Corso di Laurea in Informatica

Architettura degli Elaboratori B – Laboratorio turno 2

Docente: Claudio Schifanella

Esercitazione 6:

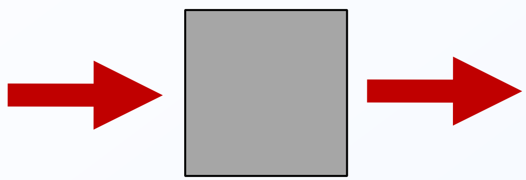
algebra booleana e circuiti combinatori

Circuiti digitali

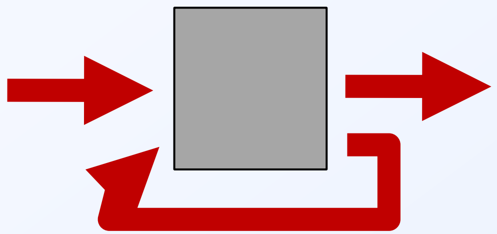
- I dispositivi di livello 0 di un calcolatore si chiamano **circuiti digitali** e utilizzano **solo due valori logici**:

  0 (segnale tra 0 e 1 volt) e 1 (segnale tra 2 e 5 volt).

- Un circuito digitale trasforma segnali (binari) di ingresso $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nei segnali (binari) di uscita $z_1, z_2, \ldots, z_m$.
- I circuiti sono detti **combinatori** quando l'uscita è funzione esclusivamente dell'ingresso; sono detti **sequenziali** quando l'uscita è funzione oltre che dell'ingresso anche di uno *stato*.



Circuito combinatorio

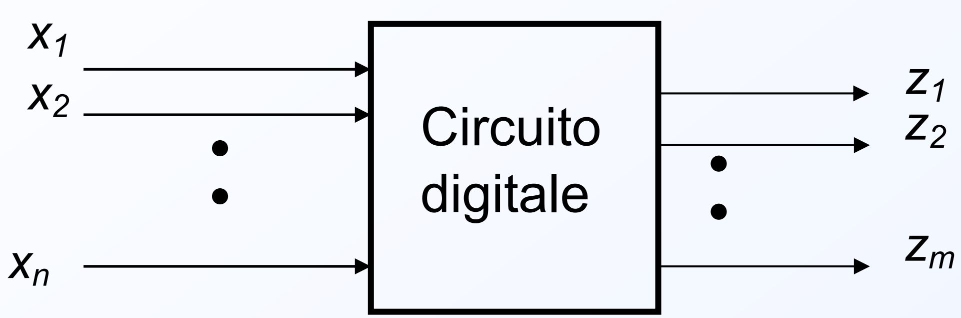


Circuito sequenziale

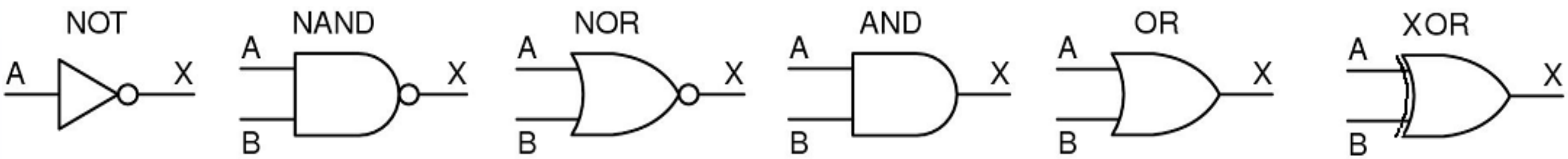
Circuiti Combinatori

Un circuito è detto **combinatorio** quando la sua uscita è funzione esclusivamente dell'ingresso, quindi ogni uscita z_i è una funzione booleana degli ingressi $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$z_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



Porte Logiche



A	X
0	1
1	0

(a)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b)

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(c)

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(d)

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(e)

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(f)

Regole di equivalenza

Name	AND form	OR form
Identity law	$1A = A$	$0 + A = A$
Null law	$0A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotent law	$AA = A$	$A + A = A$
Inverse law	$A\overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
Commutative law	$AB = BA$	$A + B = B + A$
Associative law	$(AB)C = A(BC)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributive law	$A + BC = (A + B)(A + C)$	$A(B + C) = AB + AC$
Absorption law	$A(A + B) = A$	$A + AB = A$
De Morgan's law	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

Algebra Booleana: forme canoniche

- Formula normale disgiuntiva (FND):
  - Sommatoria di termini ciascuno dei quali è una produttoria di ***letterali*** costituiti da nomi di variabili di ingresso o da negazioni dei nomi di variabili di ingresso
  - È ***minimale*** quando, applicando le proprietà algebriche di equivalenza non è possibile ottenere una FND equivalente contenente un numero di letterali inferiore
- Formula normale congiuntiva (FNC)
  - Concetto "duale" del precedente ossia è una produttoria di termini ciascuno dei quali è una sommatoria di ***letterali*** costituiti da nomi di variabili di ingresso o da negazioni di nomi di variabili di ingresso

