

“Rappresentiamo mondi complessi in cui gli oggetti sono in relazione gli uni con gli altri e studiamo come ragionare su queste rappresentazioni più espressive”

Cristina Baroglio

1

- La logica proposizionale è **dichiarativa**, cioè:
 - Separa nettamente conoscenza da inferenza
 - Consente di derivare fatti da fatti
 - La sua semantica è data da una relazione di verità che collega formule e mondi possibili
- È **composizionale**: il significato (valore di verità) di una formula è ottenuto componendo il significato (valore di verità) delle sue parti
- **Non è ambigua**

Cristina Baroglio

2

- La logica proposizionale **non** permette rappresentazioni compatte, esempio:

playsMusic(mia) \Leftarrow happy(mia)
playsMusic(jody) \Leftarrow happy(jody)
playsMusic(yolanda) \Leftarrow happy(yolanda)

- Non esiste un modo per codificare un' espressione generale, tipo “una persona, quando è felice, suona della musica”
- Non permette di esprimere relazioni fra elementi, es: padre(x, y)
- Si dice che la logica proposizionale **manca di espressività**

Cristina Baroglio

3

- **Logica temporale**:
permette di rappresentare e ragionare sul tempo, esempio “A non è vero finché B non diventa vero” , “Quando A è vero subito dopo B sarà vero”
- **Logica epistemica** (della conoscenza):
permette di esprimere relazioni come “l' agente i sa A” o “tutti sanno A” e di ragionare sulle implicazioni
- **Logica deontica** (normativa):
permette di esprimere obblighi, permessi, proibizioni, commitment e di ragionare su di essi
- **Logica fuzzy** (a valori sfumati):
introduce e ragiona su gradi di verità. I valori di verità appartengono all' intervallo [0,1]. Può esprimere efficacemente concetti come vecchio(X), per esempio.

Cristina Baroglio

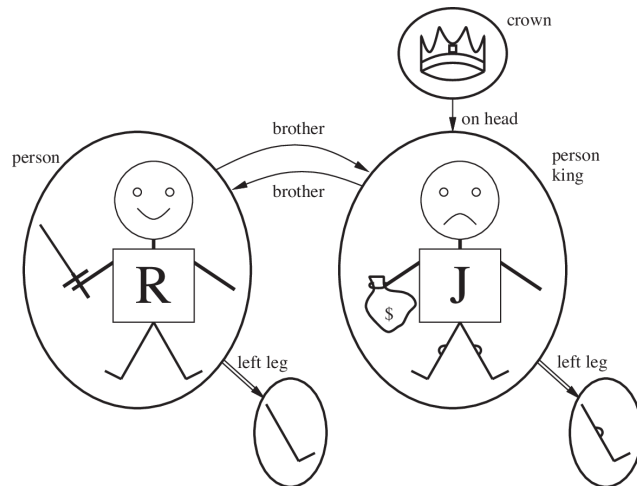
4

- Vogliamo **mantenere le buone caratteristiche della logica proposizionale** (semantica dichiarativa e composizionale, non ambiguità, indipendenza dal contesto)
- Vogliamo aggiungere la possibilità di esprimere **relazioni** fra **oggetti**, esempi:
 - **Oggetti**: mia, jody, butch, fido, orchidea1025, matita11, ...
 - **Relazioni**: genitoreDi, affidatarioDi, proprietarioDi, maggioreDi, adiacenteA, rosso, verde, partecipante, ...

- **Logica proposizionale**: ogni fatto o è vero o è falso
- **Logica del prim' ordine**: il mondo è fatto di oggetti in relazione fra di loro, una relazione può essere verificata oppure no
- La logica del prim' ordine è indicata dalla sigla **FOL** (First-Order Logic)

- **Modello proposizionale**:
attribuzione di valori di verità ai fatti (simboli proposizionali)
- **Modello prim' ordine**:
contiene un **dominio**, cioè l' insieme degli oggetti del mondo considerati, e delle **relazioni** fra tali oggetti (vedremo meglio più avanti)

- **Simboli di costante** Richard, John, 2, Gamba, Corona
- **Simboli di predicato** Fratello, <, >, SullaTesta
- **Simboli di funzione** +, Antenato
- **Simboli di variabile** x, y, z
- **Connettivi** $\Rightarrow \Leftrightarrow \wedge \vee \neg$
- **Uguaglianza** =
- **Quantificatori** $\forall \exists$
- **Punteggiatura** (),

