Scambio di chiavi di Diffie-Hellman

Prof. Francesco Bergadano

Dipartimento di Informatica

Università di Torino

Copyright Notice

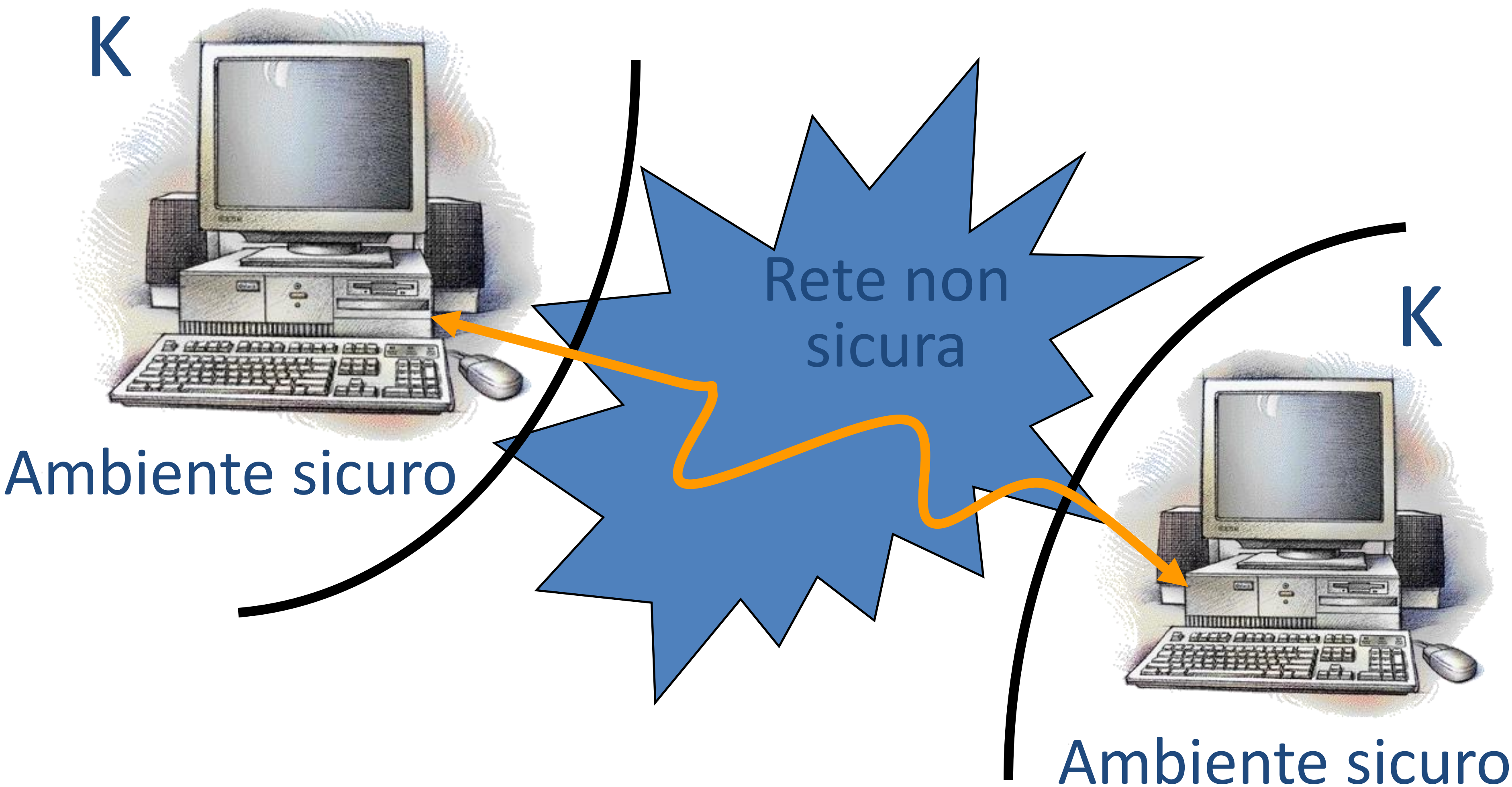
Prof. Francesco Bergadano

Dipartimento di Informatica

Università di Torino

Scambio di chiavi di Diffie-Hellman

- Primo esempio di tecnica crittografica ‘a chiave pubblica’ (1977)
- Non un vero e proprio cifrario
- Usato per scambio di chiavi simmetriche



Problema della distribuzione della chiave condivisa (cifrario simmetrico)

Scambio di chiavi di Diffie-Hellman

Come altre tecniche crittografiche a chiave pubblica, è basato su operazioni in aritmetica modulare

Definizione: dato M, a mod M (oppure a%M) denota il resto della divisione di a per M (quindi per a<M, a mod M = a).

Conviene “portare all’interno di un prodotto” l’operazione modulo

Proprietà: (ab) mod M =
= (a mod M)(b mod M) mod M

Dimostrazione:

Siano a mod M = x e b mod M = y, con x e y < M,

allora (∃k,j) Mk+x=a & Mj+y=b.