Esercizio 1

Derivare la formula logica in forma normale disgiuntiva, semplificarla e disegnare il circuito corrispondente alla tabella di verità

W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Esercizio 1

W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Esercizio 1

W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$F = \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}xyz +$$

$$+ w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}yz + wx\bar{y}z +$$

$$+ wxy\bar{z} + wxyz =$$

$$= \bar{w}\bar{y}z\cancel{(\bar{x}+x)}^{1} + \bar{w}xy\cancel{(\bar{z}+z)}^{1} + w\bar{x}y\cancel{(z+\bar{z})}^{1} +$$

$$+ w\bar{y}z\cancel{(x+\bar{x})}^{1} + wxy\cancel{(z+\bar{z})}^{1} =$$

$$= xy\cancel{(\bar{w}+w)} + \bar{y}z\cancel{(w+\bar{w})} + w\bar{x}y =$$

$$= (xy + wxy) + \bar{y}z + w\bar{x}y =$$

$$= wy\cancel{(x+\bar{x})} + xy + \bar{y}z = wy + xy + \bar{y}z$$

$$xy = (xy + xyw)$$

x	y	w	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

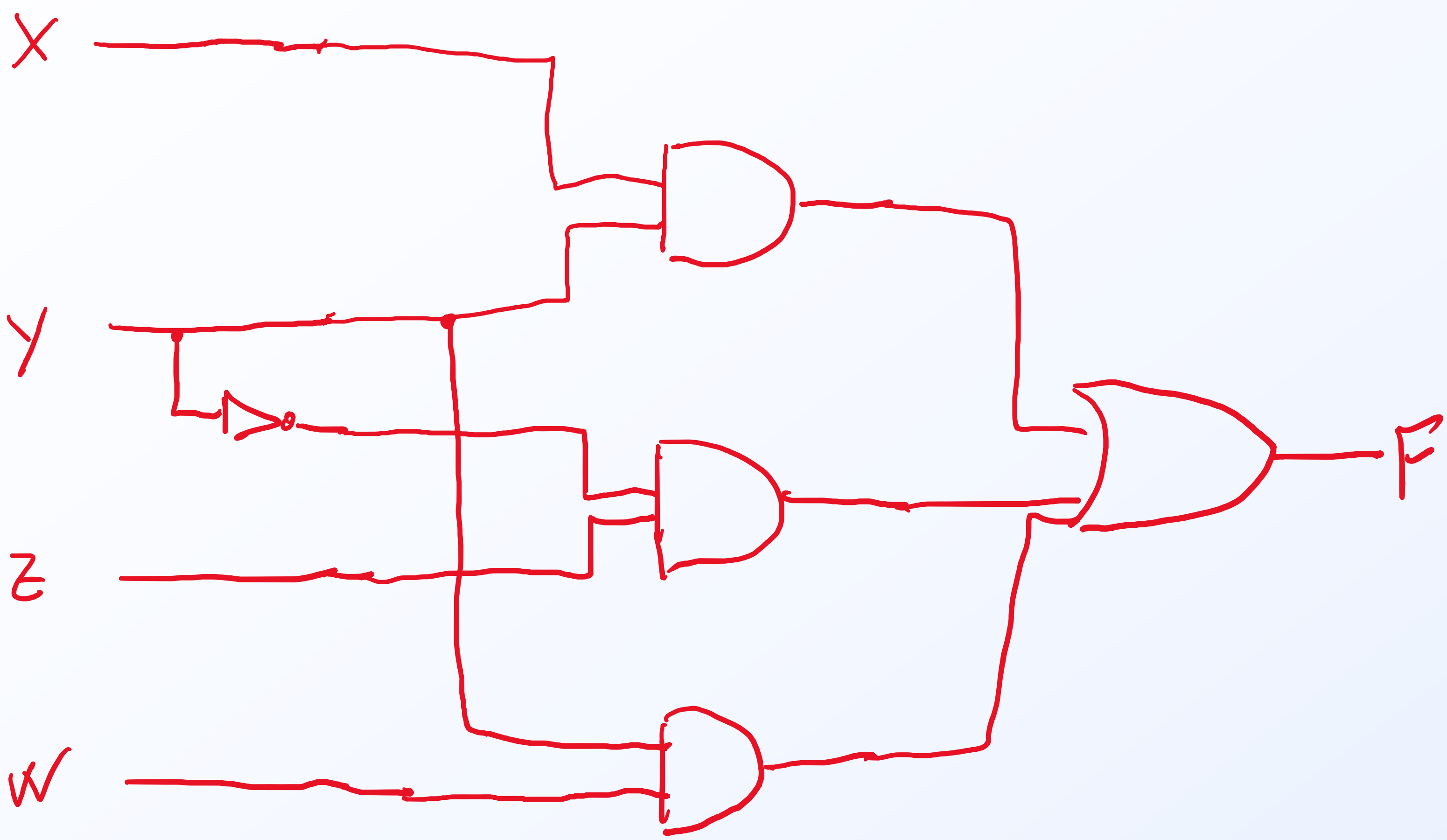
Esercizio 1

W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Esercizio 1

$XY + \bar{Y}Z + WY$



Esercizio 2

Derivare la tabella di verità, forma normale disgiuntiva (DNF) e circuito dell'espressione

$$F = (A + B)\bar{C}(\bar{B} + C)$$

Esercizio 2

Derivare la tabella di verità, forma normale disgiuntiva (DNF) e circuito dell'espressione

