|  |
| --- |
| МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)  ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО  ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  ВЫСШАЯ ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА  Кафедра ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ  Направление подготовки: 01.03.02 – Прикладная математика и информатика  Курсовая работа  V семестр |
| **ТЕМА**: «**Создание и исследование математической модели подъема в воздух сферического тела переменного радиуса**» |
| Дисциплина: «Математическое моделирование и управление динамическими системами» |
| Выполнил |
| студент Ахмадишин И.Р. |
| группа 2221101 курс 3 |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **Проверил** | | | | | доцент, к. т. н. | | | | | Демьянов Д. Н. | | | | |  | | | подпись | |  |  | **Оценка** |  | | **Дата** | | |  | |
|  |
| Набережные Челны – 2025 |

**Оглавление**

[Изучение предметной области 3](#_Toc188401481)

[Общую структура и принципы функционирования системы в графической форме 4](#_Toc188401482)

[Физические процессы, протекающие в исследуемой системе 5](#_Toc188401483)

[Входные и выходные сигналы 7](#_Toc188401484)

[Перечень управляющих и возмущающих воздействий. 8](#_Toc188401485)

[Гипотезы, используемых при построении модели 10](#_Toc188401486)

[Статическая модель при отсутствии возмущающих воздействий 11](#_Toc188401487)

[Динамическую модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий 13](#_Toc188401488)

[Исследование динамики рассматриваемой системы 14](#_Toc188401489)

[Уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима. 19](#_Toc188401490)

[Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима 21](#_Toc188401491)

[Передаточная функция системы 22](#_Toc188401492)

[Переходная и весовая характеристика: 23](#_Toc188401493)

[Определение показателей качества переходного процесса 26](#_Toc188401494)

[Вывод 28](#_Toc188401495)

[Список литературы 29](#_Toc188401496)

[Приложение 1 30](#_Toc188401497)

[Приложение 2 36](#_Toc188401498)

Изучение предметной области

**Цель работы:** создать и исследовать математическую модель подъема в воздух сферического тела переменного радиуса, используя знания, приобретенные из курса «Математическое моделирование и управление динамическими системами».

**Задача:** узнать до какой высоты сможет подняться сферического тела переменного радиуса.

Модель описывает движение в воздухе объекта сферической формы, размер которого меняется. На движение влияют сила тяжести, подъемная сила и сопротивление воздуха, причем все эти силы (кроме силы тяжести, если плотность тела постоянна) зависят от размера (радиуса) тела, который изменяется во времени. Уравнение движения, основанное на втором законе Ньютона, позволяет рассчитать траекторию и скорость движения тела. Изменение радиуса приводит к изменению объема сферы, а значит, и ее массы при том, что плотность материала сферы остается постоянной. Масса m связана с радиусом R и плотностью материала ρ соотношением. Так же изменяется и Плотность воздуха в атмосфере уменьшается с увеличением высоты. Это влияет как на подъемную силу, так и на силу сопротивления. Для учета этого эффекта используем стандартную атмосферу.

Общую структура и принципы функционирования системы в графической форме

На рисунке 1 представлена графическая иллюстрация модели, где Fₜ - сила тяжести, Fпод - подъемная сила, Fсреда - сила сопротивления среды, R(t) – радиус сферы. В контексте нашей модели основные силы, которые нужно учитывать, это:

* **Сила тяжести (Ft):** Эта сила всегда направлена вертикально вниз, к центру Земли. Она возникает из-за гравитационного притяжения между Землей и телом. На графической иллюстрации она изображается стрелкой, направленной вниз от центра сферы.
* **Подъемная сила (Fпод):** Эта сила возникает из-за разницы давлений между нижней и верхней частями тела, находящегося в жидкости или газе (в нашем случае, в воздухе). Подъемная сила всегда направлена вертикально вверх, противоположно силе тяжести. На иллюстрации она изображается стрелкой, направленной вверх от центра сферы.
* **Сила сопротивления среды (Fсреда):** Эта сила возникает из-за трения тела о воздух при движении. Она всегда направлена против направления движения тела. Если сфера поднимается, сила сопротивления направлена вниз. Если сфера падает, сила сопротивления направлена вверх. На иллюстрации она изображается стрелкой, направленной противоположно направлению движения сферы.

Изображение выглядит как зарисовка, диаграмма, белый, круг

Автоматически созданное описание

Рисунок 1 - Подъем в воздухе сферического тела переменного радиуса

Физические процессы, протекающие в исследуемой системе

**Подъемная сила (Fпод):**

* Определяется разницей давлений между верхней и нижней частями сферы.
* Приближенно можно рассчитать как: Fпод = ρ × V × g, где ρ - плотность воздуха, V - объем сферы (V = (4/3)πR³), g - ускорение свободного падения.
* Важно отметить, что с изменением радиуса сферы (R(t)) изменяется и ее объем, а следовательно, и подъемная сила.
* С изменением высоты меняется и плотность воздуха (ρ), что также влияет на подъемную силу.

