UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

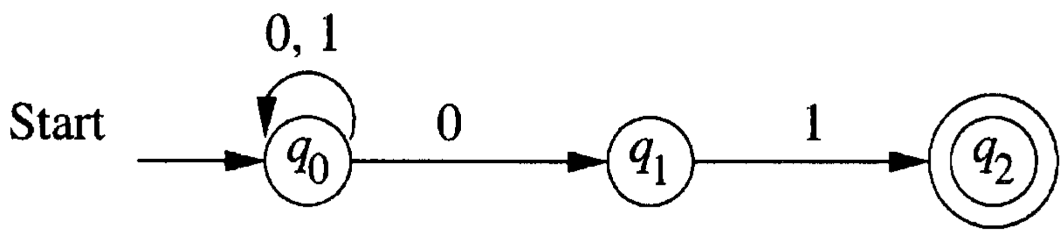
# *Automi a stati finiti non deterministici*

**a.a. 2018-2019**

# Automa finito non deterministico: NFA

Esempio: costruiamo un automa che riconosce le stringhe che *terminano* con 01.
Linguaggio: {0,1}* {01}

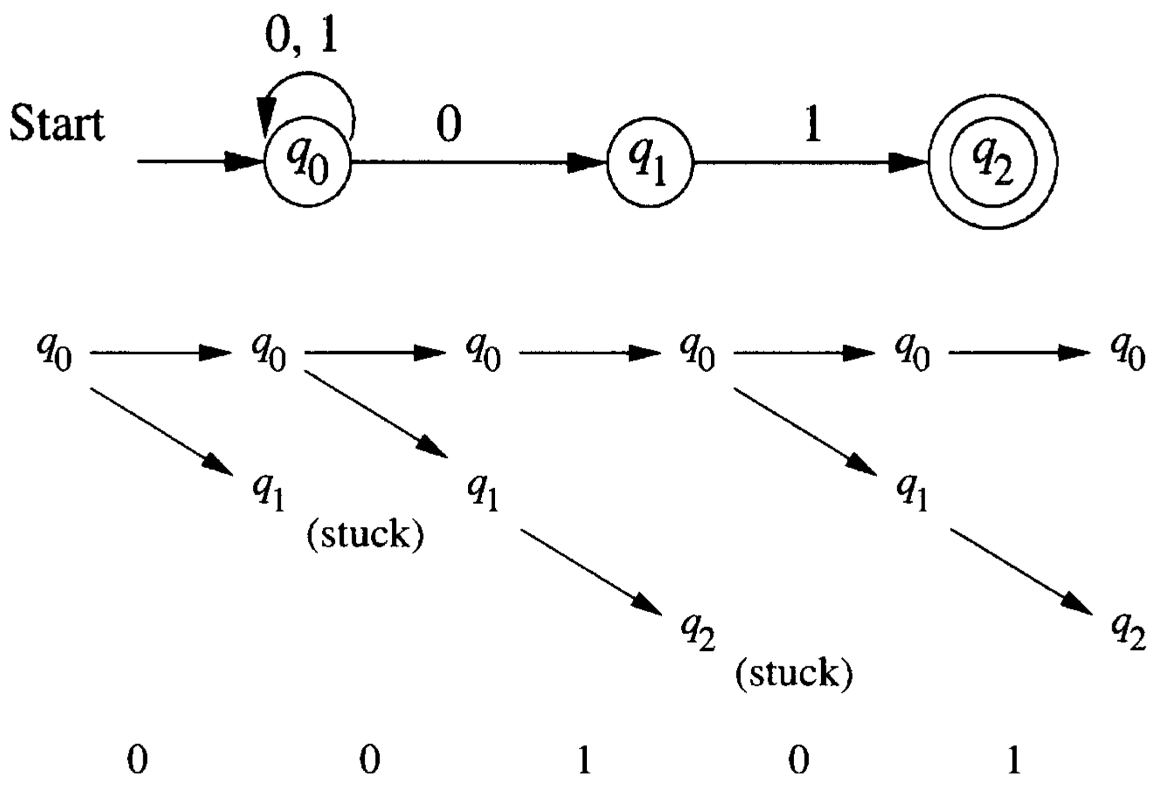
Per esempio questo:




Questo automa è *non-deterministico* perchè nello stato $q_0$ sono definite due transizioni diverse per il simbolo 0.

# Come funziona

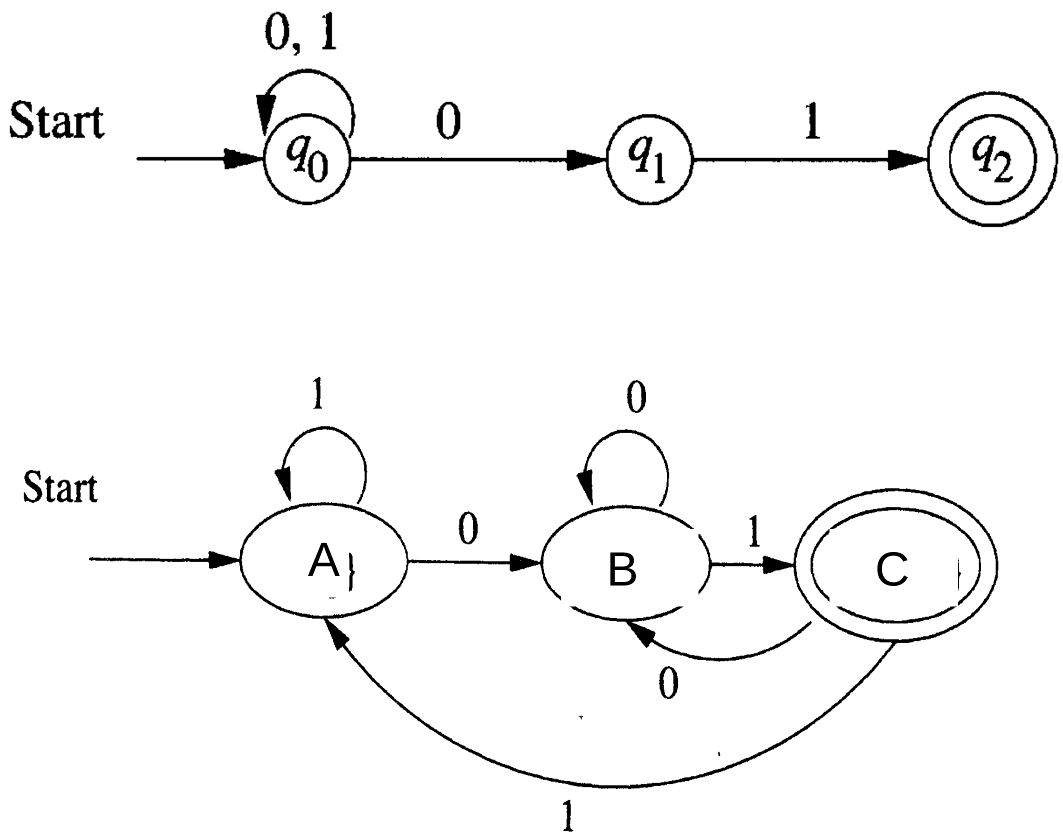
Un automa non deterministico accetta una stringa se *esiste* una sequenza di mosse che lo porta in uno stato finale




