

---

**Лабораторная работа №4.8**  
**Резонанс напряжений**  
**Мещеряков Всеволод, Б02-001, 13.10.2021**

## **Введение**

Цель работы заключается в изучении последовательной цепи переменного тока и наблюдении резонанса напряжений. Для этого используются регулировочный автотрансформатор, катушка индуктивности с выдвижным сердечником, магазин емкостей, резисторы, амперметр, три вольтметра, ваттметр, осциллограф, универсальный мост.

## **Теоретическая справка: импеданс**

Параметры основных элементов цепи задаются их импедансами, то есть некоторыми комплексными числами. Такая условность носит название метода "комплексных амплитуд". Поймем, в чем заключается выгода такого приёма.

Рассмотрим стандартный RLC-контур, подключенный к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t$ . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе  $U_c$ , ток, идущий в контуре,  $I$ . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции плюс ЭДС источника:

$$RI + U_c = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 \cos \Omega t. \quad (1)$$

Пусть на конденсаторе заряд  $q$ , учтем зависимость от времени  $q = \int I dt$ :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \varepsilon_0 \cos \Omega t. \quad (2)$$

Решением линейного этого ДУ состоит из общего однородного решения и какого либо частного решения уравнения с учетом правой части. Для поиска этого решения используется метод комплексной амплитуды: пусть некоторая комплексная функция является решением линейного

ДУ с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции является решением этого же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть – решением уравнения с мнимой частью. Исходя из сказанного, запишем уравнение (2) в комплексной форме:

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} + \frac{\int \hat{I} dt}{C} = \hat{\varepsilon}_0 e^{i\Omega t}. \quad (3)$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}_0$  – комплексная амплитуда внешнего напряжения:  $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 e^{i\varphi}$ .

Если начальная фаза равна нулю, то  $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$ . Правая часть (2) является вещественной частью правой части (3). Будем искать решение (3) в том же виде, что и ЭДС. Тогда получим:

$$\hat{I}_0 [R + i(\Omega L - \frac{1}{\Omega C})] = \varepsilon_0. \quad (4)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, называется импедансом – это характеристика контура, не зависящая ни от токов, ни от напряжений. Выражение (4) является обобщением законом Ома для переменных токов. Действительная часть импеданса называется активным сопротивлением контура, а мнимая – реактивным сопротивлением контура или реактансом. Так импеданс индуктивности равен  $i\Omega L$ , емкости  $\frac{1}{i\Omega L}$ , сопротивления  $R$ .

Вернемся к началу выкладок и скажем, что фаза ЭДС не равна нулю:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \varphi. \quad (5)$$

Решаем аналогичные уравнения, обозначаем импеданс  $Z$ :

$$\hat{\varepsilon}_0 = Z\hat{I}_0. \quad (6)$$

Тогда получаем окончательно:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\Omega t + \varphi - \psi), \quad (7)$$

где  $\psi = \arctg \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$ .

То есть получили, что ток отстаёт от напряжения по фазе на величину  $\psi$ , определяемую отношением мнимой и действительной частью импеданса.

## Теоретическая справка: измерения

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резистора  $R$  и катушки индуктивности  $L$  с импедансом  $Z_L = r_L + i\Omega L$ , последовательно подключенных ко внешнему источнику, ЭДС которого меняется по синусоидальному закону с частотой  $\Omega$  – рисунок 1.

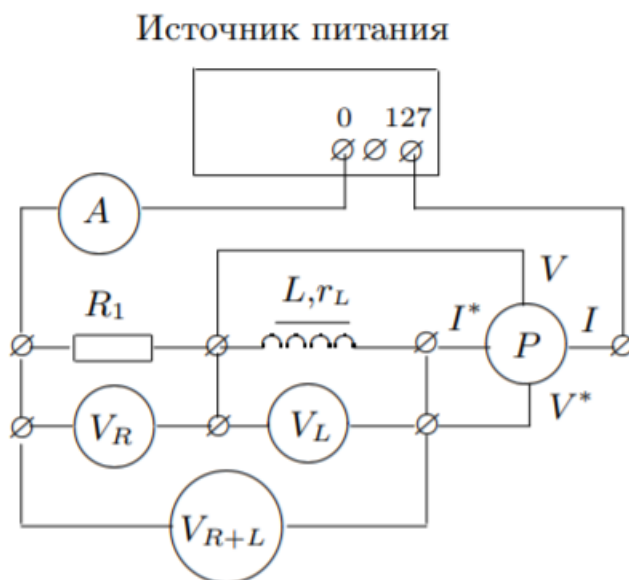


Рис. 1 — Схема экспериментальной установки для изучения закона Ома в цепи переменного тока

