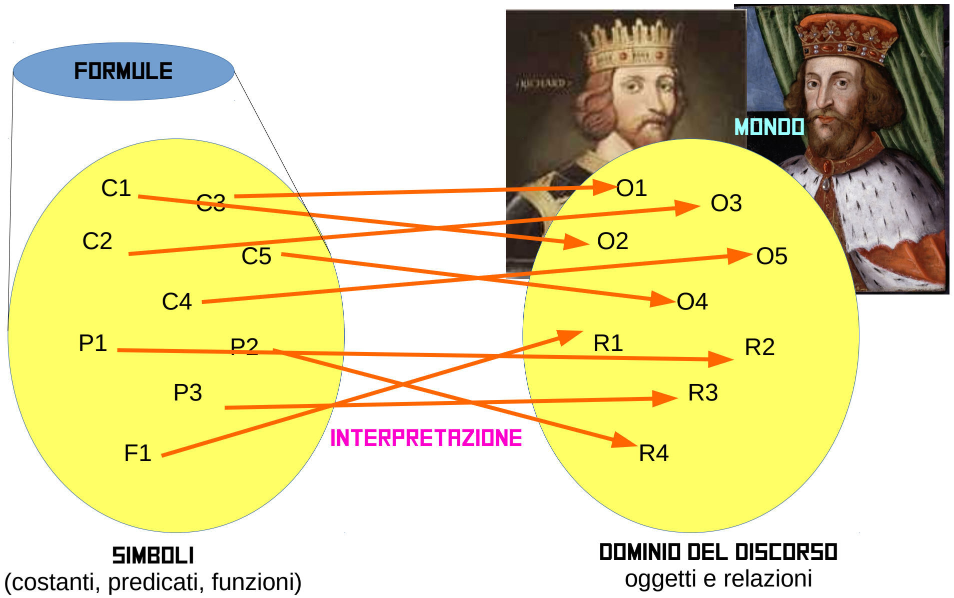
Logica prim'ordine

- Grammatica:
  - formula → formulaAtomica | (formula connettivo formula) | quantificatore variabile, … formula | ¬ formula
  - formulaAtomica → predicato(termine, ...) | termine=termine
  - termine → funzione(termine, ...) | costante | variabile
  - connettivo → ⇒ | ⇔ | ∧ | ∨
  - quantificatore → ∀ | ∃
  - costante → X | Y | John | Corona | …
  - variabile → x | y | …
  - predicato → PrimaDi | ColoreDi | Piove | …
  - funzione → Madre | GambaSinistra | ...

Logica prim'ordine

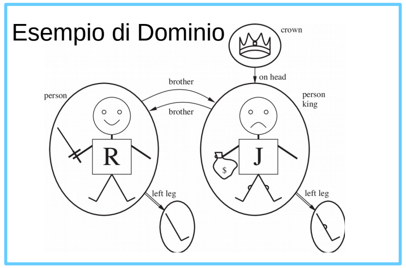
- simboli:
  - costante → X | Y | John | Gamba | …
  - predicato → PrimaDi | ColoreDi | Piove | …
  - funzione → Madre | GambaSinistra | …
- Nel libro sono scritti iniziando con una maiuscola
- Simboli di predicato e di funzione hanno un' **arità** (numero di parametri)
- Tutti i simboli hanno **un' interpretazione**

Interpretazione



Interpretazione

- Un modello è una coppia **M =(D, I)**, dove **D** è il dominio del discorso e **I** è un' interpretazione. L' interpretazione è il fondamento per determinare il valore di verità delle formule. È un' associazione fra i simboli e gli oggetti del dominio del discorso



- **Esempio di interpretazione**:
  - John → Giovanni senza terra
  - Richard → Riccardo cuor di leone
  - Fratello → relazione che lega i figli degdegli stessi genitori (e non per esempio a quella dei nodi di un albero o di fratellanza fra monaci)
  - Fratello(John, Richard) è vera in M se <Richard, John> appartiene alla relazione Fratello. Nell' esempio ciò accade, quindi la formula atomica sarà vera

Interpretazione

- **NB**: se cambio coerentemente i **simboli** le formule non cambieranno valore di verità
- **Esempi**:
  - ~~John~~ Usurpatore → Giovanni senza terra
  - ~~Richard~~ Re → Riccardo cuor di leone
  - ~~Fratello~~ Brother → relazione di fratellanza fra esseri umani
  - Brother(Usurpatore, Re) è vera