Un NFA può essere in vari stati nello stesso momento, oppure, visto in un altro modo, può "scommettere" su quale sarà il prossimo stato "giusto".

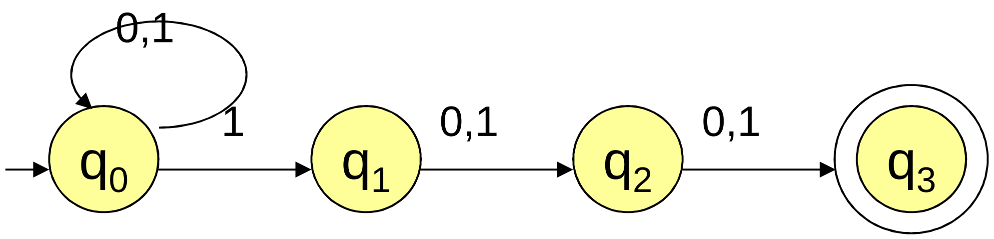
# Un automa deterministico equivalente

I due automi riconoscono lo stesso linguaggio

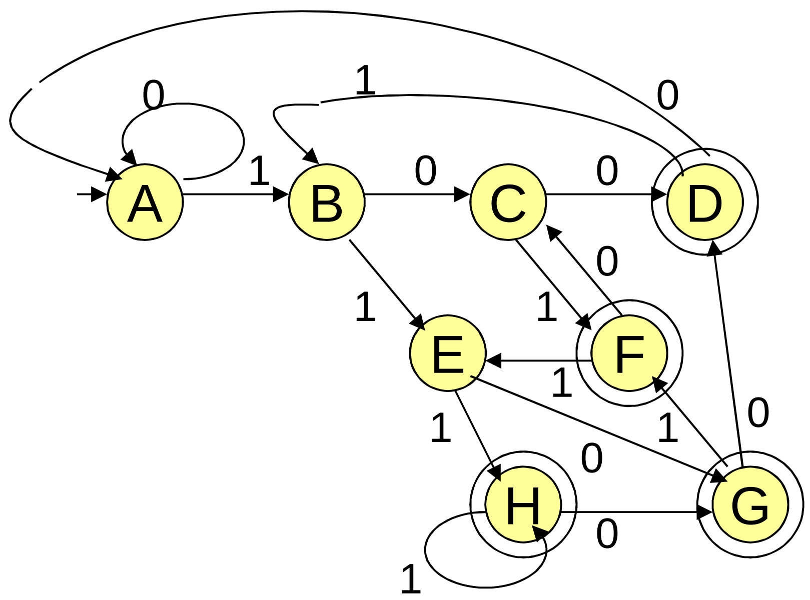


# Altro esempio

Un automa che riconosce tutte le stringhe con 1 in *terz'ultima* posizione




Versione deterministica



# Automa finito non deterministico: NFA

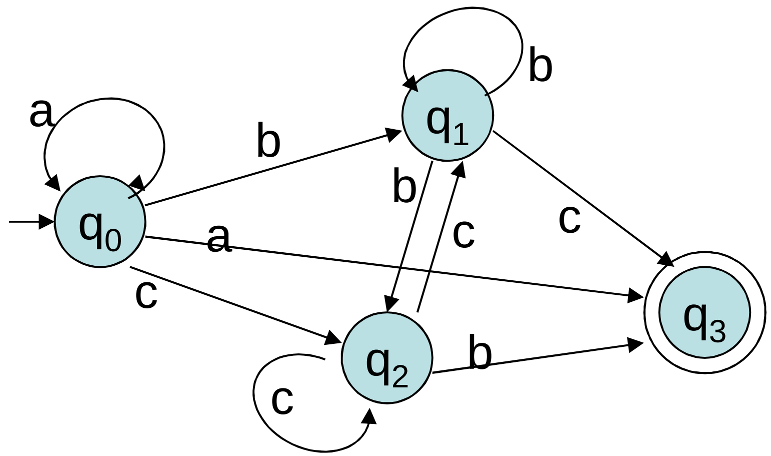
- Un *automa a stati finiti non-deterministico* (NFA) è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- dove $Q$, $\Sigma$, $q_0$, $F$ sono come prima e
- $\delta$ è la *funzione di transizione* che alle coppie <stato, simbolo in input> associa un *sottoinsieme* di stati $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ ($2^Q$ ovvero $\mathcal{P}(Q)$ )
- Per semplicità possiamo estendere la definizione della funzione di transizione agli insiemi di stati:

$$\delta(\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}, a) = \cup \{\delta(r_i, a) \mid i = 1,2,\ldots,k\}$$

