

---

**Лабораторная работа №4.8**  
**Резонанс напряжений**  
**Мещеряков Всеволод, Б02-001, 13.10.2021**

## **Введение**

Цель работы заключается в изучении последовательной цепи переменного тока и наблюдении резонанса напряжений. Для этого используются регулировочный автотрансформатор, катушка индуктивности с выдвижным сердечником, магазин емкостей, резисторы, амперметр, три вольтметра, ваттметр, осциллограф, универсальный мост.

## **Теоретическая справка: импеданс**

Параметры основных элементов цепи задаются их импедансами, то есть некоторыми комплексными числами. Такая условность носит название метода "комплексных амплитуд". Поймем, в чем заключается выгода такого приёма.

Рассмотрим стандартный RLC-контур, подключенный к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t$ . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе  $U_c$ , ток, идущий в контуре,  $I$ . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции плюс ЭДС источника:

$$RI + U_c = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 \cos \Omega t. \quad (1)$$

Пусть на конденсаторе заряд  $q$ , учтем зависимость от времени  $q = \int I dt$ :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \varepsilon_0 \cos \Omega t. \quad (2)$$

Решением линейного этого ДУ состоит из общего однородного решения и какого либо частного решения уравнения с учетом правой части. Для поиска этого решения используется метод комплексной амплитуды: пусть некоторая комплексная функция является решением линейного

ДУ с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции является решением этого же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть – решением уравнения с мнимой частью. Исходя из сказанного, запишем уравнение (2) в комплексной форме:

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} + \frac{\int \hat{I} dt}{C} = \hat{\varepsilon}_0 e^{i\Omega t}. \quad (3)$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}_0$  – комплексная амплитуда внешнего напряжения:  $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 e^{i\varphi}$ .

Если начальная фаза равна нулю, то  $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$ . Правая часть (2) является вещественной частью правой части (3). Будем искать решение (3) в том же виде, что и ЭДС. Тогда получим:

$$\hat{I}_0 [R + i(\Omega L - \frac{1}{\Omega C})] = \varepsilon_0. \quad (4)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, называется импедансом – это характеристика контура, не зависящая ни от токов, ни от напряжений. Выражение (4) является обобщением законом Ома для переменных токов. Действительная часть импеданса называется активным сопротивлением контура, а мнимая – реактивным сопротивлением контура или реактансом. Так импеданс индуктивности равен  $i\Omega L$ , емкости  $\frac{1}{i\Omega L}$ , сопротивления  $R$ .

Вернемся к началу выкладок и скажем, что фаза ЭДС не равна нулю:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \varphi. \quad (5)$$

Решаем аналогичные уравнения, обозначаем импеданс  $Z$ :

$$\hat{\varepsilon}_0 = Z\hat{I}_0. \quad (6)$$

Тогда получаем окончательно:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\Omega t + \varphi - \psi), \quad (7)$$

где  $\psi = \arctg \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$ .

То есть получили, что ток отстаёт от напряжения по фазе на величину  $\psi$ , определяемую отношением мнимой и действительной частью импеданса.

## Теоретическая справка: измерения

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резистора  $R$  и катушки индуктивности  $L$  с импедансом  $Z_L = r_L + i\Omega L$ , последовательно подключенных ко внешнему источнику, ЭДС которого меняется по синусоидальному закону с частотой  $\Omega$  – рисунок 1.

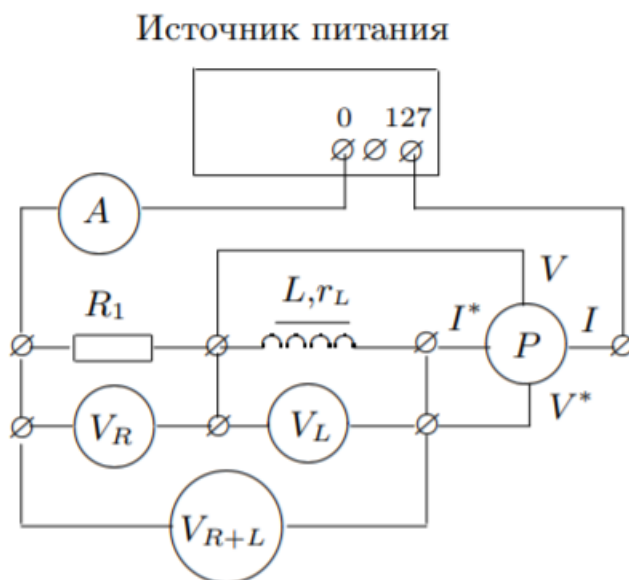


Рис. 1 — Схема экспериментальной установки для изучения закона Ома в цепи переменного тока