Pertanto (ab) mod M = [(Mk+x)(Mj+y)] mod M =
= (MkMj+Mky+Mjx+xy) mod M = xy mod M =
= [(a mod M)(b mod M)] mod M

Stessa cosa per le potenze

Proprietà: $(a^b) \bmod M =$
$= (a \bmod M)^b \bmod M$

Dimostrazione:

Esercizio

Notazione (I)

$X \mid Y$

$\rightarrow$

"X divide Y"

ovvero $(\exists k)\ Y = kX$

ovvero $Y \bmod X = 0$

Per ogni X, $X|0$ (infatti $0 = 0*X$)

Per ogni X, $X|X$ (infatti $X = 1*X$)

Per ogni Y, $1|Y$ (infatti $Y=Y*1$)

Proprietà (I)

se $X|Y$ e $Y|Z$, allora $X|Z$, infatti

sia $Y=kX$ e $Z=jY$, allora $Z=jkX$, ovvero $X|Z$

se $X|Y$ e $X|Z$, allora $X|(iY+jZ)$ per ogni intero i,j

infatti, siano $Y=rX$ e $Z=sX$, allora

$iY+jZ = irX+jsX = (ir+js)X$, ovvero $X|(iY+jZ)$

Proprietà (II)

se $n|XY$ e $MCD(X,n)=1$, allora $n|Y$

Dimostrazione -> esercizio

Notazione (II)

X mod M = Y mod M

→

“X è congruente a Y modulo M”

$X \equiv Y \pmod{M}$

Es. $17 \equiv 12 \pmod{5}$

$X \equiv 1 \pmod{M}$

Significa che X diviso M dà resto 1

(quindi $X = KM + 1$ per qualche K)

Es. $17 \equiv 1 \pmod{8}$, e infatti $17 = K*8+1$ con $K=2$

Scambio di chiavi di Diffie-Hellman

Informazioni note: q (numero primo)
α (radice primitiva di q)

Chiave privata di A: $Sa < q$

Chiave pubblica di A: $Pa = \alpha^{Sa} \bmod q$

Chiave privata di B: $Sb < q$

Chiave pubblica di B: $Pb = \alpha^{Sb} \bmod q$

Chiave condivisa: $K = Pb^{Sa} \bmod q =$

$(\alpha^{Sb})^{Sa} \bmod q = (\alpha^{Sa})^{Sb} \bmod q = Pa^{Sb} \bmod q$

Radici primitive - esempi

$q=7$
$\alpha=2$

$2^0=1$
$2^1=2$
$2^2=4$
$2^3=1$

$2^4 \mod 7 =$
$(2^3 * 2) \mod 7 =$
$[(2^3 \mod 7) * (2 \mod 7)] \mod 7$
$= (1 * 2)$

$q=7$
$\alpha=3$

$3^0=1$
$3^1=3$
$3^2=2$
$3^3=6$
$3^4=4$
$3^5=5$
$3^6=1$

$3^4 \mod 7 =$
$(3^3 * 3) \mod 7 =$
$[(3^3 \mod 7) * (3 \mod 7)] \mod 7$
$= (6 * 3) \mod 7 = 18 \mod 7 = 4$

Esponente modulare e logaritmo discreto

$Pa = \alpha^{Sa} \bmod q$

Esponente modulare:
Trovare Pa a partire da α, q, Sa.

Logaritmo discreto:
Trovare Sa a partire da α, q, Pa.

Per realizzare DH, occorre

- Algoritmo efficiente per calcolare $a^b \bmod q$
- Algoritmo efficiente per generare q primo
- Algoritmo efficiente per generare una radice primitiva di q

I primi due algoritmi sono anche necessari per cifratura e firma con RSA

Per realizzare DH, occorre

- Algoritmo efficiente per calcolare $a^b \bmod q$
- Algoritmo efficiente per generare q primo
- Algoritmo efficiente per generare una radice primitiva di q

Calcolo di $a^b \bmod q$ (ricorsivo)

$b = 0$	$a^b \bmod q = 1$
b pari	$a^b \bmod q = [(a^{b/2} \bmod q)]^2 \bmod q$
b dispari	$a^b \bmod q = [a*(a^{b-1} \bmod q)] \bmod q$

Calcolo di a^b mod q (ricorsivo)

```
int expmod (int a, int b, int q) {
// restituisce un valore minore di q
if (b = = 0) return 1; // a^0 mod q = 0
if (b%2 = = 0)
   return sq(expmod(a,b/2,q))%q; // b pari
else
   return (a*expmod(a,b-1,q))%q; // b dispari
}  // (ab) mod q = (a mod q) (b mod q) mod q
```

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

// b = $b_k \ldots b_2 b_1 b_0$
// c non serve al calcolo, solo per la dimostrazione di correttezza

```
c = 0; d = 1;
for (i=k; i>=0; i--) {
    c = c*2; d = (d*d)%q;
    if (b_i = = 1) {
        c = c+1; d = (d*a)%q; }
    }
return d;
```

Calcolo di $a^b \bmod q$ (iterativo)

```
// b = b_k…b_2b_1b_0
// numero b in binario, di k+1 bit, ovvero Σ_{bj=1,0≤j≤k} 2^j = b
c = 0; d = 1;
for (i=k; i>=0; i--)
    c = c*2; d = (d*d)%q;
    // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}, d = a^c mod q
    if (b_i = = 1) {
         c = c+1; d = (d*a)%q; }
    // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i} + Σ_{bj=1 & j=i} 1, d = a^c mod q
    } // c = Σ_{bj=1,0≤j≤k} 2^j = b, d = a^c mod q = a^b mod q
return d;
```

Calcolo di $a^b \bmod q$ (iterativo)

```
// b = b_k...b_2b_1b_0
c = 0; d = 1;
for (i=k; i>=0; i--)
   c = c*2; d = (d*d)%q;
   // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}, d = a^c mod q
   ..... questo è vero la prima volta con c=0, d=1
```

$b = b_k \ldots b_2 b_1 b_0$; $c = \sum_{b_j=1\ \&\ j>i} 2^{j-i}$, $d = a^c \bmod q$

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

```
// b = b_k…b_2b_1b_0
… chiamo c’, d’ i valori prima dell’istruzione if
   // c’ = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}, d’ = a^{c’} mod q
   if (b_i = = 1)  {
         c = c’+1; d = (d’*a)%q;  }
   // se b_i = 1
   // c = c’+1 = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}+1
                 =Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}+Σ_{bj=1 & j=i} 1
   // d = (d’*a) mod q = (a^{c’} mod q)*a mod q =
   //    = a^{c’+1} mod q = a^c mod q
```

$$b = b_k \ldots b_2 b_1 b_0$$
$$c' = \sum_{b_j=1 \,\&\, j>i} 2^{j-i},\quad d' = a^{c'} \bmod q$$
$$c = c'+1 = \sum_{b_j=1 \,\&\, j>i} 2^{j-i}+1 = \sum_{b_j=1 \,\&\, j>i} 2^{j-i}+\sum_{b_j=1 \,\&\, j=i} 1$$
$$d = (d' * a) \bmod q = (a^{c'} \bmod q) * a \bmod q = a^{c'+1} \bmod q = a^c \bmod q$$