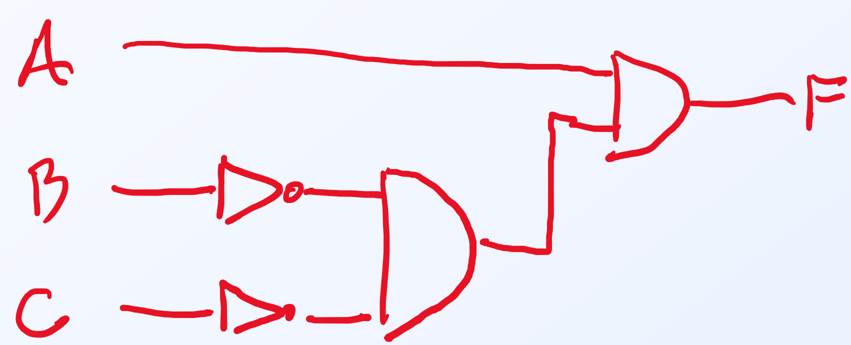
$$F = (A+B)\bar{C}(\bar{B}+C) = A\bar{B}\bar{C}$$

A	B	C	(A+B)	$(\bar{B}+C)$	$\bar{C}$	F
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0

$$(A+B)(\bar{B}\bar{C} + \cancel{C\bar{C}}) =$$

$$= A\bar{B}\bar{C} + \cancel{B\bar{B}\bar{C}} =$$

$$= A\bar{B}\bar{C}$$



Esercizio 3

Tabella di verità e circuito per $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

