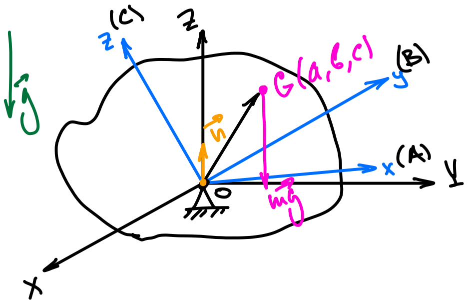
Дифференциальные ур-я движения тяжелого тела с неподвижной точкой



$\vec{OG}=(a,b,c)$ в $Oxyz$, $\vec{n}\uparrow\uparrow OZ$:

$\vec{n}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$: $\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi$ $\gamma_2=\sin\theta\cos\varphi$ $\gamma_3=\cos\theta$

$|\vec{n}|=1$, $\vec{n}=const$: $\frac{d\vec{n}}{dt}=0=\frac{\tilde{d}\vec{n}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{n}$: $\frac{\tilde{d}\vec{n}}{dt}=\vec{n}\times\vec{\omega}$

→ ур-е Пуассона
$$\begin{cases}\dot\gamma_1=\gamma_2 r-\gamma_3 q\\ \dot\gamma_2=\gamma_3 p-\gamma_1 r\\ \dot\gamma_3=\gamma_1 q-\gamma_2 p\end{cases}\quad(2)$$

$\vec{M}_O^e=\vec{M}_O(m\vec{g})=\vec{OG}\times m\vec{g}=mg\,\vec{n}\times\vec{OG}$:

$$\begin{cases}A\dot p+(C-B)qr=mg(\gamma_2 c-\gamma_3 b)\\ B\dot q+(A-C)pr=mg(\gamma_3 a-\gamma_1 c)\\ C\dot r+(B-A)pq=mg(\gamma_1 b-\gamma_2 a)\end{cases}\quad(3).$$

(2)+(3) — ур-я Эйлера-Пуассона

Первые интегралы:

1. Геометрический $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$.
2. $\vec{M}^e_{OZ}=0$: $K_{OZ}=const$, т.е. $(\vec{K}_O,\vec{n})=const$: $Ap\gamma_1+Bq\gamma_2+Cr\gamma_3=const$
3. Энергия $E=T+\Pi=const$

   $\Pi=mgz_G=mg(\vec{OG},\vec{n})=mg(a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3)$

   $E=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+mg(a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3)=const$.

3 случая интегрируемости

1. Случай Эйлера:

   тело произвольно, ц.м. неподвижен $(a=b=c=0)$.

2. Случай Лагранжа:

   $A=B$, ц.м. $\in$ оси дин. симметрии $(a=b=0,\ c\neq 0)$

   – из 3-го дин. ур-я $\Rightarrow$ $r=r_0=const$ – 4-ый необходимый интеграл

3. Случай Ковалевской:

   $A=B=2C$, ц.м. $\in$ экватор. пл. инерции $(c=0)$

Случай Лагранжа движения т.т. с неподв. точкой

$A=B$; $a=b=0,\ c\neq 0$; $r=r_0=\text{const}$; $K_{Oz}=A(\overbrace{p\gamma_1+q\gamma_2}^{*})+Cr_0\gamma_3=\text{const}$

$*:\ (\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\cancel{\dot\theta\cos\varphi})\sin\theta\sin\varphi+(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\cancel{\dot\theta\sin\varphi})\sin\theta\cos\varphi=\dot\psi\sin^2\theta$

$\Rightarrow K_{Oz}=A\dot\psi\sin^2\theta+Cr_0\cos\theta=A\alpha=\text{const}\ \Rightarrow\ \dot\psi=\dfrac{\alpha-\overset{\beta}{\frac{Cr_0}{A}}\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\alpha-\beta\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$r=r_0=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi=\frac{A}{C}\beta\ \Rightarrow\ \dot\varphi=\frac{A}{C}\beta-\frac{\alpha-\beta\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta$

$E=\frac12 A(\underline{p^2+q^2})+\frac12 Cr_0^2+mgc\cos\theta$

$\frac12 A(\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)+mgc\cos\theta=h=\text{const}$:

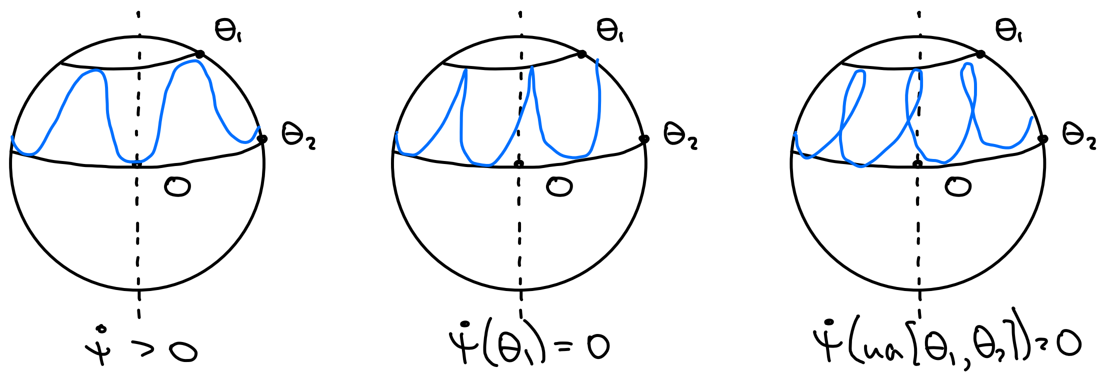
$\frac12 A\dot\theta^2+\frac12 A\frac{(\alpha-\beta\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}+mgc\cos\theta=h$: квадратура

$\dot\theta^2=f(\theta,\alpha,\beta,h)$ – обл. доп. движ. $f>0$: $\dfrac{d\theta}{\sqrt{f(\theta,\alpha,\beta,h)}}=\pm dt$: $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta,\alpha,\beta,h)}}=\pm(t-t_0)$.

геометрическая интерпретация:

Сфера Пуассона – ед. сфера с ц. в неподв. точке тела.

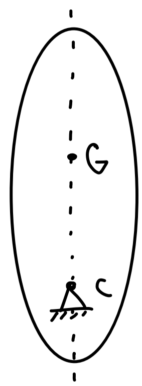
Апекс — т. пересечения оси динам. симм. со сферой.



Знаю $\theta(t)$: $\psi(t)=\int\ldots$ $\varphi(t)=\int\ldots$

Частные решения движения

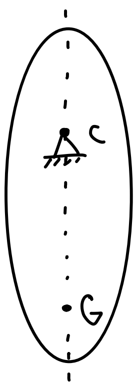
1. Равновесие



$\theta=0$

перевернутый волчок Лагранжа

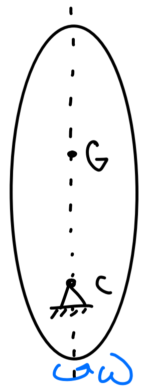
неустойчивое



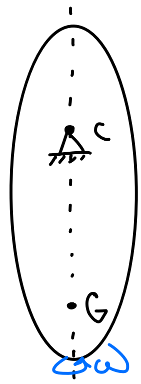
$\theta=\pi$

устойчивое

2. Стационарное вращение при $\theta = 0$ и π



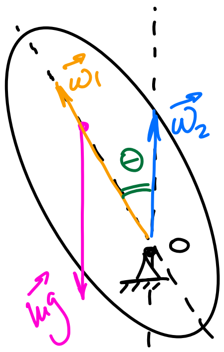
ω = const:
$p = q = 0$
$r = \omega = \text{const}$



ω = const:
$p = q = 0$
$r = \omega = \text{const}$

3. Регулярная прецессия в сл. Лагранжа

$$\vec{M}_O^e = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 \left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right] = \vec{OG} \times m\vec{g}$$



$$\omega_2\omega_1 \cancel{\sin\theta}(\dots) = cmg\sin(\pi-\theta) = cmg\cancel{\sin\theta}, \quad \theta \neq 0$$

$$\omega_2\omega_1\left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right] = cmg:$$

$$(C-A)\cos\theta\cdot\omega_2^2 + C\omega_1\cdot\omega_2 - mgc = 0$$

$\rightarrow$ 2 реш / 1 реш / 0 реш

В частном случае $\omega_1 = 0$: стационарное вращение

$(C-A)\omega_2^2\cos\theta = mgc$, $c > 0$: $(C-A)\cos\theta > 0$.

Других случаев стационарного вращения нет.

Лагранжева механика

Связи. Классификация связей

$\{P_k\}_{k=1}^N$ – система. Называется свободной, если скорости и положения точек могут быть произвольными.

Ограничения на положение/скорость, кот. должны сохраняться ∀ внешних силах, называются связями.

Соотношение связи $f(\vec{r}, \vec{v}, t) \geq 0$ (1)

1. В (1) „=" — удерживающая
2. В (1) „>" и „=" - неудерживающая
3. В (1) нет $\vec{v}$ — геометрическая
4. В(1) есть $\vec{v}$ — дифференциальная (интегрируемая/неинтегрируемая)

Напомним:

геом. связи $f_\alpha(\vec{r}_k, t) = 0$, $\alpha = \overline{1, r}$ (2)

дифф. неинтегр. связи $\sum\limits_{k=1}^{N} \vec{a}_{\beta k} \cdot \vec{v}_k + a_\beta = 0$, $\beta = \overline{1, s}$ (3)

(2) $\not\ni t$ — стационарные; (3) стационарные, если $\frac{\partial \vec{a}_{\beta k}}{\partial t} = 0$ и $a_\beta = 0$

Геометрическая связь наз. стационарной, если $f'_t = 0$

Система склерономная, если либо свободна, либо стационарные связи. Реономная, если есть нестационарная связь.

Возможные, действительные и виртуальные перемещения.

Возможные перемещения

$t = t^*$, $\vec{r}_k = \vec{r}_k^*$ удовл (2); возможные скорости $\vec{v} = \vec{v}_k^*$ удовл

$(2)': \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} \cdot \vec{v}_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$, $\alpha = \overline{1, r}$; $\sum \vec{a}_{\beta k} \cdot \vec{v}_k + a_\beta = 0$, $\beta = \overline{1, s}$.

возможные $\vec{w}_k^*$: ур-е $(2)'$ и (3) дифференцированием.

возможные перемещения: $t = t^*$, $\vec{r}_k = \vec{r}_k^*$, $\vec{v}_k = \vec{v}_k^*$, $\vec{w} = \vec{w}_k^*$

$t = t^* + \Delta t$: $\vec{r}_k(t^* + \Delta t) - \vec{r}_k^*(t^*) = \vec{v}_k^* \Delta t + \frac{1}{2} \vec{w}_k^* \Delta t^2 + \ldots \approx \vec{v}_k^* \Delta t = \underbrace{\Delta \vec{r}_k}_{\text{возможное перемещение}}$

$$(4) \begin{cases} \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} \Delta \vec{r}_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0 \\ \sum \vec{a}_{\beta k} \Delta \vec{r}_k + a_\beta \Delta t = 0 \end{cases}$$
— беск. много решений

Действительное перемещение

$t = t^*$: $\vec{r}_k^*, \vec{v}_k^*, \vec{w}_k^*$ + д.у. движения (силы), нач. усл $\Rightarrow$ интегрируем.

$\Rightarrow \vec{r}_k(t^* + dt) - \vec{r}_k^*(t^*) = \vec{v}_k^* \Delta t + \frac{1}{2} \vec{w}_k^* \Delta t^2 + \ldots \approx \vec{v}_k^* \, t = d\vec{r}_k$ — единственное решение.

Виртуальное перемещение

Возможные перемещения при замороженных связях: $\delta \vec{r}_k$

Для систем со стац. связями виртуальные совпадают с возможными.

В (4) $dt = 0$: $\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k = 0$ и $\sum \vec{a}_{\beta k} \delta \vec{r}_k = 0$