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

// $b = b_k \ldots b_2 b_1 b_0$
… chiamo c’, d’ i valori prima dell’istruzione if

```
    // c’ = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}, d’ = a^{c’} mod q
    if (b_i = = 1)  {
          c = c’+1; d = (d’*a)%q;  }
    // se b_i = 0, l’istruzione non viene eseguita, e
    // c = c’ = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}+0
                 = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}+Σ_{bj=1 & j=i} 1

    // d = d’ = a^{c’} mod q = a^c mod q
```

$$c' = \sum_{b_j=1\ \&\ j>i} 2^{j-i},\quad d' = a^{c'} \bmod q$$

$$c = c' = \sum_{b_j=1\ \&\ j>i} 2^{j-i} + 0 = \sum_{b_j=1\ \&\ j>i} 2^{j-i} + \sum_{b_j=1\ \&\ j=i} 1$$

$$d = d' = a^{c'} \bmod q = a^c \bmod q$$

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

```
// b = b_k…b_2b_1b_0
// numero b in binario, di k+1 bit, ovvero Σ_{bj=1,0≤j≤k} 2^j = b
c = 0; d = 1;
for (i=k; i>=0; i--)
    c = c*2; d = (d*d)%q;
    // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}, d = a^c mod q
    if (b_i = = 1) {
          c = c+1; d = (d*a)%q; }
    // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i} + Σ_{bj=1 & j=i} 1, d = a^c mod q
  } // c = Σ_{bj=1,0≤j≤k} 2^j = b, d = a^c mod q = a^b mod q
return d;
```

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

// $b = b_k \ldots b_2 b_1 b_0$

// $c' = \Sigma_{b_j=1\ \&\ j>i'} 2^{j-i'} + \Sigma_{b_j=1\ \&\ j=i'} 1$, $d' = a^{c'} \bmod q$

```
i=i'-1;
c = c'*2; d = (d'*d')%q;
```

// $c = c'*2 = (\Sigma_{b_j=1\ \&\ j>i'} 2^{j-i'} + \Sigma_{b_j=1\ \&\ j=i'} 1)*2 =$

$= \Sigma_{b_j=1\ \&\ j>i'} 2^{j-(i'-1)} + \Sigma_{b_j=1\ \&\ j=i'} 2^{j-(i'-1)} =$

$= \Sigma_{b_j=1\ \&\ j>i'-1} 2^{j-(i'-1)} = \Sigma_{b_j=1\ \&\ j>i} 2^{j-i}$

// $d = (d'*d') \bmod q = (a^{c'} \bmod q)*(a^{c'} \bmod q) \bmod q =$
$= a^{2*c'} \bmod q = a^c \bmod q$

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

```
// b = b_k…b_2b_1b_0
// numero b in binario, di k+1 bit, ovvero Σ_{bj=1,0≤j≤k} 2^j = b
c = 0; d = 1;
for (i=k; i>=0; i--)
    c = c*2; d = (d*d)%q;
    // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i}, d = a^c mod q
    if (b_i = = 1) {
        c = c+1; d = (d*a)%q; }
    // c = Σ_{bj=1 & j>i} 2^{j-i} + Σ_{bj=1 & j=i} 1, d = a^c mod q
    } // c = Σ_{bj=1,0≤j≤k} 2^j = b, d = a^c mod q = a^b mod q
return d;
```

Calcolo di a^b mod q (iterativo)

```
// b = b_k…b_2b_1b_0
// numero b in binario, di k+1 bit, ovvero Σ_{b_j=1,0≤j≤k} 2^j = b
// c = Σ_{b_j=1 & j>i} 2^{j-i} + Σ_{b_j=1 & j=i} 1, d = a^c mod q
} // ovvero il ciclo termina e i=0
// c = Σ_{b_j=1 & j>0} 2^j + Σ_{b_j=1 & j=0} 1 = Σ_{b_j=1 & j>0} 2^j + Σ_{b_j=1 & j=0} 2^j =
      = Σ_{b_j=1 & 0≤j} 2^j
// c = Σ_{b_j=1,0≤j≤k} 2^j = b, d = a^c mod q = a^b mod q
return d;
```

Calcolo di a^b mod q (iterativo) – esempio

// b = $b_k \ldots b_2 b_1 b_0$ = 10110 (decimale 22)
// a = 3, d = 3^22 mod q, q = 31 (primo)
// simulare i 5 step con i=4,3,2,1,0

// risultato da calcolatrice
// 3^22 div 31 = 1012292245 = M1
// M1*31 = 31381059595 = M2
// 3^22 – M2 = 3^22 mod 31 = 14

Per realizzare DH, occorre

- Algoritmo efficiente per calcolare $a^b \bmod q$
- Algoritmo efficiente per generare q primo
- Algoritmo efficiente per generare una radice primitiva di q

Generazione di (grandi) numeri primi

Metodo diretto:

```
1. genera M di k bit a caso
2. for (i=2; i*i<=M; i++)
        if (M%i = = 0) goto 1 // M non primo
3. return M // M primo
```

e’ facile che un numero casuale M sia primo?

E’ facile che un numero casuale M sia primo?

Esistono infiniti numeri primi (Euclide)

Dimostrazione :

Supponiamo che p sia l’ultimo numero primo.

Sia q = 2*3*5*…*p il prodotto dei numeri primi fino a p.

Se q+1 è primo, p non era l’ultimo.