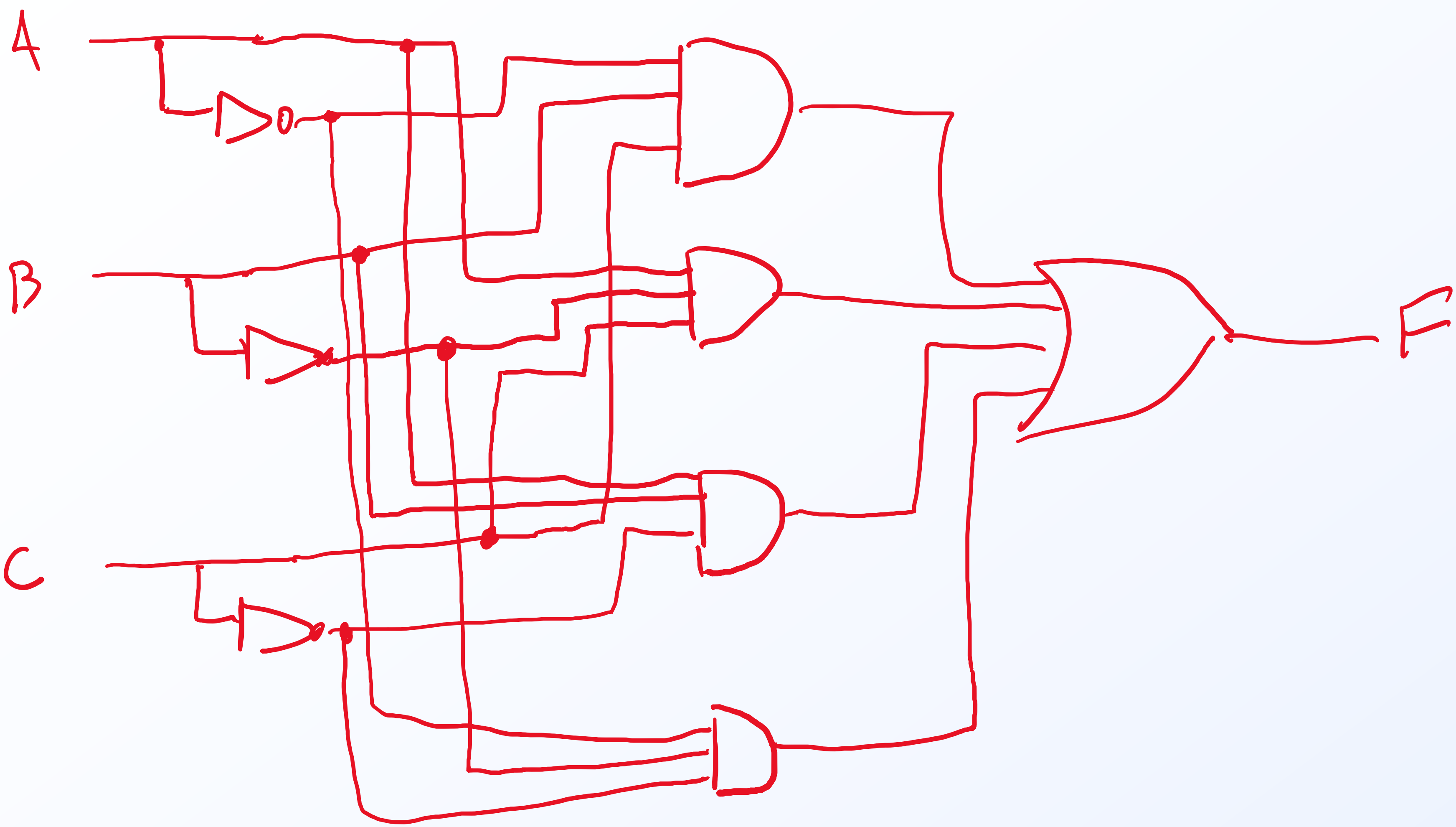
Esercizio 3

Tabella di verità e circuito per $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

A	B	C	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	F
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

Esercizio 3

Tabella di verità e circuito per $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$



Esercizio 4

Dimostrare che $\overline{(AB + \bar{A}C)} = A\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$

Esercizio 4

Dimostrare che $\overline{(AB+\bar{A}C)} = A\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$

$$\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}$$

$$\overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}$$

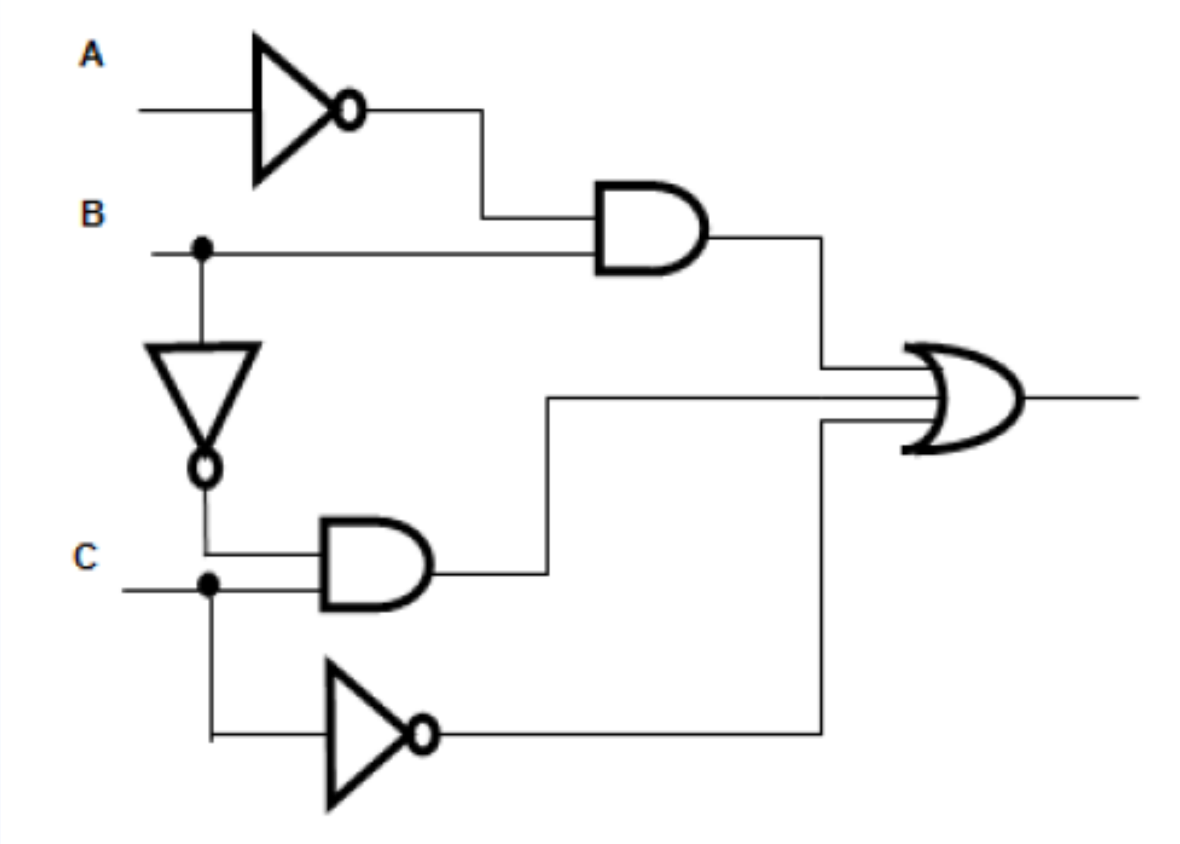
$$\overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}C} = (\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{\bar{A}}+\bar{C}) =$$

