Работа системы сил, приложенных к твердому телу

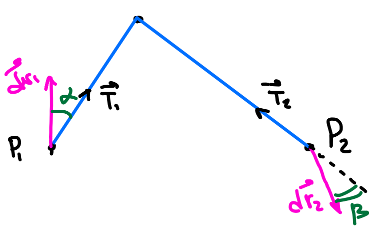
из полюса в P_k

$\{P_k\}_{k=1}^N$ — тв. тело, т. P_k: $\vec F_k = \underbrace{\vec F_k^e}_{\text{гл. вект. внеш. сил}} + \vec F_k^i$: $\delta A = \sum_{k=1}^N \vec F_k \cdot d\vec r_k$, $d\vec r_k = \vec v_k \cdot dt = (\vec v_0 + \vec\omega \times \vec r_k)\,dt$

$$\delta A = \sum \vec F_k(\vec v_0 + \vec\omega\times\vec r_k)dt = \vec v_0 dt \sum_1^N \vec F_k + \sum_1^N \vec F_k(\vec\omega\times\vec r_k)dt = \vec F^e\cdot\vec v_0 dt + \underbrace{\sum_1^N(\vec r_k\times\vec F_k)}_{\vec M_0 = \vec M_0^e} dt\,\omega$$

$$\delta A = \vec F^e\cdot v_0 dt + \vec M_0^e\cdot\vec\omega dt$$

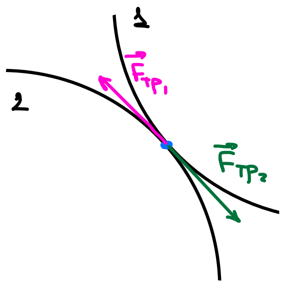
Работа сил натяжения идеальной нити (невесом, нерастяж)



$$\delta A = \vec T_1 d\vec r_1 + \vec T_2 d\vec r_2 = T dr_1\cos\alpha - T dr_2\cos(\beta) = T(\cancel{dr_1\cos\alpha - dr_2\cos\beta}) = 0$$

а т.к. нить нерастяжима, $dr_1\cos\alpha = dr_2\cos\beta$

Работа сил трения при отсутствии проскальзывания.



$d\vec r_{отн} = 0$, $\vec v_{отн} = 0$: $\delta A_1 + \delta A_2 = \vec F_{тр_1}\cdot d\vec r_{отн} = 0$

1. Тела абс. твердые
2. Нити идеальные
3. Нет внутр. сил тр. скольж.

$\Rightarrow \delta A^i = 0$

Силовое поле, силовая ф-я, потенциал

Силовое поле: силы, действ. на тела, зависят только от $\vec r$ и м.б. от t

Потенциальное силовое поле: $\exists U(x_k, y_k, z_k, t)$: $\vec F_k = (F_{kx}, F_{ky}, F_{kz})$: $F_{k_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$

Стационарное: $\partial U/\partial t = 0$

Нестационарное: $\partial U/\partial t \neq 0$

Утв

Элементарная работа сил стац. пот. поля явл. полным дифф-м.

Δ:

$$\delta A = \sum \vec F_k\cdot d\vec r_k = \sum(F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k) = \sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}dx_k + \dots\right) = dU$$

ЗСЭ

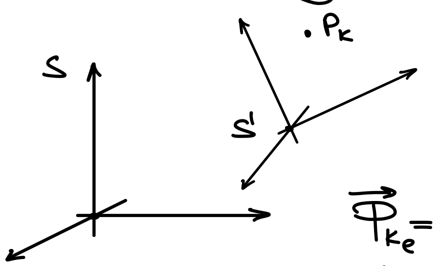
Пусть все силы системы пот., пот. не зависят явно от времени:

$\delta A^e + \delta A^i = dU$: по ТИКЭ $dT = \delta A^i + \delta A^e = dU$, $\Pi = -U$: $d\Pi + dT = 0$

$E = \Pi + T$ — полная мех. энергия: $dE = 0$: $E = const$.

Для сохр. энергии дост. треб. потенциальность сил, сов. ненулевую работу.

