Случай Эйлера

$\vec{M}_o^e = 0$:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (2)$$

первый интеграл $K_o^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = const$, $\vec{K}_o = const$ (3)
второй интеграл $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = const$ (4)

1. равновесие $p = q = r = 0$

2. стационарное движение – движение вокруг оси, явл. неподвижн и в теле, и в абс. простр-ве, с $\omega = const$.

$$\begin{cases} (C-B)qr = 0 \\ (A-C)rp = 0 \\ (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

а) $A \neq B \neq C$:

$p \neq 0 \quad q = r = 0 \qquad q \neq 0 \quad p = r = 0 \qquad r \neq 0 \quad q = p = 0$

т.е. вращение вокруг одной из гл. осей $\omega = const$

б) $A = B \neq C$:

$$\begin{cases} qr = 0 \\ pr = 0 \end{cases} : \quad \begin{cases} \forall p, q \Rightarrow r = 0 & \text{– вращ. вокруг оси из } Oxy \\ \forall r \neq 0 \Rightarrow q = p = 0 & \text{– вращ. вокруг оси } Oz \end{cases}$$

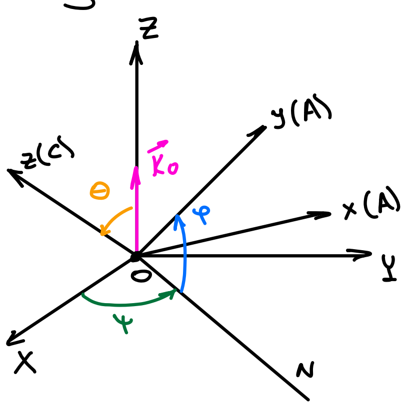
в) $A = B = C$:

$\forall p, q, r$ – вращ. вокруг любой оси, проход. через т. O

Во всех случаях стационарное вращение вокруг главных осей.

3. $A = B$ динамическая симметрия

из (3) (1) $\Rightarrow r = r_0 = const$

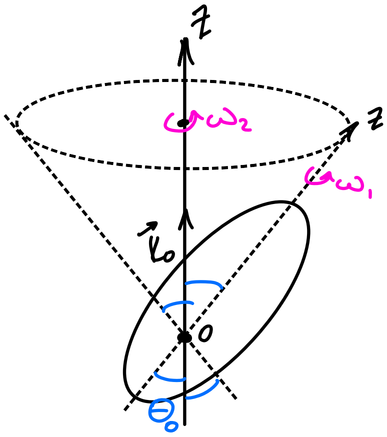


$\vec{K}_o = (Ap, Aq, Cr_0) = (K_o\sin\theta\sin\varphi, K_o\sin\theta\cos\varphi, K_o\cos\theta)$

$\Rightarrow \cos\theta = Cr_0/K_o = const \Rightarrow \theta = \theta_0 = const.$

$$(2): \begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi \; : \; A\dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi = K_o\sin\theta_0\sin\varphi : \omega_2 := \dot{\psi} = \frac{K_o}{A} \\ q = \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi \\ r = r_0 = \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi} \; : \; \dot{\varphi} = r_0 - \frac{K_o}{A}\cdot\frac{Cr_0}{K_o} = \frac{A-C}{A} r_0 = \omega_1 \end{cases}$$

т.е. ω_2 прецессии $= const$, ω_1 собств. вращ. $= const$



динамически симметричное тело в сл. Эйлера совершает регулярную прецессию.

Интегрирование

(3) и (4) – лин. система отн p^2, q^2, r^2: свободная

$$p^2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot q^2,\ r^2 = \beta_1 + \beta_2 \cdot q^2\ ;\ \alpha_i, \beta_i - \text{константы} \sim A, B, C.$$

в (2) (1): $B\dot{q} = \pm(C-A)\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2 q^2)(\beta_1+\beta_2 q^2)}$:

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2 q^2)(\beta_1+\beta_2 q^2)}} = \pm\frac{C-A}{B}(t-t_0)$$ – получим квадратуру

эллиптический инт 1-го рода

делаем замену $q = \varkappa_1 \sin\lambda,\ t = \varkappa_2 \tau$: $\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}} = \pm\frac{C-A}{A}\varkappa(\tau-\tau_0)$

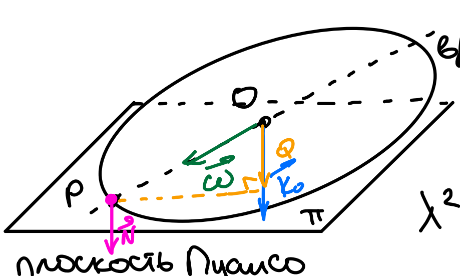
$\hookrightarrow \lambda = \lambda(\tau) \rightsquigarrow p = p(t),\ q = q(t),\ r = r(t)$

$$\begin{cases} Ap(t) = K_0 \sin\theta \sin\varphi \\ Bq(t) = K_0 \sin\theta \cos\varphi \\ Cr(t) = K_0 \cos\theta \longrightarrow \theta(t) \end{cases} \longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B}\frac{p(t)}{q(t)} \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$$

$\psi(t)$ из кинемат. ур-й.

