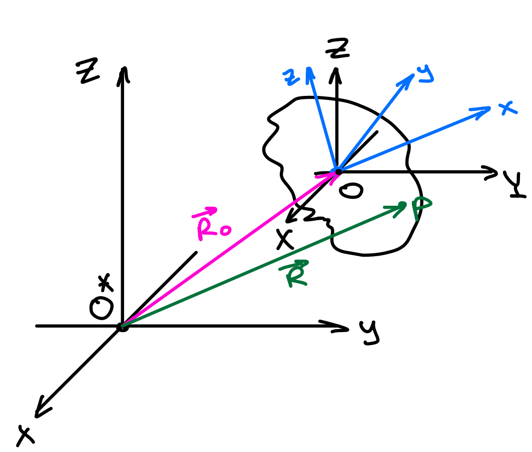
Кинематика твердого тела



O^*XYZ — неподвижная с.к (абсолютная)

O — $\forall$ т. тела — полюс

$OXYZ$ — поступательно движ. с.к.

$Oxyz$ — связанная (с телом) с.к.

$\vec R = \vec{OP} + \vec R_0$, $\vec{OP} = \left[\begin{array}{l}\vec\rho \text{ (в } Oxyz)\\ \vec r \text{ (в } OXYZ \text{ в пост.)}\end{array}\right]$

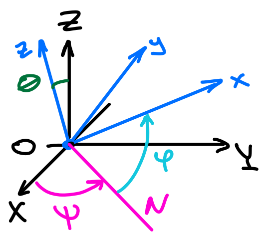
$\vec r = A\cdot\vec\rho$, где A — матр. пер. от $OXYZ \to Oxyz$

т.к. тело твердое, то $\vec\rho = const$,

$\vec R(t) = \vec R_0(t) + A(t)\vec\rho$, A: ортогональна $A^{-1} = A^T$, т.к. переход от ОНБ к ОНБ.

A: матрица поворота, 9 элементов, из них 3 ЛНЗ.

Углы Эйлера:



$\hat\theta = \angle(OZ, Oz)$ — угол нутации

линия узлов $ON = OXY \cap Oxy$

$\hat\psi = \angle(OX, ON)$ — угол прецессии

$\hat\varphi = \angle(ON, Ox)$ — угол собств. вращения

Переход от $OXYZ$ к $Oxyz$ через 3 поворота:

$OXYZ \xrightarrow{\psi} OX_1Y_1Z$, A_1, $OX_1 = ON$ на рисунке.

$OX_1Y_1Z \xrightarrow{\theta} OX_1Y_2z$, A_2

$OX_1Y_2z \xrightarrow{\varphi} Oxyz$. A_3

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = A_1A_2A_3$

Скорости точек твердого тела

$\vec R = \vec R_0 + A\vec\rho$ (1)

Теорема

Существует единственный $\vec\omega$ наз. вектором угловой скорости тв. тела, при помощи которого скорость любой т. тела:

$\vec v = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec r$, где $\vec v_0$ — скорость полюса; выбор полюса не влияет на $\vec\omega$.

Δ:

$\vec r = A\cdot\vec\rho$

$$\frac{d}{dt}(1):\quad \frac{d\vec R}{dt} = \frac{d\vec R_0}{dt} + \dot A\cdot\vec\rho + A\cdot\cancelto{0}{\dot{\vec\rho}} \Rightarrow \vec v_0 + \dot A\vec\rho = \vec v = \vec v_0 + \dot A\cdot A^{-1}\vec r$$

докажем $\dot A\cdot A^{-1}$ кососимметричная: $A\cdot A^{-1} = E \Rightarrow A\cdot A^T = E \,\Big|\, \frac{d}{dt}:\ \dot A\cdot A^T + A\cdot\dot A^T = 0$

$\Rightarrow \dot A\cdot A^{-1} = -A\cdot\dot A^T \Rightarrow A^{-1^T}\cdot\dot A^T = -\dot A\cdot A^T \Rightarrow (\dot A A^{-1})^T = -\dot A A^T$, т.е. кососимметричная

$$\dot A A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},\quad \vec r = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot A A^{-1}\vec r = \begin{pmatrix} \omega_y Z - \omega_z Y \\ \omega_z X - \omega_x Z \\ \omega_x Y - \omega_y X \end{pmatrix} = \vec\omega\times\vec r$$

т.е. $\vec v = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec r$ — формула Эйлера

Пока что доказали только существование. Теперь единственность и инвариантность.

Пусть $\exists\ \vec\omega_1, \vec\omega_2$ для т. O: тогда $\vec v = \vec v_0 + \vec\omega_1\times\vec r = \vec v_0 + \vec\omega_2\times\vec r \Rightarrow (\vec\omega_1 - \vec\omega_2)\times\vec r = 0$

в силу произвольности $\vec r$ $\quad\vec\omega_1 = \vec\omega_2$.