$$= \cancel{\bar{A}A} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B}\bar{C} =$$

$$= A\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$

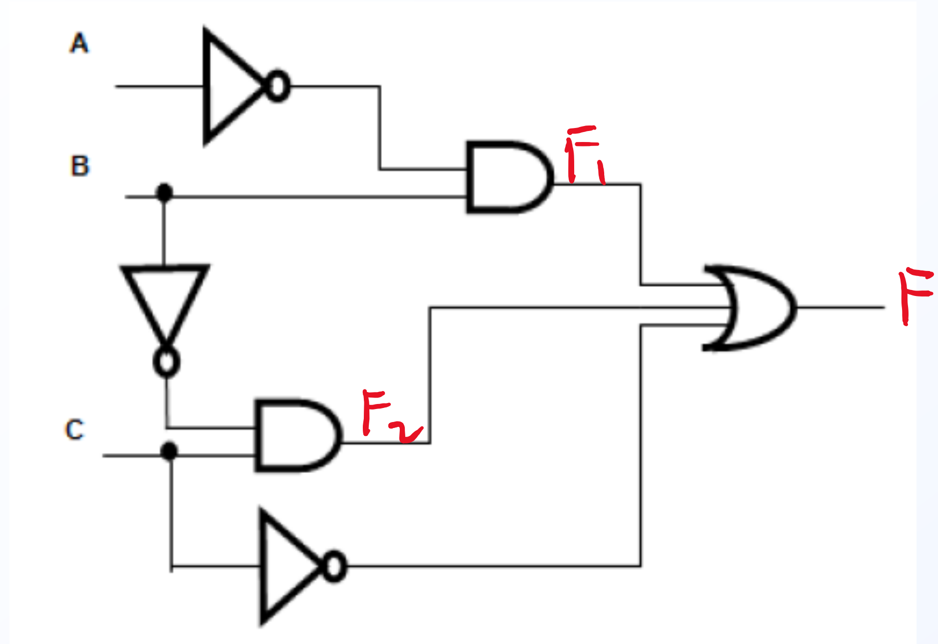
Esercizio 5

Derivare la tavola di verità per



Esercizio 5

Derivare la tavola di verità per



$\overline{A}B$ $\quad$ $\overline{B}C$

A	B	C	F_1	F_2	$\overline{C}$	F
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

$$F = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{ABC}$$

Esercizio 6

Costruire la tabella di verità ed un circuito combinatorio a due entrate I_1 e I_0 e quattro uscite O_3, O_2, O_1, e O_0 tale che dato in input un numero X codificato in binario puro su due bit: $(I_1; I_0)$ produca in output il suo quadrato $Y = X^2$ codificato sempre in binario puro su quattro bit $(O_3; O_2; O_1; O_0)$.

Es6

Costruire la tabella di verità ed un circuito combinatorio a due entrate I_1 e I_0 e quattro uscite O_3, O_2, O_1, e O_0 tale che dato in input un numero X codificato in binario puro su due bit: $(I_1; I_0)$ produca in output il suo quadrato $Y = X^2$ codificato sempre in binario puro su quattro bit $(O_3; O_2; O_1; O_0)$.

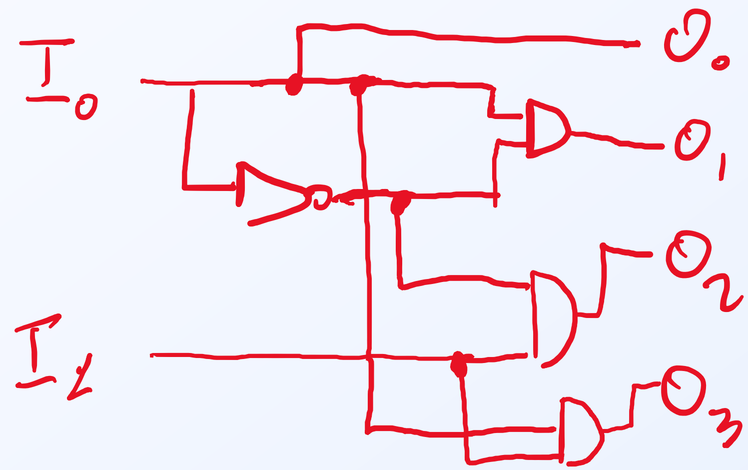
X	I_1	I_0	O_3	O_2	O_1	O_0	Y
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1
2	1	0	0	1	0	0	4
3	1	1	1	0	0	1	9