Обозначим через  $U_R$  напряжение на резисторе,  $U_L$  – на катушке,  $U_{R+L}$  – суммарное напряжение на катушке и на резисторе. Для них справедливы комплексные выражения:

$$\hat{U}_R = \hat{I}R, \quad \hat{U}_L = \hat{I}(r_L + i\Omega L), \quad \hat{U}_{R+L} = \hat{I}(R + r_L + i\Omega L). \quad (8)$$

Переходя к модулям и фазам токов, получаем:

$$\begin{aligned} U_R &= I \cdot R & \operatorname{tg} \psi_1 &= 0 \\ U_L &= I \sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2} & \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{\Omega L}{r_L} \\ U_{R+L} &= I \sqrt{(R + r_L)^2 + (\Omega L)^2} & \operatorname{tg} \psi_3 &= \frac{\Omega L}{R + r_L} \end{aligned}$$

Рассчитаем среднюю мощность переменного тока, выделяемую в катушке:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = I^2 r_L. \quad (9)$$

Активное сопротивление катушки  $r_L$  можем измерить, если включим катушку в последовательный контур с известными  $R$  и  $C$  – рисунок 2. В контуре, настроенном в резонанс на частоту  $\Omega$  внешнего источника (собственная частота контура и внешняя совпадают:  $\omega_0 = \Omega$ ), реактивные сопротивления индуктивности совпадают:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10)$$

Тогда, определив каким либо образом добротность контура  $Q$ , можно рассчитать полное сопротивление контура  $R_\Sigma$  в резонансе, поскольку:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma}. \quad (11)$$

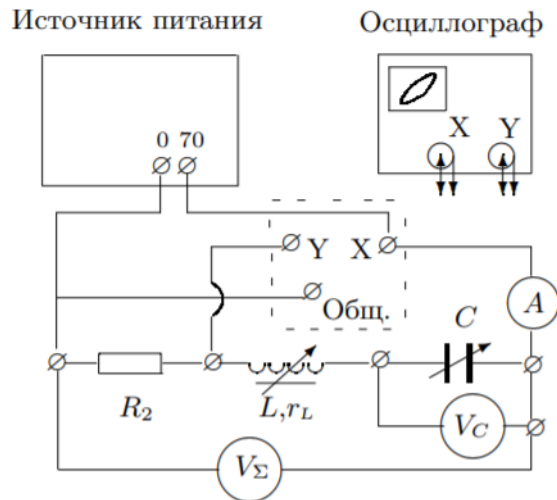


Рис. 2 — Схема установки для наблюдения резонанса напряжений

## Ход работы: закон Ома в цепи переменного тока

Подготовим к работе установку, собранную по схеме рисунка 1. Перемещая сердечник катушки малыми шагами по 0.2 мм снимем зависимость тока  $I$ , напряжений  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_{R+L}$  и мощности  $P_L$  от координаты сердечника  $x$ . Результаты отразим в таблице 1. Учтем и погрешности: класс точности используемых приборов – 0,5. То есть погрешность – 0,5% от предела измерений.

| $x$ , мм | $I$ , дел | $\sigma_I$ , дел | $U_R$ , дел | $\sigma_{U_R}$ , дел | $U_{R+L}$ , дел | $\sigma_{U_{R+L}}$ , дел | $U_L$ , дел | $\sigma_{U_L}$ , дел | $P_L$ , дел | $\sigma_{P_L}$ , дел |
|----------|-----------|------------------|-------------|----------------------|-----------------|--------------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| 5,00     | 29        | 0,01             | 63          | 1                    | 118             | 1                        | 89          | 1                    | 52          | 0,125                |
| 7,00     | 34        | 0,01             | 73          | 1                    | 116             | 1                        | 79          | 1                    | 47          | 0,125                |
| 9,00     | 36        | 0,01             | 80          | 1                    | 114             | 1                        | 71          | 1                    | 43          | 0,125                |
| 11,00    | 38        | 0,01             | 83          | 1                    | 113             | 1                        | 64          | 1                    | 40          | 0,125                |
| 13,00    | 39        | 0,01             | 87          | 1                    | 112             | 1                        | 59          | 1                    | 38          | 0,125                |
| 15,00    | 40        | 0,01             | 89          | 1                    | 111             | 1                        | 55          | 1                    | 36          | 0,125                |
| 17,00    | 41        | 0,01             | 90          | 1                    | 110             | 1                        | 52          | 1                    | 34          | 0,125                |
| 19,00    | 41        | 0,01             | 91          | 1                    | 110             | 1                        | 49          | 1                    | 33          | 0,125                |
| 21,00    | 42        | 0,01             | 92          | 1                    | 109             | 1                        | 46          | 1                    | 31          | 0,125                |