Interpretazione

- **NB**: se invece cambio l' **interpretazione** dei simboli le formule potranno cambiare valore di verità
- **Esempi**:
  - John ↣ Corona
  - Richard ↣ Giovanni senza terra
  - Fratello ↣ relazione di fratellanza fra esseri umani
  - Fratello(John, Richard) è falsa, Giovanni e la corona non erano fratelli

Interpretazione

- **NB**: attenzione che anche l' **interpretazione** dei simboli di funzione e di predicato può cambiare
- **Esempi**:
  - John ↣ Giovanni senza terra
  - Richard ↣ Riccardo cuor di leone
  - Fratello ↣ relazione di fratellanza fra monaci
  - Fratello(John, Richard) è falsa, Giovanni e Riccardo non erano confratelli

Interpretazione

- **NB**: se cambio il **dominio del discorso** dovrò per forza di cose cambiare l' interpretazione dei simboli e le formule potranno cambiare valore di verità
- **Esempi**:
  - John ↣ Nobunaga
  - Richard ↣ Yoshimune
  - Fratello ↣ relazione di fratellanza fra esseri umani
  - Fratello(John, Richard) è falsa, Nobunaga e Yoshimune non erano fratelli

Modello nella logica del prim'ordine

- Un modello M è una coppia (D, I) dove D è un dominio e I un' interpretazione
- D contiene un numero di oggetti maggiore o uguale a 1 (elementi del dominio) e le loro relazioni
- I specifica i riferimenti per:
  - **Simboli costanti** → elementi del dominio
  - **Simboli di predicato** → relazioni che catturano proprietà fra elementi del dominio
  - **Simboli di funzione** → relazioni funzionali fra gli oggetti del dominio
- Come nella logica proposizionale M è un modello di α se α è vera in M

Soddisfacibilità

- Una formula è soddisfacibile quando esiste almeno un modello che la rende vera
- È valida quando è vera in tutti i modelli
- È insoddisfacibile quando non è mai vera

Enumerazione dei modelli e conseguenza logica

- Consideriamo un insieme di formule e un **dominio D** di riferimento
- Ogni **interpretazione I** dei simboli crea un diverso **modello**
- Nella logica proposizionale avevamo 2^N modelli con N numero dei simboli proposizionali
- Nel prim' ordine quanti modelli si hanno?

Come si crea l'enumerazione dei modelli in FOL?

```
Per ogni possibile numero di elementi del dominio n
da 1 a ∞
  Per ogni predicato Pk k-ario nel vocabolario
    Per ogni possibile relazione k-aria su n
    oggetti
      Per ogni simbolo costante C nel vocabolario
        Per ogni scelta di riferimento di C su n
        oggetti
          ...
```

Enumerazione dei modelli e conseguenza logica

- In sunto i **modelli** M di un insieme di formule del prim' ordine **possono essere infiniti** perché:
  - se il dominio D è un insieme illimitato e se qualche formula P dell' insieme considerato contiene dei quantificatori, per determinarne il valore di verità sarebbe necessario calcolare il valore di verità delle infinite formule che si ottengono da P sostituendo alle variabili quantificate gli infiniti elementi di D
- **Conseguenza**: in generale nel prim' ordine è **impossibile** verificare la conseguenza logica (così come validità e insoddisfacibilità) tramite enumerazione dei modelli

Termini

- **termine → funzione(termine, ...) | costante | variabile**
- È un' espressione logica che si riferisce a un oggetto
- **Costanti**: danno un nome a oggetti di uso comune
- **Funzioni**:
  - permettono di riferirsi a oggetti che non hanno un nome proprio
  - NB: non costruiscono l' oggetto restituito!
  - **GambaSinistra(John)** è un modo per riferirsi all' oggetto del dominio gamba sinistra dell' oggetto del dominio identificato da John, non occorre sapere cosa sia una gamba sinistra o come sia fatta per ottenere questo risultato