# Automa finito non deterministico: esempio




$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\} \rangle$
dove la funzione definita come:

$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_3\}$
$\delta(q_0, b) = \{q_1\}$
$\delta(q_0, c) = \{q_2\}$
$\delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_1, c) = \{q_3\}$
……….etc.

| $\delta$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow q_0$ | $\{q_0,q_3\}$ | $\{q_1\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_1$ | / | $\{q_1,q_2\}$ | $\{q_3\}$ |
| $q_2$ | / | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\}$ |
| $* q_3$ | / | / | / |

# Automa finito non deterministico: NFA

- La funzione di transizione può essere estesa alle stringhe

$$\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

*Definizione*

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

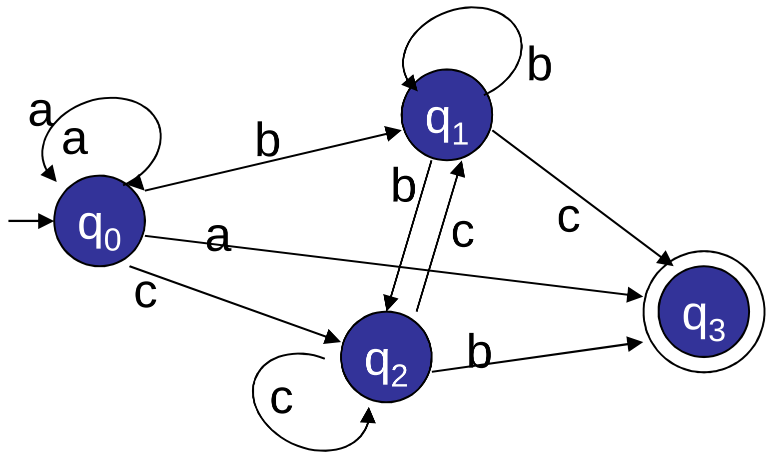
$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(r, a) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

- Formalmente, il linguaggio riconosciuto (o accettato) da A è:

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \Phi\}$$

<u>Esempio</u>

$( \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\delta(q_0,a) = \{q_0,q_3\}, \delta(q_0,b)= \{q_1\}, \delta(q_0,c) = \{q_2\},$
$\delta(q_1,b) = \{q_1,q_2\}, \delta(q_1,c) = \{q_3\}, \delta(q_2,c)= \{q_1,q_2\}, \delta(q_2,b) = \{q_3\}\}, q_0, \{q_3\} )$




$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \delta(\hat{\delta}(q_0, bb), b) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, b), b), b) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), b), b), b) =$
$= \delta(\delta(\delta(\{q_0\}, b), b), b) = \delta(\delta(\{q_1\}, b), b) = \delta(\{q_1,q_2\}, b) = \{q_1, q_2, q_3\}$

$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \{q_1, q_2, q_3\}$

$\{q_1, q_2, q_3\} \cap F = \{q_3\} \neq \Phi \;\Rightarrow$ la stringa bbb è accettata

# NFA versus DFA

*Teorema*
Dato un automa a stati finiti non deterministico, *N*, esiste un automa deterministico *M*, equivalente ad *N*.

*Input:* un automa *N* a stati finiti non deterministico.
*Output:* un automa *M* deterministico, equivalente ad *N*.

*Algoritmo:* Sia *N* = $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

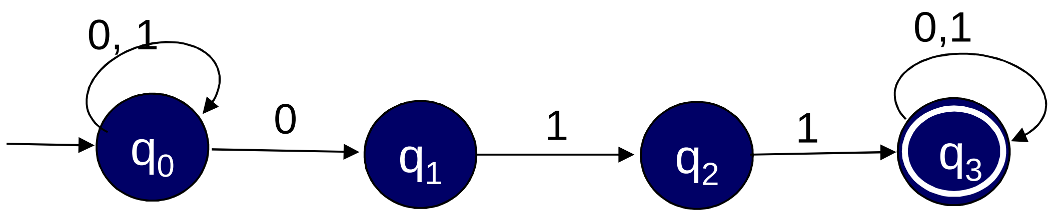
Costruire $M = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0D}, F_D)$, dove:

- $Q_D$ è l'insieme dei sottinsiemi di $2^Q$.
- $\delta_D$: $\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \{\delta(p_i, a)\}$
- $q_{0D} = q_0$
- $F_D = \{\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \mid \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \cap F \neq \Phi\}$.

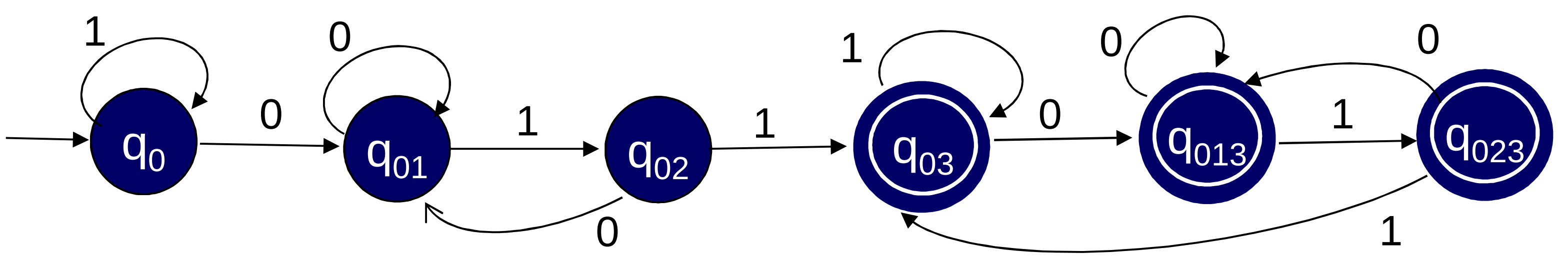
Il teorema dimostra che i due modelli di automi finite, deterministico e non deterministico, hanno la stessa potenza riconoscitiva, cioè che *riconoscono la stessa classe di linguaggi*.

