Теорема об изм. кол-ва движения и о движении ц. масс системы

Кол-во движения (импульс) системы

$$Q = \sum_{k=1}^{N} m_k v_k$$

Центр масс системы

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}, \quad M = \sum_{k=1}^{N} m_k : \quad M\vec{v}_c = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \vec{Q}$$

т. P_k : $m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m \vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = \vec{F} = \vec{F}^e$$ – главный вектор сил системы

Теорема об изменении кол-ва движения

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$$

Теорема о движении центра масс

Центр масс движ. как материальная точка, в кот. сосредот. масса всей системы, под действием силы, равной гл. век. всех сил системы

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^e$$

Следствие

1. $\vec{F}^e = 0$: $\vec{Q} = const$, $\vec{v}_c = const$
2. $\vec{F}^e_u = 0$: $\vec{Q}_u = const$, $\vec{v}_{cu} = const$

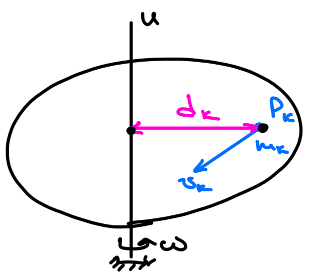
Теорема об изменении кин. момента системы

Кинет. момент отн. т. A:

$\vec{K}_A = \sum_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times m_k \vec{v}_k$, $\vec{\rho}_k = \vec{AP}_k$ – сумма всех моментов импульса отн. A.

Кин. момент относ. оси

$K_u = pr_u \vec{K}_A$, K_u не зависит от выбора т. A – док-во аналогичное

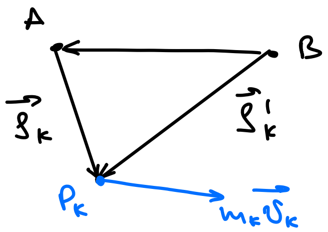


Кин. момент тела, вращ. относ. оси:

$$K_u = \sum_{k=1}^{N} m_k v_k d_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \omega d_k^2 = \omega \overbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2}^{\text{момент инерции}}$$

кин. момент зависит от выбора центра

Связь между $\vec{K}_A$ и $\vec{K}_B$

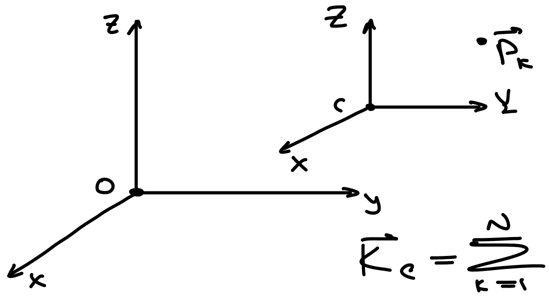


$$\vec{K}_B = \sum_{k=1}^{N} \vec\rho\,'_k \times m_k\vec v_k, \quad \vec{K}_A = \sum_{k=1}^{N} \vec\rho_k \times m_k \vec v_k, \quad \vec\rho\,'_k = \vec{BA} + \vec\rho_k$$

$$\vec{K}_B = \sum_{k=1}^{N} \vec\rho_k \times m_k \vec v_k + \vec{BA} \times \sum_{k=1}^{N} m_k \vec v_k = \vec K_A + \vec{BA} \times \vec Q$$

В частности, для центра масс: $\vec K_O = \vec K_C + \vec{OC} \times M\vec v_C$

Введем Кёнигову с.к. (начало в т. C, оси движ. пост.)



Под движением относ. центра масс будем понимать движение в Кёниговой с.к.

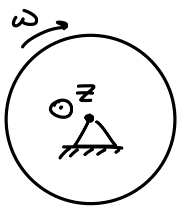
$$\vec v_k = \vec v_{kc} + \vec v_{kr} = \vec v_c + \vec v_{kr}$$

$$\vec K_c = \sum_{k=1}^{N} \vec{CP}_k \times m_k \vec v_k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{CP}_k\right)}_{M\cdot\cancel{\vec{CC}}=0} \cdot \vec v_c + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \vec{CP}_k \times m_k \vec v_{kr}}_{\vec K_{cr}}$$

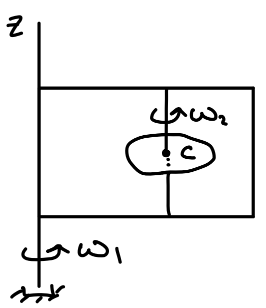
т.е. $\vec K_c = \vec K_{cr}$: $\vec K_O = \vec{OC} \times M\vec v_c + \vec K_{cr}$ — **теорема Кёнига о кин. моменте**

Кинет. момент системы относ. произв. центра складывается из момента импульса мат. точки M в т. ц. масс системы относ. данного центра и кин. момент системы относ. ц. масс (т.е. в Кёниговой с.к.)