Se q+1 non è primo, è divisibile per r>p con r primo (in quanto non è divisibile per alcun primo fino a p). Di nuovo r>p, quindi p non è l’ultimo numero primo.

E’ facile che un numero casuale M sia primo?

Teorema dei numeri primi:

Sia $\pi(x)$ il numero di primi minori dell’intero x.

Allora $\pi(x) \sim x/\ln(x)$ ovvero $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/[x/\ln(x)] = 1$.

Es.

$\pi(10) = 4$, $10/\ln(10)=4{,}34$

$\pi(30) = 10$, $30/\ln(30)=8{,}82$

E’ facile che un numero casuale M di 100 cifre sia primo?

In crittografia (ad esempio per DH ed RSA), useremo numeri primi grandi, di almeno 100 cifre decimali.

I numeri primi di cento cifre sono circa

$\pi(10^{100})$- $\pi(10^{99}) \approx$

$\approx [10^{100}/\ln(10^{100})] - [10^{99}/\ln(10^{99})] \approx 3.9 * 10^{97}$.

I numeri di 100 cifre sono 10^{100}.

Quindi avremo in media un numero primo ogni $10^{100}/3.9*10^{97}$, ovvero ogni 1000/3.9 = 256 tentativi

(potremo evitare i numeri pari, e i multipli di 3, 5, 7 e 11).

Esercizio

Abbiamo in media un numero primo ogni $10^{100}/3.9*10^{97}$, ovvero ogni $1000/3.9 = 256$ tentativi:

Come si riduce questo numero evitando i numeri pari?

Idea:

M (dispari)

Saltare M+1, M+3, … perche' sono pari

Esercizio

Abbiamo in media un numero primo ogni $10^{100}/3.9*10^{97}$, ovvero ogni 1000/3.9 = 256 tentativi:

Come si riduce questo numero evitando i multipli di 3 e 5?

Idea:

M3 = M oppure M-1 oppure M-2, multiplo di 3

M5 = M oppure M-1 oppure … M-4, multiplo di 5

Saltare M3, M3+3, M3+6 … (senza contare quelli pari)

Saltare M5, M5+5, M5+10, … (senza i multipli di 2 e di 3)

Generazione di (grandi) numeri primi

Metodo diretto:

```
1. genera M di k bit a caso
2. for (i=2; i*i<=M; i++)
        if (M%i = = 0) goto 1 // M non primo
3. return M // M primo
```

Per numeri di 100 cifre potremo fare un centinaio di tentativi e trovare M primo

Generazione di (grandi) numeri primi

Metodo diretto:

1. genera M di k bit a caso
2. for (i=2; i*i<=M; i++)
        if (M%i = = 0) goto 1 // M non primo
3. return M // M primo

ma, troppo lento! $M^{(1/2)} = 2^{(k/2)}$ divisioni

Generazione di (grandi) numeri primi

Metodo diretto per generare M di k bit

circa $M^{(1/2)} = 2^{(k/2)}$ divisioni

per k = 512, $2^{(k/2)}$ divisioni = 1,2e+77divisioni

Generazione di (grandi) numeri primi

Metodo probabilistico:

1. genera M di k bit a caso
2. for (i=0; i<T; i++) // ripeti T volte

    genera a<M a caso

    if (test(a,M)) goto 1 // M non primo

    // M primo con probabilità > ½
3. return M // Pr(M non primo) < 2^{-T}

    // Pr(M primo) > 1 - 2^{-T}

Pr(M primo) molto alta!

Esempio

Pr(M primo) > $1 - 2^{-T}$

es. per T = 100,

Pr(M primo) >
0,999999999999999999999999999999211

Test di Miller-Rabin

Pr(M non primo & $\text{Test}_{\text{Miller-Rabin}}$(M)=false) < 1/4

Si usano due teoremi:

1. (Piccolo teorema di Fermat, sarà dimostrato in seguito, come corollario del teorema di Eulero)
   se M è primo e a<M, allora a^{M-1} mod M = 1

2. (conseguenza del «principio fondamentale», vedi slide successiva)
   se M è primo e x^2 mod M = 1,
   allora x = 1 o x = M-1

Principio fondamentale

Se esistono x e y, t.c. $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$ e $\neg(x \equiv \pm y \pmod{n})$, allora n non è primo.

Dimostrazione:

Sia d = MCD(x-y,n). Ci sono due casi:

1. Se d=n, allora $x \equiv y \pmod{n}$ – quindi $d \neq n$.
2. Sia d=1. Sappiamo che $n|x^2-y^2$, quindi $n|(x-y)(x+y)$.
   Per quanto sopra, n non può dividere x-y. Quindi deve dividere x+y.
   Ciò contraddice $\neg(x \equiv - y \pmod{n})$ - quindi $d \neq 1$.

Siccome MCD(x-y,n) è diverso da 1 e da n,

allora vi è un divisore di n diverso da 1 ed n, ovvero n non è primo.

Principio fondamentale

Se esistono x e y, t.c. $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$ e $\neg(x \equiv \pm y \pmod{n})$, allora n non è primo.

Dimostrazione:

Se n|XY e MCD(n,X)=1, allora n|Y (proprietà II dimostrata in precedenza)

Sia d = MCD(x-y,n). Ci sono due casi:

1. Se d=n, allora $x \equiv y \pmod{n}$ – quindi $d \neq n$.
2. Sia d=1. Sappiamo che $n | x^2-y^2$, quindi $n | (x-y)(x+y)$.
   Per quanto sopra, n non può dividere x-y. Quindi deve dividere x+y.
   Ciò contraddice $\neg(x \equiv - y \pmod{n})$ - quindi $d \neq 1$.

Siccome MCD(x-y,n) è diverso da 1 e da n,

allora vi è un divisore di n diverso da 1 ed n, ovvero n non è primo.

Principio fondamentale

Se esistono x e y, tali che

$x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$ e $\neg(x \equiv \pm y \pmod{n})$, allora n non è primo.

