19	0,5	0,84
21	0,5	0,73

Таблица 4 — Точки для графика зависимости $L(x)$

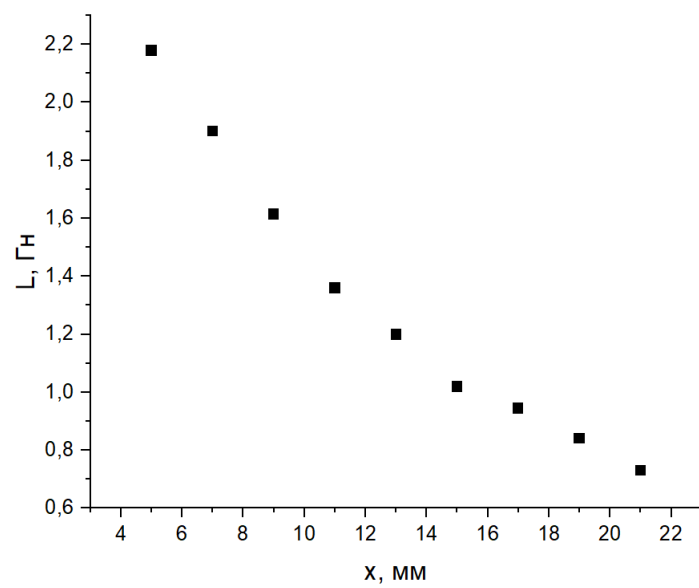


Рис. 3 — График зависимости $r_L(x)$

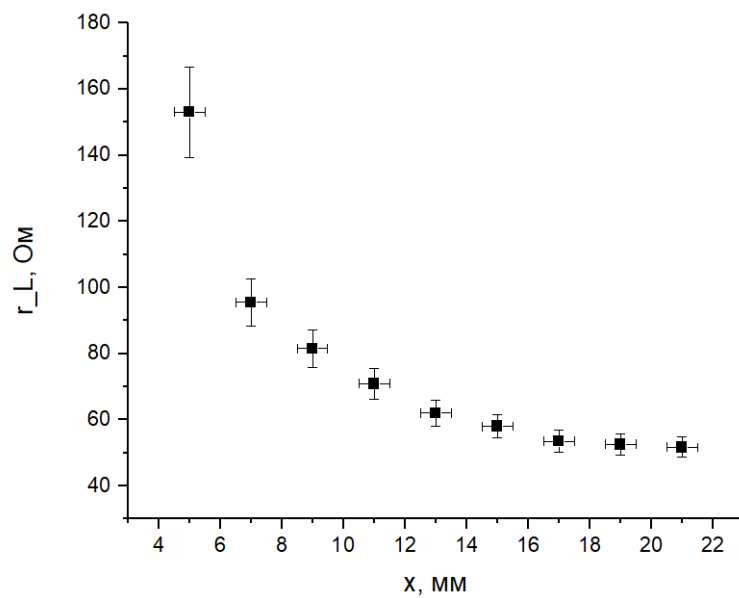


Рис. 4 — График зависимости $L(x)$