Ур-е Бине для грав. поля:

$$u'' + u = -\frac{F}{mc^2u^2}, \quad u = \frac{1}{r}$$

$$F = -kmu^2, \; k = GM \; : \quad u'' + u = \frac{k}{c^2} \longrightarrow u = A\cos(\varphi+\varphi_0) + \frac{k}{c^2}$$

$$u = \frac{1}{r} \; : \quad Ac^2\cos(\varphi+\varphi_0) + k = \frac{c^2}{r} \Rightarrow r(\varphi) = \frac{c^2/k}{1+\frac{Ac^2}{k}\cos(\varphi+\varphi_0)}$$

$p = c^2/k$, $e = Ac^2/k$: $r(\varphi) = \frac{p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)}$ — ур-е конического сечения

p — параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты.

$e=0$ — окружность, $0<e<1$ — эллипс, $e=1$ — парабола, $e>1$ — гипербола

I з. Кеплера:

Планеты Солн. с. движ. по эллипт. орбитам, в одном из фок. кот. Солнце.

Интеграл Лапласа

$$m\ddot{\vec r} = -\frac{GMm\vec r}{r^3} \; :$$

$\vec r^{\,2} = r^2 : 2\vec r\cdot\dot{\vec r} = 2r\cdot\dot r$

$$\begin{cases} \ddot{\vec r} = -\frac{k}{r^3}\vec r \\ \vec c = \vec r\times\dot{\vec r} \end{cases} : \quad \vec c\times\ddot{\vec r} = -\frac{k}{r^3}(\vec r\times\dot{\vec r})\times\vec r = -\frac{k}{r^3}\vec r\times(\vec r\times\dot{\vec r}) = \frac{k}{r^3}\left(\vec r\cdot\overbrace{(\vec r\cdot\dot{\vec r})}-\dot{\vec r}\cdot r^2\right) =$$

$$= -\frac{k}{r^2}(\dot{\vec r}\cdot r - \vec r\cdot\dot r) = -k\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r}{r}\right).$$

Вектор Лапласа

$$\vec c\times\ddot{\vec r} = \frac{d}{dt}(\vec c\times\dot{\vec r}) = -k\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r}{r}\right) \Rightarrow \boxed{c\cdot\vec v + k\frac{\vec r}{r} = \mathrm{Const} = -\vec f} \; (*)$$

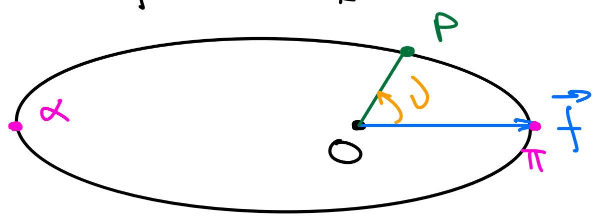
получим ур-е траектории из ур-я Лапласа:

$$(*)\cdot\vec r \; : \; (\vec c\times\vec v)\cdot\vec r + k\frac{r^2}{r} = -\vec f\cdot\vec r \; : \; \underbrace{(\vec v\times\vec r)\cdot\vec c}_{-(\vec r\times\vec v)=-\vec c} + kr = -fr\cos(\vartheta)$$

$$r\cdot k + f\cos\vartheta = c^2 \; :$$

$$r(\vartheta) = \frac{c^2}{k+f\cos\vartheta} = \frac{c^2/k}{1+f/_k\cos\vartheta} \; : \quad \begin{matrix} p = c^2/k \\ e = f/k \end{matrix}$$

Заметим, $\vartheta = 0$ — ближайшая т. траектории



ϑ — истинная аномалия
π — перицентр орбиты
α — апоцентр орбиты

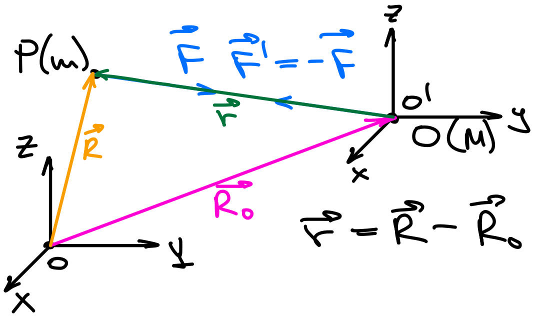
у Земли α — апогей, π — перигей; у Солнца α — афелий, π — перигелий

III закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$ — и всё

Задача двух тел

В пустоте имеются две мат. точки, взаим. по з. тяготения. Описать их движение.



$\vec r = \vec R - \vec R_0$

$$\cancel{m}\ddot{\vec R} = \vec F = -G\frac{\cancel{m}M\vec r}{r^3}, \quad \cancel{M}\ddot{\vec R}_0 = G\frac{m\cancel{M}\vec r}{r^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec r} = -\frac{\overbrace{G(M+m)}^{\mu}\vec r}{r^3} : \quad m\ddot{\vec r} = -\frac{\mu m\vec r}{r^3}$$

— относительное движение m под действием $\vec F = -\frac{\mu m\vec r}{r^3}$

Т.е. получили то же самое, но с поправкой на F. Посмотрим, как меняются ур-я, когда мы считали M неподвижной:

III з. Кеплера: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3\mu_1}{a_2^3\mu_2} = \frac{a_1^3(m_2+M)}{a_2^3(m_1+M)}$, но если $m_2, m_1 \ll M$ как в Солн. сист., то $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

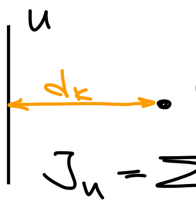
пусть система замкнута, тогда $\vec v_c = \text{const}$:

$$\vec R_c = \frac{M\vec R_0 + m(\vec R_0 + \vec r)}{M+m} \Rightarrow \vec R_0(t) \text{ и } \vec R = \vec R_0 + \vec r$$

Динамика твердого тела

Геометрия масс. Момент инерции.

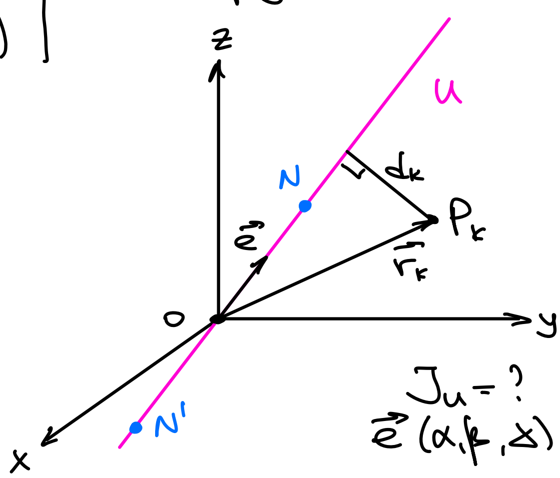
Введем ПДСК Oxyz, $P_k(x_k, y_k, z_k)$.



$J_u = \sum m_k d_k^2$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \sum m_k(y_k^2 + z_k^2) \\ J_y &= \sum m_k(x_k^2 + z_k^2) \\ J_z &= \sum m_k(x_k^2 + y_k^2) \end{aligned}\right\} \text{осевые моменты инерции}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_k x_k y_k \\ J_{xz} &= \sum m_k x_k z_k \\ J_{yz} &= \sum m_k y_k z_k \end{aligned}\right\} \text{центробежные моменты инерции}$$



$J_u = ?$
$\vec e(\alpha, \beta, \gamma)$

$$J_u = \sum m_k d_k^2 = \sum m_k(r_k^2 - (\vec r_k, \vec e)^2) =$$

$$= \sum m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k\alpha + y_k\beta + z_k\gamma)^2) =$$

$$= \sum m_k(x_k^2\overbrace{(1-\alpha^2)}^{\beta^2+\gamma^2} + y_k^2\overbrace{(1-\beta^2)}^{\alpha^2+\gamma^2} + z_k^2\overbrace{(1-\gamma^2)}^{\alpha^2+\beta^2} - 2\alpha\beta x_k y_k - 2\alpha\gamma x_k z_k - 2\beta\gamma y_k z_k)$$

$$= \alpha^2 \overbrace{\sum m_k (y_k^2+z_k^2)}^{J_x} + \beta^2 \overbrace{\sum m_k (x_k^2+z_k^2)}^{J_y} + \gamma^2 \overbrace{\sum m_k (x_k^2+y_k^2)}^{J_z} - 2\alpha\beta \overbrace{\sum m_k x_k y_k}^{J_{xy}}$$

$$- 2\alpha\gamma \overbrace{\sum m_k x_k z_k}^{J_{xz}} - 2\beta\gamma \overbrace{\sum m_k y_k z_k}^{J_{yz}} =$$

$$\alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\beta\gamma J_{yz} \quad (**)$$

Тензор инерции $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$ – зависит от с.к.!

Найдем ГМТ т. N и т. N': $ON = ON' = \frac{1}{\sqrt{J_u}}$

$\vec{ON} = \frac{1}{\sqrt{J_u}} \vec{e}$: $x = \frac{\alpha}{\sqrt{J_u}}$, $y = \frac{\beta}{\sqrt{J_u}}$, $z = \frac{\gamma}{\sqrt{J_u}}$: $\alpha = \sqrt{J_u}\, x$, $\beta = \sqrt{J_u}\, y$, $\gamma = \sqrt{J_u} \cdot z$ $\to (**)$:

$$J_u = J_u x^2 \cdot J_x + J_u \cdot y^2 \cdot J_y + J_u \cdot z^2 J_z - 2 J_u xy \cdot J_{xy} - \ldots - \ldots$$

$$1 = x^2 J_x + y^2 J_y + z^2 J_z - 2 J_{xy} xy - 2 J_{xz} xz - 2 J_{yz} yz$$ – искомое ГМТ

– поверхность 2-го порядка, она огр., т.е. ON огр., т.к. $J_u > 0$
$\Rightarrow$ это эллипсоид. Он **наз. эллипсоид инерции** системы для т. O

Если точки системы лежат на оси u' (напр. тонкий стержень). Тогда $J_{u'} = 0$. Тогда точки N бесконечно удалены $\Rightarrow$ цилиндр.

Существует процедура приведения эллипсоида к гл. осям. Гл. оси эллипсоида инерции наз. гл. осями системы для т. O.

$Oxyz \to Ox_* y_* z_*$: $J_{x_* y_*} = J_{y_* z_*} = J_{z_* x_*} = 0$; $J_{y_*} := B$, $J_{x_*} := A$, $J_{z_*} := C$.

$A x_*^2 + B y_*^2 + C z_*^2 = 1$. Если O – ц. масс, то главные центральные оси инерции и главные центральные моменты инерции. В гл. осях $\mathbb{J} = \mathrm{diag}(A, B, C)$

1. $A \neq B \neq C$ – трехосный эл. инерции – оси опр. однозначно
2. $A = B \neq C$ – ось Z – ось динамической симметрии, Oxy – экваториальная плоскость инерции, эл. инерции – эл. вращения.
3. $A = B = C$ – шаровая симметрия, эл. инерции – сфера, гл. оси – любая тройка перпенд. осей.