Основные т. динамики в НИСО



$$\vec W_k = \vec W_{k_r} + \vec W_{k_e} + \vec W_{kc}, \quad m\vec W_k = \vec F_k:$$

$$m_k \vec W_{k_r} = \vec F_k + \underbrace{(-m_k \vec W_{k_e})}_{\Phi_{ke}} + \underbrace{(-m_k \vec W_{kc})}_{\Phi_{kc}}$$

$\vec\Phi_{ke} = -m\vec W_{k_e}$ — переносная сила инерции

$\vec\Phi_{kc} = -m\vec W_{kc}$ — Кориолисова сила инерции

$m\vec W_k = \vec F_k + \vec\Phi_{ke} + \vec\Phi_{kc}$ — II з. Н. Тогда основные теоремы в НИСО:

1. Т. об изм. кол-ва движ.:

$$\frac{d\vec Q_r}{dt} = \vec F^e + \vec\Phi_e + \vec\Phi_c,$$

$\vec\Phi_e = \sum^N \vec\Phi_{ke}$ — гл. век. пер. сил. ин.

$\vec\Phi_c = \sum^N \vec\Phi_{kc}$ — гл. век. Кор. сил. ин.

$\vec Q_r = \sum m_k \vec v_{kr} = M\cdot\vec v_{cr}$ — $\vec v_{cr}$ — отн. ск. ц. масс системы

2. Т. об изм. кин. момента (для т. A неподв. в S')

$\vec K_{A_r} = \sum \vec\rho_k \times m_k \vec v_{kr}$, $\vec\rho_k = \vec{AP_k}$: $\frac{d\vec K_{Ar}}{dt} = \vec M_A^e + \vec M_A^{\Phi_e} + \vec M_A^{\Phi_c}$

$\vec M_A^{\Phi_e} = \sum \vec\rho_k \times \vec\Phi_{ke} = -\sum \vec\rho_k \times m_k \vec W_{ke}$ — гл. мом. отн. A пер. сил ин.

$\vec M_A^{\Phi_c} = \sum \vec\rho_k \times \vec\Phi_{kc} = -\sum \vec\rho_k \times m_k \vec W_{kc}$ — гл. мом. отн. A Кор. сил. ин.

3. ТИКЭ

работа на отн. перем.

$T_r = \frac{1}{2}\sum m_k \vec v_{kr}^2$: $dT_r = \delta A^e + \delta A^i + \delta A^{\Phi_e} + \cancel{\delta A^{\Phi_c}} \to 0$

$\delta A^{\Phi_c} = \sum \vec\Phi_{kc}\cdot d\vec r_k = -\sum 2m_k(\vec\omega\times\vec v_k\cdot d\vec r_k) = -2\sum m_k \cancel{(\vec\omega\times\vec v_k)\cdot\vec v_k}\,dt = 0$

работа сил Кориолиса нулевая

Основные т. динамики в с.ц. масс:

1. Т. об изм. кол-ва движ.:

$$\frac{d\vec Q_r}{dt} = \vec F^e + \vec\Phi_e + \vec\Phi_c,$$

$\vec\Phi_e = \sum^N \vec\Phi_{ke}$ — гл. век. пер. сил. ин.

$\vec\Phi_c = \sum^N \vec\Phi_{kc}$ — гл. век. Кор. сил. ин.

$\vec Q_r = \sum m_k \vec v_{kr} = M\cdot\cancel{\vec v_{cr}} \to 0$ — $\vec v_{cr}$ — отн. ск. ц. масс системы

и $\vec\omega = 0 \Rightarrow$ новый вид: $0 = \vec F^e + \vec\Phi_e$

2. Т. об изм. кин. момента (для т. A неподв. в S')

$\vec K_{A_r} = \sum \vec\rho_k \times m_k \vec v_{kr}$, $\vec\rho_k = \vec{AP_k}$: $\frac{d\vec K_{Ar}}{dt} = \vec M_A^e + \cancel{\vec M_A^{\Phi e}}^{\,0} + \cancel{\vec M_A^{\Phi c}}^{\,0}$, $\vec M_c^e = \frac{d\vec K_c}{dt}$ ранее показано

$\vec M_A^{\Phi e} = \sum \vec\rho_k \times \vec\Phi_{ke} = -\sum \vec\rho_k \times m_k \vec W_{ke}$ — гл. мом. отн. A пер. сил ин.

$\vec M_A^{\Phi c} = \sum \vec\rho_k \times \vec\Phi_{kc} = -\sum \vec\rho_k \times m_k \cancel{\vec W_{kc}}^{\,0}$ — гл. мом. отн. A Кор. сил. ин.

$\Rightarrow$ новый вид: $\vec M_c^e = \frac{d\vec K_c}{dt}$ ранее показано

3. ТИКЭ

работа на отн. перем.