Геометрическая интерпретация в сл. Эйлера

Эллипсоид инерции $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ (5)



1. $\vec{OP} = \lambda\vec{\omega}$, $\lambda = \text{const}$

$P(x_p, y_p, z_p)$: удовл. (5); $x_p = \lambda p,\ y_p = \lambda q,\ z_p = \lambda r$:

$\lambda^2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1$: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}}$, $T = \text{const}$ в сл. Эйлера

$N = \operatorname{grad}(Ax_p^2 + By_p^2 + Cz_p^2) = 2(Ax_p, By_p, Cz_p) = 2\lambda\vec{K}_0$.

$\Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{K}_0 \Rightarrow \vec{K}_0 \perp \Pi$.

3. $OQ = pr_{K_0}\vec{OP} = \vec{OP}\frac{\vec{K}_0}{K_0} = \lambda\vec{\omega}\vec{K}_0 \cdot \frac{1}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{2T}} \cdot 2T \cdot \frac{1}{K_0} = \frac{\sqrt{2T}}{K_0} \Rightarrow OQ = \text{Const}$, т.е.

П фиксирована в абс. пр-ве

4. $\vec{v}_P = 0$, т.к. лежит на оси вращения.

Эллипсоид инерции тв. тела с неподв. точкой в сл. Эйлера катится без проскальзывания по неподвижной плоскости. $\vec{K}_0 \perp$ этой плоскости. Радиус-вектор из неподвижной точки в т. касания направлен по $\vec{\omega}$, а по величине пропорционален ей.

Вынужденная регулярная прецессия тв. тела с неподв. точкой. Основная формула гироскопии.

Гироскоп — тв. тело, вращ. вокруг неподвижной точки, для кот. эллипсоид инерции тела явл. эллипсоидом вращения, т.е. тело динам. симм.

$A = B \neq C$. $\vec{M}_0^e = ?$: регулярная прецессия $\theta_0, \omega_1, \omega_2$.

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = M_x \\ A\dot{q} + (A-C)pr = M_y \\ C\dot{r} = M_z \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \omega_2 \sin\theta_0 \sin\varphi \\ q = \omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi \\ r = \omega_2 \cos\theta_0 + \omega_1 = r_0 = const \Rightarrow M_z = 0 \end{cases}$$

$$M_x = A \cdot \omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi\, \omega_1 + (C-A)\omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi (\omega_2 \cos\theta_0 + \omega_1)$$

$$M_x = \omega_1 \omega_2 \sin\theta_0 \cos\varphi \left(C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right)$$

$$M_y = -\omega_1 \omega_2 \sin\theta_0 \sin\varphi \left(C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right)$$

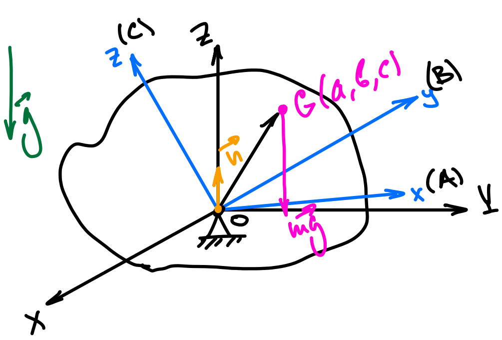
$$\vec{\omega}_1 = (0, 0, \omega_1) \quad \vec{\omega}_2 = \omega_2 (\sin\theta_0 \sin\varphi, \sin\theta_0 \cos\varphi, \sin\theta_0)$$

$$\vec{M}_0^e = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 \left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right]$$ основная формула гироскопии

$\vec{M}_0^e \parallel \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 \parallel$ линии узлов и $|\vec{M}_0^e| = const$

Быстровращающиеся гироскопы $\omega_1 \gg \omega_2$: $\vec{M}_0^e = C \cdot \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$.

Дифференциальные ур-е движения тяжелого тела с неподвижной точкой



$\vec{OG} = (a, b, c)$ в $Oxyz$, $\vec{n} \uparrow\uparrow OZ$:

$\vec{n}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$: $\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi$ $\gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi$ $\gamma_3 = \cos\theta$

$|\vec{n}| = 1$, $\vec{n} = const$: $\frac{d\vec{n}}{dt} = 0 = \frac{\tilde{d}\vec{n}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{n}$: $\frac{\tilde{d}\vec{n}}{dt} = \vec{n} \times \vec{\omega}$

$\rightarrow$ ур-е Пуассона $\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{cases}$ (2)

$\vec{M}_o^e = \vec{M}_o(m\vec{g}) = \vec{OG} \times m\vec{g} = mg\,\vec{n} \times \vec{OG}$:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = mg(\gamma_2 c - \gamma_3 b) \\ B\dot{q} + (A-C)pr = mg(\gamma_3 a - \gamma_1 c) \\ C\dot{r} + (B-A)pq = mg(\gamma_1 b - \gamma_2 a) \end{cases} \quad (3).$$

(2) + (3) — ур-я Эйлера–Пуассона

Первые интегралы:

1. Геометрический $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

2. $\vec{M}_{oz}^e = 0$: $K_{oz} = \text{const}$, т.е. $(\vec{K}_o, \vec{n}) = \text{const}$: $Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}$

3. Энергия $E = T + \Pi = \text{const}$

$\Pi = mg z_G = mg(\vec{OG}, \vec{n}) = mg(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3)$

$E = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + mg(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = \text{const}$.