in particolare per *ogni* x $\hat{\delta}(q, x) = \hat{\delta}_D(q, x)$

# NFA versus DFA




| δ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0]$ |
| $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_2]$ |
| $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_3]$ |
| $[q_0,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_3]$ |
| $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_2,q_3]$ |
| $[q_0,q_2,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_3]$ |



# Automa finito con mosse spontanee: $\varepsilon$-NFA

Un *automa finito (non-deterministico) con mosse spontanee* è un automa non deterministico nel quale la funzione di transizione può essere definita non solo sulle coppie <stato, simbolo in input>, ma anche solo su uno stato, e specifica un insieme di possibili stati successori per il controllo:

- Un $\varepsilon$-NFA è una quintupla

$$E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- $\delta$ è una *funzione di transizione*

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

- Funzione di transizione estesa alle stringhe: $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- Formalmente, il linguaggio riconosciuto (o accettato) da E è

$$L(E) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \Phi\}$$

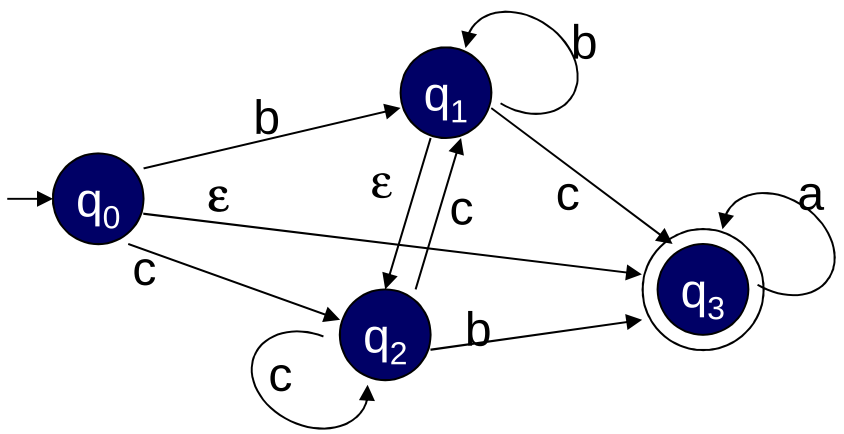
# Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

<u>Esempio</u>

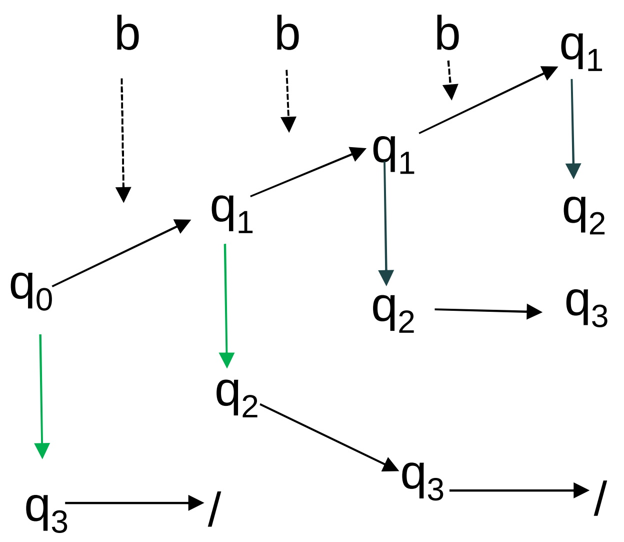
$(\{q_0,q_1,q_2,q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_3\}$, $\delta(q_0,b) = \{q_1\}$, $\delta(q_0,c) = \{q_2\}$,
$\delta(q_1, \varepsilon) = \{q_2\}$, $\delta(q_1,b) = \{q_1\}$, $\delta(q_1,c) = \{q_3\}$,
$\delta(q_2,c) = \{q_1,q_2\}$, $\delta(q_2,b) = \{q_3\}$, $\delta(q_3,a) = \{q_3\}$.

Comportamento dell'automa in presenza della stringa: bbb




$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \{q_1, q_2, q_3\}$

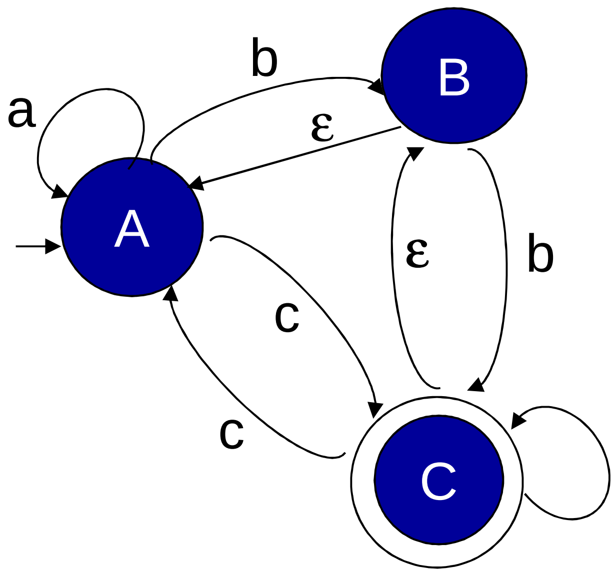


# Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

La ε-chiusura di uno stato è l'insieme degli stati da esso raggiungibili con una sequenza di mosse ε

*Definizione*

- $\text{ECLOSE}(q) = \{q\} \cup (\bigcup_{p \in \delta(q, \varepsilon)} \text{ECLOSE}(p))$   ε-chiusura di uno stato
- $\text{ECLOSE}(\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}) = \bigcup_{i=1\ldots r} \text{ECLOSE}(p_i)$   ε-chiusura di un insieme di stati
- Un insieme di stati P è ε-chiuso se $\forall p \in P,\ \text{ECLOSE}(p) \subseteq P$