Таблица 1 — Результаты измерений до пересчёта, значения указаны в делениях приборов

Пересчитаем деления в соответствующие единицы измерения. Амперметр выставлен на максимальный ток 2.5 А, имеет 100 делений – тогда 1 деление – это 0,025 А. Вольтметры выставлены на максимальное напряжение 150 В, имеют 150 делений – тогда 1 деление – это 1 В. Ваттметр, согласно документации, показывает 1 Вт на деление. Результаты укажем в таблице 2.

| $x$ , мм | $I$ , А | $\sigma_I$ , А | $U_R$ , В | $\sigma_{U_R}$ , В | $U_{R+L}$ , В | $\sigma_{U_{R+L}}$ , В | $U_L$ , В | $\sigma_{U_L}$ , В | $P_L$ , Вт | $\sigma_{P_L}$ , Вт |
|----------|---------|----------------|-----------|--------------------|---------------|------------------------|-----------|--------------------|------------|---------------------|
| 5        | 0,73    | 0,03           | 63        | 1                  | 118           | 1                      | 89        | 1                  | 13         | 0,03                |
| 7        | 0,85    | 0,03           | 73        | 1                  | 116           | 1                      | 79        | 1                  | 12         | 0,03                |
| 9        | 0,90    | 0,03           | 80        | 1                  | 114           | 1                      | 71        | 1                  | 11         | 0,03                |
| 11       | 0,95    | 0,03           | 83        | 1                  | 113           | 1                      | 64        | 1                  | 10         | 0,03                |
| 13       | 0,98    | 0,03           | 87        | 1                  | 112           | 1                      | 59        | 1                  | 10         | 0,03                |
| 15       | 1,00    | 0,03           | 89        | 1                  | 111           | 1                      | 55        | 1                  | 9          | 0,03                |
| 17       | 1,03    | 0,03           | 90        | 1                  | 110           | 1                      | 52        | 1                  | 9          | 0,03                |
| 19       | 1,03    | 0,03           | 91        | 1                  | 110           | 1                      | 49        | 1                  | 8          | 0,03                |
| 21       | 1,05    | 0,03           | 92        | 1                  | 109           | 1                      | 46        | 1                  | 8          | 0,03                |

Таблица 2 — Результаты измерений после пересчёта, значения указаны в соответствующих единицах измерения

По формуле для  $U_L$  из (8) и формуле (9) рассчитаем  $r_L$  и  $L$  для каждого  $x$ . Оценим погрешности:  $\sigma_x = 0,5\text{мм}$ ,  $\sigma_{r_L}$  как косвенное измерение через погрешности  $P$  и  $I$ . Результаты отразим в таблицах 3 и 4, по ним построим графики на рисунках 3 и 4.

Оценка погрешностей в этой работе несет условный характер, так как провода и клеммы вносят неоценимый вклад. Для реактивного сопротивления удалось провести оценку, но для индуктивности адекватной оценки провести не удалось.

| $x$ , мм | $\sigma_x$ , мм | $r_l$ , Ом | $\sigma_{r_l}$ , Ом |
|----------|-----------------|------------|---------------------|
| 5        | 0,5             | 12,37      | 2,13                |
| 7        | 0,5             | 8,13       | 1,20                |
| 9        | 0,5             | 6,64       | 0,92                |
| 11       | 0,5             | 5,54       | 0,73                |
| 13       | 0,5             | 5,00       | 0,64                |
| 15       | 0,5             | 4,50       | 0,56                |
| 17       | 0,5             | 4,05       | 0,49                |
| 19       | 0,5             | 3,93       | 0,48                |
| 21       | 0,5             | 3,51       | 0,42                |

Таблица 3 — Точки для графика зависимости  $r_L(x)$

| $x$ , мм | $\sigma_x$ , мм | $L$ , Гн |
|----------|-----------------|----------|
| 5        | 0,5             | 0,39     |
| 7        | 0,5             | 0,29     |
| 9        | 0,5             | 0,25     |
| 11       | 0,5             | 0,21     |
| 13       | 0,5             | 0,19     |
| 15       | 0,5             | 0,17     |
| 17       | 0,5             | 0,16     |
| 19       | 0,5             | 0,15     |
| 21       | 0,5             | 0,14     |