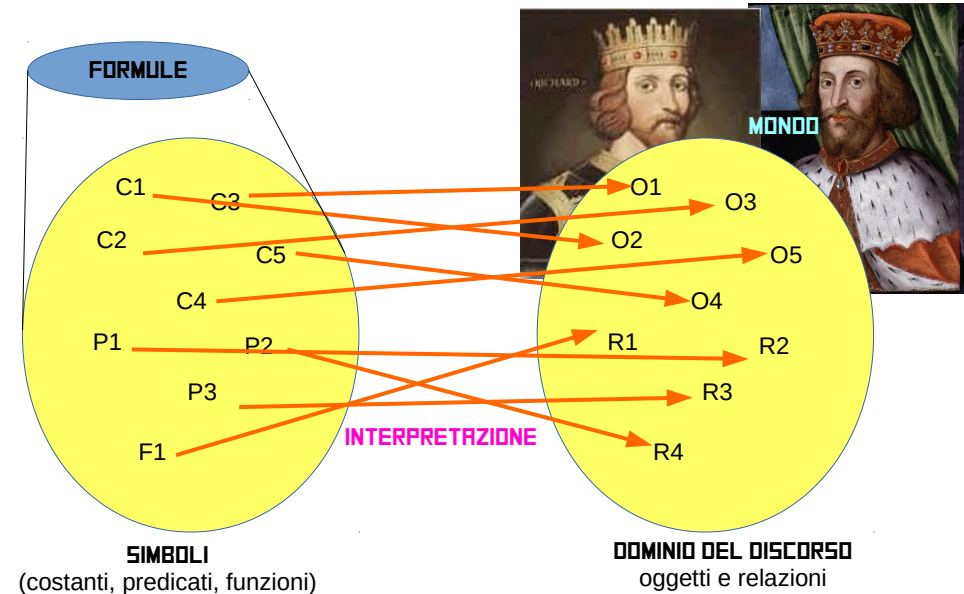


- Un **dominio di riferimento** è astratto in:
 - un insieme di oggetti (ognuno caratterizzato dalla propria **identità**)
 - Un insieme di relazioni ognuna espressa come **insieme di tuple**
- Una **relazione** è un insieme di tuple costituite da oggetti del dominio
 - per esempio:
 - $\{ \langle \text{Giovanni senza terra, Riccardo cuor di leone} \rangle, \langle \text{Riccardo cuor di leone, Giovanni senza terra} \rangle \}$
 che dice che Giovanni è in relazione con Riccardo e Riccardo è in relazione con Giovanni. Questo insieme ci dice chi è fratello di chi nel dominio considerato

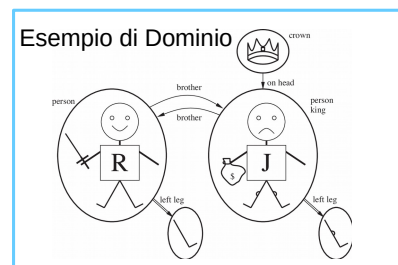
- Le relazioni sono insiemi di tuple ognuna delle quali collega oggetti del dominio, si dividono in:
 - Funzioni**: dato un insieme di oggetti restituiscono un oggetto
esempio: più(3, 5) oppure parent(X)
 - Predicati**: dato un insieme di oggetti ne catturano una proprietà, restituiscono vero o falso
esempio: Uomo(Andrea) oppure Accanto(X, a)

- Grammatica**:
 - formula \rightarrow formulaAtomica | (formula connettivo formula) | quantificatore variabile, ... formula | \neg formula
 - formulaAtomica \rightarrow predicato(termine, ...) | termine=termine
 - termine \rightarrow funzione(termine, ...) | costante | variabile
 - connettivo $\rightarrow \rightarrow | \Leftarrow | \wedge | \vee$
 - quantificatore $\rightarrow \forall | \exists$
 - costante $\rightarrow X | Y | \text{John} | \text{Corona} | \dots$
 - variabile $\rightarrow x | y | \dots$
 - predicato $\rightarrow \text{PrimaDi} | \text{ColoreDi} | \text{Piove} | \dots$
 - funzione $\rightarrow \text{Madre} | \text{GambaSinistra} | \dots$

- **simboli:**
 - **costante** → X | Y | John | Gamba | ...
 - **predicato** → PrimaDi | ColoreDi | Piove | ...
 - **funzione** → Madre | GambaSinistra | ...
- Nel libro sono scritti iniziando con una maiuscola
- Simboli di predicato e di funzione hanno un' **arità** (numero di parametri)
- Tutti i simboli hanno un' **interpretazione** ➔