$\text{ECLOSE}(A) = \{A\}$
$\text{ECLOSE}(B) = \{B\} \cup \{\text{ECLOSE}(A)\} =$
$= \{B, A\}$
$\text{ECLOSE}(C) = \{C\} \cup \{\text{ECLOSE}(B)\} =$
$= \{C, B, A\}$

# Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Estensione della *funzione di transizione*

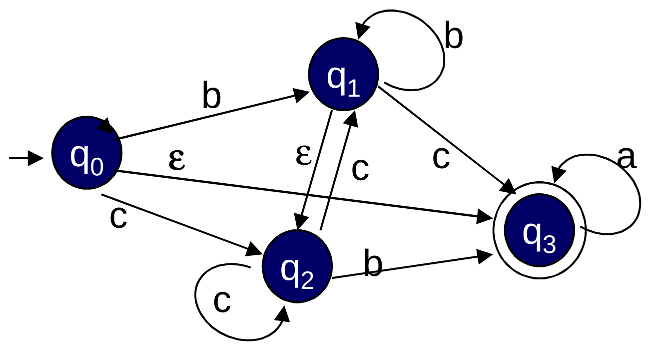
$$\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

*Definizione*

$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \text{ECLOSE}\{q\}$

$\hat{\delta}(q, xa) = \text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q, x), a))$

Nota: δ estesa agli insiemi




$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q_0, bb), b)) = \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q_0, b), b)), b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon)), b)), b)), b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\{q_0,q_3\}, b), b), b) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\{q_1\}), b), b) = \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}\ (\delta(\{q_1,q_2\}), b), b) =$

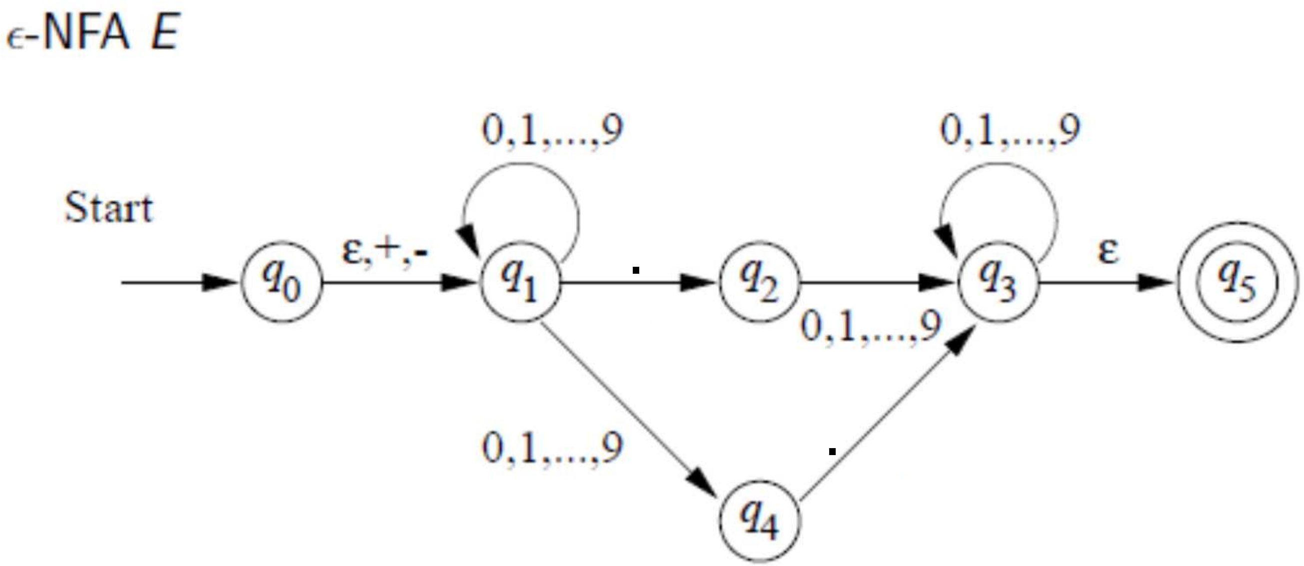
$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\{q_1,q_3\}), b), b) \ = \text{ECLOSE}(\delta(\{q_1,q_2,q_3\}, b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\{q_1,q_3\}) = \{q_1,q_2,q_3\}$

# Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

ε-NFA che accetta numeri decimali formati da:

1. Segno + o – facoltativo
2. Una sequenza di cifre, eventualmente vuota
3. Un punto decimale
4. Una  seconda sequenza di cifre che può essere vuota solo se non lo è la sequenza prima del punto decimale



# NFA e ε-NFA versus DFA

*Teorema*

Dato un automa a stati finiti non deterministico con mosse spontanee, *E*, esiste un automa deterministico *M*, equivalente a *E*.

*Input:* un automa *E* a stati finiti non deterministico con ε-transizioni.
*Output:* un automa *M* deterministico, equivalente a *E*.

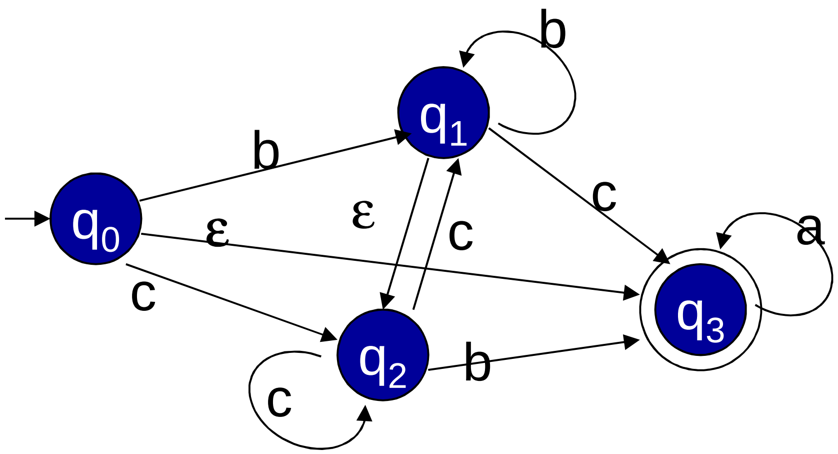
*Algoritmo:* Sia $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Costruire $M = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0D}, F_D)$, dove:

- $Q_D$ è l'insieme dei sottinsiemi ε-chiusi di $2^Q$.
- $\delta_D$: $\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \mathrm{ECLOSE}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\delta(p_i, a)\}\right)$
- $q_{0D} = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$
- $F_D = \{\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \mid \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \cap F \neq \Phi\}$.

