

Linguaggi Formali e Traduttori
Esercizi – grammatiche libere dal contesto, automi a pila
7 novembre 2018

1. Scrivere una grammatica libera dal contesto per ognuno dei seguenti insiemi:
 - a) l'insieme $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \text{ \& } i \neq j\}$, cioè l'insieme delle stringhe in cui il numero di a è diverso dal numero di b.
 - b) l'insieme $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ oppure } j \neq k\}$, cioè l'insieme delle stringhe in cui il numero di a è diverso dal numero di b o il numero di b è diverso dal numero di c.
 - c) l'insieme delle stringhe con un numero uguale di 0 e di 1.
 - d) l'insieme delle stringhe con un numero di 0 doppio rispetto al numero di 1.
 - e) l'insieme delle stringhe di parentesi tonde e quadre bilanciate. Ad esempio $[[([] (()))]]$ è bilanciata, mentre non lo è la stringa $[[] (])$.
2. La seguente grammatica è ambigua $S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon$. Mostrare che la stringa “aab” ha:
 - a. due alberi sintattici
 - b. due derivazioni a sinistra
 - c. due derivazioni a destra.
3. La seguente grammatica genera espressioni in notazione prefissa:
 $E \rightarrow +EE \mid *EE \mid -EE \mid x \mid y$
 - a) trovare una derivazione a sinistra e una derivazione a destra per la stringa “+ * x y- x y”
 - b) la grammatica è ambigua? Motivare la risposta.
4. L'automa a pila $P = (\{p, q\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ ha la seguente funzione di transizione:

$\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$	$\delta(p, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
$\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$	$\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$
$\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$	$\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \epsilon)\}$
$\delta(q, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$	

A partire dalla descrizione istantanea iniziale (q, w, Z_0) , mostrare tutte le descrizioni istantanee raggiungibili dall'automa con gli input:

 - a. 01
 - b. 0011
 - c. 010
5. Definire un automa a pila, che accetti per stack vuoto, per ognuno dei seguenti linguaggi:
 - a. insieme delle stringhe di 0 e 1 tali che nessun prefisso abbia più 1 che 0.
 - b. Insieme delle stringhe di 0 e 1 con lo stesso numero di 0 e di 1.
 - c. Insieme delle stringhe di 0 e 1 con un numero di 0 doppio rispetto al numero di 1.

6. L'automa P ha la seguente funzione di transizione (le parentesi graffe sono state omesse in quanto la funzione di transizione ha un solo valore per ogni elemento del dominio:

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

$\delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, AAZ_0)$	$\delta(q_0, b, Z_0) = (q_2, BZ_0)$	$\delta(q_0, \epsilon, Z_0) = (f, \epsilon)$
$\delta(q_1, a, A) = (q_1, AAA)$	$\delta(q_1, b, A) = (q_1, \epsilon)$	$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = (q_0, Z_0)$
$\delta(q_2, a, B) = (q_3, \epsilon)$	$\delta(q_2, b, B) = (q_2, BB)$	$\delta(q_2, \epsilon, Z_0) = (q_0, Z_0)$
$\delta(q_3, \epsilon, B) = (q_2, \epsilon)$	$\delta(q_3, \epsilon, Z_0) = (q_1, AZ_0)$	

- 1) scrivere una traccia d'esecuzione (cioè una sequenza di descrizioni istantanee) per dimostrare che la stringa "bab" è in L(P);
 - 2) scrivere una traccia d'esecuzione per dimostrare che "abb" è in L(P);
 - 3) scrivere il contenuto dello stack dopo che P ha letto b^7a^4 ;
 - 4) descrivere informalmente L(P).
7. Per ognuno dei seguenti linguaggi liberi dal contesto definire un automa push-down che lo accetti per stack vuoto.
- a) $\{a^n b^m c^{2(n+m)} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
 - b) $\{a^i b^j c^k \mid i = 2j \text{ oppure } j = 2k\}$
 - c) $\{0^n 1^m 0^n \mid n, m > 0\}$
 - d) $\{0^n 1^m \mid 0 < n \leq m\}$
 - e) $\{0^n 1^m \mid n \geq m > 0\}$
 - f) $\{0^n 1^m \mid n \leq m \leq 2n\}$

8. Si considerino i due linguaggi:

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

- a) dimostrare che sono entrambi liberi costruendo una grammatica per ognuno;
 - b) costruire una grammatica per la loro unione e la concatenazione;
 - c) costruire una grammatica per la chiusura di Kleene di L_1 , di L_2 e della loro unione;
 - d) $L_1 \cap L_2$ è un linguaggio context-free? Giustificare la risposta.
9. Fornire una grammatica lineare destra per i linguaggi denotati dalle seguenti espressioni regolari:
- a) a^*bc^*
 - b) $(a \mid b)^*abb$
 - c) $(ab^* \mid c)^*a$
10. Per ognuna delle seguenti grammatiche, di cui è dato l'insieme delle produzioni, trovare un automa che riconosca il linguaggio generato.
- a) P1: $\{S \rightarrow a \mid a + S\}$
 - b) P2: $\{S \rightarrow aS \mid bA, A \rightarrow cA \mid \epsilon\}$
 - c) P3: $\{S \rightarrow 0A \mid 0C, A \rightarrow 0B \mid 1D, B \rightarrow A \mid \epsilon, C \rightarrow S \mid 1D, D \rightarrow B \mid \epsilon\}$