Обозначим через  $U_R$  напряжение на резисторе,  $U_L$  – на катушке,  $U_{R+L}$  – суммарное напряжение на катушке и на резисторе. Для них справедливы комплексные выражения:

$$\hat{U}_R = \hat{I}R, \quad \hat{U}_L = \hat{I}(r_L + i\Omega L), \quad \hat{U}_{R+L} = \hat{I}(R + r_L + i\Omega L). \quad (8)$$

Переходя к модулям и фазам токов, получаем:

$$\begin{aligned} U_R &= I \cdot R & \operatorname{tg} \psi_1 &= 0 \\ U_L &= I \sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2} & \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{\Omega L}{r_L} \\ U_{R+L} &= I \sqrt{(R + r_L)^2 + (\Omega L)^2} & \operatorname{tg} \psi_3 &= \frac{\Omega L}{R + r_L} \end{aligned}$$

Рассчитаем среднюю мощность переменного тока, выделяемую в катушке:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = I^2 r_L. \quad (9)$$

Активное сопротивление катушки  $r_L$  можем измерить, если включим катушку в последовательный контур с известными  $R$  и  $C$  – рисунок 2. В контуре, настроенном в резонанс на частоту  $\Omega$  внешнего источника (собственная частота контура и внешняя совпадают:  $\omega_0 = \Omega$ ), реактивные сопротивления индуктивности совпадают:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10)$$

Тогда, определив каким либо образом добротность контура  $Q$ , можно рассчитать полное сопротивление контура  $R_\Sigma$  в резонансе, поскольку:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma}. \quad (11)$$

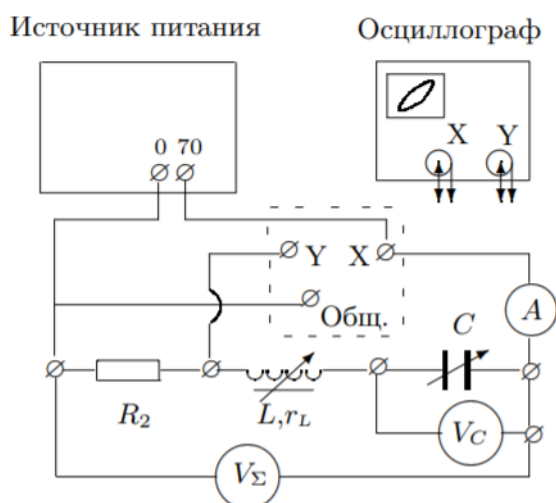


Рис. 2 — Схема установки для наблюдения резонанса напряжений

## Ход работы: закон Ома

Подготовим к работе установку, собранную по схеме рисунка 1. Перемещая сердечник катушки малыми шагами по 0.2 мм снимем зависимость тока  $I$ , напряжений  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_{R+L}$  и мощности  $P_L$  от координаты сердечника  $x$ . Результаты отразим в таблице 1. Учтем и погрешности: класс точности используемых приборов – 0,5. То есть погрешность – 0,5% от предела измерений.

$x$ , мм	$I$ , дел	$\sigma_I$ , дел	$U_R$ , дел	$\sigma_{U_R}$ , дел	$U_{R+L}$ , дел	$\sigma_{U_{R+L}}$ , дел	$U_L$ , дел	$\sigma_{U_L}$ , дел	$P_L$ , дел	$\sigma_{P_L}$ , дел
5,00	29	0,01	63	1	118	1	89	1	52	0,125
7,00	34	0,01	73	1	116	1	79	1	47	0,125
9,00	36	0,01	80	1	114	1	71	1	43	0,125
11,00	38	0,01	83	1	113	1	64	1	40	0,125
13,00	39	0,01	87	1	112	1	59	1	38	0,125
15,00	40	0,01	89	1	111	1	55	1	36	0,125
17,00	41	0,01	90	1	110	1	52	1	34	0,125
19,00	41	0,01	91	1	110	1	49	1	33	0,125
21,00	42	0,01	92	1	109	1	46	1	31	0,125

Таблица 1 — Результаты измерений до пересчёта, значения указаны в делениях приборов

Пересчитаем деления в соответствующие единицы измерения. Амперметр выставлен на максимальный ток 2.5 А, имеет 100 делений – тогда 1 деление – это 0,025 А. Вольтметры выставлены на максимальное напряжение 150 В, имеют 150 делений – тогда 1 деление – это 1 В. Ваттметр, согласно документации, показывает 1 Вт на деление. Результаты укажем в таблице 2.