Pertanto,

se M è primo e $x^2 \bmod M = 1$,

allora $x = 1$ o $x = M-1$

Generazione di (grandi) numeri primi

Metodo probabilistico:

1. genera M di k bit a caso
2. for (i=0; i<T; i++) // ripeti T volte
   genera a<M a caso
   if (test(a,M)) goto 1 // M non primo
3. return M // Pr(M primo) > 1 - 4^{-T}

test(a,M) = test di Miller-Rabin

Esempio (con Test di Miller-Rabin)

Pr(M primo) > $1 - 4^{-T}$

es. per T = 10,

Pr(M primo) > $1\text{-}4^{-10} =$
= 0,99999904632568359375

Test di Miller-Rabin

```
// M-1 = b^k…b^2b^1b^0
d = 1;
for (i=k; i>=0; i--) {
    x = d; d = (d*d)%M; // d ≡ x^2 (mod M)
    if  (d = = 1 && x != 1 && x != M-1)
          return(TRUE); // 1 ≡ x^2 (mod M)
    if (b^i = = 1) d = (d*a)%M; }
// d = a^(M-1) mod M = 1
if (d != 1) return TRUE; else return (FALSE);
```

Test di Miller-Rabin

// M-1 = $b^k \ldots b^2 b^1 b^0$

d = 1;

for (i=k; i>=0; i--) {

x = d; d = (d*d)%M; // d ≡ x^2 (mod

if (d = = 1 && x != 1 && x != M-1)

return(TRUE); // 1 ≡ x^2 (mod M)

if (b^i = = 1) d = (d*a)%M; }

// d = a^{M-1} mod M = 1

if (d != 1) return TRUE; else return (FALSE);

Teorema: se M
è primo e
x^2 mod M = 1,
x = 1 o x = M-1

Test di Miller-Rabin

// M-1 = $b^k \dots b^2 b^1 b^0$

d = 1;

for (i=k; i>=0; i--) {

    x = d; d = (d*d)%M;

    if (d = = 1 && x != 1

        return(TRUE); // 1 mod M

    if (b^i = = 1) d = (d*a)%M; }

// d = a^{M-1} mod M = 1

if (d != 1) return TRUE; else return (FALSE);

Teorema: se M primo e a < M, a^{M-1} mod M = 1 (piccolo teorema di Fermat)

Risultati utili per DH (e per RSA)

Definizione: $\Phi(n)$ è il numero di interi minori di n che sono relativamente primi con n

Teorema (Eulero):
se M,a relativamente primi $a^{\Phi(M)} \bmod M = 1$

Corollario (Piccolo teorema di Fermat):
se M primo e a < M, $a^{M-1} \bmod M = 1$

Risultati utili per DH (e per RSA)

Proprietà III:

se M,a relativamente primi, allora

ax ≡ ay (mod M) → x ≡ y (mod M)

In altre parole, posso dividere per a e semplificare.

Dimostrazione:

Verrà fornita alla fine della trattazione del cifrario RSA.

Risultati utili per DH (e per RSA)

Teorema (Eulero):

se M,a relativamente primi $a^{\Phi(M)} \bmod M = 1$

Dimostrazione:

sia $R=\{x_1, x_2,..., x_{\Phi(M)}\}$ l'insieme dei numeri minori di M relativamente primi con M, e sia $S=\{ax_1 \bmod M, ax_2 \bmod M, ..., ax_{\Phi(M)} \bmod M\}$.

Dimostriamo ora che S=R.

Dimostrazione (segue):

Dimostriamo ora che S=R.

1) S incluso in R:

ax_i mod M è relativamente primo con M, poiché sia a sia x_i sono relativamente primi con M

2) R incluso in S:

non ci sono ripetizioni in S, infatti, per la proprietà III, poiché a è relativamente primo con M: se ax_i mod M = ax_j mod M allora $x_i = x_j$.

Dimostrazione (segue):

$R=\{x_1, x_2,\dots, x_{\Phi(M)}\}= S=\{ax_1 \bmod M, ax_2 \bmod M, \dots, ax_{\Phi(M)} \bmod M\}$

$x_1x_2\dots x_{\Phi(M)} \bmod M = (ax_1 \bmod M)(ax_2 \bmod M)\dots(ax_{\Phi(M)} \bmod M) \bmod M$

$x_1x_2\dots x_{\Phi(M)} \bmod M = (ax_1)(ax_2)\dots(ax_{\Phi(M)}) \bmod M =$

$a^{\Phi(M)} (x_1x_2\dots x_{\Phi(M)}) \bmod M$

$x_1x_2\dots x_{\Phi(M)} \bmod M = \quad a^{\Phi(M)} (x_1x_2\dots x_{\Phi(M)}) \bmod M$

Ora, per la proprietà III, siccome $x_1x_2\dots x_{\Phi(M)}$ è relativamente primo con M, in quanto prodotto di fattori primi con M, posso semplificare, ottenendo.

$1 \bmod M = a^{\Phi(M)} \bmod M$

Per realizzare DH, occorre

- Algoritmo efficiente per calcolare $a^b \bmod q$
- Algoritmo efficiente per generare q primo
- Algoritmo efficiente per generare una radice primitiva α di q

Radice primitiva α di q

Definizione:

α è una radice primitiva di q

se

per ogni b<q esiste i tale che b = α^i mod q

quindi $\{\alpha^0 \bmod q, \ldots, \alpha^{q-1} \bmod q\} =$
$= \{1, \ldots, q-1\}$

Dato q, come ottenere una radice primitiva α di q?

se a relativamente primo con q non è una radice primitiva di q, allora a^i mod q = 1 per i<q-1.

tuttavia, a^{q-1} mod q = 1 (Fermat),

quindi q-1 = k*i (i divisore di q-1).

esempio q=7, α = 3 (è una radice primitiva):