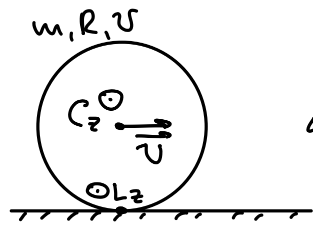
Примеры:



$$K_{Oz} = J_{Oz} \cdot \omega = \frac{1}{2} mR^2 \omega$$



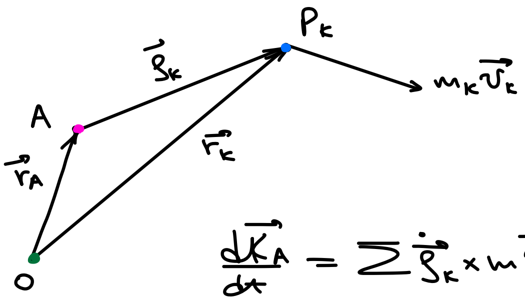
$$K_z = m\omega_1 a^2 + \frac{1}{2} mR^2(\omega_1 + \omega_2)$$



$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$K_{Cz} = \frac{1}{2} mvR \qquad K_{Lz} = K_{Cz} + mvR = \frac{3}{2} mvR$$

Теорема об изменении кинет. момента



$$\vec K_A = \sum \vec\rho_k \times m_k \vec v_k$$

$$\vec r_A + \vec\rho_k = \vec r_k \;:\; \dot{\vec\rho}_k = \vec v_k - \vec v_A$$

$$\frac{d\vec K_A}{dt} = \sum \dot{\vec\rho}_k \times m\vec v_k + \sum \vec\rho_k \times m_k \dot{\vec v}_k = -\vec v_A \times \underbrace{\sum m_k \vec v_k}_{M\vec v_c = \vec Q} + \underbrace{\sum \vec\rho_k \times \vec F_k}_{\text{глав. мом. сил}}$$

$$\dot{\vec K}_A = \vec M_A - M\vec v_c \times \vec v_A$$

В частности:

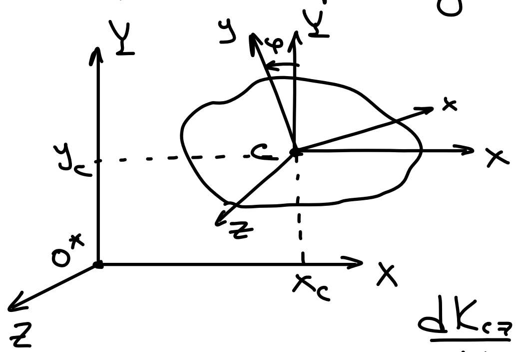
1. A неподвижен: $v_A = 0$: $\frac{dK_A}{dt} = \vec M_A^e$
2. т. A = т. C: $\frac{dK_c}{dt} = \vec M_c^e$, при этом $\vec K_c = \vec K_{c_r}$ (в Кёниговой с.к.)

Дифференциальные ур-я вр-я ТТ относ. неподв. оси

I. Вращение

$$\frac{dK_u}{dt} = M_u^e, \quad K_u = J_u\omega = J_u\dot\varphi \;:\; J_u\ddot\varphi = M_u^e(\varphi, \dot\varphi, t)$$

II. Плоско-паралл. движ.



т.о движ. ц.масс:

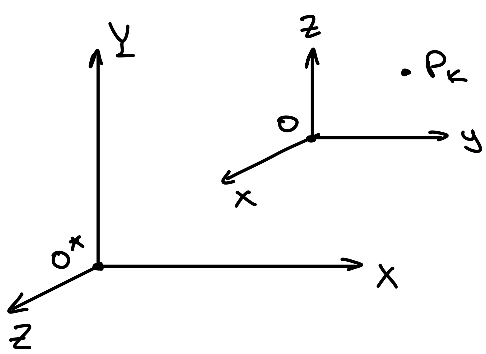
$$M\ddot x_c = F_x^e, \quad M\ddot y_c = F_y^e$$

т. об изм. кин. мом:

$$\frac{dK_{cz}}{dt} = M_{cz}^e \;:\; K_{cz} = K_{c_r} = J_{cz}\dot\varphi \;:\; J_{cz}\ddot\varphi = M_{cz}^e$$

Теорема об изм. кин. энергии

Кин. энергия системы $T := \frac{1}{2}\sum m_k \vec v_k^2$



$$\vec v_k = \vec v_o + \vec v_{k_r}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k(\vec v_o + \vec v_{k_r})^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right)v_o^2 + \left(\sum m_k \vec v_{k_r}\right)\cdot\vec v_o + \frac{1}{2}\sum m_k v_{k_r}^2$$

$$T = \frac{1}{2}Mv_o^2 + M(\vec v_o, \vec v_{c_r}) + T_r$$

В частности, теорема Кёнига для кин. эн.: $T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_r$

формулировка аналогична его т. о кин. моменте:

Кинет. момент системы относ. произв. центра складывается из момента импульса мат. точки M в т. ц. масс системы относ. данного центра и кин. момент системы относ. ц. масс (т.е. в Кёниговой с.к.)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^2 \quad : dT = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot d\vec{v}_k, \quad \vec{v}_k = \vec{v}_k(t): \quad dT = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{W}_k dt$$

$$dT = \sum_{k=1}^{N} (m_k \vec{W}_k) \cdot (\vec{v}_k dt) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \delta A_k^i + \sum_{k=1}^{N} \delta A_k^e$$

$dT = \delta A^e + \delta A^i$ – ТИКЭ в дифф. форме

$\Delta T = A^e + A^i$ – ТИКЭ в инт. форме