1 Alfabeto, Stringhe, Linguaggi

1.1 Alfabeto

Un Alfabeto è un **insieme finito** di elementi detti **simboli** o **caratteri**.
La **cardinalità** è il numero di simboli dell'alfabet.

1.2 Stringhe

La **stringa vuota** è indicata con ϵ.

1.2.1 Operazioni sulle stringhe

Concatenazione Il simbolo è il punto (.) tra stringhe:
"nano.tecnologie" diventa "nanotecnologie".

Riflessione Consiste nello scrivere una stringa al contrario, ovvero invertire l'ordine dei suoi simboli (caratteri).
x^R denota la riflessione della stringa x.
La riflessione della concatenazione di due stringhe è la concatenazione inversa delle loro riflessioni:
$(xy)^R = y^R x^R$

Potenza m-esima La potenza della stringa x è al concatenazione di se stessa m volte.
La **potenza** ha la **precedenza** sul concatenamento:
$abbc^3 = abbccc$

1.3 Linguaggi

1.3.1 Operazioni sui linguaggi

Unione

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ or \ x \in B\}$$

Concatenazione Il concatenamento di due linguaggi L_1 ed L_2 (notazione L_1L_2) è l'insieme ottenuto concatenando in **tutti i modi possibili**

le stringhe di L_1 con le stringhe di L_2.

$$L_1L_2 = \{x \mid x = yz \ \& \ y \in L_1 \ \& \ z \in L_2\}$$

$\{ab, abc\}\{ab, aa, cb\} = \{abab, abaa, abcb, abcab, abcaa, abccb\}$

Star

$$A* = \{x_1x_2x_3 \dots x_k \mid k \geq 0 \ and \ ogni \ x_i \in A\}$$

2 Automi finiti ed Espressioni regolari

2.1 Automi finiti

2.1.1 DFA - Automa Finito Deterministico

È una quintupla:

$$A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$$

Q è un insieme finito di **stati**.

Σ è un alfabeto finito (**simboli in input**).

δ è una funzione di transizione $Q \times \Sigma \implies Q$

$q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**.

F è l'insieme degli **stati finali**.
La funzione di transizione δ si può estendere alle stringhe:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \implies Q$$

Definizione:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$
$$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

Il linguaggio riconosciuto (o accettato) da A è:

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

I linguaggi riconosciuiti (o accettati) da AUTOMI A STATI FINITI sono chiamati *linguaggi regolari.*

Esempio:

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, aabbc) &= \delta(\hat{\delta})q_0, aabb), c) \\
&= \delta(\delta(\hat{\delta})q_0, aab), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\hat{\delta})q_0, aa), b), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\hat{\delta})q_0, a), a), b), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\hat{\delta})q_0, \epsilon), a), a), b), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(q_0, a), a), b), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, a), b), b), c) \\
&= \delta(\delta(\delta(q_0, b), b), c) \\
&= \delta(\delta(q_1, b), c) \\
&= \delta(q_1, c) = q_3
\end{aligned}
$$

2.1.2 NFA - Automa Finito Non-Deterministico

È una quintupla:

$$A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$$

Q è un insieme finito di **stati**.

Σ è un alfabeto finito (**simboli in input**).

δ è una funzione di transizione $Q \times \Sigma \implies 2^Q$

$q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**.

F è l'insieme degli **stati finali**.

Per semplicità possiamo estendere la definizione della funzione di transizione agli insiemi di stati:

$$\delta(\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}, a) = \bigcup \{\delta(r_i, a) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$$

La funzione di transizione δ si può estendere alle stringhe:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \implies 2^Q$$

Definizione:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$$
$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(r, a) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

2.2 Conversione da NFA a DFA

2.2.1 Esempio 1

NFA:

	0	1
A	B	∅
B	B	B

DFA:

	0	1
A	B	C
B	B	B
C	C	C

C è lo stato morto, siccome il DFA non accetta ∅.
C viene inserito nella colonna degli stati perché per ogni stato possibile il DFA richiede un input.

2.2.2 Esempio 2

NFA:

	0	1
A	{A}	{A,B}
B	∅	∅

DFA:

	0	1
A	{A}	{A,B}
AB	A∪∅ = {A}	{AB}

AB è uno stato singolo.
AB invece di mettere B perché B non può essere raggiunto da nessuno degli stati precedenti.
Nella riga di AB, colonna degli stati, faccio l'unione di A e B per ogni input.