Il teorema dimostra che gli automi finiti deterministici e non deterministici con mosse spontanee hanno la stessa potenza riconoscitiva, cioè che *riconoscono la stessa classe di linguaggi*.

# ε-NFA versus DFA



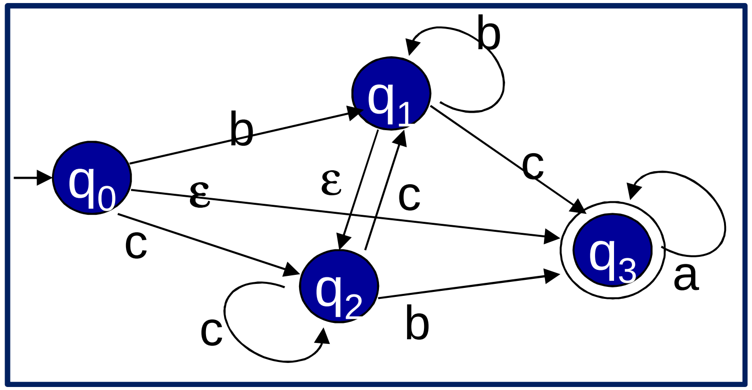

| δ | a | b | c | ε |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | $\{q_1\}$ | $\{q_2\}$ | $\{q_3\}$ |
| $q_1$ | | $\{q_1,q_2\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_2$ | | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\}$ | |
| $q_3$ | $\{q_3\}$ | | | |

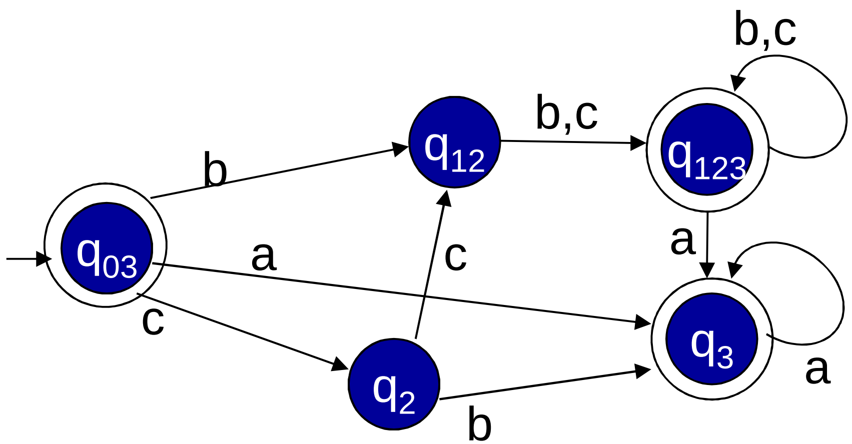
$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_3\}$
$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_2\}$
$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2\}$
$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$

| δ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| $\{q_0, q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $\{q_1,q_2\}$ | | $\{q_1,q_2\ q_3\}$ | $\{q_1,q_2\ q_3\}$ |
| $\{q_2\}$ | | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\}$ |
| $\{q_3\}$ | $\{q_3\}$ | | |
| $\{q_1,q_2\ q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\ q_3\}$ | $\{q_1,q_2\ q_3\}$ |

# ε-NFA versus DFA

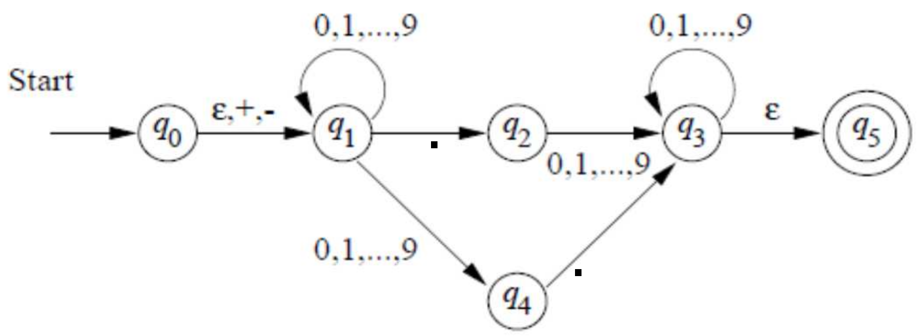
| δ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| $\{q_0,q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $\{q_1,q_2\}$ | | $\{q_1,q_2,q_3\}$ | $\{q_1,q_2,q_3\}$ |
| $\{q_2\}$ | | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2\}$ |
| $\{q_3\}$ | $\{q_3\}$ | | |
| $\{q_1,q_2,q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_1,q_2,q_3\}$ | $\{q_1,q_2,q_3\}$ |



