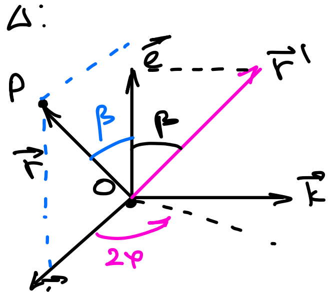
Теорема 2 (Теорема Эйлера о конечном повороте)

Произв. полож. ТТ с неподвижн. точкой может быть получено из нач. полож. путем одного поворота вокруг оси, задав. ед. вектором $\vec e = \frac{\vec\lambda}{|\vec\lambda|}$ на угол $\theta = 2\arccos\lambda_0$, где $\Lambda = \lambda_0 + \vec\lambda$ — норм. кват., задающий ориент. ТТ.

Δ:



$\vec r \subset O\vec e\vec j$: $\vec r = (\cos\beta\,\vec e + \sin\beta\,\vec j)|\vec r|$

$\vec r \to \vec r\,' = \Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda$, $\Lambda = \lambda_0 + \vec\lambda$ — норм. кват.

$\Lambda = \cos\varphi + \vec e\sin\varphi$: $\vec r\,' = \Lambda\cdot(\cos\beta + e\sin\beta)\cdot\hat\Lambda\cdot|\vec r|$

$\vec e, \vec j, \vec k$ — прав. тр. $\vec e = \cos\frac{\pi}{2} + \vec e\sin\frac{\pi}{2}$, $\tilde\Lambda = \cos\varphi - \vec e\sin\varphi = \cos(-\varphi) + \vec e\sin(-\varphi)$

по св-ву перемнож. кватерн. с коллинеарн. вект. частями:

$\Lambda\circ\vec e\circ\hat\Lambda = |\Lambda|\cdot|\vec e|\cdot|\hat\Lambda|\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\varphi\right) + \vec e\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\varphi\right)\right) = \vec e$

$\tilde\Lambda\circ\vec j\circ\hat\Lambda = (\cos\varphi + \vec e\sin\varphi)\circ\vec j\circ(\cos\varphi - \vec e\sin\varphi) = (\cos\varphi\,\vec j + \sin\varphi\,\underbrace{\vec e\circ\vec j}_{=\vec e\times\vec j - \cancel{(\vec e,\vec j)}^{0} = \vec k})(\cos\varphi - \vec e\sin\varphi) =$

$= \cos^2\varphi\,\vec j - \cos\varphi\sin\varphi\,\underbrace{\vec j\circ\vec e}_{=-\vec k} + \sin\varphi\cos\varphi\,\vec k - \sin^2\varphi\,\vec k\circ\vec e = \cos2\varphi\,\vec j + \sin2\varphi\cdot\vec k$

$\vec r\,' = |\vec r|\cdot(\cos\beta\,\vec e + \sin\beta(\cos2\varphi\,\vec j + \sin2\varphi\,\vec k))$

$|\vec r|\cos\beta\,\vec e$ — ост. без изм.

$|\vec r|\sin\beta(\cos2\varphi\,\vec j + \sin2\varphi\,\vec k)$ — осущ. поворот на угол $2\varphi = 2\cdot(\arccos\lambda_0)$ вокруг $\vec e = \vec\lambda/|\vec\lambda|$ ∎

Кватернионная формула сложения поворотов

Пусть ТТ совершила 2 поворота: $\underset{(\vec i_k)}{I} \xrightarrow{\Lambda} \underset{(\vec i\,'_k)}{I'} \xrightarrow{M} \underset{(\vec i\,''_k)}{I''}$. $I \xrightarrow{N} III$. N - ?

$\vec r\,'' = M\circ\vec r\,'\circ\tilde M = M\circ\Lambda\circ\vec r\circ\tilde\Lambda\circ\hat M = N\circ\vec r\circ\tilde N \Rightarrow N = M\circ\Lambda$

Для случая n поворотов $\Lambda = \Lambda_n\circ\ldots\circ\Lambda_1$. — Формула ОК, если все в одном базисе!!!

Такие параметры кват. наз. Родрига-Гамильтона!

$\Lambda = \lambda_0 + \sum_1^3 \lambda_k^*\vec i_k$, $M = \mu_0 + \sum_1^3 \mu_k^*\vec i\,'_k$, $N = \nu_0 + \sum_1^3 \nu_k^*\vec i_k$

$\lambda_k^*, \mu_k^*, \nu_k^*$ — параметры Р-Г.

$M\circ\Lambda = (\mu_0 + \sum_1^3 \mu_k^*\vec i\,'_k)\circ\Lambda = (\mu_0 + \sum_1^3 \mu_k^*(\Lambda\circ\vec i_k\circ\hat\Lambda))\circ\Lambda = \mu_0\Lambda + \sum_1^3 \mu_k^*\,\Lambda\circ\vec i_k\circ\cancel{\tilde\Lambda\circ\Lambda}^{1} =$

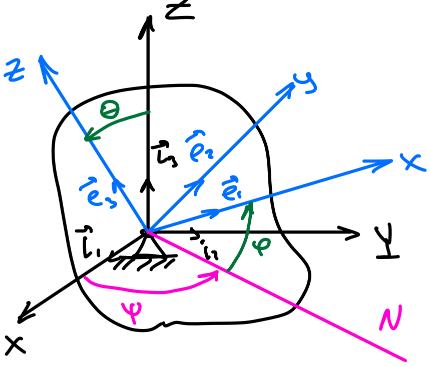
$M\circ\Lambda = \Lambda\circ(\mu_0 + \sum_1^3 \mu_k^*\vec i_k)$ ← в скобках M^* — собств. кватернион $= \Lambda\circ M^* = N$

Опр

Собств. кват — кват., у кот. компоненты — парам. Г–М., а базисные векторы — базисные векторы исход. неподвижн базиса I.