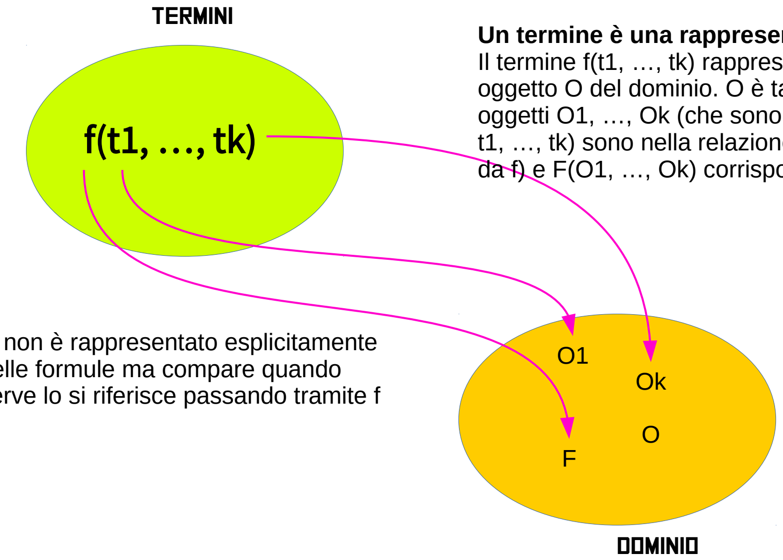
Termine ground

- Un termine è **ground** quando non contiene variabili
- Esempi
  - GambaSinistra(John)
  - Richard
  - Corona
  - Fratello(John, Richard)

Interpretazione dei termini

- È il processo tramite il quale si passa dalla scrittura di un termine all' oggetto che questo identifica
- Se il termine è una **costante** l' identificazione è immediata
- Se il termine è dato tramite una **funzione f(t1, …, tk)**:
  - f si riferisce a una funzione F del modello
  - t1, …, tk sono a loro volta dei termini
  - L' interpretazione è un processo ricorsivo:
    - prima si associa a ogni tj l' elemento del dominio a cui fa riferimento
    - poi si usa la F come specificata dal modello
- E le **variabili**? La risposta più avanti

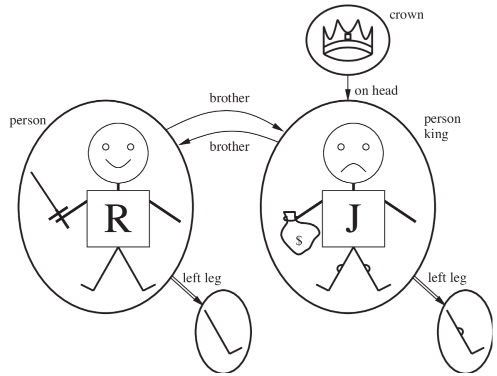
Interpretazione dei termini



Un termine è una rappresentazione
Il termine f(t1, …, tk) rappresenta un oggetto O del dominio. O è tale che gli oggetti O1, …, Ok (che sono riferiti da t1, …, tk) sono nella relazione F (riferita da f) e F(O1, …, Ok) corrisponde ad O

O non è rappresentato esplicitamente nelle formule ma compare quando serve lo si riferisce passando tramite f

Interpretazione e termini



Nell'esempio, le **gambe** di Riccardo e Giovanni non hanno una costante che le rappresenta nelle formule ma sono comunque **oggetti del dominio**

Sono riferiti da una funzione: **GambaSinistra(X)**

Quindi il termine **GambaSinistra(Giovanni)** corrisponde a un preciso oggetto esistente nel dominio

Formule atomiche

- formulaAtomica → predicato(termine, ...) |
  termine=termine
- Una formula atomica è vera quando:
  - dato un modello che include una specifica interpretazione,
  - la relazione a cui fa riferimento il simbolo di predicato
  - applicata agli oggetti identificati dai termini
  - è vera
- Esempi:
  sposato(madre(Richard), padre(John))
  padre(Richard) = padre(John)

Formule complesse

- Gli operatori della logica permettono di comporre predicati in fomule complesse
- **Esempi**:
  - Re(John) ⇒ ¬ Re(Richard)
  - ¬ Fratello(Corona, Fratello(John))
  - Persona(X) ∧ SullaTesta(Corona, X) ⇒ Re(X)

Quantificatori

- Quantificatore → ∀ | ∃
- I quantificatori permettono di esprimere *proprietà di collezioni di oggetti*
- Richiedono di fare riferimento a *generici oggetti* che saranno identificati da **variabili**, esempio "tutti gli uomini" diventa "tutti gli X che sono uomini"
- La logica del prim' ordine prevede:
  - ∀: per ogni (quantificatore universale)
  - ∃: esiste (quantificatore esistenziale)

Quantificatore universale

Si considerino una formula F e un modello M = (D,I). L' espressione ∀x F è vera nel modello M se e solo se F è vera per **qualsiasi** intepretazione di x in M