$O_3 = I_0 I_1$

$O_2 = \overline{I_0} I_1$

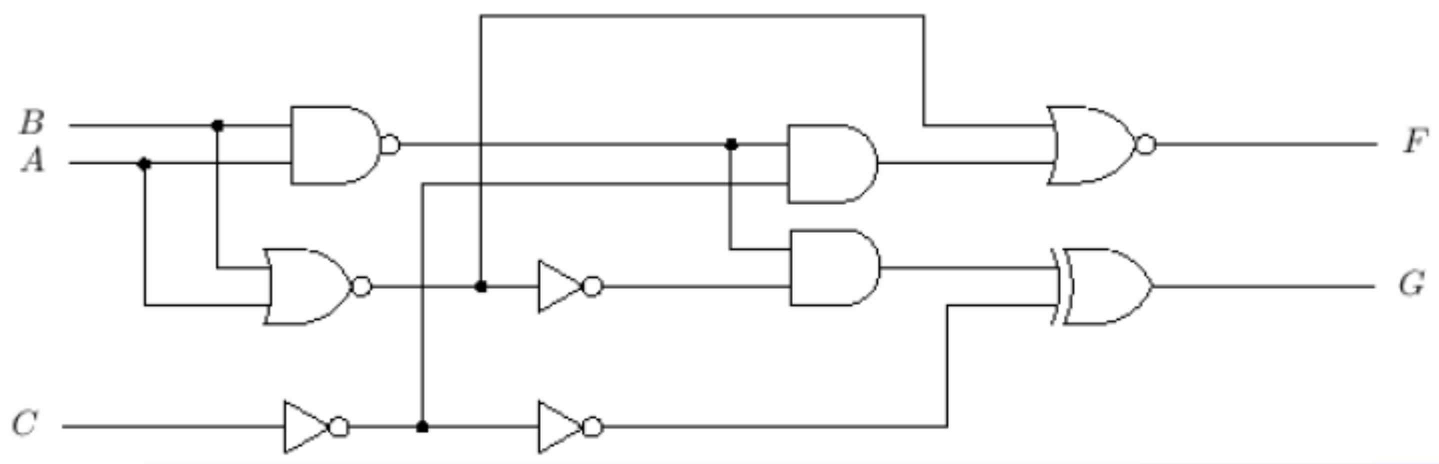
$O_1 = 0$

$O_0 = \overline{I_1} \cdot I_0 + I_1 \cdot I_0 = I_0$



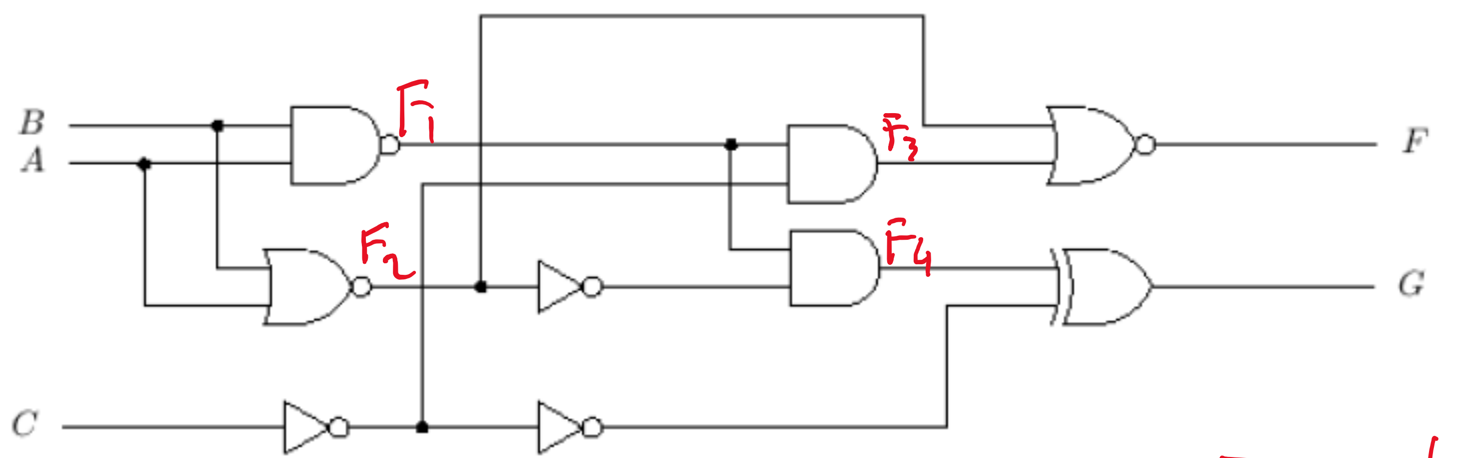
es7

Determinare le espressioni per F e G e dire quale funzione implementa il circuito