- Un modello è una coppia $M = (D, I)$, dove D è il dominio del discorso e I è un' interpretazione. L' interpretazione è il fondamento per determinare il valore di verità delle formule. È un' associazione fra i simboli e gli oggetti del dominio del discorso



- **Esempio di interpretazione:**
 - **John** → Giovanni senza terra
 - **Richard** → Riccardo cuor di leone
 - **Fratello** → relazione che lega i figli degli stessi genitori (e non per esempio a quella dei nodi di un albero o di fratellanza fra monaci)
 - **Fratello(John, Richard)** è vera in M se $\langle \text{Richard}, \text{John} \rangle$ appartiene alla relazione Fratello. Nell' esempio ciò accade, quindi la formula atomica sarà vera

- **NB:** se cambio coerentemente i **simboli** le formule non cambieranno valore di verità
- **Esempi:**
 - **John Usurpatore** → Giovanni senza terra
 - **Richard Re** → Riccardo cuor di leone
 - **Fratello Brother** → relazione di fratellanza fra esseri umani
 - **Brother(Usurpatore, Re)** è vera

- **NB:** se invece cambio l' **interpretazione** dei simboli le formule potranno cambiare valore di verità
- **Esempi:**
 - John \rightarrow **Corona**
 - Richard \rightarrow **Giovanni senza terra**
 - Fratello \rightarrow relazione di fratellanza fra esseri umani
 - **Fratello(John, Richard)** è falsa, Giovanni e la corona non erano fratelli

- **NB:** attenzione che anche l' **interpretazione** dei simboli di funzione e di predicato può cambiare
- **Esempi:**
 - John \rightarrow **Giovanni senza terra**
 - Richard \rightarrow **Riccardo cuor di leone**
 - Fratello \rightarrow **relazione di fratellanza fra monaci**
 - **Fratello(John, Richard)** è falsa, Giovanni e Riccardo non erano confratelli

- **NB:** se cambio il **dominio del discorso** dovrò per forza di cose cambiare l' **interpretazione** dei simboli e le formule potranno cambiare valore di verità
- **Esempi:**
 - John \rightarrow **Nobunaga**
 - Richard \rightarrow **Yoshimune**
 - Fratello \rightarrow relazione di fratellanza fra esseri umani
 - **Fratello(John, Richard)** è falsa, Nobunaga e Yoshimune non erano fratelli

- Un modello **M** è una coppia **(D, I)** dove **D** è un **dominio** e **I** un' **interpretazione**
- **D** contiene un numero di oggetti maggiore o uguale a 1 (**elementi del dominio**) e le loro **relazioni**
- **I** specifica i **riferimenti** per:
 - **Simboli costanti** \rightarrow elementi del dominio
 - **Simboli di predicato** \rightarrow relazioni che catturano proprietà fra elementi del dominio
 - **Simboli di funzione** \rightarrow relazioni funzionali fra gli oggetti del dominio
- Come nella logica proposizionale **M** è un modello di α se α è vera in **M**

- Una formula è soddisfacibile quando esiste almeno un modello che la rende vera
- È valida quando è vera in tutti i modelli
- È insoddisfacibile quando non è mai vera

- Consideriamo un insieme di formule e un **dominio D** di riferimento
- Ogni **interpretazione I** dei simboli crea un diverso **modello**
- Nella logica proposizionale avevamo 2^N modelli con N numero dei simboli proposizionali
- **Nel prim' ordine quanti modelli si hanno?**

Come si crea l'enumerazione dei modelli in FOL?

Per ogni possibile **numero di elementi del dominio n** da **1** a ∞

Per ogni **predicato P_k** k-ario nel vocabolario

Per ogni possibile **relazione k-aria** su **n oggetti**

Per ogni **simbolo costante C** nel vocabolario

Per ogni **scelta di riferimento di C** su **n oggetti**

...

Enumerazione dei modelli e conseguenza logica

- In sunto i **modelli M** di un insieme di formule del prim' ordine **possono essere infiniti** perché:
 - se il dominio D è un insieme illimitato e se qualche formula P dell' insieme considerato contiene dei quantificatori, per determinarne il valore di verità sarebbe necessario calcolare il valore di verità delle infinite formule che si ottengono da P sostituendo alle variabili quantificate gli infiniti elementi di D
- **Conseguenza:** in generale nel prim' ordine è **impossibile** verificare la conseguenza logica (così come validità e insoddisfacibilità) tramite enumerazione dei modelli