Таблица 4 — Точки для графика зависимости  $L(x)$

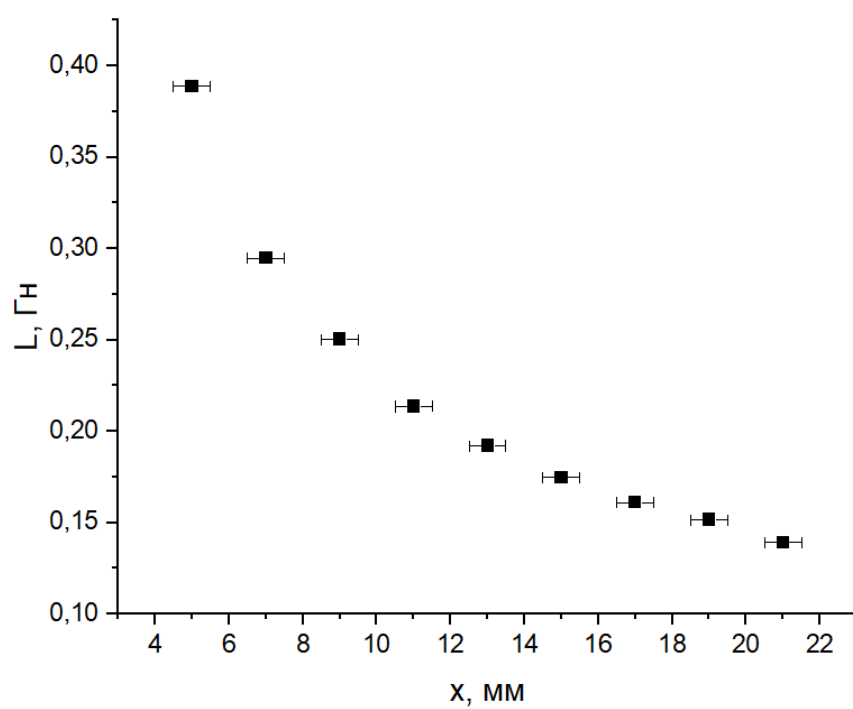


Рис. 3 — График зависимости  $r_L(x)$

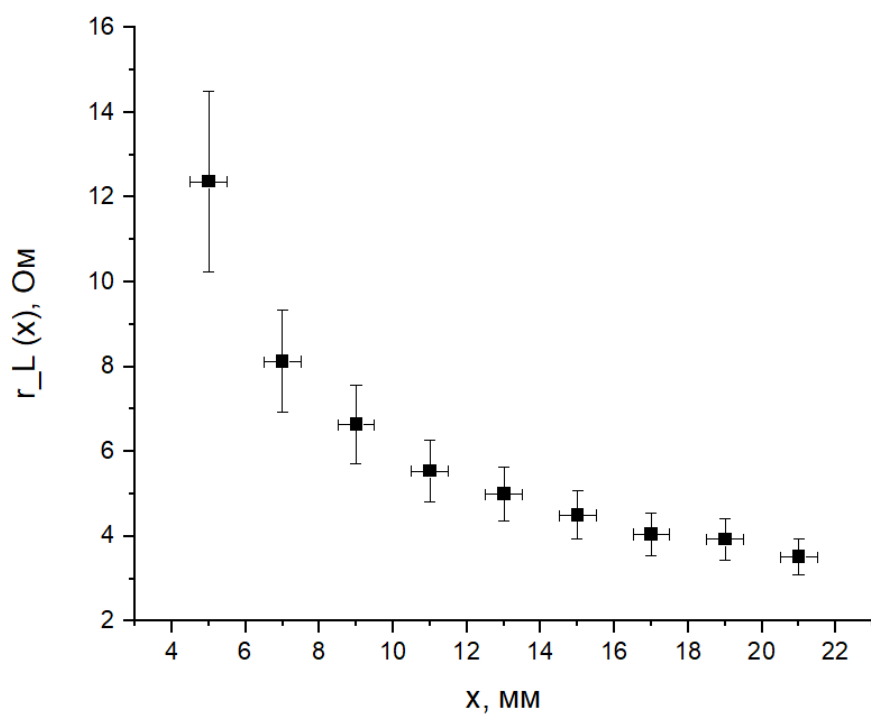


Рис. 4 — График зависимости  $L(x)$