$\Rightarrow N^* = \Lambda^* \circ M^*$ — в прямом порядке, в одном базисе. Для n поворотов то же самое.

Углы Эйлера



$$I \xrightarrow[\text{на } \psi]{\text{вокруг } \vec{i}_3} I' \xrightarrow[\substack{\text{на } \theta \\ (\vec{i}_3 = \vec{e}_3)}]{\text{вокруг } \vec{i}_1} I'' \xrightarrow[\text{на } \varphi]{\text{вокруг } \vec{i}_1} E$$

$$\Lambda_1 = \cos\frac{\psi}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\psi}{2}, \quad \Lambda_2 = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{i}_1 \sin\frac{\theta}{2}, \quad \Lambda_3 = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}$$

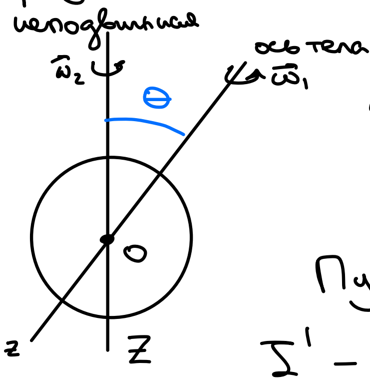
$$\Lambda_1 = \Lambda_1^*, \quad \Lambda_2^* = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{i}_1 \sin\frac{\theta}{2}, \quad \Lambda_3^* = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda = \Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \Lambda_3^* = \ldots = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3 :$$

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\psi+\varphi}{2} \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\psi-\varphi}{2} \qquad \lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\psi-\varphi}{2} \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\psi+\varphi}{2}$$

— поворот на угол $2 \arccos \lambda_0$ вокруг вектора $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Прецессия



θ — угол нутации; если $\theta = const$ — прецессионное движ.

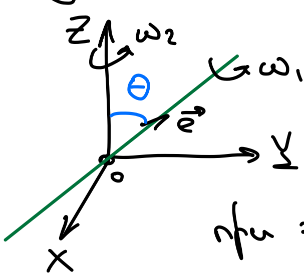
ω_1 — угл. ск. собств. вращ., ω_2 — угл. ск. прецессии.

если $\theta, \omega_1, \omega_2 = const$, то прецессия регулярная

Пусть $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$. $I \to I' \to E$

I' — вращ. вместе с Oz вокруг OZ с $\omega_2(t)$.

Пусть при $t=0$: $E = I$



Первый поворот на $\psi(t) = \int_0^t \omega_2(u)du$: $\Lambda_1^* = \cos\frac{\psi(t)}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\psi(t)}{2}$

Второй поворот на $\varphi(t) = \int_0^t \omega_1(u)du$: $\Lambda_2 = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \vec{e} \sin\frac{\varphi(t)}{2}$,

при этом $\vec{e} = \cos\theta\, \vec{i}'_3 + \sin\theta\, \vec{i}'_2$: $\Lambda_2 = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + (\cos\theta\, \vec{i}'_3 + \sin\theta\, \vec{i}'_2) \sin\frac{\varphi(t)}{2}$

$$\Lambda_2^* = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} (\cos\theta\, \vec{i}_3 + \sin\theta\, \vec{i}_2)$$

$$\Lambda = \Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* = (\ldots) \circ (\ldots) = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3$$

Уравнение Пуассона. Угловая ск. ТТ.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\Lambda(t)"'] \arrow[rr, bend right, "\Lambda(t+\Delta t)"'] & E(t) \arrow[r, "\delta\Lambda(t+\Delta t)"'] & E(t+\Delta t) \end{tikzcd} \quad : \quad \Lambda(t+\Delta t) = \delta\Lambda(t+\Delta t)\circ\Lambda(t)$$

$$\delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \vec{e}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1 + \vec{e}\frac{\Delta\varphi}{2} \quad :$$

$$\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t) = \delta\Lambda\cdot\Lambda - \Lambda \approx \left(1+\vec{e}\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\Lambda - \Lambda = \frac{1}{2}\Delta\varphi\,\vec{e}\circ\Lambda \Rightarrow \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{e}\circ\Lambda \ :$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\circ\Lambda \text{ — ур-е Пуассона}$$

$$2\dot{\Lambda}\circ\tilde{\Lambda} = \vec{\omega}$$

Докажем, что $\vec{\omega}$ — такие, что и вводилась ранее.

$$\vec{e}_k = \Lambda\circ\vec{i}_k\circ\tilde{\Lambda} \quad (k=1,2,3): \quad \dot{\vec{e}}_k = \dot{\Lambda}\circ\vec{i}_k\circ\tilde{\Lambda} + \Lambda\circ\vec{i}_k\circ\dot{\tilde{\Lambda}}$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\circ\Lambda, \quad \dot{\tilde{\Lambda}} = \widetilde{\frac{1}{2}\vec{\omega}\circ\Lambda} = \tilde{\Lambda}\circ\tilde{\vec{\omega}}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}\circ\vec{\omega} \ :$$

$$\dot{\vec{e}}_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\circ\overbrace{\Lambda\circ\vec{i}_k\circ\tilde{\Lambda}}^{\vec{e}_k} - \frac{1}{2}\overbrace{\Lambda\circ\vec{i}_k\circ\tilde{\Lambda}}^{\vec{e}_k}\circ\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\omega}\circ\vec{e}_k - \vec{e}_k\circ\vec{\omega}) = \vec{\omega}\times\vec{e}_k \text{ — совпало!}$$