FORMA GENERALE: ∀ 〈 variabili 〉 〈 formula 〉

ESEMPIO:

Al corso di sistemi intelligenti tutti sono intelligenti

∀x Partecipa(x, SISINT) ⇒ Intelligente(x)

Quantificatore universale

Si considerino una formula F e un modello M = (D,I). L' espressione ∀x F è vera nel modello M se e solo se F è vera per qualsiasi intepretazione di x in M

FORMA GENERALE: ∀ 〈 variabili 〉 〈 formula 〉

ESEMPIO:

Al corso di sistemi intelligenti tutti sono intelligenti

∀x Partecipa(x, SISINT) ⇒ Intelligente(x)

Si può espandere in una **congiunzione** del tipo:

(Partecipa(Miriam, SISINT) ⇒ Intelligente(Miriam)) ∧ (Partecipa(Matteo, SISINT) ⇒ Intelligente(Matteo)) ∧ (Partecipa(Rufus, SISINT) ⇒ Intelligente(Rufus)) ∧ … ∧ (Partecipa(SISINT, SISINT) ⇒ Intelligente(SISINT)) ∧ …

Quantificatore universale

Si considerino una formula F e un modello M = (D,I). L' espressione ∀x F è vera nel modello M se e solo se F è vera per qualsiasi intepretazione di x in M

FORMA GENERALE: ∀ 〈 variabili 〉 〈 formula 〉

ESEMPIO:

Al corso di sistemi intelligenti tutti sono intelligenti

∀x Partecipa(x, SISINT) ⇒ Intelligente(x)

Si può espandere in una congiunzione del tipo:

(Partecipa(Miriam, SISINT) ⇒ Intelligente(Miriam)) ∧ (Partecipa(Matteo, SISINT) ⇒ Intelligente(Matteo)) ∧ (Partecipa(Rufus, SISINT) ⇒ Intelligente(Rufus)) ∧ … ∧ **(Partecipa(SISINT, SISINT) ⇒ Intelligente(SISINT))** ∧ …

Notate che "qualsiasi interpretazione" significa considerare tutti gli oggetti del dominio senza filtri. Non esistono i tipi di argomento

Quantificatore esistenziale

Si considerino una formula F e un modello M = (D,I). L' espressione $\exists x$ F è vera nel modello M se e solo se F è vera per **qualche** intepretazione di x in M

FORMA GENERALE: $\exists$ ⟨ variabili ⟩ ⟨ formula ⟩

ESEMPIO:

Al corso di sistemi intelligenti qualcuno è intelligente

$\exists x$ Partecipa(x, SISINT) $\land$ Intelligente(x)

Quantificatore esistenziale

Si considerino una formula F e un modello M = (D,I). L' espressione $\exists x$ F è vera nel modello M se e solo se F è vera per qualche intepretazione di x in M

FORMA GENERALE: $\exists$ ⟨ variabili ⟩ ⟨ formula ⟩

ESEMPIO:

Al corso di sistemi intelligenti qualcuno è intelligente

$\exists x$ Partecipa(x, SISINT) $\land$ Intelligente(x)

Si può espandere in una disgiunzione del tipo:

(Partecipa(Miriam, SISINT) $\land$ Intelligente(Miriam)) $\lor$ (Partecipa(Matteo, SISINT) $\land$ Intelligente(Matteo)) $\lor$ (Partecipa(Rufus, SISINT) $\land$ Intelligente(Rufus)) $\lor$ … $\lor$ (Partecipa(SISINT, SISINT) $\land$ Intelligente(SISINT)) $\lor$ …

Quantificatori e formule: attenzione

- Quale differenza c' è fra queste formule? Sono equivalenti?

1) $\forall x$ Partecipa(x, SISINT) $\Rightarrow$ Intelligente(x)
2) $\forall x$ Partecipa(x, SISINT) $\land$ Intelligente(x)

Quantificatori e formule: attenzione

- Quale differenza c' è fra queste formule? Sono equivalenti? NO

1) $\forall x$ Partecipa(x, SISINT) $\Rightarrow$ Intelligente(x)
   tutti quegli x che partecipano al corso di SISINT sono intelligenti
2) $\forall x$ Partecipa(x, SISINT) $\land$ Intelligente(x)
   tutti partecipano al corso di SISINT e sono intelligenti

Quantificatori e formule: attenzione

- Quale differenza c'è fra queste formule? Sono equivalenti?