**Сила сопротивления (Fсреда):**

* Зависит от формы тела, скорости движения и плотности среды.
* Часто описывается формулой: Fсреда = (1/2) × C × ρ × A × v², где C - коэффициент сопротивления (зависит от формы сферы, примерно 0.47 для гладкой сферы), ρ - плотность воздуха, A - площадь поперечного сечения сферы (A = πR²), v - скорость движения сферы.
* Как и подъемная сила, сила сопротивления зависит от радиуса сферы и плотности воздуха.

**Влияние высоты:**

* С увеличением высоты плотность воздуха (ρ) уменьшается. Это приводит к уменьшению как подъемной силы, так и силы сопротивления.
* Также могут меняться температура и давление воздуха, что влияет на вязкость воздуха и, следовательно, на коэффициент сопротивления.

Входные и выходные сигналы

**Входные сигналы (параметры, задаваемые системе):**

* **Начальный радиус сферы (R):** Радиус сферы в начальный момент времени (t=0). Единицы измерения: метры (м).
* **Начальная высота (h₀):** Высота, с которой начинается подъем сферы. Единицы измерения: метры (м).
* **Начальная скорость (v₀):** Начальная скорость сферы в момент начала движения. Единицы измерения: метры в секунду (м/с).
* **Параметры окружающей среды:**
  + **Температура воздуха (T):** Температура воздуха, которая может влиять на вязкость воздуха. Единицы измерения: Кельвин (K) или градусы Цельсия (°C). (Может быть задана как функция от высоты T(h)).
  + **Давление воздуха (P):** Давление воздуха, которое также может влиять на плотность и другие свойства воздуха. Единицы измерения: Паскали (Па).

**Выходные сигналы (результаты, получаемые от системы):**

* **Высота сферы в зависимости от времени (h(t)):** Функция, описывающая, как высота сферы изменяется с течением времени. Единицы измерения: метры (м).
* **Скорость сферы в зависимости от времени (v(t)):** Функция, описывающая, как скорость сферы изменяется с течением времени. Единицы измерения: метры в секунду (м/с).

Перечень управляющих и возмущающих воздействий.

**Управляющие воздействия (входные параметры, которые мы можем задавать и контролировать):**

Управляющие воздействия – это параметры, которые мы можем *сознательно изменять*, чтобы управлять движением сферы. В данной модели к ним относятся:

* **Радиус R(t):** Радиус сферы.
* **Начальная скорость v₀:** Скорость сферы в начальный момент времени. Обычно задается как нулевая (сфера начинает движение из состояния покоя), но может быть и ненулевой.
* **Плотность материала сферы (ρт):** Если сфера состоит из материала с изменяемой плотностью (например, заполнена газом, плотность которого можно менять), то плотность материала также является управляющим воздействием. Однако, в большинстве случаев предполагается, что плотность материала постоянна.
* **Состав газа (если сфера наполнена газом):** Если сфера является, например, воздушным шаром, наполненным газом, то состав газа (например, гелий, водород, горячий воздух) влияет на подъемную силу и, следовательно, является управляющим воздействием.

**Возмущающие воздействия (факторы, которые мы не контролируем):**

Возмущающие воздействия – это параметры, которые *влияют* на движение сферы, но мы не можем их задавать или контролировать напрямую.

* **Изменение плотности воздуха с высотой ρ(h):** Плотность воздуха уменьшается с высотой. Это естественный атмосферный процесс, который мы не можем контролировать. Для моделирования этого эффекта используются различные модели атмосферы (например, стандартная атмосфера).
* **Температура воздуха T(h):** Температура воздуха также меняется с высотой и влияет на плотность и вязкость воздуха.
* **Давление воздуха P(h):** Аналогично температуре, давление воздуха также зависит от высоты.
* **Ветер:** Ветер создает дополнительную силу, действующую на сферу, и может существенно влиять на ее траекторию. Направление и скорость ветра являются случайными величинами, которые мы не можем контролировать.
* **Турбулентность воздуха:** Турбулентные потоки воздуха создают случайные колебания силы сопротивления и подъемной силы.
* **Изменение гравитационного поля (в случае больших высот):** На очень больших высотах ускорение свободного падения g может незначительно изменяться. Обычно этим эффектом пренебрегают.

Гипотезы, используемых при построении модели

При построении модели будем использовать следующие гипотезы.

* Идеальный шар.
* Идеальный газ.
* Отсутствие утечка газа, конденсация или испарение газа, химические реакции.
* Масса газа постоянна.
* Температура постоянна.
* Температур вещества внутри сферы не изменяется.
* Учет только силы тяжести, подъемной силы и силы сопротивления.
* Квадратичный закон сопротивления.
* Закон Архимеда для подъемной силы.
* Однородная плотность материала.
* Отсутствие ветра и турбулентности.
* Отсутствие вращения тела.
* Одномерное движение (вертикальное).
* Стандартная атмосфера.
* Изменение плотности воздуха с высотой отсутствует.
* Изменение гравитационного поля отсутствует.

Статическая модель при отсутствии возмущающих воздействий

Мы рассматриваем условия равновесия, когда тело находится в покое или движется с постоянной скоростью (то есть ускорение равно нулю).

