

Программа курса "Теория Вероятностей"

лектор — д.ф.-м.н. М.Е. Жуковский

осенний семестр 2021, ЛФИ

1. Конечное множество элементарных исходов, классическая вероятность, схема испытаний Бернулли, независимость событий. Независимость в совокупности.
2. Геометрическая вероятность. Колмогоровское определение вероятностного пространства. Свойства вероятности.
3. Независимость событий, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса.
4. Распределения, функция распределения и ее свойства.
5. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения в \mathbb{R} , плотность. Примеры.
6. Распределения в \mathbb{R}^n , функция распределения и ее свойства. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения.
7. Случайные величины и случайные векторы. Независимость и критерий независимости. Независимость функций от векторов.
8. Независимость случайных величин. Свертка распределений.
9. Математическое ожидание случайной величины: дискретные и абсолютно непрерывные величины. Примеры.
10. Основные свойства математического ожидания. Математическое ожидание произведения независимых величин.
11. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега. Подсчет математического ожидания от функции от случайной величины. Примеры.
12. Дисперсия, ковариация и их свойства. Примеры. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.
13. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева.
14. Виды сходимостей и взаимосвязи между ними.

15. Критерий слабой сходимости в терминах функции распределения. Центральная предельная теорема. Пример применения.
16. Закон больших чисел и усиленные законы больших чисел.
17. Характеристические функции случайных величин. Характеристическая функция суммы независимых величин. Характеристическая функция от $a\xi + b$. Примеры
18. Теорема о единственности, критерий независимости, теорема о непрерывности и разложение характеристической функции в ряд.
19. Свойства характеристической функции.
20. Характеристическая функция случайного вектора. Гауссовские векторы. Эквивалентные определения. Независимость компонент.
21. Сходимость случайных векторов. Связь с покомпонентной сходимостью. Наследование сходимостей. Законы больших чисел и центральная предельная теорема для случайных векторов.
22. Симметричное случайное блуждание на прямой. Траектории. Распределение: $P(S_n = k)$. Принцип отражения и вероятность непересечения нулевого уровня.
23. Распределение максимума случайного блуждания. Закон повторного логарифма. Среднее количество возвращений в 0.
24. Предельная теорема Муавра–Лапласа (локальная и интегральная) и ее связь со случайным блужданием. Предельная теорема Пуассона.
25. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Производящая функция и ее свойства. Вероятность вырождения и технология ее вычисления.
26. Производящая функция числа частиц в момент времени n , общего числа частиц к моменту n и общего числа частиц за все время. Технология вычисления вероятности того, что всего в процессе было k частиц.
27. Случайные процессы с непрерывным временем. Конечномерные распределения. Гауссовские процессы и процессы с независимыми приращениями.
28. Гауссовские процессы и процессы с независимыми приращениями. Критерии существования.

29. Эквивалентные определения винеровского процесса. Свойства траекторий: непрерывность и недифференцируемость траекторий, закон повторного логарифма.
30. Марковское свойство и свойство отражения винеровского процесса. Фильтрация, естественная фильтрация, марковский момент и момент остановки. Строго марковское свойство и усиленное свойство отражения.
31. Фильтрация, естественная фильтрация, марковский момент и момент остановки. Примеры. Теорема Башелье. Распределение первого момента пересечения уровня x и его среднее.
32. Марковские процессы. Эквивалентное определение в случае дискретного времени и дискретного процесса. Примеры марковских процессов.

Список литературы

- [1] А.А. Боровков, *Теория вероятностей*, 3-е издание, Эдиториал УРСС, Москва, 1999.
- [2] М.Е. Жуковский, И.В. Родионов, *Основы теории вероятностей*, МФТИ, Москва, 2015.
- [3] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 7-е издание, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2009.
- [4] Б.А. Севастьянов, *Курс теории вероятностей и математической статистики*, Наука, Москва, 1982.
- [5] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Мир, Москва, 1967.
- [6] А.Н. Ширяев, *Вероятность*, 4-е издание, МЦНМО, Москва, 2007.