$\alpha^0 = 1, \alpha^1 = 3, \alpha^2 = 2, \alpha^3 = 6, \alpha^4 = 4, \alpha^5 = 5, \alpha^6 = 1$

$\alpha = 2$: $\alpha^0 = 1, \alpha^1 = 2, \alpha^2 = 4, \alpha^3 = 1, \alpha^4 = 2, \alpha^5 = 4, \alpha^6 = 1$

*q-1 = 6 = 2*3 = k*i, con $\alpha^i = 1$.*

Ripetizione dei numeri generati

se a relativamente primo con q non è una radice primitiva di q, allora a^i mod q = 1 per i<q-1.

quindi il ciclo si ripete dopo i:

$\alpha^0 = 1, \alpha^1 = \alpha, \ldots, \alpha^i = 1, \alpha^{i+1} = \alpha, \ldots, \alpha^{2i} = 1, \alpha^{2i+1} = \alpha, \ldots,$

da $\alpha^1 = \alpha$ fino a α^{i-1} non ci sono valori pari a 1. Stessa cosa da $\alpha^{i+1} = \alpha$ fino a α^{2i-1} , perché il ciclo si ripete. Quindi i soli valori pari a 1 sono per α^{k*i}.

Dato che a^{q-1} mod q = 1, dovrà essere q-1= k*i, per qualche k.

Dato q, come ottenere una radice primitiva α di q?

- *Algoritmo (scegliere q t.c. sia facile fattorizzare q-1)*:

- generare $\alpha<q$ a caso, tale che α sia relativamente primo con q
- fattorizzare q-1 ($f_1 f_2 \ldots f_j = q-1$)
- se esiste f tale che $\alpha^{((q-1)/f)} \bmod q = 1$

  allora torna al passo 1,

  altrimenti restituisci α

Perché?

se a non è una radice primitiva,

allora $(\exists i<q-1)$ $a^i \bmod q = 1$, e $(\exists k)$ $i*k=q-1$

$a^{i*k} \bmod q = 1$, e esplicitando i fattori primi

$a^{q-1} \bmod q = (a^{i_1*i_2*\ldots*i_s})^{k_1*k_2*\ldots*k_t} \bmod q = 1$,

$a^i \bmod q = a^{i_1*i_2*\ldots*i_s} \bmod q = 1$,

quindi $(a^{i_1*i_2*\ldots*i_s})^x \bmod 1 = 1$, per ogni x,

e, in particolare, per $x=k_1*k_2*\ldots*k_{t-1}$,

$a^{i_1*i_2*\ldots*i_s * k_1*k_2*\ldots*k_{t-1}} \bmod q = a^{(q-1)/k_t} \bmod q = 1$

Problemi di DH

- Protegge rispetto a lettura non autorizzata dei dati trasmessi su rete, non protegge rispetto ad attacchi di tipo attivo

- Permette solo di scambiare chiavi, non permette di cifrare direttamente messaggi arbitrari, quindi non può essere usato direttamente per autenticare/firmare

Scambio di chiavi di Diffie-Hellman

A

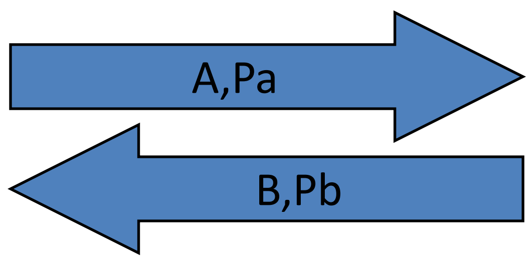
genera Sa < q

Pa = α^{Sa} % q

B

genera Sb < q

Pb = α^{Sb} % q

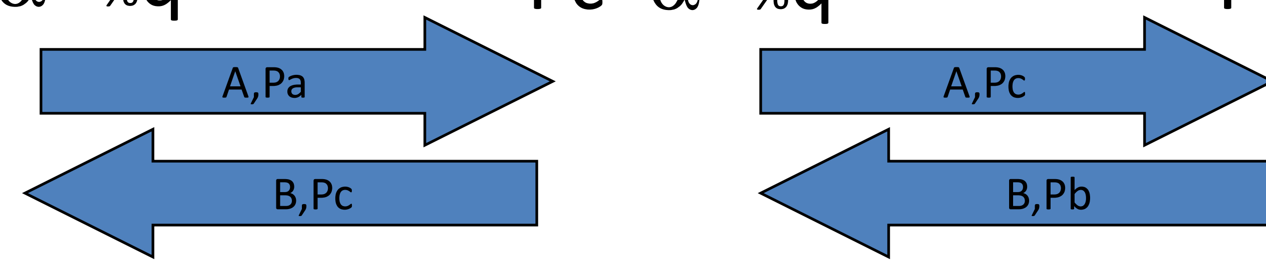


ottiene K = Pb^{Sa}

ottiene K = Pa^{Sb}

Attacco ‘man in the middle’ allo scambio di chiavi di Diffie-Hellman

A	C	B
$Sa<q$	$Sc<q$	$Sb<q$
$Pa=\alpha^{Sa}\%q$	$Pc=\alpha^{Sc}\%q$	$Pb=\alpha^{Sb}\%q$