Пусть для O_1: $\vec\omega_1$, для O_2: $\vec\omega_2$: $\quad\vec v = \vec v_{O_1} + \vec\omega_1\times\overrightarrow{O_1P} = \vec v_{O_2} + \vec\omega_2\times\overrightarrow{O_2P}$,

$\vec v_{O_2} = \vec v_{O_1} + \vec\omega_1\times\overrightarrow{O_1O_2} + \vec\omega_2\times\overrightarrow{O_2P} \Rightarrow \vec\omega_1\times(\overrightarrow{O_1P} - \overrightarrow{O_1O_2}) = \vec\omega_2\times\overrightarrow{O_2P} \Rightarrow \vec\omega_1 = \vec\omega_2$

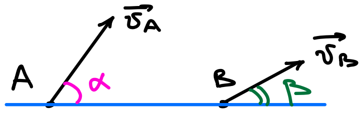
Замечание

1. $\vec v = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec r$; $\vec v_0$ — поступ., $\vec\omega\times\vec r$ — вращ.

2. $\vec R = \vec R_0 + \vec r \Rightarrow \vec v = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec r$, т.е. в частном случае $\dot{\vec r} = \vec\omega\times\vec r$

Свойства проекций скоростей точек твердого тела

1. В любой момент движения проекции скоростей любых двух точек тв. тела на прямую, соед. эти точки, равны:



$\vec v_B = \vec v_A + \vec\omega\times\overrightarrow{AB} \;\Big|\cdot\overrightarrow{AB}$

$\vec v_B\cdot\overrightarrow{AB} = \vec v_A\cdot\overrightarrow{AB} + \cancelto{0}{(\vec\omega\times\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}}$:

$v_A\cdot AB\cdot\cos\alpha = v_B\cdot AB\cdot\cos\beta \Rightarrow \vec v_{B_{AB}} = \vec v_{A_{AB}}$.

Ускорение

$$\vec v = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec r \quad : \quad \vec W = \underbrace{\vec W_0}_{\text{ускор. полюса}} + \overset{\text{угловое ускорение ТТ}}{\dot{\vec\omega}}\times\vec r + \vec\omega\times\overset{\vec\omega\times\vec r}{\dot{\vec r}} = \vec W_0 + \overbrace{\vec\varepsilon\times\vec r}^{\text{вращательное ускорение}} + \underbrace{\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)}_{\text{осестремительное ускорение}}$$

$\vec W = \vec W_0 + \vec W_{вр} + \vec W_{ос}$ — формула Ривальса

О мгновенном кинематическом состоянии ТТ

1. $\vec\omega = 0 \Rightarrow \vec\varepsilon = 0 \Rightarrow$ тело совершает поступательное движение

2. $\exists$ ось: $v = 0 \Rightarrow$ тело вращается вокруг этой оси (оси вращения)

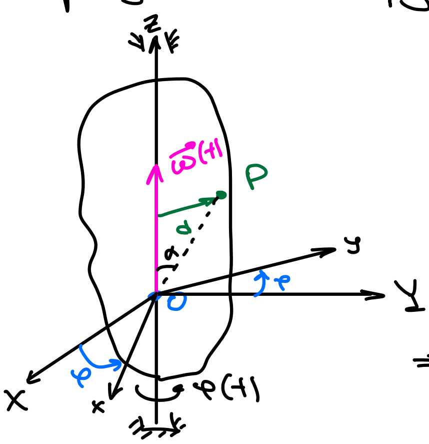
3. Винтовое движение — совокупность поступат. движ. и вращ. движ. вдоль поступ.

1'. Если в данный момент времени $\vec\omega = 0$, $\vec v = const$ и тело совершает мгновенно-поступ. движ. $\vec\varepsilon \neq 0$, поэтому в след. момент не обяз. поступ.

2'. В данный момент $\exists$ ось: $v = 0 \Rightarrow$ тело вращ. вокруг нее (мгнов. оси вр.)

3'. Мгновенное винт. движ. — совокупность мгн. пост. движ. и мгн. вр. вокруг оси, идущей по ск. поступ. движ.

Вращение ТТ вокруг неподвижной оси



$$OXYZ \xrightarrow[A:]{\varphi} OxyZ \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot A A^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cdot\dot\varphi & -\cos\varphi\cdot\dot\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cdot\dot\varphi & -\sin\varphi\cdot\dot\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot\varphi & \overset{\omega_y}{0} \\ \overset{\omega_z}{\dot\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\omega_x}{0} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\vec\omega = (0, 0, \dot\varphi)^T$ — направлен по оси вращения

$\vec\varepsilon = (0, 0, \ddot\varphi)^T$ — направлен по оси вращения

тогда $\forall P$: $\vec v_P = \cancel{\vec v_0}^{\,0} + \vec\omega\times\vec{OP}$: $v_P = \omega\times OP\cdot\sin\alpha$: $\vec W_P = \cancel{\vec W_0}^{\,0} + \vec\varepsilon\times\vec{OP} + \vec\omega\times(\overbrace{\vec\omega\times\vec{OP}}^{\vec v_P})$

$\Rightarrow W_{вращ} = \varepsilon d = W_\tau$, $W_{ос} = \omega\cdot v_P = \omega^2 d = W_n$, но для других типов движения это не так.