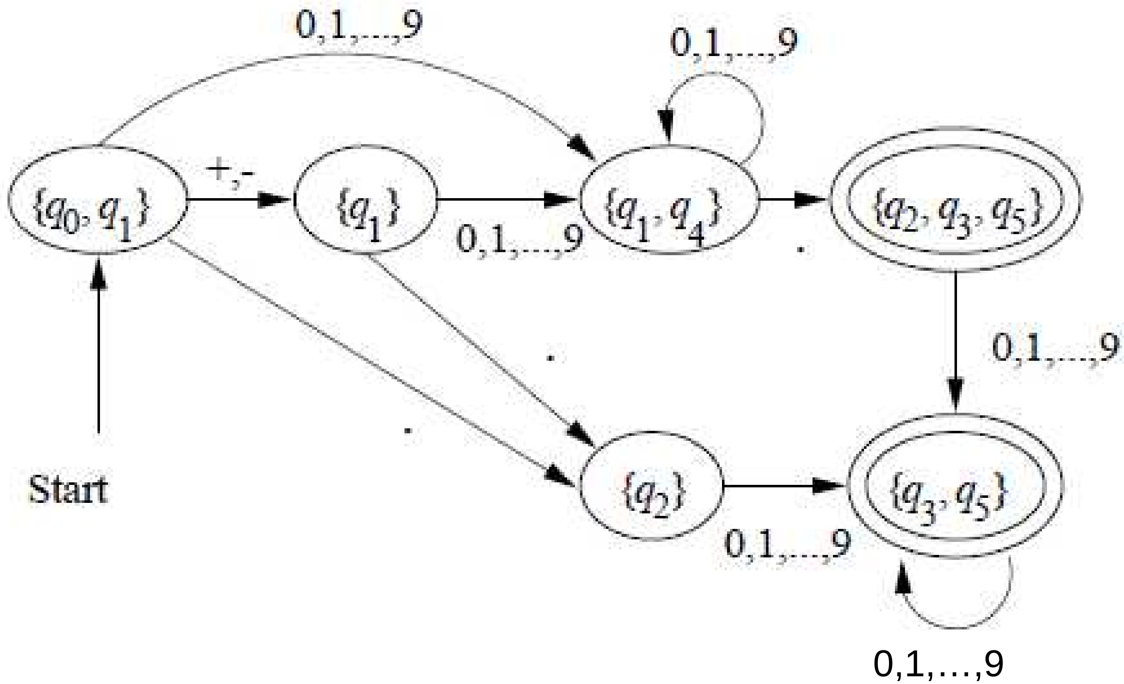



# NFA e ε-NFA versus DFA

ε-NFA $E$

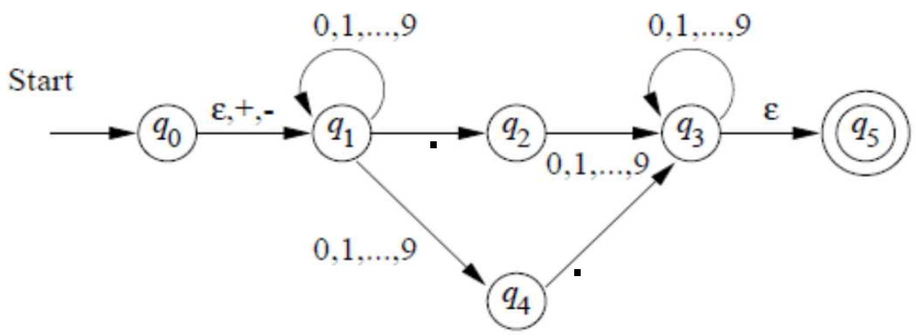



DFA $D$ corrispondente ad $E$



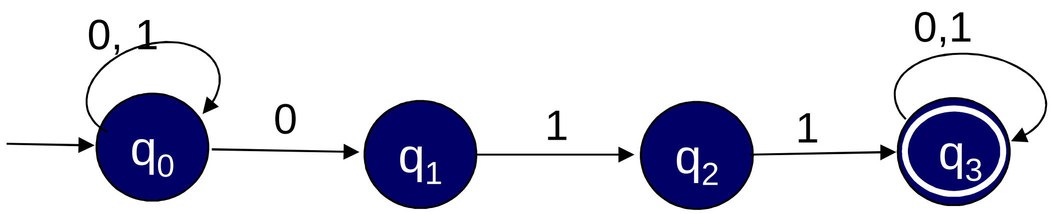
# NFA e ε-NFA versus DFA

ϵ-NFA *E*




| $\delta_D$ | **0…9** | **.** | **+, -** |
|---|---|---|---|
| -->[$q_0$ $q_1$] | [$q_0$ $q_4$] | [$q_2$] | [$q_1$] |
| [$q_1$] | [$q_1$ $q_4$] | [$q_2$] | / |
| [$q_2$] | [$q_3$ $q_5$] | / | / |
| [$q_1$ $q_4$] | [$q_1$ $q_4$] | [$q_2$ $q_3$ $q_5$] | / |
| *[$q_3$ $q_5$] | [$q_3$ $q_5$] | / | / |
| *[$q_2$ $q_3$ $q_5$] | [$q_3$ $q_5$] | / | / |
| | | | |
| | | | |

# ε-NFA versus DFA



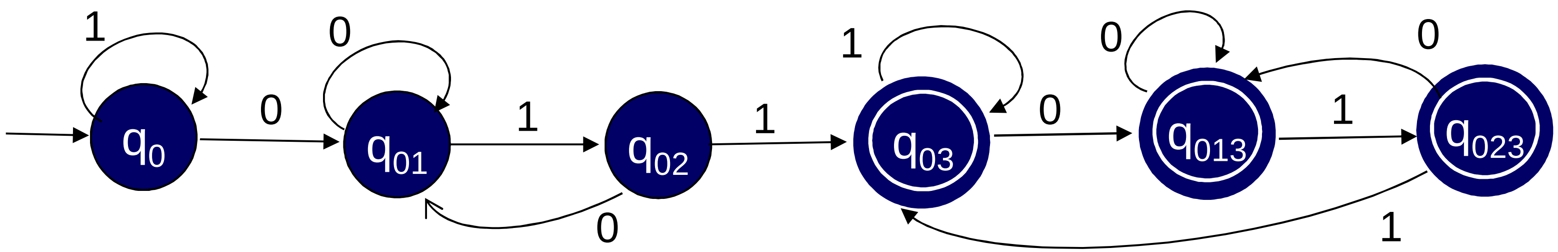

$ECLOSE(q_0) = \{q_0\}$

$ECLOSE(q_1) = \{q_1\}$

$ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$

$ECLOSE(q_3) = \{q_3\}$

| δ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $[q_0]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0]$ |
| $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_2]$ |
| $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_3]$ |
| $[q_0,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_3]$ |
| $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_2,q_3]$ |
| $[q_0,q_2,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_3]$ |

