

1 Alfabeto, Stringhe, Linguaggi

1.1 Alfabeto

Un Alfabeto è un **insieme finito** di elementi detti **simboli** o **caratteri**.
La **cardinalità** è il numero di simboli dell'alfabeto.

1.2 Stringhe

La **stringa vuota** è indicata con ϵ .

1.2.1 Operazioni sulle stringhe

Concatenazione Il simbolo è il punto (.) tra stringhe:
"nano.tecnologie" diventa "nanotecnologie".

Riflessione Consiste nello scrivere una stringa al contrario, ovvero invertire l'ordine dei suoi simboli (caratteri).

x^R denota la riflessione della stringa x .

La riflessione della concatenazione di due stringhe è la concatenazione inversa delle loro riflessioni:

$$(xy)^R = y^R x^R$$

Potenza m-esima La potenza della stringa x è la concatenazione di se stessa m volte.

La **potenza** ha la **precedenza** sul concatenamento:

$$abbc^3 = abbccc$$

1.3 Linguaggi

1.3.1 Operazioni sui linguaggi

Unione

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$$

Concatenazione Il concatenamento di due linguaggi L_1 ed L_2 (notazione $L_1 L_2$) è l'insieme ottenuto concatenando in **tutti i modi possibili**

le stringhe di L_1 con le stringhe di L_2 .

$$L_1 L_2 = \{x \mid x = yz \text{ \& } y \in L_1 \text{ \& } z \in L_2\}$$

$$\{ab, abc\}\{ab, aa, cb\} = \{abab, abaa, abcb, abcab, abcaa, abccb\}$$

Star

$$A^* = \{x_1 x_2 x_3 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ and ogni } x_i \in A\}$$

2 Automi finiti ed Espressioni regolari

2.1 Automi finiti

2.1.1 DFA - Automa Finito Deterministico

È una quintupla:

$$A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$$

Q è un insieme finito di **stati**.

Σ è un alfabeto finito (**simboli in input**).

δ è una funzione di transizione $Q \times \Sigma \rightarrow Q$

$q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**.

F è l'insieme degli **stati finali**.

La funzione di transizione δ si può estendere alle stringhe:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

Definizione:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

2.1.2 NFA - Automa Finito Non-Deterministico

È una quintupla:

$$A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$$

Q è un insieme finito di **stati**.

Σ è un alfabeto finito (**simboli in input**).

δ è una funzione di transizione $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

$q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**.

F è l'insieme degli **stati finali**.

Per semplicità possiamo estendere la definizione della funzione di transizione agli insiemi di stati:

$$\delta(\{r_1, r_2, \dots, r_k\}, a) = \bigcup \{\delta(r_i, a) \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

La funzione di transizione δ si può estendere alle stringhe:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

Definizione:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \epsilon) &= \{q\} \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(r, a) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \end{aligned}$$

2.2 Conversione da NFA a DFA

2.2.1 Esempio 1

NFA:

	0	1
A	B	\emptyset
B	B	B

DFA:

	0	1
A	B	C
B	B	B
C	C	C

C è lo stato morto, siccome il DFA non accetta \emptyset .

C viene inserito nella colonna degli stati perché per ogni stato possibile il DFA richiede un input.

2.2.2 Esempio 2

NFA:

	0	1
A	{A}	{A,B}
B	\emptyset	\emptyset

DFA:

	0	1
A	{A}	{A,B}
AB	$A \cup \emptyset = \{A\}$	{AB}

AB è uno stato singolo.

AB invece di mettere B perché B non può essere raggiunto da nessuno degli stati precedenti.

Nella riga di AB, colonna degli stati, faccio l'unione di A e B per ogni input.

2.2.3 Esempio 3

NFA:

	a	b
$\rightarrow A$	{A,B}	{C}
B	{A}	{B}
$\odot C$	-	{A,B}

DFA:

	0	1
A	AB	C
AB	AB	CB
$\odot BC$	A	AB
$\odot C$	D	AB
D	D	D

BC e C sono stati finali perché sono quelli che contengono la C, che è lo stato finale dell'NFA.

3 Grammatiche

3.1 Derivazioni di una Grammatica

La Grammatica è una quadrupla (V, T, P, S) :

- V : insieme delle **variabili** o **non terminali**
- T : insieme dei **terminali**
- P : insieme delle **produzioni** o **regole di riscrittura**
- S : il simbolo **iniziale** o **assioma**. Da questo si parte, e con le regole, si generano le stringhe che formeranno il linguaggio.

Seguendo queste regole si generano delle stringhe che formano un linguaggio.

Esempio Consideriamo le seguente grammatica G_1

$$G_1 = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aAb, aA \rightarrow aaAb, A \rightarrow \epsilon\})$$

$S \rightarrow \underline{a}Ab$
 $\rightarrow aa\underline{A}bb$
 $\rightarrow aaa\underline{A}bbb$
 $\rightarrow aaabbb$

3.2 Grammatiche Context-Free

La Grammatica Context-Free è una quadrupla (V, Σ, P, S) :

- V : insieme delle **variabili** o **non terminali**
- Σ : insieme dei **terminali**
- P : insieme delle **produzioni** o **regole di riscrittura**
- S : il simbolo **iniziale** o **assioma**. Da questo si parte, e con le regole, si generano le stringhe che formeranno il linguaggio.

La **quadrupla** contiene queste regole che, seguite, generano delle stringhe. L'insieme di queste **stringhe** formano il **linguaggio** L generato dalla grammatica G :

$$L(G)$$

3.3 Alberi Sintattici

Un albero è un **albero sintattico** se:

- Ogni nodo interno è etichettato con una **variabile** V .
- Ogni foglia è etichettata con un simbolo in $V \cup T \cup \{\epsilon\}$.

Il **prodotto** di un albero sintattico è la stringa di foglie da **sinistra a destra**.
Le derivazioni possono essere:

- Leftmost - si espandono per prima le **variabili** più a sinistra.
- Rightmost - si espandono per prima le **variabili** più a destra.

Una Grammatica si dice **ambigua** se esiste **almeno una** stringa che abbia **due o più alberi** sintattici.

3.4 Automi a Pila - Pushdown Automata (PDA)

Un **PDA** è un modo per implementare una Context-Free Grammar in un modo simile in cui implementiamo un **Linguaggio Regolare** usando gli **Automi a Stati Finiti**.

Essi hanno **più memoria** grazie allo **stack**.

Un PDA ha 3 componenti:

- Input - stringa di input
- Finite Control Unit - in base all'input fa la **PUSH** o **POP** dallo **stack**
- Stack (con memoria infinita)