**Основные уравнения:**

1. **Сила Архимеда:**

* FA = ρатмgV
* Так как V = (4/3)πR3, то FA = (4/3)πR3ρатмg

1. **Сила тяжести:**

* Fтяж = (m + mг)g
* Масса газа mг = ρгазаV, где ρгаза — плотность газа внутри сферы.

1. **Сила сопротивления:**

* Поскольку мы рассматриваем статическую модель (равновесие), и в условиях задачи сказано об отсутствии изменения скорости, то Fсопр=0. Сила сопротивления учитывается только в динамической модели, когда есть ускорение или замедление.

**Условие равновесия (статическая модель):**

Для статического равновесия сумма всех сил, действующих на тело, должна быть равна нулю. В нашем случае, поскольку движение только вертикальное:

* FA - Fтяж - Fсопр = 0

Так как Fсопр = 0 в статической модели, условие равновесия упрощается:

* FA = Fтяж
* πR3ρатмg = (m + mг)g

Сокращаем g:

* πR3ρатм = m + mг →

С учетом барометрической формулы:

→

**Обозначения:**

* ρатм — плотность атмосферы (воздуха), единица измерения: килограмм на кубический метр (кг/м³)
* — давление атмосферы, единица измерения: паскаль (Па)
* — давление на нулевом уровне, единица измерения: паскаль (Па)
* V — объём сферы, единица измерения: кубический метр (м³)
* R — радиус сферы, единица измерения: метр (м)
* m — масса оболочки сферы, единица измерения: килограмм (кг)
* mг — масса газа внутри сферы, единица измерения: килограмм (кг)
* g — ускорение свободного падения, единица измерения: метр на секунду в квадрате (м/с²)
* FA — сила Архимеда (подъёмная сила), единица измерения: ньютон (Н)
* Fтяж — сила тяжести, единица измерения: ньютон (Н)
* Fсопр — сила сопротивления, единица измерения: ньютон (Н)
* M ­­— Молекулярная масса воздуха, единица измерения: килограмм на моль (кг/моль)
* Т — [Абсолютная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0) температура воздуха, единица измерения: кельвин (К)
* —  Универсальная газовая постоянная, единица измерения: джоуль на моль и кельвин (Дж/(моль∙К))

Динамическую модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий

В динамической модели мы учитываем ускорение тела и, следовательно, силу сопротивления.

**Основные уравнения:**

1. **Сила Архимеда:**

* FA = (4/3)πR3ρатмg

1. **Сила тяжести:**

* Fтяж = (m + mг)g

1. **Сила сопротивления:**

* Fсопр = k d²h/dt², где d²h/dt² — вертикальное ускорение;

**Уравнение движения (второй закон Ньютона):**

Сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение:

* (m + mг)d²h/dt² = FA - Fтяж - Fсопр

Подставляем выражения для сил:

* (m + mг)d²h/dt² = πgR3ρатм - (m + mг)g - k(dh/dt), где dh/dt — вертикальная скорость подъёма,;

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение h(t) даст нам зависимость высоты подъёма от времени.

Исследование динамики рассматриваемой системы

При решении дифференциальное уравнение второго порядка, которая описывает динамику рассматриваемой системы. Я использовал MATLAB, так как эта платформа для программирования и [пакет прикладных программ](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D0%BA%D0%B5%D1%82_%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC) для решения задач технических вычислений. Пакет используют более миллиона инженерных и научных работников, он работает на большинстве современных [операционных систем](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0). А метод, который я использовал для решения дифференциального уравнение второго порядка это Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядков с адаптивным шагом интегрирования. Методы Рунге-Кутты — это семейство численных методов для приближенного решения ОДУ. Они основаны на вычислении нескольких промежуточных значений функции на каждом шаге интегрирования, что позволяет получить более точное приближение решения по сравнению с простыми методами, такими как метод Эйлера.

* **4-й и 5-й порядки:** использует метод Рунге-Кутты с порядками 4 и 5. Порядок метода определяет точность приближения. Более высокий порядок обычно обеспечивает большую точность, но требует больше вычислительных ресурсов.
* **Адаптивный шаг интегрирования:** Особенностью является адаптивный шаг интегрирования. Это означает, что размер шага интегрирования автоматически изменяется в процессе решения в зависимости от поведения функции. В областях, где функция изменяется быстро, шаг интегрирования уменьшается для повышения точности. В областях, где функция изменяется медленно, шаг интегрирования увеличивается для ускорения вычислений.

В MATLAB есть функция, которая основана на методе Рунге‑Кутты — **ode45.** Преимущества ode45:

* Хорошая точность: ode45 обеспечивает достаточно высокую точность для большинства практических задач.
* Адаптивный шаг: Автоматическое изменение шага интегрирования делает метод эффективным для решения ОДУ с различным поведением функции.
* Простота использования: ode45 — это встроенная функция Matlab с простым синтаксисом, что делает ее удобной для использования.

В приложении 1 описан код программы.

Выберем для определенности следующие параметры процесса:

* g = 9.81 — Ускорение свободного падения (м/с2)
* m = 0.1 — Масса оболочки (кг)
* mг = 0.05 — Масса газа (кг)
* k = 0.01 — Коэффициент сопротивления (кг/с)
* R= 0.5 — Радиус (м)
* t [0;100] — Временной интервал (с)
* h0 = 0 — Начальная высота(м)
* v0 = 0 — Начальная скорость(м)
* M = 0.029 — Молекулярная масса воздуха(кг/моль)
* T = 293 — [Абсолютная](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0) температура воздуха (К)
* —  Универсальная газовая постоянная ([Дж](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B6%D0%BE%D1%83%D0%BB%D1%8C)/(моль∙К))
* P₀ = 101325 Па — Давление на нулевом уровне (Па)

На рисунке 1 показан график зависимости высоты от времени модели подъема в воздух сферического тела переменного радиуса. Максимальная высота 15020 м.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, дисплей, линия

Автоматически созданное описание

Рисунке 1 — Зависимость высоты от времени

Рассмотрим m = 0.2, 0.3 (масса оболочки). Как видно на рисунке 2, у исходного графика высота больше из-за того, что его сила тяжести меньше, чем у всех других. Сила тяжести меньше между исходным и 3 (зеленым) равна 3.67. Хочу отметить, что и максимальная скорость у исходного графика выше, чем у остальных.

Изображение выглядит как текст, График, диаграмма, линия

Автоматически созданное описание

Рисунок 2 — m = 0.2, 0.3 (масса оболочки)

Рассмотрим изменения с mг = 0.1, 0.15 (масса газа), так же вместе с ним придется рассмотреть и М = 0.058, 0.087 (молекулярную массу), так как молекулярная масса равна отношению массы вещества на число молей вещества (число молей неизменчиво). На рисунке 3 так же, как и с массой оболочки, только в этот раз тут не только сила тяжести, но еще и плотность атмосферы. Плотность атмосферы и так уменьшается из-за высоты, а тут еще и молекулярная масса увеличилась.

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описание

Рисунок 3 ­— mг = 0,1, 0,15 (масса газа)

На рисунке 4 графики с измененными k = 0.05, 0.1 (коэффициент сопротивления). На нем все так же, как и на рисунке 3, только в этот раз не сила тяжести и сила сопротивления.

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рисунок 4 ­— k = 0.05, 0.1 (коэффициент сопротивления).

Рассмотрим R = 1, 1.5 (радиус). На рисунке 5, видно, как с увеличением радиуса становиться выше высота, связано это из-за силы Архимеда.

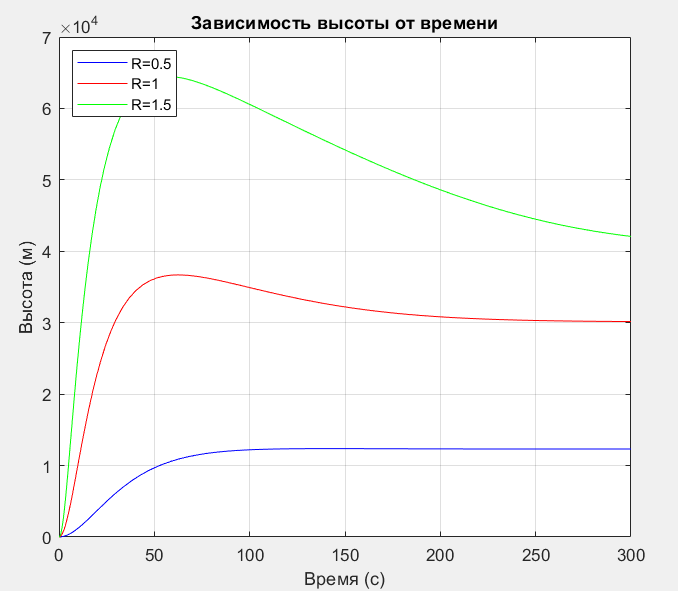


Рисунок 5 — R = 1, 1.5 (радиус)

Уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.

Отклонения от установившегося режима:

рассмотрим отклонения:

* R = Rуст + ΔR
* h = hуст + Δh
* dh/dt = dΔh/dt
* d²h/dt² = d²Δh/dt²

Подставим это в исходное уравнение:

(m + mг) ∙ d²Δh/dt² = (4/3) ∙ πg(Rуст + ΔR)³ ρатм - (m + mг)g - k(dΔh/dt)

где ρатм = (M/(RгT)) ∙ P0exp(-(Mg ∙ ( hуст + Δh))/( RгT))

Разложим (Rуст + ΔR)³ в ряд Тейлора, пренебрегая членами выше первого порядка по ΔR (так как отклонения малы):

(Rуст + ΔR)³ ≈ Rуст ³ + 3 Rуст ²ΔR

Разложим экспоненту в ряд Тейлора, также пренебрегая членами выше первого порядка по Δh:

exp(-(Mg(hуст + Δh))/( Rг∙T)) ≈ exp(-(Mg hуст)/( RгT)) ∙ (1 - (MgΔh)/( Rг∙T))

Тогда:

ρатм ≈ ρатм\_уст ∙ (1 - (M*g*Δh)/(Rг∙T))

Подставим разложения в уравнение движения:

(m + mг)d²Δh/dt² = (4/3)πg(Rуст ³ + 3 Rуст ²ΔR) ∙ ρатм\_уст ∙ (1 - (M*g*Δh)/( Rг ∙T)) - (m + mг)g - k(dΔh/dt)

Раскроем скобки и пренебрежем членами второго порядка малости (ΔRΔh):

(m + m\_g)d²Δh/dt² = (4/3)πgRуст³ ∙ ρатм\_уст + 4πgRуст²ΔR ∙ ρатм\_уст - (4/3)πgRуст³ ∙ ρатм\_уст (M*g*Δh)/(R**г**∙T) - (m + mг)g - k(dΔh/dt)

Учитывая уравнение установившегося режима:

(4/3)πgRуст³ ρатм\_уст - (m + mг)g = 0

Получаем уравнение движения в отклонениях:

(m + mг)d²Δh/dt² = 4πgRуст² ∙ ρатм\_устΔR - (4/3)πgRуст³ ∙ ρатм\_уст(M*g*Δh)/(Rг∙T) -k(dΔh/dt)

Перегруппируем члены:

(m + mг)d²Δh/dt² + k(dΔh/dt) + (4/3)πgRуст³ ρатм\_уст (Mg/(Rг∙T))Δh - 4πgRуст² ρатм\_устΔR = 0

Это и есть искомое уравнение динамики в отклонениях. Оно представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно Δh. Неоднородность обусловлена членом, содержащим ΔR, который является входным воздействием.

Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима

(m + mг) ∙ d²Δh/dt² + k(dΔh/dt) + (4/3)πgRуст³ ∙ ρатм\_уст(M*g/(*Rг∙T))Δh - 4πgRуст² ρатм\_устΔR = 0

Для более компактной записи, введем обозначения:

* A = m + mг
* B = k
* C = (4/3)πgRуст³ ∙ ρатм\_уст(M*g/(*Rг∙T))Δh
* D = 4πgRуст² ρатм\_уст

Тогда уравнение примет вид:

A (d²Δh ∙ hуст)/dt² + B (dΔh ∙ hуст)/dt + C Δh - D ΔR∙Rуст = 0

Передаточная функция системы

Для получения передаточной функции системы нам нужно преобразовать линеаризованное уравнение динамики в отклонениях из временной области в частотную (комплексную) область с помощью преобразования Лапласа.

**Применяем преобразование Лапласа** к обеим частям уравнения, где нулевые начальные условия (Δh(0) = 0, dΔh/dt(0) = 0):

A s²ΔH(s) + B sΔH(s) + C ΔH(s) - D ΔR(s) = 0

где ΔH(s) и ΔR(s) — преобразования Лапласа для Δh(t) и ΔR(t) соответственно.

**Выражаем отношение ΔH(s) / ΔR(s):**

ΔH(s)(A s² + B s + C) = D ΔR(s)

W(s) = ΔH(s) / ΔR(s) = D / (A s² + B s + C)

**Итак, передаточная функция системы:**

W(s) = D / (A s² + B s + C) = (4πgRуст² ρатм\_уст) / ((m + mг)s² + ks + (4/3)πgRуст³ ∙ ρатм\_уст(M*g/(*Rг∙T)))

Переходная и весовая характеристика:

Для нахождения переходной и весовой характеристик я использовал MATLAB, так как в нем есть функции для построения придаточной функции (tf), переходной (step) и весовой (impulse) характеристик.

**1. tf (создание передаточной функции):**

Функция tf используется для создания объектов передаточных функций (transfer function objects) в MATLAB (Приложение 1). Она позволяет определить систему в форме передаточной функции, что удобно для анализа в частотной области.

**Дополнительные возможности tf:**

* Задание времени дискретизации: sys = tf(num, den, Ts), где Ts — время дискретизации.
* Создание многомерных систем: sys = tf(num, den), где num и den — массивы ячеек (cell arrays).

**2. step (переходная характеристика):**

Функция step используется для построения графика переходной характеристики системы. Переходная характеристика показывает реакцию системы на единичный ступенчатый входной сигнал (ступенька).

**3. impulse (импульсная (весовой) характеристика):**

Функция impulse используется для построения графика импульсной характеристики системы. Импульсная характеристика показывает реакцию системы на единичный импульсный входной сигнал (дельта-функцию Дирака).

Найденные значения Rуст, hуст, ρатм\_уст для нахождения A, C, D.

* Rуст = 0.255591 м
* hуст = 35.115209 м
* ρатм\_уст = 3.574499 кг/м^3

На рисунке 6 изображена показана переходная характеристика системы, описывающей, вероятно, динамику изменения высоты (Δh) воздушного шара в ответ на ступенчатое изменение радиуса (ΔR). График показывает, как изменится высота воздушного шара после резкого изменения его радиуса. Колебания указывают на то, что шар не сразу стабилизируется на новой высоте, а будет некоторое время колебаться вверх-вниз. Большое перерегулирование и относительно большое время установления могут быть нежелательными в реальных приложениях.

Изображение выглядит как текст, График, линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рисунок 6 — График переходной характеристики

На рисунке 7 показана весовая (импульсная) характеристика системы, описывающей, вероятно, динамику изменения высоты (Δh) воздушного шара в ответ на импульсное (кратковременное) изменение радиуса (ΔR). Этот график показывает, как изменится высота шара после кратковременного (импульсного) изменения его радиуса. Шар сначала резко поднимется, затем начнет колебаться вверх-вниз, постепенно возвращаясь к исходной высоте. Время затухания указывает на то, как быстро шар успокоится после такого воздействия.

Изображение выглядит как текст, График, линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рисунок 7 — График весовой (импульсной) характеристики

Определение показателей качества переходного процесса

Программа в приложении 1 может не только выводить график переходной и весовой характеристик, но еще и их параметры (рисунок 8).

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, документ

Автоматически созданное описание

Рисунок 8 — Параметры переходной и весовой характеристик

**1. Переходная характеристика (ступенчатая реакция):**

* **Перерегулирование (σ):** Это максимальное превышение выходного сигнала (Δh) над установившимся значением. По графику видно, что максимальное значение Δh примерно равно 44208.85 м, а установившееся значение – 33465.82 м. Таким образом:

σ = (Максимальное значение - Установившееся значение) / Установившееся значение σ = (44208.8 - 33465.82) / 33465.82 ≈ 0.321 или 32.1%

* **Время установления (tуст):** Это время, за которое колебания выходного сигнала входят в заданный коридор отклонения от установившегося значения (обычно ±5% или ±2%). tуст ≈ 188.517 с
* **Время первого максимума (tmax):** Это время, за которое выходной сигнал достигает первого максимума. По графику:

tmax ≈ 57.56 с

* **Колебательность:** Наличие перерегулирования и затухающих колебаний явно указывает на колебательный характер переходного процесса.

**2. Весовая характеристика (импульсная реакция):**

* **Время первого максимума (tmax):** По весовой характеристике также можно определить время первого максимума, которое примерно совпадает с аналогичным параметром для переходной характеристики:

tmax ≈ 23.026 с (для весовой характеристики первый максимум достигается быстрее, чем для переходной).

* **Время затухания:** Время, за которое импульсная реакция практически затухает (амплитуда становится близкой к нулю), также составляет примерно 209.535 секунд, что согласуется с временем установления для переходной характеристики.

**Связь с параметрами системы (ω₀ и ζ):**

ω0 = 0.058626 рад/с ­— собственная частота и ζ = 0.341146 коэффициент демпфирования.

Вывод

Проведенный анализ позволяет получить представление о динамических свойствах системы и выявить ее основные особенности. Полученные результаты могут быть использованы для проектирования систем управления и оптимизации параметров воздушного шара. Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет дополнительных факторов и разработку более точной и полной модели.

Список литературы

1. Демьянов Д. Н. Основы математического моделирования: учебно-методическое пособие / Д. Н. Демьянов. – Набережные Челны : изд.- полиграф. Центр Набережночелнинского ин-та Казан. федер. ун-та, 2016. – 50с. Текст: непосредственный.
2. Демьянов Д. Н. Математическое моделирование технических систем: учебно-методическое пособие / Д. Н. Демьянов. – Набережные Челны : изд.- полиграф. Центр Набережночелнинского ин-та Казан. федер. ун-та, 2016. – 64с. Текст: непосредственный
3. Громов, И. Б. Математические модели физических процессов: учебное пособие / И. Б. Громов. – М.: Наука, 2015. – 120 с. Текст: непосредственный.
4. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – 7-е изд., испр. – Москва: Дрофа, 2003. – 840 с. – Текст: непосредственный.

Приложение 1

[h,t,a]=balloon\_simulation();

[h2,t2,a2]=balloon\_simulation2();

[h3,t3,a3]=balloon\_simulation3();

% Построение графиков

figure;

plot(t, h, "b-", t2, h2, "r-", t3, h3,"g-");

xlabel('Время (с)');

ylabel('Высота (м)');

title('Зависимость высоты от времени');

legend("R="+ num2str(a),"R="+ num2str(a2),"R="+ num2str(a3), 'Location', 'northwest');

grid on;

%Функции для симуляции шара

%В функциях balloon\_simulation3 и balloon\_simulation2 можено изменять

%парамеры для изучения поведения

function [h,t, R] = balloon\_simulation3()

% Параметры модели

g = 9.81; % Ускорение свободного падения (м/с^2)

m = 0.1; % Масса оболочки (кг)

m\_g = 0.05; % Масса газа (кг)

k = 0.01; % Коэффициент сопротивления (кг/с)

R = 1.5; % Радиус (м) - теперь константа

t\_span = [0 300]; % Временной интервал (с)

M = 0.029; % Молекулярная масса воздуха(кг/моль)

T = 293; % Абсолютная температура воздуха (К)

R\_g = 8.314; % Универсальная газовая постоянная (Дж/(моль\*К))

P0 = 101325; % Давление на нулевом уровне (Па)

% Начальные условия

h0 = 0;

dhdt0 = 0;

Y0 = [h0; dhdt0];

% Проверка начальных условий

V0 = (4/3)\*pi\*R^3;

rho\_atm0 = M/(R\_g\*T)\*P0\*exp(-(M\*g\*h0)/(R\_g\*T));

F\_A0 = rho\_atm0\*g\*V0;

F\_ty0 = (m + m\_g)\*g;

if F\_A0 <= F\_ty0

error('Начальная подъемная сила недостаточна для подъема! Измените параметры модели.');

end

% Решение дифференциального уравнения

[t, Y] = ode45(@(t,Y) balloon\_dynamics(t, Y, g, m, m\_g, k, R, M, R\_g, T, P0), t\_span, Y0);

h = Y(:, 1);

dhdt = Y(:, 2);

% Ограничение снизу

h(h<0) = 0;

% % Построение графиков для конкертного изучения с определенными

% %параметрами

% figure;

% plot(t, h, "b-");

% xlabel('Время (с)');

% ylabel('Высота (м)');

% title('3 Зависимость высоты от времени');

% grid on;

% figure;

% plot(t, dhdt);

% xlabel('Время (с)');

% ylabel('Скорость (м/с)');

% title('3 Зависимость скорости от времени');

% grid on;

end

function [h,t, R] = balloon\_simulation2()

% Параметры модели

g = 9.81; % Ускорение свободного падения (м/с^2)

m = 0.1; % Масса оболочки (кг)

m\_g = 0.05; % Масса газа (кг)

k = 0.01; % Коэффициент сопротивления (кг/с)

R = 1; % Радиус (м) - теперь константа

t\_span = [0 300]; % Временной интервал (с)

M = 0.029; % Молекулярная масса воздуха(кг/моль)

T = 293; % Абсолютная температура воздуха (К)

R\_g = 8.314; % Универсальная газовая постоянная (Дж/(моль\*К))

P0 = 101325; % Давление на нулевом уровне (Па)

% Начальные условия

h0 = 0;

dhdt0 = 0;

Y0 = [h0; dhdt0];

% Проверка начальных условий

V0 = (4/3)\*pi\*R^3;

rho\_atm0 = M/(R\_g\*T)\*P0\*exp(-(M\*g\*h0)/(R\_g\*T));

F\_A0 = rho\_atm0\*g\*V0;

F\_ty0 = (m + m\_g)\*g;

if F\_A0 <= F\_ty0

error('Начальная подъемная сила недостаточна для подъема! Измените параметры модели.');

end

% Решение дифференциального уравнения

[t, Y] = ode45(@(t,Y) balloon\_dynamics(t, Y, g, m, m\_g, k, R, M, R\_g, T, P0), t\_span, Y0);

h = Y(:, 1);

dhdt = Y(:, 2);

% Ограничение снизу

h(h<0) = 0;

% % Построение графиков для конкертного изучения с определенными

% %параметрами

% figure;

% plot(t, h, "b-");

% xlabel('Время (с)');

% ylabel('Высота (м)');

% title('2 Зависимость высоты от времени');

% grid on;

% figure;

% plot(t, dhdt);

% xlabel('Время (с)');

% ylabel('Скорость (м/с)');

% title('2 Зависимость скорости от времени');

% grid on;

end

function [h,t,R] = balloon\_simulation()

% Параметры модели

g = 9.81; % Ускорение свободного падения (м/с^2)

m = 0.1; % Масса оболочки (кг)

m\_g = 0.05; % Масса газа (кг)

k = 0.01; % Коэффициент сопротивления (кг/с)

R = 0.5; % Радиус (м) - теперь константа

t\_span = [0 300]; % Временной интервал (с)

M = 0.029; % Молекулярная масса воздуха(кг/моль)

T = 293; % Абсолютная температура воздуха (К)

R\_g = 8.314; % Универсальная газовая постоянная (Дж/(моль\*К))

P0 = 101325; % Давление на нулевом уровне (Па)

% Начальные условия

h0 = 0;

dhdt0 = 0;

Y0 = [h0; dhdt0];

% Проверка начальных условий

V0 = (4/3)\*pi\*R^3;

rho\_atm0 = M/(R\_g\*T)\*P0\*exp(-(M\*g\*h0)/(R\_g\*T));

F\_A0 = rho\_atm0\*g\*V0;

F\_ty0 = (m + m\_g)\*g;

if F\_A0 <= F\_ty0

error('Начальная подъемная сила недостаточна для подъема! Измените параметры модели.');

end

% Решение дифференциального уравнения

[t, Y] = ode45(@(t,Y) balloon\_dynamics(t, Y, g, m, m\_g, k, R, M, R\_g, T, P0), t\_span, Y0);

h = Y(:, 1);

dhdt = Y(:, 2);

% Ограничение снизу

h(h<0) = 0;

% % Построение графиков для конкертного изучения с определенными

% %параметрами

% figure;

% plot(t, h, "b-");

% xlabel('Время (с)');

% ylabel('Высота (м)');

% title('1 Зависимость высоты от времени');

% grid on;

% figure;

% plot(t, dhdt);

% xlabel('Время (с)');

% ylabel('Скорость (м/с)');

% title('1 Зависимость скорости от времени');

% grid on;

end

% Функции balloon\_dynamics

function dYdt = balloon\_dynamics(t, Y, g, m, m\_g, k, R, M, R\_g, T, P0)

h = Y(1);

dhdt = Y(2);

V = (4/3)\*pi\*R^3;

rho\_atm = M/(R\_g\*T)\*P0\*exp(-(M\*g\*h)/(R\_g\*T));

d2hdt2 = (rho\_atm\*g\*V - (m + m\_g)\*g - k\*dhdt) / (m + m\_g);

dYdt = [dhdt; d2hdt2];

end

Приложение 2

% Параметры системы

g = 9.81;

m = 0.1;

m\_g = 0.15;

k = 0.01;

M = 0.087;

T = 293;

R\_g = 8.314;

P0 = 101325;

% Начальное приближение (очень важно подобрать адекватное!)

x0 = [0.6, 10]; % Примерные значения

% Решение системы уравнений

x = fsolve(@equations, x0);

R\_ust = x(1);

h\_ust = x(2);

rho\_atm\_ust = (M / (R\_g \* T)) \* P0 \* exp(-(M \* g \* h\_ust) / (R\_g \* T));

% Вывод результатов установившегося режима

fprintf('R\_уст = %f м\n', R\_ust);

fprintf('h\_уст = %f м\n', h\_ust);

fprintf('rho\_атм\_уст = %f кг/м^3\n', rho\_atm\_ust);

% Вычисление коэффициентов передаточной функции

A = m + m\_g;

B = k;

C = (4/3) \* pi \* g \* R\_ust^3 \* rho\_atm\_ust \* (M \* g / (R\_g \* T));

D = 4 \* pi \* g \* R\_ust^2 \* rho\_atm\_ust;

% Передаточная функция

num = D;

den = [A B C];

W = tf(num, den);

% Анализ устойчивости (полюса)

poles = roots(den);

fprintf('Полюса передаточной функции:\n');

disp(poles);

% Проверка на устойчивость

if all(real(poles) < 0)

fprintf('Система устойчива.\n');

else

fprintf('Система неустойчива.\n');

end

% Переходная характеристика

[y, t] = step(W);

figure;

plot(t, y);

title('Переходная характеристика');

xlabel('Время (с)');

ylabel('Отклонение высоты ?h (м)');

grid on;

h\_max = max(y);

step\_info = stepinfo(W);

[pks, locs] = findpeaks(y);

[~, max\_loc\_index] = max(pks);

t\_max = t(locs(max\_loc\_index));

fprintf('Максимальное значение ?h для переходной характеристики ?h\_max = %f м\n', hmax);

fprintf('Установившееся значение ?h для переходной характеристики ?h\_уст = %f м\n', y(end));

fprintf('Время первого максимума для переходной характеристики: t\_max = %f с\n', t\_max);

fprintf('Время установления для переходной характеристики: t\_уст = %f с\n\n', step\_info.SettlingTime);

% Весовая характеристика

[g, t\_impulse] = impulse(W); % g - значения импульсной характеристики

[pks\_imp, locs\_imp] = findpeaks(g);

[~, max\_loc\_index\_imp] = max(pks\_imp);

t\_max\_imp = t\_impulse(locs\_imp(max\_loc\_index\_imp));

max\_g = max(abs(g)); % Максимальное значение амплитуды (по модулю)

threshold = 0.02 \* max\_g; % Порог (2%)

indices = find(abs(g) > threshold); % Находим \*все\* индексы, где амплитуда \*больше\* порога

fprintf('Время первого максимума для весовой характеристики: t\_max = %f с\n', t\_max\_imp);

if ~isempty(indices)

t\_zatuh = t\_impulse(indices(end)); % Время последнего пересечения порога

fprintf('Время затухания для весовой характеристики: t\_затух = %f с\n\n', t\_zatuh);

else

fprintf('Колебания сразу ниже заданного порога.\n\n');

end

figure;

impulse(W);

title('Весовая характеристика');

xlabel('Время (с)');

ylabel('Отклонение высоты ?h (м)');

grid on;

% Вычисление основных параметров

omega0 = sqrt(C/A);

zeta = B / (2\*sqrt(A\*C));

fprintf('Собственная частота ?0 = %f рад/с\n', omega0);

fprintf('Коэффициент демпфирования ? = %f\n', zeta);

% Функция для решения системы уравнений установившегося режима

function F = equations(x)

g = 9.81;

m = 0.1;

m\_g = 0.15;

k = 0.01;

M = 0.087;

T = 293;

R\_g = 8.314;

P0 = 101325;

R\_ust = x(1);

h\_ust = x(2);

rho\_atm\_ust = (M / (R\_g \* T)) \* P0 \* exp(-(M \* g \* h\_ust) / (R\_g \* T));

F(1) = (4/3) \* pi \* g \* R\_ust^3 \* rho\_atm\_ust - (m + m\_g) \* g;

F(2) = 3\*(m + m\_g) / (4\*pi\*R\_ust^3) - rho\_atm\_ust;

end