A	C	B
$K1=Pc^{Sa}$	$K1=Pa^{Sc}$	$K2=Pc^{Sb}$
	$K2=Pb^{Sc}$	

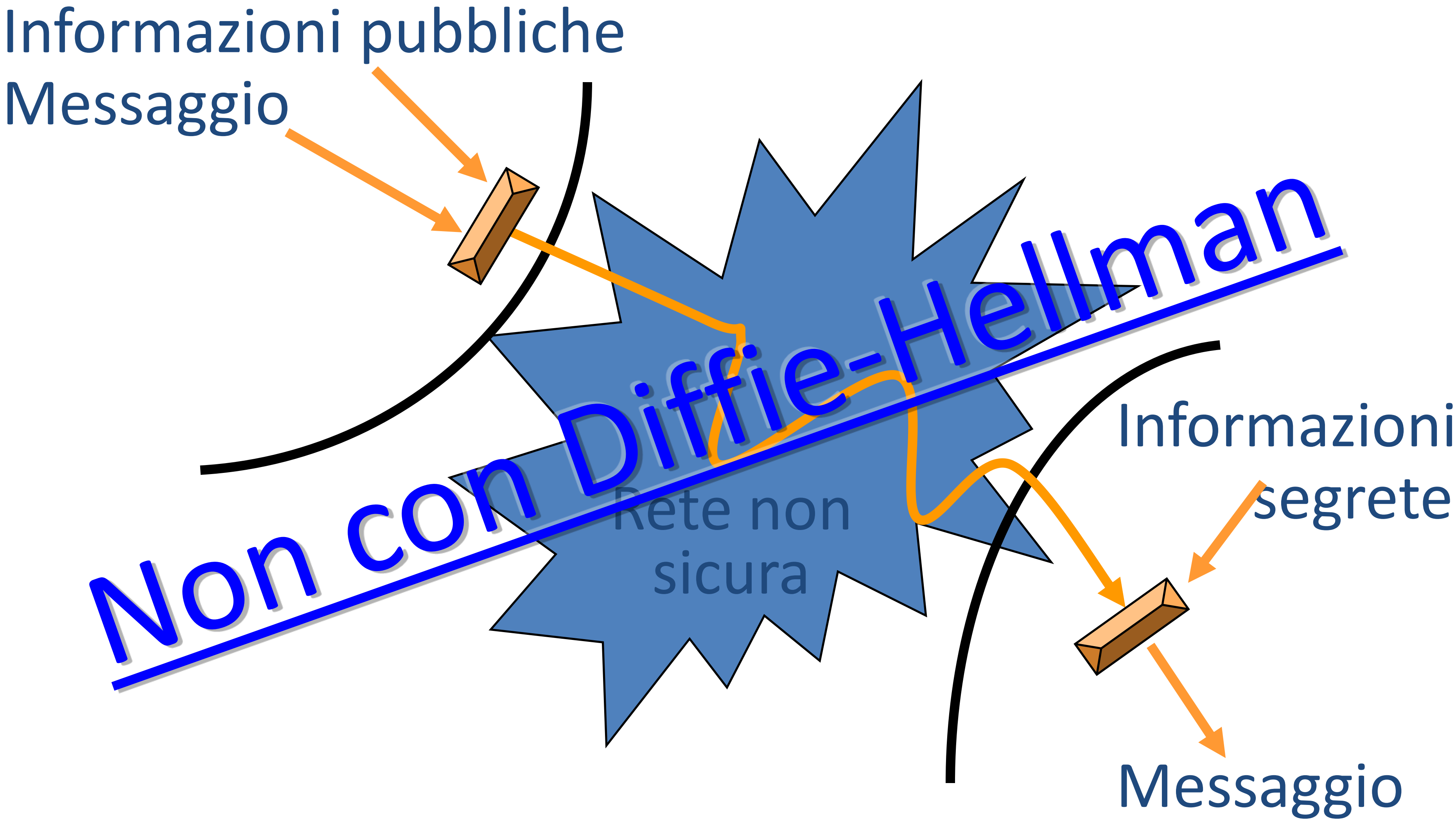
Soluzione

Utilizzare canale autenticato per lo scambio di Pa, Pb

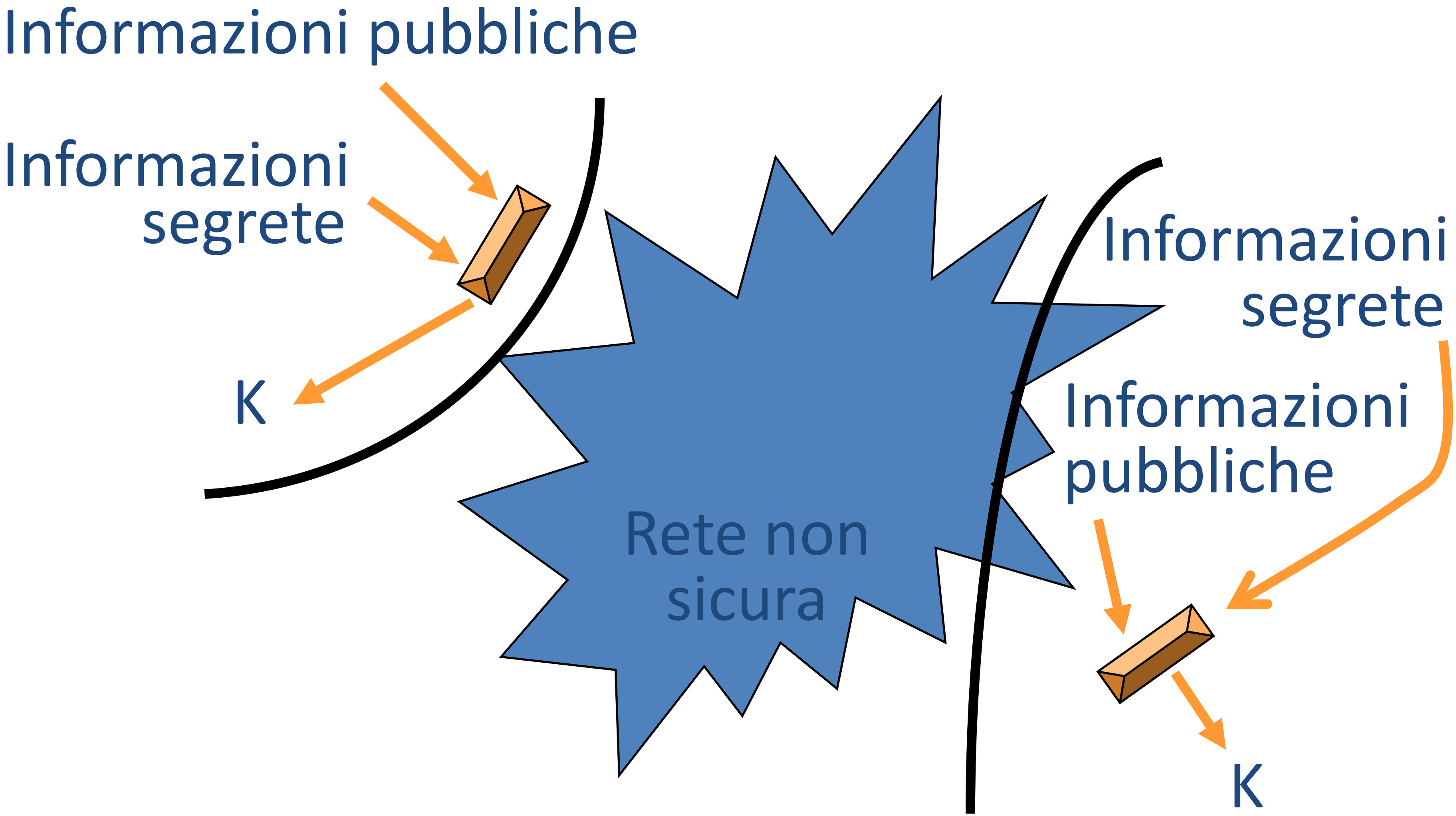
Problemi di DH

- Protegge rispetto a lettura non autorizzata dei dati trasmessi su rete, non protegge rispetto ad attacchi di tipo attivo

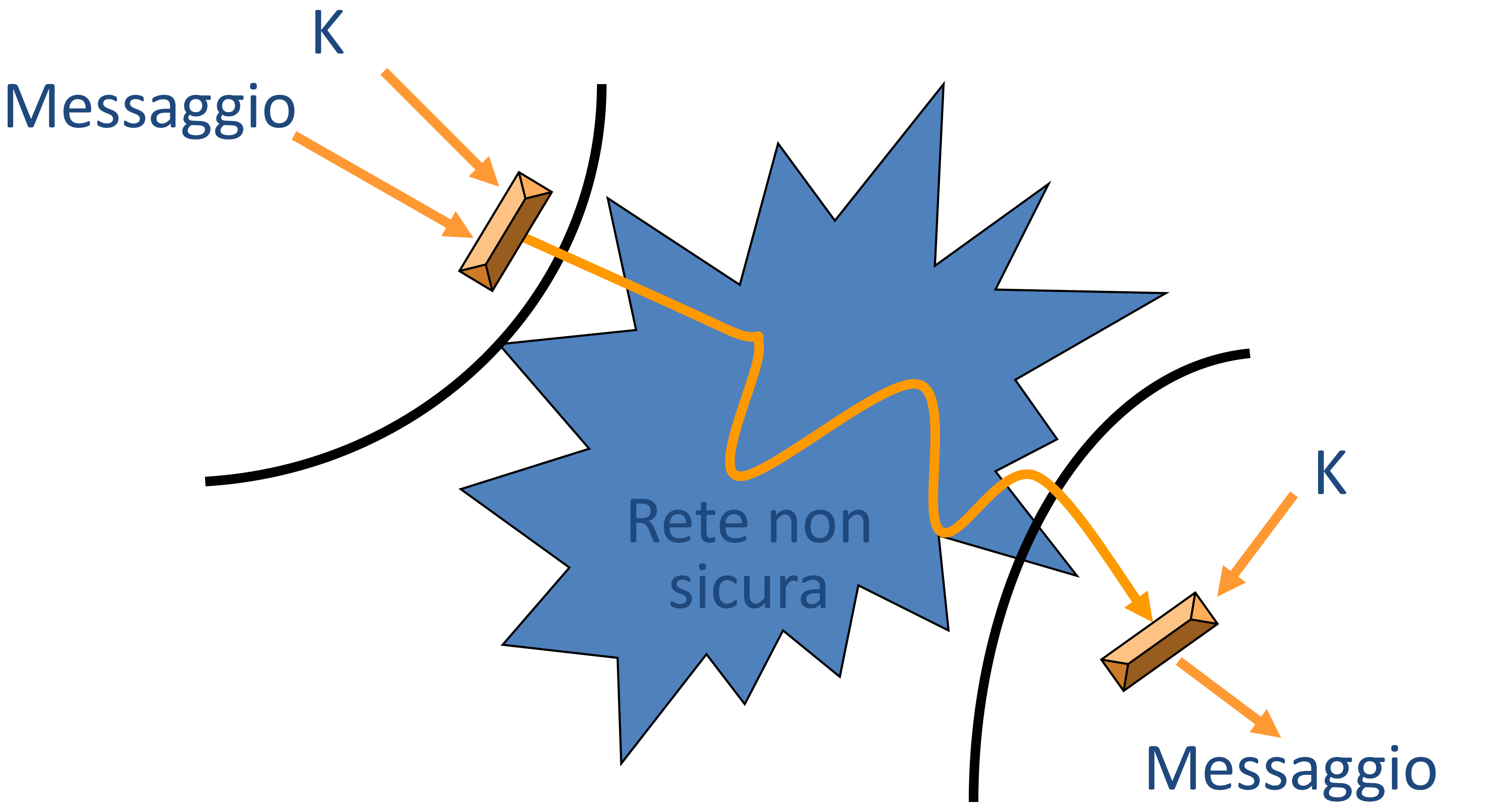
- Permette solo di scambiare chiavi, non permette di cifrare direttamente messaggi arbitrari, quindi non può essere usato direttamente per autenticare/firmare



Cifratura asimmetrica



Scambio chiavi DH ...



… poi cifratura simmetrica

Cifratura asimmetrica

Riferimenti

W. Trappe & L.C. Washington
Crittografia con elementi di teoria dei codici
Seconda edizione, 2009
(Pearson/Prentice Hall)