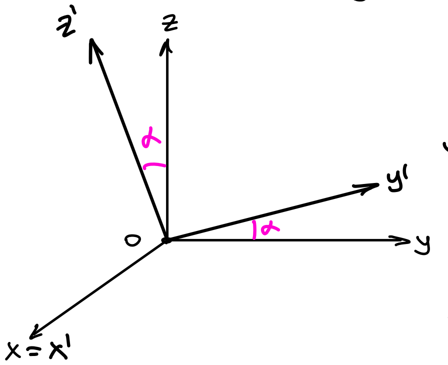
Опр. 2

Ось наз. главной, если равны 0 оба центробеж. момента, содерж. её индекс.

Опр. 1 $\Leftrightarrow$ Опр. 2

$\Rightarrow$ очев.

$\Leftarrow$ $J_{xy} = J_{xz} = 0$, $J_{yz} \neq 0$:



$$y'_k = y_k \cos\alpha + z_k \sin\alpha \qquad z'_k = -y_k \sin\alpha + z_k \cos\alpha$$

$$J_{x'y'} = \sum m_k x'_k y'_k = \Big(\overbrace{\sum m_k x_k y_k}^{J_{xy}}\Big)\cos\alpha + \Big(\overbrace{\sum m_k x_k z_k}^{J_{xz}}\Big)\sin\alpha = 0$$

$J_{x'z'} = 0$ аналогично

$$J_{y'z'} = \sum m_k (y_k \cos\alpha + z_k \sin\alpha)(-y_k \sin\alpha + z_k \cos\alpha) =$$

$$= -\Big(\sum m_k y_k^2\Big)\sin\alpha\cos\alpha + \Big(\overbrace{\sum m_k y_k z_k}^{J_{yz}}\Big)\cos^2\alpha - \Big(\overbrace{\sum m_k y_k z_k}^{J_{yz}}\Big)\sin^2\alpha + \Big(\sum m_k z_k^2\Big)\sin\alpha\cos\alpha$$

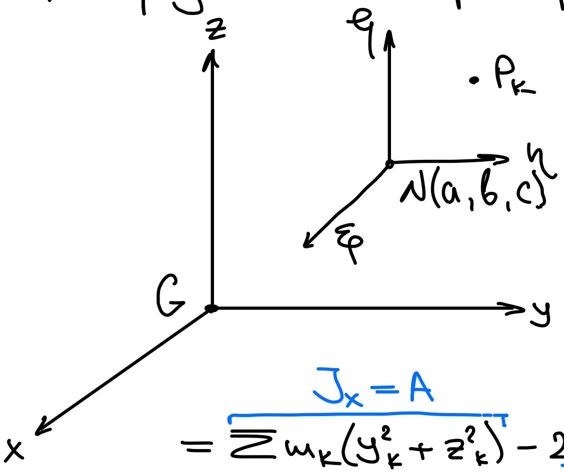
$$= J_{yz}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\Big(\overbrace{\sum m_k (z_k^2 + x_k^2)}^{J_y} - \overbrace{\sum m_k (y_k^2 + x_k^2)}^{J_z}\Big) = J_{yz}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha (J_y - J_z) = 0$$

$\hookrightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 J_{yz}}{J_y - J_z}$, если $J_y \neq J_z$, т.е. получили $Ox'y'z'$ – сист. гл. осей

Тогда oX главная, т.к. $oX = oX'$.

если $J_y = J_z$, то $\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ и то же самое. □

Преобразование $\mathbb{J}$ при паралл. переносе гл. осей (т. Гюйгенса–Штейнера).



$Gxyz$ – система гл. центр. осей инерции, G – ц. масс, $\mathbb{J}_G = \operatorname{diag}(A, B, C)$.

$\mathbb{J}_N = ?$

$$x_k - \xi_k = a, \quad y_k - \eta_k = b, \quad z_k - \varsigma_k = c.$$

$$J_\xi = \sum m_k (\eta_k^2 + \varsigma_k^2) = \sum m_k \big((y_k - b)^2 + (z_k - c)^2\big) =$$

$$= \overbrace{\sum m_k (y_k^2 + z_k^2)}^{J_x = A} - 2b\cancel{\sum m_k y_k}^{0} - 2c\cancel{\sum m_k c_k}^{0} + \Big(\overbrace{\sum m_k}^{M}\Big)(b^2 + c^2)$$

$$J_\xi = A + M(b^2 + c^2), \quad J_\eta = B + M(a^2 + c^2), \quad J_\varsigma = C + M(a^2 + b^2)$$

$$J_{\xi\eta} = \sum m_k \xi_k \eta_k = \sum m_k (x_k - a)(y_k - b) = \overbrace{\sum m_k x_k y_k}^{J_{xy} = 0} - a\cancel{\sum m_k y_k}^{0} - b\cancel{\sum m_k x_k}^{0} + \Big(\overbrace{\sum m_k}^{M}\Big) ab$$

$J_{\xi\eta} = Mab$

$J_{\xi\varsigma} = Mac$

$J_{\eta\varsigma} = Mbc$

$$\Rightarrow \mathbb{J}_N = \begin{pmatrix} A + M(b^2 + c^2) & -Mab & -Mac \\ -Mab & B + M(a^2 + c^2) & -Mbc \\ -Mac & -Mbc & C + M(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

1. если N на одной из гл. осей Gz, то $a=b=0$, $c\neq 0$ и $\mathbb{J}$ diag.

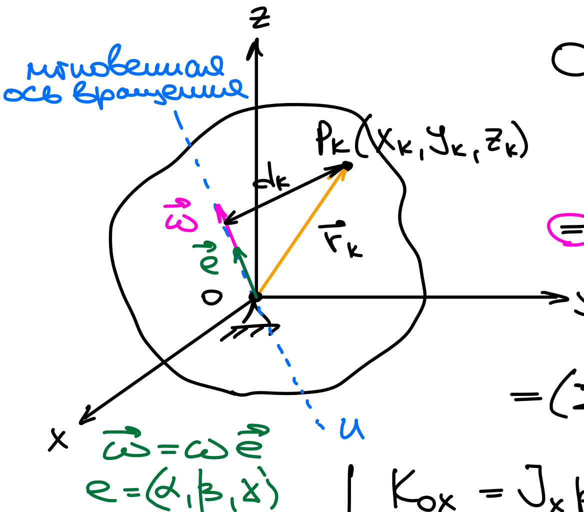
2. обычная т. Г-Шт. $J_u = J_{uc} + md^2$.

Нерав. во треугольника: $J_x + J_y \geq J_z$, например.

$$J_x+J_y=\sum m_k(y_k^2+z_k^2)+\sum m_k(x_k^2+z_k^2)=\overbrace{\sum m_k(x_k^2+y_k^2)}^{J_z}+\overbrace{2\sum m_k z_k^2}^{\geq 0}\geq J_z.$$

рав. во выполнено, когда $z_k=0$ (плоское распр. масс). Например, у диска $z_k=0 \Rightarrow J_x+J_y=J_z$, $J_x=J_y$ (по диаметрам) $\Rightarrow J_x=J_y=\frac{J_z}{2}$

Кинетический момент / Энергия тела с неподв. точкой.



Oxyz – связ. с.к., $\vec\omega=(p,q,r)$

$\vec K_o=\sum \vec r_k\times m\vec v_k =$, $\dot{\vec r}_k=\vec v_k=\vec\omega\times\vec r_k$:

$=\sum m_k\vec r_k\times(\vec\omega\times\vec r_k)=\sum m_k(\vec\omega\cdot r_k^2-\vec r_k\cdot(\vec r_k,\vec\omega))$

$K_{ox}=\sum m_k(p(\cancel{x_k^2}+y_k^2+z_k^2)-x_k(\cancel{x_k p}+y_k q+z_k r))=$

$=(\sum m_k(y_k^2+z_k^2))p-(\sum m_k x_k y_k)\cdot q-(\sum m_k x_k z_k)\cdot r$

$$\begin{cases} K_{ox}=J_x p-J_{xy}q-J_{xz}r \\ K_{oy}=-J_{xy}p+J_y q-J_{yz}r \\ K_{oz}=-J_{xz}p-J_{yz}q+J_z r \end{cases} (1) \Rightarrow \vec K_o=\mathbb{J}_o\cdot\vec\omega$$

$v_k=\omega d_k$: $T=\frac12\sum m_k v_k^2=\frac12\left(\sum m_k d_k^2\right)\omega^2=\frac12 J_u\omega^2$

$J_u=J_x\cdot\alpha^2+J_y\beta^2+J_z\gamma^2-2\alpha\beta J_{xy}-2\alpha\gamma J_{xz}-2\beta\gamma J_{yz}$

$$T=\frac12(J_x p^2+J_y q^2+J_z r^2)-J_{xy}pq-J_{xz}pr-J_{yz}qr=\frac12(\vec K_o,\vec\omega)$$

т.к. $T\geq 0$, то угол между $\vec K_o$ и $\vec\omega$ всегда острый.

Частные случаи:

1. Ox, Oy, Oz – гл. оси тела для т. O : $\mathbb{J}=\mathrm{diag}(A,B,C)$.

$\vec K_o=(Ap,Bq,Cr)$, $T=\frac12(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$

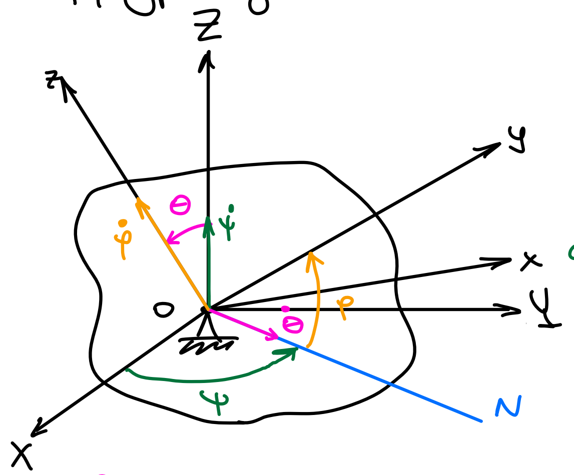
2. Есть неподвижная ось (Oz) : $\vec\omega \parallel Oz \Rightarrow p=q=0,\ r=\omega$.

$\vec K_o=(-J_{xz},-J_{yz},J_z)\omega$: $K_z=J_z\omega$ (получ. ранее).

Заметим, $\vec K_o \nparallel \vec\omega$ в общем случае. $\vec K_o\parallel\vec\omega$, когда $J_{xz}=J_{yz}=0$, т.е. Oz – главн. ось инерции.

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$$

Дифф. ур-е движ. тв. тела с неподв. точкой. (Динам. ур-е Эйлера)



θ - угол нутации

ON — линия узлов

ψ — угол прецессии

φ — угол собств. вращ.

Т. об изм. кин. мом.:

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt}=\vec{M}_o^e: \quad \vec{K}_o=(K_x,K_y,K_z) - \text{по (1) в связанных осях.}$$

абс. произв. — в связ. осях

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt}=\frac{\tilde{d}\vec{K}_o}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{K}_o=\vec{M}_o^e$$

при Ox, Oy, Oz — гл. оси для т. O

$$\vec{K}_o=(Ap,Bq,Cr),\quad \vec{\omega}=(p,q,r).$$

$$\vec{K}_o\times\vec{\omega}=\begin{pmatrix}Cqr-Bqr\\-Crp+Arp\\Bpq-Apq\end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{cases}A\dot{p}+(C-B)qr=\dot{M}_x\\B\dot{q}+(A-C)rp=\dot{M}_y\\C\dot{r}+(B-A)pq=\dot{M}_z\end{cases}$$

— динамические ур-е Эйлера.

$$\vec{\dot{\varphi}}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{pmatrix}\quad \vec{\dot{\theta}}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\\0\end{pmatrix}\dot{\theta}\quad \vec{\dot{\psi}}=\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi\\\sin\theta\cos\varphi\\\cos\theta\end{pmatrix}\dot{\psi}$$

$$(3)\begin{cases}p=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi\\q=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi\\r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\end{cases}$$

— кинематические ур-е Эйлера

Случай Эйлера движения т.т. с неподв. точкой

$\vec{M}_o^e=0$, т.е. тело вращ. по инерции вокруг т. O.

Отделяем (2) от (3):

$$(2')\begin{cases}A\dot{p}+(C-B)qr=0\\B\dot{q}+(A-C)rp=0\\C\dot{r}+(B-A)pq=0\end{cases}$$

Первые интегралы:

1. $\frac{d\vec{K}_o}{dt}=\vec{M}_o^e=0$: $\vec{K}_o=\mathrm{Const}$:

$$K_o^2=A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=\mathrm{Const}$$

2. $\Pi=0$, $E=T+\Pi=T$

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=\mathrm{const}$$

Частные решения (2'):

1. равновесие $p = q = r = 0$

2. стационарное движение – движение вокруг оси, явл. неподвижн и в теле, и в абс. простр.-ве, с $\omega = const$.

$$\begin{cases} (C-B)qr = 0 \\ (A-C)rp = 0 \\ (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

а) $A \neq B \neq C$:

$p \neq 0 \quad q = r = 0 \qquad q \neq 0 \quad p = r = 0 \qquad r \neq 0 \quad q = p = 0$

т.е. вращение вокруг одной из гл. осей $\omega = const$

б) $A = B \neq C$:

$$\begin{cases} qr = 0 \\ pr = 0 \end{cases} : \left[\begin{array}{ll} \forall p, q \Rightarrow r = 0 & \text{– вращ. вокруг оси из } Oxy \\ \forall r \neq 0 \Rightarrow q = p = 0 & \text{– вращ. вокруг оси } Oz \end{array} \right.$$

в) $A = B = C$:

$\forall p, q, r$ – вращ. вокруг любой оси, проход. через т. O

Во всех случаях стационарные вращение вокруг главных осей.