$T_r = \frac{1}{2}\sum m_k \vec v_{kr}^{\,2}$: $dT_r = \delta A^e + \underbrace{\delta A^i}_{} + \delta A^{\Phi e} + \cancel{\delta A^{\Phi c}}^{\,0}$

$\delta A^{\Phi c} = \sum \vec\Phi_{kc} \cdot d\vec r_k = -\sum 2 m_k (\vec\omega \times \vec v_k \cdot d\vec r_k) = -2\sum m_k \cancel{(\vec\omega \times \vec v_k)\cdot \vec v_k}^{\,0}\, dt = 0$

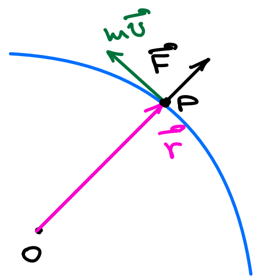
работа сил Кориолиса нулевая

$\delta A^{\Phi e} = \sum m_c \overset{=\vec W_c}{\vec W_{ke}} \cdot d\vec r_k = d\left(\sum m_k \vec r_k\right)\vec W_c = M \cdot \cancel{\vec r_c}^{\,0} \cdot \vec W_c$

новый вид: $dT_r = \delta A^e + \delta A^i$

Движение в центральном поле сил.

Поле сил наз. центральным, если сила, действ. на т., направлена вдоль рад. вектора, идущего в эту т. из нек. фикс. т. пр-ва (центра).



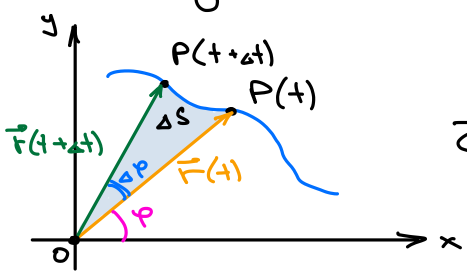
$\vec F = F\frac{\vec r}{r}$

$\frac{d\vec K_o}{dt} = \vec M_o(\vec F) = \vec r \times \vec F = 0$: $\vec K_o = \vec r \times m\vec v = const$: $\vec r \times \vec v = const$

$\vec r \times \vec v = \vec c$ — интеграл площадей

$\vec c = 0$ — движение по прямой вдоль $\vec r$

$\vec c \neq 0$ — движение в пл-ти $\perp$ пл. $\vec c$:



$\vec v = \vec v_r + \vec v_\varphi$: $\vec v_r \uparrow\uparrow \vec r$, $\vec v_\varphi \perp \vec r$

$\vec c = \vec r \times \vec v_\varphi$: $c = r^2\dot\varphi$ — полярная форма интеграла площадей

$\Delta S \approx \frac{1}{2} r(t)\cdot r(t+\Delta t)\cdot \sin\Delta\varphi \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi \;\Big|\; : \Delta t \to 0$

$\dot S = \frac{1}{2} r^2 \dot\varphi = \frac{1}{2} c$: $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} c = const$ — секториальная скорость = const

Получили II закон Кеплера

Радиус-вектор, идущий от Солнца к планете, заметает площадь, пропорциональную времени, в теч. кот. сов. движ.

Ур-е Бине

$m\vec{W} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$; $\vec{W} = \vec{W}_r + \vec{W}_\varphi$, $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{r}$: $W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$, $r^2\dot{\varphi} = c$: $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$.

Бине предложил перейти $\frac{1}{r} \to r$!

$u = \frac{1}{r}$: $\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{u'\dot{\varphi}}{u^2} = -cu' \\ \ddot{r} &= -cu''\dot{\varphi} = -c^2u''\cdot u^2 \end{aligned}$: $m(-c^2u^2u'' - \frac{1}{u}c^2u^4) = F(\frac{1}{u}, -cu', \varphi, cu^2, t)$

$-mc^2u^2(u'' + u) = F(\dots)$: $\begin{cases} u'' + u = -\frac{F}{mc^2u^2} \\ \dot{\varphi} = cu^2 \end{cases}$ – ур-е Бине

если $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, то ур-е отделяется $\Rightarrow u = u(\varphi)$ – ур-е траек. в пол. коорд.

полезно в центр. грав. поле, т.к. $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $F = -GmMu^2 = -Kmu^2$

$u'' + u = \frac{Kmu^2}{mc^2u^2} = \frac{K}{c^2} = \text{const}$: $u'' + u = \frac{K}{c^2} \longrightarrow \dots$ потом.