1) $\exists x$ Partecipa(x, SISINT) $\Rightarrow$ Intelligente(x)
2) $\exists x$ Partecipa(x, SISINT) $\wedge$ Intelligente(x)

Quantificatori e formule: attenzione

- Quale differenza c'è fra queste formule? Sono equivalenti?

1) $\exists x$ Partecipa(x, SISINT) $\Rightarrow$ Intelligente(x)
   questa è equivalente a $\exists x \neg$ Partecipa(x,SISINT) $\vee$ Intelligente(x) quindi significa che esiste un x tale per cui o x non partecipa a SISINT oppure x è intelligente
2) $\exists x$ Partecipa(x, SISINT) $\wedge$ Intelligente(x)
   questa ci dice che esiste qualcuno fra i partecipanti a SISINT che è intelligente

Quantificatori annidati

1) **$\exists x\ \exists y\ F$** è equivalente a $\exists y\ \exists x$ F, si scrive anche $\exists x,y$ F
2) **$\forall x\ \forall y\ F$** è equivalente a $\forall y\ \forall x$ F, si scrive anche $\forall x,y$ F
3) **$\forall x\ \exists y\ F$**: per tutti … esiste …
   $\forall x\ \exists y$ Ama(x, y)   tutti amano qualcuno (o qualcosa)
4) **$\exists y\ \forall x\ F$**: esiste … per ogni …
   $\exists y\ \forall x$ Ama(x, y)   esiste qualcuno (o qualcosa) che tutti amano

Quantificatori e negazione

1) **$\forall x \neg F \equiv \neg \exists x F$**
   $\forall x \neg$ Piace(x, Cavolfiore) $\equiv \neg \exists x$ Piace(x, Cavolfiore)
   A nessuno piace il cavolfiore equivale a non c'è nessuno a cui piaccia il cavolfiore
2) **$\exists x \neg F \equiv \neg \forall x F$**
   $\exists x \neg$ Piace(x, Cavolfiore) $\equiv \neg \forall x$ Piace(x, Cavolfiore)
   c'è qualcuno a cui non piace il cavolfiore equivale a non a tutti piace il cavolfiore
3) **$\forall x\ F \equiv \neg \exists x \neg F$**
   per tutti vale F equivale a non c'è nessuno per cui non vale F
4) **$\exists x\ F \equiv \neg \forall x \neg F$**
   c'è qualcuno per cui vale F equivale a non per tutti non vale F

(Dis)uguaglianza e quantificatori

- L' uguaglianza riguarda esclusivamente termini
- Supponiamo di voler dire che John ha almeno due fratelli, come esprimere questo in formule?
- ∃ y, z Fratello(John, y) ∧ Fratello(John, z) non è sufficiente
  Se y, z=Richard la formula sarà vera!
- Occorre aggiungere che i due termini con cui saranno unificate le variabili y e z debbono riferirsi a oggetti diversi
- ∃ y, z Fratello(John, y) ∧ Fratello(John, z) ∧ ¬(y=z)

Verso l'unicità dei nomi

- Consideriamo l' asserzione
  Fratello(John, Richard) ∧ Fratello(John, Ramon)
- Sebbene l' intuizione sia che John ha due fratelli questa formula è soddisfatta anche quando le due costanti Richard e Ramon si riferiscono alla stessa persona!! Anche in questo caso occorre aggiungere ¬(Richard=Ramon)
- Ancora peggio se vogliamo catturare che John ha solo due fratelli e non di più, dovremmo scrivere
  Fratello(John, Richard) ∧ Fratello(John, Ramon) ∧ ¬(Richard=Ramon) ∧
  ∀x (Fratello(John, x) ⇒ (x=Richard ∨ x=Ramon))
- La semantica non è intuitiva, le formule sono troppo complesse

Una semantica più intuitiva: database semantics

- Database semantics: è la semantica usata nella programmazione logica e si basa su tre assunti
  - Unicità dei nomi:
    assumiamo che costanti diverse si riferiscano a oggetti del dominio diversi
  - Closed-world assumption:
    assumiamo che le formule atomiche delle quali non si conosce la verità siano false
  - Domain closure:
    un modello non contiene più elementi di quelli nominati dalle costanti
- Usando questa semantica la formula Fratello(John, Richard) ∧ Fratello(John, Ramon) rappresenta il fatto che John ha due fratelli, Richard e Ramon
- La database semantics può essere usata quando siamo sicuri dell' identità di tutti gli elementi. Da notare che riduce il numero di modelli possibili, rendendoli tipicamente finiti

Nota: nel libro si usa la semantica standard di FOL anche dopo aver presentato questa

Numeri, insiemi, liste

- Leggere da 8.3.1 a 8.3.3

Inferenza

1) Proposizionalizzazione di una KB e uso di un algoritmo per la logica proposizionale
2) Lifting delle regole di inferenza al prim'ordine e unificazione

Interrogazione di KB FOL

- Le interrogazioni a una KB FOL sono di due tipi:
  - ask(KB, Re(John)): viene chiesto se una formula in cui compaiono solo termini ground sia vera o falsa.
    La risposta sarà **true** o **false**
  - ask(KB, Re(x)): viene chiesto se esiste un qualche valore per la variabile x tale per cui la formula è vera.
    La risposta sarà **false** nel caso non esista tale valore, se invece esiste la riposta indicherà un termine ground che usato al posto di x rende vera la formula.

Sostituzione

- Una sostituzione θ è un insieme **{x1/g1, x2/g2, …, xn/gn }** dove le varie xi sono variabili e le varie gi sono termini ground
- Data una formula F e una sostituzione θ, la scrittura **F/θ** indica la formula ottenuta sostituendo le occorrenze delle variabili indicate in θ con i relativi termini ground
- **Esempio**:
  - F = Fratello(x, y)
  - θ ={ x/John}
  - F/θ= Fratello(John, y)

Trasformazione in formule proposizionali

- Primo passo dell' inferenza:
  formule del prim' ordine → formule proposizionali
- Si usano:
  - Regola di istanziazione universale
  - Regola di istanziazione esistenziale

Inferenza UI (universal instantiation)

- Regola di istanziazione universale UI:

$$\frac{\forall x\ \alpha}{\text{SUBST}(\{x/g\}, \alpha)}$$

- Da una formula quantificata universalmente si possono inferire tutte le formule ottenute sostituendo un termine ground del vocabolario alla variabile quantificata
- SUBST identifica il processo di sostituzione, ha per argomenti la sostituzione in questione e la formula

Inferenza UI (universal instantiation)

- Data la formula **F : ∀x (Partecipa(x, SISINT) ⇒ Intelligente(x))**
- Date le sostituzioni alternative **θ1 = {x/Rufus}** e **θ1 = {x/Adele}** l' applicazione di UI permette di inferire rispettivamente:
  - **F θ1** è Partecipa(Rufus, SISINT) ⇒ Intelligente(Rufus)
  - **F θ2** è Partecipa(Adele, SISINT) ⇒ Intelligente(Adele)

NOTA: Fθ è un modo sintetico per scrivere SUBST(θ, F)

Regola di istanziazione esistenziale (EI)

- Le variabili compaiono anche in formule quantificate esistenzialmente. In questo caso la regola diventa

$$\frac{\exists x\ \alpha}{\text{SUBST}(\{x/k\}, \alpha)}$$

- In questo caso **k deve essere una costante nuova**, cioè non ancora utilizzata nella KB
- L' inferenza si limita a <u>dare un nome</u> a questo elemento

Regola di istanziazione esistenziale

Esempio

- Data la formula ∃ x Corona(x) ∧ SullaTesta(x, John)
- Possiamo inferire **Corona(C1) ∧ SullaTesta(C1, John)** dove **C1** è un nome di costante nuovo inventato appositamente tramite un processo detto <u>Skolemizzazione</u>
- C1 non compare nella KB fino alla sua creazione
- **Attenzione**: usando la semantica standard di FOL, che non prevede unicità dei nomi, potremo poi inferire che **C1 = CoronaInglese**

Differenza UI fra e EI

- Le formule quantificate universalmente hanno tante istanze prodotte da UI:
  - La nuova KB è **logicamente equivalente** a quella originaria
- Quelle quantificate esistenzialmente sono istanziate tramite EI una volta sola e poi scartate:
  - La nuova KB **non è logicamente equivalente** a quella originaria ma è **soddisfacibile** se la prima lo era
  - Le possibili alternative di istanziazione sono inferenzialmente equivalenti

Proposizionalizzazione

- Data una KB:
  1) Applicare le regole di eliminazione dei quantificatori sostituendo le formule quantificate con le loro istanze del caso, costruite considerando il vocabolario dei possibili termini ground
  2) Applicare un algoritmo di inferenza completo per la logica proposizionale
- Ne risulta un metodo generale e completo per trattare l'implicazione … ma e se i termini contengono funzioni?