es7

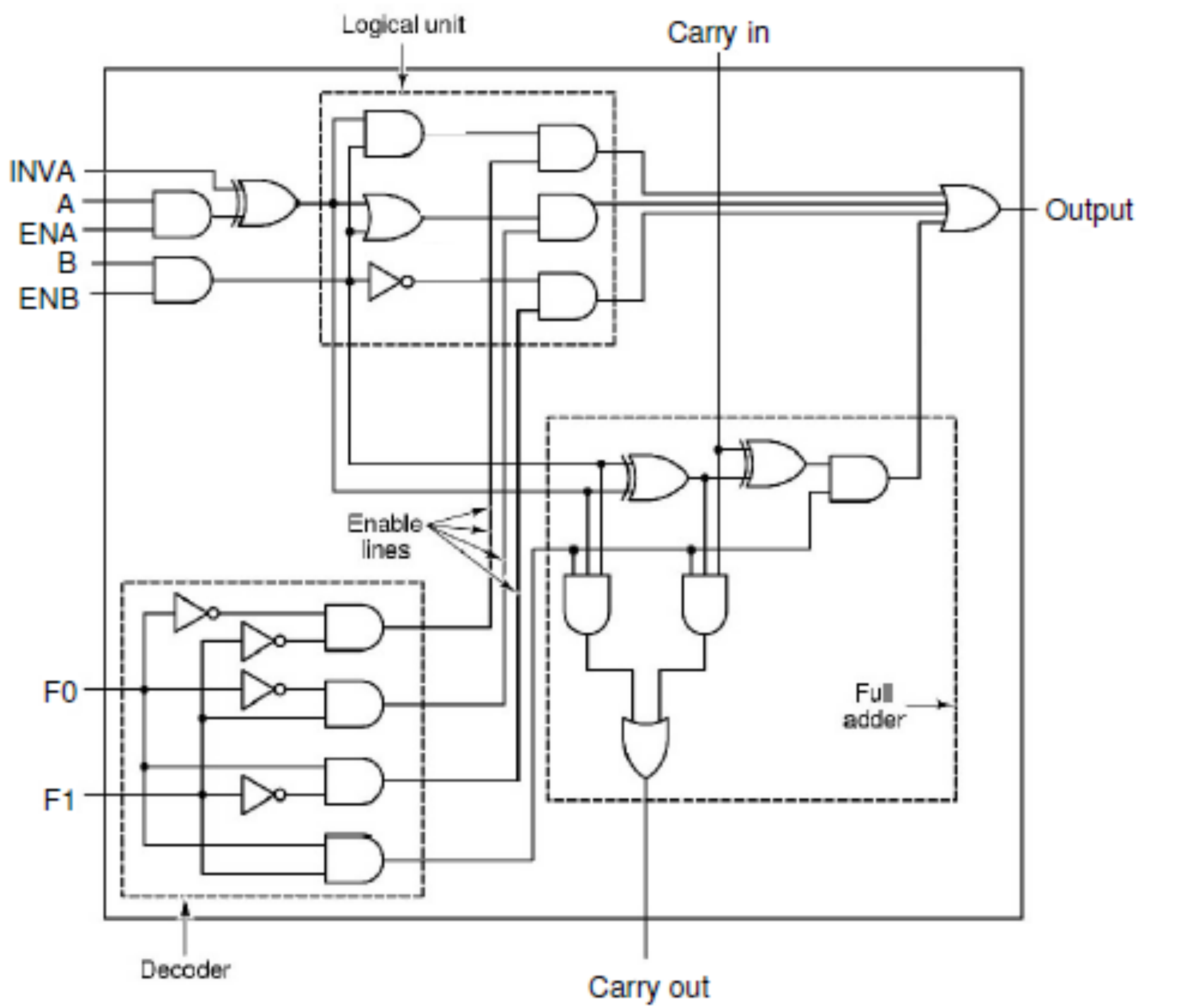
Determinare le espressioni per F e G e dire quale funzione implementa il circuito



A	B	C	$\overline{A \cdot B}$ F_1	$\overline{A+B}$ F_2	$F_1 \cdot \overline{C}$ F_3	$F_1 \overline{F_2}$ F_4	$\overline{F_3+F_2}$ F	$F_4 \oplus C$ G
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1

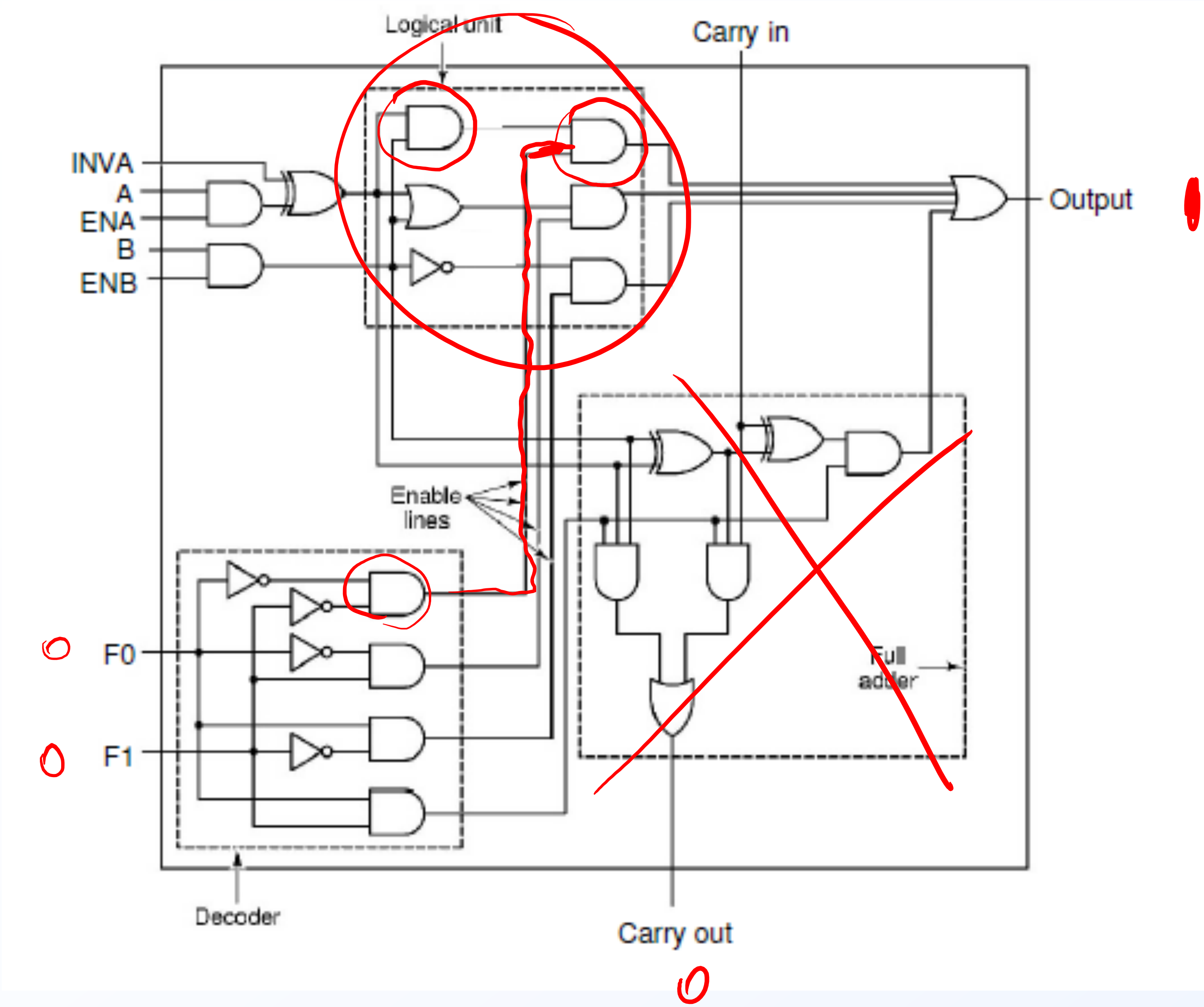
es8

Si consideri l'ALU ad un bit riportata in Figura, dire quali sono i valori riportati in output in *Carry out* e *Output* dal circuito per gli input $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $ENA = 1$, $ENB = 1$, $INVA = 0$, Carry in $= 0$, $A = 1$ e $B = 1$. Qual' è la funzione calcolata?



es8

Si consideri l'ALU ad un bit riportata in Figura, dire quali sono i valori riportati in output in *Carry out* e *Output* dal circuito per gli input $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $ENA = 1$, $ENB = 1$, $INVA = 0$, Carry in $= 0$, $A = 1$ e $B = 1$. Qual' è la funzione calcolata?



es9 Progettare un dispositivo di allarme

Si vuole progettare una rete combinatoria che funga da controllore per un sistema di allarme. Tre ingressi provengono da altrettanti sensori, che rilevano la presenza di estranei in tre siti distinti. Esiste poi un quarto ingresso, proveniente da un interruttore, tramite il quale si controlla l'attivazione dell'intero sistema di allarme. Due uscite sono collegate ad altrettanti dispositivi che producono un segnale sonoro.

- Il primo dispositivo deve emettere un suono se in almeno due siti è presente un estraneo.
- Il secondo dispositivo deve emettere un suono se in almeno in un sito è presente un estraneo.

Costruire una rete combinatoria che soddisfi le specifiche di cui sopra usando le tabelle di ve-

es9 Progettare un dispositivo di allarme

- Il primo dispositivo deve emettere un suono se in almeno due siti è presente un estraneo.
- Il secondo dispositivo deve emettere un suono se in almeno in un sito è presente un estrane

S_1	S_2	S_3	A	U_1	U_2
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$$U_1 = \bar{S}_1 S_2 S_3 A + S_1 \bar{S}_2 S_3 A + S_1 S_2 \bar{S}_3 A + S_1 S_2 S_3 A =$$

$$= \bar{S}_1 S_2 S_3 A + S_1 \bar{S}_2 S_3 A + S_1 S_2 A =$$

$$= A\left(\bar{S}_1 S_2 S_3 + S_1 \bar{S}_2 S_3 + S_1 S_2\right)$$

$$U_2 = A\left(S_1 + S_2 + S_3\right)$$