$x$ , мм	$I$ , А	$\sigma_I$ , А	$U_R$ , В	$\sigma_{U_R}$ , В	$U_{R+L}$ , В	$\sigma_{U_{R+L}}$ , В	$U_L$ , В	$\sigma_{U_L}$ , В	$P_L$ , Вт	$\sigma_{P_L}$ , Вт
5	0,73	0,03	63	1	118	1	89	1	13	0,03
7	0,85	0,03	73	1	116	1	79	1	12	0,03
9	0,90	0,03	80	1	114	1	71	1	11	0,03
11	0,95	0,03	83	1	113	1	64	1	10	0,03
13	0,98	0,03	87	1	112	1	59	1	10	0,03
15	1,00	0,03	89	1	111	1	55	1	9	0,03
17	1,03	0,03	90	1	110	1	52	1	9	0,03
19	1,03	0,03	91	1	110	1	49	1	8	0,03
21	1,05	0,03	92	1	109	1	46	1	8	0,03

Таблица 2 — Результаты измерений после пересчёта, значения указаны в соответствующих единицах измерения

По формуле для  $U_L$  из (8) и формуле (9) рассчитаем  $r_L$  и  $L$  для каждого  $x$ . Оценим погрешности:  $\sigma_x = 0,5\text{мм}$ ,  $\sigma_{r_L}$  как косвенное измерение через погрешности  $P$  и  $I$ . Результаты отразим в таблицах 3 и 4, по ним построим графики на рисунках 3 и 4.

Оценка погрешностей в этой работе несет условный характер, так как провода и клеммы вносят неоценимый вклад. Для реактивного сопротивления удалось провести оценку, но для индуктивности адекватной оценки провести не удалось.

$x$ , мм	$\sigma_x$ , мм	$r_l$ , Ом	$\sigma_{r_l}$ , Ом
5	0,5	12,37	2,13
7	0,5	8,13	1,20
9	0,5	6,64	0,92
11	0,5	5,54	0,73
13	0,5	5,00	0,64
15	0,5	4,50	0,56
17	0,5	4,05	0,49
19	0,5	3,93	0,48
21	0,5	3,51	0,42

Таблица 3 — Точки для графика зависимости  $r_L(x)$

$x$ , мм	$\sigma_x$ , мм	$L$ , Гн
5	0,5	0,39
7	0,5	0,29
9	0,5	0,25
11	0,5	0,21
13	0,5	0,19
15	0,5	0,17
17	0,5	0,16
19	0,5	0,15
21	0,5	0,14

Таблица 4 — Точки для графика зависимости  $L(x)$

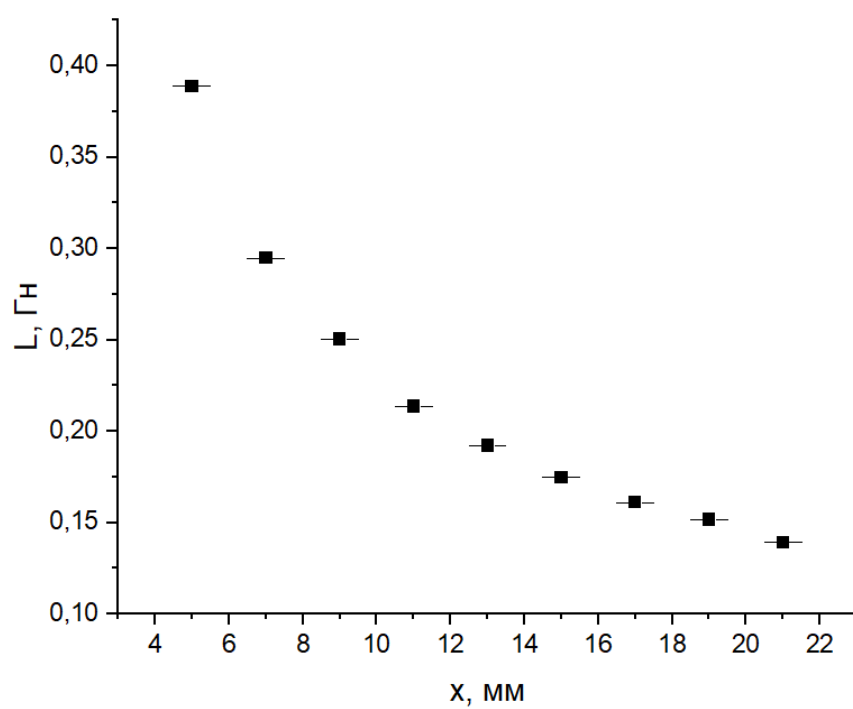


Рис. 3 — График зависимости  $r_L(x)$

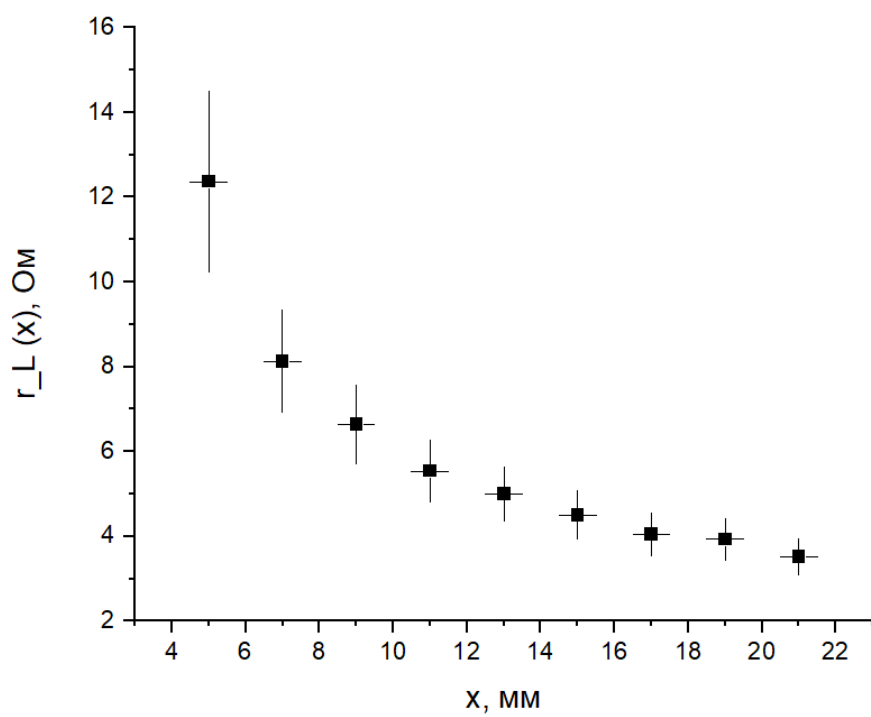


Рис. 4 — График зависимости  $L(x)$

Теперь построим векторную диаграмму (Рис. 5) напряжений. Напряжение на резисторе совпадает по фазе с током, поэтому  $U_R$  лежит на векторе  $I$ . Векторное равенство напряжений  $U_{L+R} = U_L + U_R$  позволяет построить треугольник по трем сторонам. Сделаем две насечки: первую – радиусом, равным модулю вектора  $U_{R+L}$ , из начала вектора  $U_R$  (см. схему на Рис. 1); вторую – радиусом, равным модулю вектора  $U_L$ , из конца вектора  $U_R$ . Точка на пересечении насечек определяет положение векторов  $U_{L+R}$  и  $U_L$  на диаграмме. Разложим  $U_L$  по осям координат. Проекция  $U_L$  на ось  $I$  равна  $U_{L,акт}$ , проекция на перпендикулярную ось –  $U_{L,реакт}$ .

Будем брать значения при  $x = 21$  мм:  $U_{L+R} = 109$  В,  $U_L = 46$  В,  $U_R = 92$  В. Тогда запишем теорему косинусов для получившегося треугольника напряжений, из нее получим значение угла  $\beta = 81^\circ$ , которое оказывается близким к расчетному  $83^\circ$ .

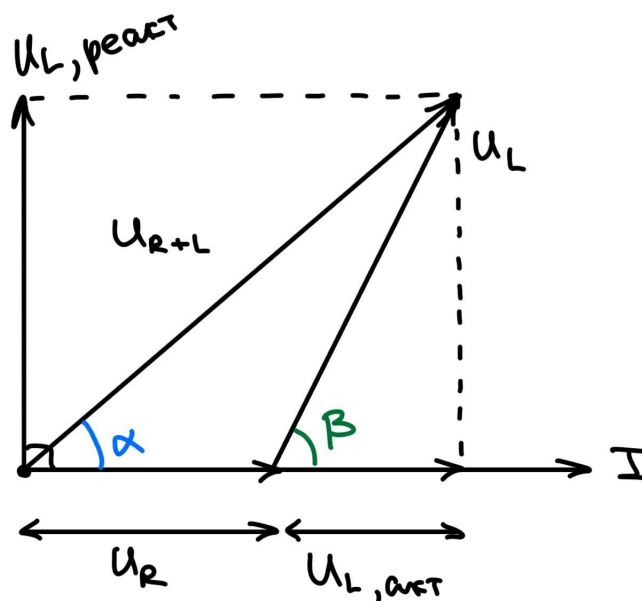


Рис. 5 — Векторная диаграмма

Воспользуемся методом трех вольтметров для вычисления мощности, выделяющейся на катушке при среднем положении сердечника. Записав теорему косинусов, получим:  $P_L = U_L I \cos \beta = 8,4$  Вт, что оказывается близким к измеренным 10 Вт (см. Таблица 2, строка для 13 мм).



## Ход работы: резонанс напряжений

Теперь подключим катушку к установке, схема которой изображена на рисунке 2. Будем менять ёмкости и искать такое положение сердечника, чтобы катушка входила в резонанс с сетью. Критерием для нас будет являться картина, которую мы видим на экране осциллографа – в резонансе кривые "слипляются" (см. Рис. 6).

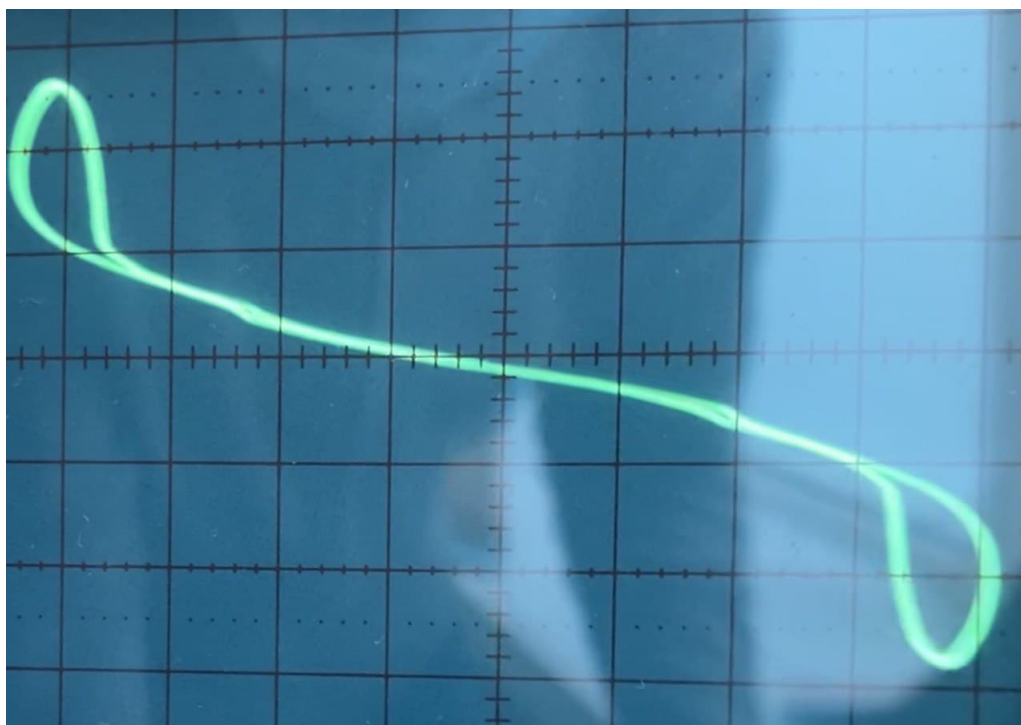


Рис. 6 — Кривые на осциллографе сошлись в одну – наступил резонанс

Выберем для анализа наибольшую из измеренных ёмкостей:  $C = 50,2 \pm 2,5$  мкФ. Подберем положение сердечника такое, чтобы картина на осциллографе соответствовала резонансу. Для выбранной ёмкости это  $x = 11 \pm 0,5$ . Снимем показания датчиков: ток в цепи –  $I_{\text{рез}} = 4,40 \pm 0,3$  А, напряжение на конденсаторе  $U_{C,\text{рез}} = 284 \pm 2$  В, напряжение на последовательном соединении  $U_{\Sigma} = 43,5 \pm 2$  В. Тогда добротность контура можно оценить как:

$$Q = \frac{U_{C,\text{рез}}}{U_{\Sigma,\text{рез}}} = 6,53 \pm 0,06 \quad (12)$$