Problema delle funzioni

- Un funzione può essere applicata ricorsivamente: fz(fz(fz(...fz(x)…)))
- Di conseguenza l'insieme delle possibili sostituzioni diventa potenzialmente ∞
- nell'applicare la regola UI a una formula occorrerà considerare tutti i termini ground fz(x), fz(fz(x)), fz(fz(fz(x))), … senza fine?

Teorema di Herbrand

- Herbrand ha dimostrato che se una formula è conseguenza logica della base di conoscenza originaria (del prim' ordine) allora partendo dalla base di conoscenza proposizionalizzata esiste una dimostrazione finita della sua verità
- I termini sono costruiti "in ampiezza":
  - Prima si provano le sostituzioni delle variabili con le costanti, esempio: {x/Richard}, {x/John}
  - Poi si provano le sostituzioni con termini ground che prevedono una sola applicazione delle funzioni, esempio: {x/fz(Richard)}, {x/fz(John)}
  - Poi quelle con una chiamata ricorsiva: {x/fz(fz(Richard))}, {x/fz(fz(John))}
  - ...

Semidecidibilità di FOL

- **FOL è semidecidibile, cioè:**
  - Completezza: Come dimostrato da Herbrand se una formula consegue da una KB_{FOL} si troverà una dimostrazione finita della sua verità
  - Se però l' **non vale la consequenzialità**, la presenza di funzioni applicabili ricorsivamente porterà l' inferenza su di un percorso infinito
- In altri termini non esiste un algoritmo per dimostrare in FOL che una certa conseguenza non vale

Inefficienza della proposizionalizzazione

- Consideriamo la KB:
  ∀x Re(x) ∧ Avido(x) ⇒ Malvagio(x)
  Re(John)
  Avido(John)
  Fratello(Richard, John)
- La proposizionalizzazione creerà:
  Re(Richard) ∧ Avido(Richard) ⇒ Malvagio(Richard)
  Re(John) ∧ Avido(John) ⇒ Malvagio(john)
  Re(John)
  Avido(John)
- A un essere umano è evidente che solo John può risultare malvagio. La proposizionalizzazione è inefficiente. "Perde tempo" a creare istanze dell' implicazione (quella in grassetto) che sono ininfluenti

Inefficienza della proposizionalizzazione

- Complichiamo l' esempio:
  ∀x Re(x) ∧ Avido(x) ⇒ Malvagio(x)
  Re(John)
  ∀y Avido(y)
  Fratello(Richard, John)
- Anche in questo caso a un occhio umano è ovvio che solo John può essere malvagio (è l' unico re) ma la proposizionalizzazione creerà anche: Avido(Richard), Re(Richard) ∧ Avido(Richard) ⇒ Malvagio(Richard)

Guidare la scelta della sostituzione

- È possibile evitare la creazione di formule irrilevanti f**ocalizzando la costruzione della sostituzione** da considerare
- nell' esempio vorrei poter limitare la scelta a quelle sostituzioni che rendono vera Re(x) ∧ Avido(x) da un lato e Re(John) e Avido(y) dall' altro. Solo **{ x/John, y/John }** ha questi requisiti

Modus Ponens Generalizzato (MPG)

$$\frac{p'_1,\ p'_2,\ \ldots,\ p'_n, \quad p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q}{q\theta}$$

Dove $p'_i\theta = p_i\theta$ per ogni $i \in [1,n]$

La regola ha come premesse n formule atomiche e una singola implicazione. La conclusione è il risultato dell'applicazione della sostituzione θ alla formula q, conseguenza dell'implicazione

NB: qθ è un modo sintetico per scrivere SUBST(θ, q)

Esempio

John x

y x

$$\frac{\boxed{Re(John)},\ \boxed{Avido(y)},\ \boxed{Re(x)} \wedge \boxed{Avido(x)} \Rightarrow Malvagio(x)}{Malvagio(John)}$$

Questa conclusione si appoggia alla sostituzione {x/John, y/John}

Le clausole focalizzano la ricerca della sostituzione e permettono di ragionare direttamente in FOL

Nella proposizionalizzazione, di contro, si costruiscono sostituzioni usando in modo esaustivo l'intero vocabolario di costanti