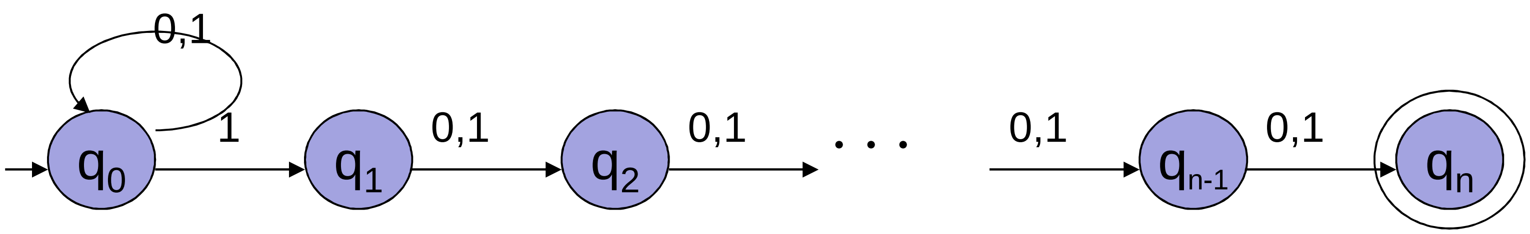


# NFA e esplosione del numero degli stati

Nella pratica è frequente ottenere l'automa finito deterministico con approssimativamente lo stesso numero di stati dell'automa non deterministico a partire dal quale è stato costruito.

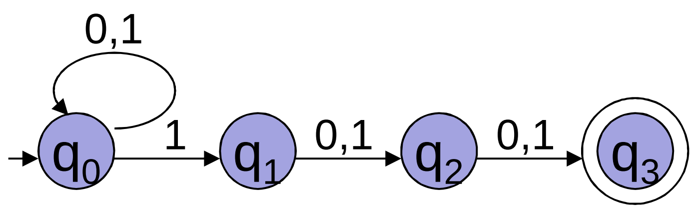
Tuttavia è possibile una crescita esponenziale del numero degli stati: nel seguente esempio risultano accessibili $2^n$ stati nel DFA costruito a partire da un NFA con n +1 stati.

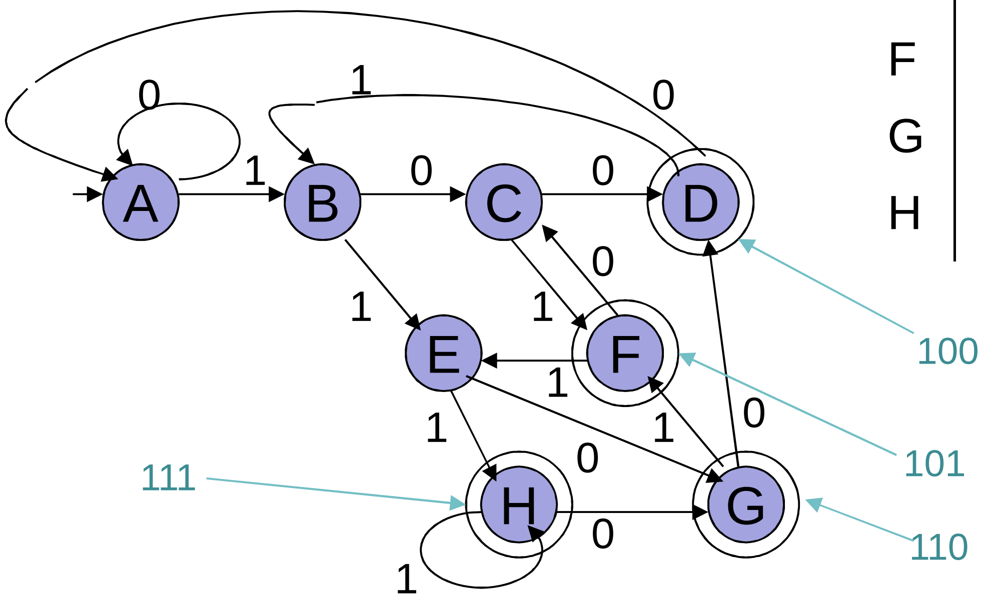
Esempio:




Consideriamo il caso particolare n = 3

# NFA e esplosione del numero degli stati




| | | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| A | $[q_0]$ | $[q_0]$ | $[q_0,q_1]$ |
| B | $[q_0,q_1]$ | $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |
| C | $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ |
| D | $[q_0,q_3]$ | $[q_0]$ | $[q_0,q_1]$ |
| E | $[q_0,q_1,q_2]$ | $[q_0,q_2,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_2,q_3]$ |
| F | $[q_0,q_1,q_3]$ | $[q_0,q_2]$ | $[q_0,q_1,q_2]$ |
| G | $[q_0,q_2,q_3]$ | $[q_0,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_3]$ |
| H | $[q_0,q_1,q_2,q_3]$ | $[q_0,q_2,q_3]$ | $[q_0,q_1,q_2,q_3]$ |

Il numero di stati dell'automa deterministico è $2^3$

# Esercizi

Per ognuno dei seguenti ε-NFA:

| | ε | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| p | Φ | {p} | {q} | {r} |
| q | {p} | {q} | {r} | Φ |
| *r | {q} | {r} | Φ | {p} |

| | ε | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| p | {q,r} | Φ | {q} | {r} |
| q | Φ | {p} | {r} | {p,q} |
| *r | Φ | Φ | Φ | Φ |

1. Calcolare l'ε-chiusura di ogni stato;
2. Elencare le stringhe accettate di lunghezza minore o uguale a tre;
3. Costruire il DFA equivalente.

# Esercizi

Costruire gli automi a stati finiti deterministici equivalenti ai seguenti automi non deterministici: