Lifting di risoluzione e refutazione

- Nel proposizionale la **regola di inferenza di risoluzione** unita all'**algoritmo di refutazione** costituisce una procedura di inferenza completa
- Risoluzione e refutazione possono essere applicate anche a FOL:
  - La KB va tradotta in **CNF** (conjunctive normal form, cioè una congiunzione di clausole, ognuna delle quali è una disgiunzione di letterali)
  - Le variabili sono intese essere **quantificate universalmente**
  - Ogni KB FOL può essere tradotta in una KB CNF inferenzialmente equivalente. In particolare una formula **CNF** è **insoddisfacibile** solo quando l'originale **FOL** è **insoddisfacibile**, per questo è possibile applicare la procedura di refutazione

Tradurre una KB FOL in CNF

- La traduzione segue passi simili a quelli visti per il caso proposizionale (elimina biimplicazione, elimina implicazione, ecc.)
- La differenza è che bisogna gestire i quantificatori
- Vediamo un esempio. Supponiamo che la KB contenga la formula:

$\forall x\ [\forall y\ Animale(y) \Rightarrow Ama(x, y)] \Rightarrow [\exists y\ Ama(y, x)]$

Tutti coloro che amano gli animali sono amati da qualcuno

Tradurre una KB FOL in CNF

FOL: $\forall x\, [\forall y\, Animale(y) \Rightarrow Ama(x, y)] \Rightarrow [\exists y\, Ama(y, x)]$

Tutti coloro che amano gli animali sono amati da qualcuno

1) **Elimina l' implicazione:**
$\forall x\, \neg [\forall y\, Animale(y) \Rightarrow Ama(x, y)] \vee [\exists y\, Ama(y, x)]$
$\forall x\, \neg [\forall y\, \neg Animale(y) \vee Ama(x, y)] \vee [\exists y\, Ama(y, x)]$

2) **Sposta la negazione all' interno ($\neg \forall \equiv \exists \neg$):**
$\forall x\, [\exists y\, Animale(y) \wedge \neg Ama(x, y)] \vee [\exists y\, Ama(y, x)]$

3) **Standardizzazione delle variabili in ($\exists y \dots$) $\vee$ ($\exists y \dots$):**
$\forall x\, [\exists y\, Animale(y) \wedge \neg Ama(x, y)] \vee [\exists z\, Ama(z, x)]$

4) **Skolemizzazione (eliminazione degli esistenziali): ...**

Tradurre una KB FOL in CNF

FOL: $\forall x\, [\forall y\, Animale(y) \Rightarrow Ama(x, y)] \Rightarrow [\exists y\, Ama(y, x)]$

Tutti coloro che amano gli animali sono amati da qualcuno

1) **Elimina l' implicazione:** ...

2) **Sposta la negazione all' interno ($\neg \forall \equiv \exists \neg$): ...**

3) **Standardizzazione delle variabili in ($\exists y \dots$) $\vee$ ($\exists y \dots$): ...**
$\forall x\, [\exists y\, Animale(y) \wedge \neg Ama(x, y)] \vee [\exists z\, Ama(z, x)]$

4) **Skolemizzazione (eliminazione degli esistenziali):**
non possiamo applicare la regola EI perché la formula non segue il pattern **$\exists x\, F(x)$.** Otterremmo $\forall x\, [Animale(A) \wedge \neg Ama(x, A)] \vee [Ama(B, x)]$ che si legge: tutti amano uno specifico animale A oppure sono amati da un qualche di specifico B. A e B sono costanti e hanno lo stesso valore per tutti gli x!!

4) Skolemizzazione

- Vogliamo poter dire che animale e persona dipendono da x
- Sostituiamo ogni variabile quantificata esistenzialmente con una funzione che ha per argomenti tutte le variabili quantificate universalmente nel cui scope ricade:
  $\forall$x1, x2, … [$\exists$y P(y, x1,...) … $\exists$z Q(z, x1,...)]   diventa
  $\forall$x1, x2, … [P(**S1(x1, x2, …), ...**) … Q(**S2(x1, x2, …), ...**)]
- **S1**, **S2** sono dette **funzioni di Skolem**
- Nel caso particolare in cui l' esistenziale non ricade nello scope di alcun universale tali funzioni diventano **costanti di Skolem** (**EI**)
- Nell' esempio otterremo quindi
  $\forall$x [Animale(F(x)) $\wedge$ ¬ Ama(x, F(x))] $\vee$ [Ama(G(x), x)]

Tradurre una KB FOL in CNF

5) Cancella i quantificatori universali
~~$\forall$x~~ [Animale(F(x)) $\wedge$ ¬ Ama(x, F(x))] $\vee$ [Ama(G(x), x)]

6) Distribuisci $\vee$ su $\wedge$
[Animale(F(x)) $\vee$ Ama(G(x), x)] $\wedge$ [¬ Ama(x, F(x))] $\vee$ [Ama(G(x), x)]

Il risultato non è più leggibile ma non è inteso essere usato da un essere umano. La traduzione è automatizzabile e le clausole servono al processo di inferenza

Binary resolution in FOL

$$\frac{l_1 \lor \ldots \lor l_k, \quad m_1 \lor \ldots \lor m_n}{\text{SUBST}(\theta, l_1 \lor \ldots l_{i-1} \lor l_{i+1} \lor \ldots \lor l_k \lor m_1 \lor \ldots m_{j-1} \lor m_{j+1} \lor \ldots \lor m_n)}$$

- Per tutti i valori di i la sostituzione unifica l_i e $\neg m_j$
- Esempio: consideriamo Re(John) e ¬Re(x). Sono opposte e la sostituzione θ = {x/John} rende la prima equivalente al negato della seconda: Re(John)/θ ≡ ¬¬Re(x) /θ
- Le due clausole da risolvere **non condividono variabili**
- Occorre fare il **lifting della fattorizzazione**: due letterali sono ridotti ad uno non se sono uguali ma se sono unificabili. L' unificatore va applicato alle clausole intere
- **Binary resolution + fattorizzazione costituisce una regola di inferenza completa**

Dimostrazione per refutazione

- Grazie al lifting della resolution diventa possibile applicare l' inferenza per refutazione a FOL
- Vediamo un esempio:
  - A) Tutti coloro che amano gli animali sono amati da qualcuno
  - B) Tutti coloro che uccidono animali non sono amati da nessuno
  - C) Jack ama tutti gli animali
  - D) O Jack o Curiosity hanno ucciso il gatto, il cui nome è Tuna
  - E) Curiosity ha ucciso il gatto?

Esempio

A) $\forall x\, [\forall y\, Animale(y) \Rightarrow Ama(x, y)] \Rightarrow [\exists y\, Ama(y, x)]$

B) $\forall x\, [\exists z\, Animale(z) \wedge Uccide(x, z)] \Rightarrow [\forall y\, \neg Ama(y, x)]$

C) $\forall x\, Animale(x) \Rightarrow Ama(Jack, x)$

D) $Uccide(Jack, Tuna) \vee Uccide(Curiosity, Tuna)$

E) $Gatto(Tuna)$

F) $\forall x\, Gatto(x) \Rightarrow Animale(x)$

Alle precedenti aggiungiamo il goal negato:

G) $\neg Uccide(Curiosity, Tuna)$

Esempio: da FOL a CNF

A1) $Animale(F(x)) \vee Ama(G(x), x)$

A2) $\neg Ama(x, F(x)) \vee Ama(G(x), x)$

B) $\neg Ama(y, x) \vee \neg Animale(z) \vee \neg Uccide(x, z)$

C) $\neg Animale(x) \vee Ama(Jack, x)$

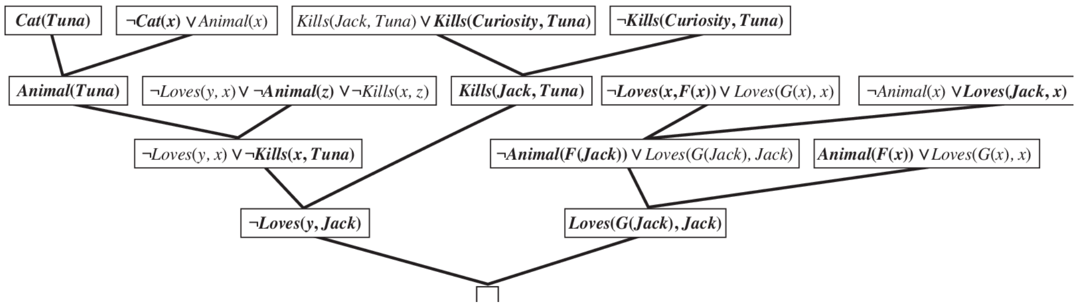
D) $Uccide(Jack, Tuna) \vee Uccide(Curiosity, Tuna)$

E) $Gatto(Tuna)$

F) $\neg Gatto(x) \vee Animale(x)$

G) $\neg Uccide(Curiosity, Tuna)$

Esempio: resolution FOL



Valutazione: refutation-complete

- La **risoluzione** non è in grado di generare tutte le conseguenze logiche di una KB ma **è refutation-complete**:
  - Se una KB è insoddisfacibile, la resolution sarà sempre in grado di derivare una contraddizione
  - Di conseguenza sarà in grado di derivare tutte le risposte a una query Q(x) da KB a patto che KB ∧¬ Q(x) sia insoddisfacibile

Costruire una KB in FOL

- Ingegneria della conoscenza (knowledge engineering):
  1) Identificare l'uso che si desidera fare della KB
  2) Raccogliere conoscenza rilevante (informale)
  3) Definire un vocabolario di costanti, funzioni e predicati
  4) Formalizzare la conoscenza in formule FOL
- Quando si vuole interrogare la KB:
  1) Descrivere in modo formale la specifica istanza del problema
  2) Interrogare la KB