2.2.3 Esempio 3

NFA:

	a	b
$\Longrightarrow$ A	{A,B}	{C}
B	{A}	{B}
C	-	{A,B}

DFA:

	0	1
A	AB	C
AB	AB	CB
BC	A	AB
C	D	AB
D	D	D

BC e C sono stati finali perché sono quelli che contengono la C, che è lo stato finale dell'NFA.

2.3 Espressioni Regolari

Una espressione regolare è un modo *dichiarativo* per descrivere un linguaggio regolare (ne fornisce una descrizione algebrica).
Esempio: 01 + 10
Un **Linguaggio regolare** su un alfabeto Σ è un linguaggio che può essere espresso mediante:

- Chiusura ($*$)
- Concatenazione (.)
- Unione (+)

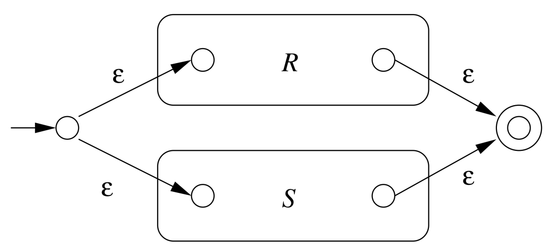
Esempi:

- $ab + bca$ **denota l'insieme** $\{ab, bca\}$
- ab^* **denota l'insieme** $\{abn|n \geq 0\}$

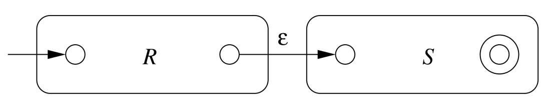
- $(ab)^+ + bca$ **denota l'insieme** $\{bca\} \cup (ab)n|n > 0$
- $(aa)^*$ **denota l'insieme** $\{a2n|n \geq 0\}$
- $(aa)^*a$ **denota l'insieme** $\{a2n + 1|n \geq 0\}$
- $(a + b + (cc)^*)^*$ **denota l'insieme** $\ldots$ (esercizio!)
- $1(0 + 1)^* + 0$ **denota i numeri binari**

2.3.1 Da espressione regolare ad automa

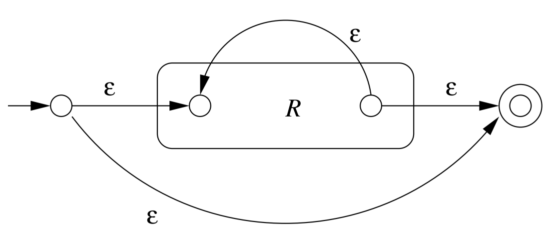
Unione



Concatenazione



Chiusura



2.3.2 Pumping Lemma

Sia L un linguaggio regolare.
Allora $\exists n$, che dipende solo dal linguaggio, tale che $\forall w \in L,\ |w| \geq n, w$ si può scrivere come la concatenazione di tre sottostringhe xyz tali che:

$$y \neq \epsilon$$
$$|xy| \leq n$$
$$\forall k \geq 0,\ xy^kz \in L$$

3 Grammatiche

3.1 Derivazioni di una Grammatica

La Grammatica è una quadrupla (V, T, P, S):

- V: insieme delle **variabili** o **non terminali**
- T: insieme dei **terminali**
- P: insieme delle **produzioni** o **regole di riscrittura**
- S: il simbolo **iniziale** o **assioma**. Da questo si parte, e con le regole, si generano le stringhe che formeranno il linguaggio.

Seguendo queste regole si generano delle stringhe che formano un linguaggio.

Esempio Consideriamo le seguente grammatica G_1

$$G_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \implies aAb, aA \implies aaAb, A \implies \epsilon\})$$

$$\begin{aligned} S &\implies \underline{aA}b \\ &\implies a\underline{aA}bb \\ &\implies aa\underline{aA}bbb \\ &\implies aaabbb \end{aligned}$$

3.2 Grammatiche Context-Free

La Grammatica Context-Free è una quadrupla (V, Σ, P, S):

- V: insieme delle **variabili** o **non terminali**
- Σ: insieme dei **terminali**
- P: insieme delle **produzioni** o **regole di riscrittura**
- S: il simbolo **iniziale** o **assioma**. Da questo si parte, e con le regole, si generano le stringhe che formeranno il linguaggio.

La **quadrupla** contiene queste regole che, seguite, generano delle stringhe.
L'insieme di queste **stringhe** formano il **linguaggio** L generato dalla grammatica G:

$$L(G)$$

3.3 Alberi Sintattici

Un albero è un **albero sintattico** se:

- Ogni nodo interno è etichettato con una **variabile** V.
- Ogni foglia è etichettata con un simbolo in $V \cup T \cup \{\epsilon\}$.

Il **prodotto** di un albero sintattico è la stringa di foglie da **sinistra a destra**.
Le derivazioni possono essere:

- Leftmost - si espandono per prima le **variabili** più a sinistra.
- Rightmost - si espandono per prima le **variabili** più a destra.

Una Grammatica si dice **ambigua** se esiste **almeno una** stringa che abbia **due o più alberi** sintattici.

3.4 Automi a Pila - Pushdown Automata (PDA)

Un **PDA** è un modo per implementare una Context-Free Grammar in un modo simile in cui implementiamo un **Linguaggio Regolare** usando gli **Automi a Stati Finiti**.
Essi hanno **più memoria** grazie allo **stack**.
Un PDA ha 3 componenti:

- Input - stringa di input
- Finite Control Unit - in base all'input fa la **PUSH** o **POP** dallo **stack**
- Stack (con memoria infinita)

PDA è una tupla di 7 elementi:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

dove

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è un alfabeto finito di input
- Γ è un alfabeto finito di pila
- δ è la funzione di transizione
- q_0 è lo stato iniziale
- $Z_0 \in \Gamma$ è il simbolo iniziale per la pila
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati di accettazione

3.4.1 $FIRST$

Data una grammatica e una **stringa** α.
$FIRST(\alpha)$ è l'insieme dei **terminali** con cui *iniziano* le stringhe derivabili dalla stringa data (α).
Formalmente:

$$FIRST(\alpha) = \{a \mid \alpha \to^* a\beta\} \cup \{\epsilon \mid se\ \alpha \to^* \epsilon\}$$

1. se X è un simbolo **terminale** (lettera minuscola) allora $FIRST(X) = X$.
2. se $X \implies \epsilon$ è una **produzione** allora **aggiungi** $FIRST(X) = \{\epsilon\}$.
3. se X è un **non-terminale** e $X \implies Y_1, Y_2 \ldots Y_K$ è una **produzione** allora **aggiungi** $FIRST(Y_1)$ al $FIRST(X)$
se $Y_1 \implies \epsilon$ (deriva ϵ) allora **aggiungi** $FIRST(Y_2)$ al $FIRST(X)$.

3.4.2 *FOLLOW*

Data una grammatica e una **variabile** A.
$FOLLOW(A)$(insieme dei **seguiti**) è l'insieme dei terminali con cui *iniziano* le stringhe che seguono A nelle derivazioni.
Formalmente:

$$FOLLOW(A) = \{a \mid S \to^* \alpha A a \beta\} \cup \{\$ \mid se\ S \to^* \alpha A\}$$

1. se X è il **simbolo di start** allora $FOLLOW(X) = \$$.
2. se $A \implies \alpha B \beta$ è una **produzione** allora $FOLLOW(B) = FIRST(\beta)$ eccetto ϵ, se B contiene ϵ.
3. se $A \implies \alpha B \beta$ o $A \implies \alpha B \beta$ e $FIRST(\beta)$ contiene ϵ allora **aggiungi** $FOLLOW(A)$ al $FOLLOW(B)$.

3.4.3 Insieme Guida

L'**Insieme Guida** di una produzione (es. $A \to \alpha$) indica l'**insieme dei TERMINALI** con cui iniziano le stringhe generabili partendo dalla produzione stessa ($ se ci si trova alla fine della parola).
Sostanzialmente serve a capire quali sono le **iniziali** (terminali, ad es. $a, b, c, \dots$) delle stringhe che si possono generare da una specifica produzione.

- $GUI(A \to \alpha) \implies FIRST(\alpha)$ oppure
- $GUI(A \to \alpha) \implies FIRST(\alpha) \cup FOLLOW(A)$ se ϵ appartiene al $FIRST(A)$

	$FIRST$	$FOLLOW$
$S \implies ABCDE$	$\{a,b,c\}$	$\{\$\}$
$A \implies a \mid \epsilon$	$\{a,\epsilon\}$	$\{b,c\}$
$B \implies b \mid \epsilon$	$\{b,\epsilon\}$	$\{c\}$
$C \implies c$	$\{c\}$	$\{d,e,\$\}$
$D \implies d \mid \epsilon$	$\{d,\epsilon\}$	$\{e,\$\}$
$E \implies e \mid \epsilon$	$\{e,\epsilon\}$	$\{\$\}$

3.5 Parser $LL(1)$

3.6 Proprietà principali delle Grammatiche $LL(1)$

- Non ambigua (esiste solo una derivazione left-most)
- Assenza di Ricorsioni Sinistre

3.6.1 Ricorsioni Sinistre

Si ha una **Ricorsione Sinistra** quando una variabile *chiama* se stessa

$$S \implies S\alpha$$

questo non è gestibile da un Parser Top-Down. Una produzione del seguente tipo

$$A \implies A\alpha_1 \mid \dots \mid A\alpha_n \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_m$$

(le stringhe β_i non iniziano con A)
si può sostituire con una **fattorizzazione destra** in questo modo

$$\begin{aligned} A &\implies \beta_1 A' \mid \dots \mid \beta_m A' \\ A' &\implies \epsilon \mid \alpha_1 A' \mid \dots \mid \alpha_n A' \end{aligned}$$

3.6.2 Fattorizzazione Sinistra

Si ha una **Fattorizzazione Sinistra** quando una variabile ha multiple produzioni con lo stesso prefisso

$$A \implies \mathbf{ab}c \mid \mathbf{ab} \mid \mathbf{ab}b$$

e si risolve così

$$\begin{aligned} A &\implies \mathbf{ab}A' \\ A' &\implies c \mid \epsilon \mid b \end{aligned}$$

3.7 Analizzatore a Discesa Ricorsiva

Ad ogni variabile A con produzioni

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 \\ A &\to \alpha_2 \\ &\dots \\ A &\to \alpha_k \end{aligned}$$

si associa una procedura:

```
function A()
      if (cc ∈ GUI(A → α_1))
            body (α_1)
      else if (cc ∈ GUI(A → α_a))
            body (α_a)
      ...
      else if (cc ∈ GUI(A → α_k))
            body (α_k)
      else ERRORE (...)
```

4 DOMANDE

4.1 Quando una grammatica è LL(1)?

Se per ogni coppia di produzioni a partire da uno stesso simbolo non terminale A :
$A \implies alpha$ e $A \implies \beta$, si ha
$GUI(A \implies \alpha) \cap GUI(A \implies \beta) = \Phi$.
Ovvero, gli **insiemi guida** $GUI()$ di un simbolo con due produzioni distinte non coincidono (non hanno elementi in comune).

4.2 Cosa è un linguaggio regolare? Come si verifica?

4.3 Differenza tra linguaggi Context-Free e non? Come lo stabilisco?

Regular grammar is either right or left linear, whereas context free grammar is basically any combination of terminals and non-terminals. Hence you can see that regular grammar is a subset of context-free grammar.

4.4 Quando una grammatica è ambigua?

Una grammatica è ambigua se almeno una frase del linguaggio generato è ambigua.
Una frase è ambigua se ha almeno due **alberi sintattici** distinti.

4.5 Completare la definizione della funzione di transizione σ_D dell'automa a stati finiti deterministico

4.6 Quando due stati p e q sono indistinguibili? E i-indistinguibili?

Sono i-indistinguibili se e solo se nessuna stringa di lunghezza $\leq i$ distingue p da q.
Sono indistinguibili se e solo se nessuna stringa (di qualunque lunghezza) distingue p da q.

4.7 Due stati i-indistinguibili quando sono i+1-distinguibili?

Questo si verifica quando con la stessa stringa di input i due stati raggiunti appartengono a due sottoinsiemi diversi dalla Partizione i (Π_i)

4.8 Quando un automa è minimo?

Un automa è minimo quando la partizione degli stati contiene i gruppi degli stati indistinguibili.

4.9 Quando una grammatica è LL(1)?

Una grammatica è $LL(1)$ se per ogni non terminale A e per ogni coppia di produzioni

$$A \to \alpha$$
$$A \to \beta$$

gli insiemi guida sono disgiunti:

$$GUI(A \to \alpha) \cap GUI(A \to \beta) = \Phi$$

Una grammatica **non può essere $LL(1)$** se è **ricorsiva sinistra**.
Perché l'intersezione degli insiemi GUI delle produzioni sono uguali.

4.10 Differenza tra SDD S-attribuiti e l-attribuiti

- $S-$attribuiti tutti gli attributi sono sintetizzati
- $L-$attribuiti gli attributi possono essere sia sintetizzati che ereditati, ereditati con le seguenti regole:
  - pagina 29/36 di 4/22-traduzione1.pdf

4.11 MEMO

I Linguaggi Regolari sono sottoinsiemi dei CFG (Context Free Grammar).
Linguaggi context free (generati da CFG) riconosciuti da

- PDA
- NPDA

Linguaggi regolari riconosciuiti da

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{DFA}\\ \bullet\ \text{NFA}\\ \bullet\ \epsilon\text{-NFA}\end{array}\right\}\text{Riconoscono linguaggi regolari}$$