

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

(II семестр)

Теоретический минимум

1. Функции нескольких переменных.

1. Что называется линиями уровня функции двух переменных?
2. Что называется поверхностями уровня функции трех переменных?
3. Записать полное приращение функции $z = f(x; y)$.
4. Записать частные приращения функции $z = f(x; y)$.
5. Определение частной производной.
6. Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x; y)$.
7. Определение дифференцируемости функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$.
8. Необходимые условия дифференцируемости функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$.
9. Достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$.
10. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования по различным переменным.
11. Формулы для вычисления частных производных функции двух переменных, заданной неявно.
12. Как вычислить производную функции $z = f(x; y)$ по направлению вектора \vec{l} ?
13. Что такое градиент функции $z = f(x; y)$?
14. Основные свойства градиента.
15. Определение точки локального максимума (минимума) функции $z = f(x; y)$.
16. Необходимое условие локального экстремума функции двух переменных.
17. Достаточное условие локального экстремума дифференцируемой функции двух переменных.
18. Алгоритм нахождения точек локального экстремума дифференцируемой функции двух переменных.
19. Геометрический смысл двойного интеграла.
20. Формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.
21. Физический смысл двойного интеграла.

2. Дифференциальные уравнения.

22. Что называется дифференциальным уравнением (ДУ)? Что называется порядком ДУ?
23. Что называется решением ДУ?

24. Что называется общим решением ДУ? Что называется частным решением ДУ?
25. Что называется задачей Коши для ДУ 1-го порядка? Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка.
26. Что называется задачей Коши для ДУ 2-го порядка? Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка.
27. Что называется ДУ с разделяющимися переменными? Указать метод его решения.
28. Какое ДУ 1-го порядка называется однородным? Указать метод его решения.
29. Какое ДУ 1-го порядка называется линейным? Указать метод его решения.
30. Какие ДУ 2-го порядка допускают понижение порядка?
31. Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка?
32. Что называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка?
33. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ.
34. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня?
35. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два совпадающих корня?
36. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни?
37. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ.
38. Методы нахождения частного решения ЛНДУ.
39. При каких условиях для решения ЛНДУ применяется метод неопределенных коэффициентов?
40. Что называется правой частью специального вида для ЛНДУ с постоянными коэффициентами?
41. Теорема о наложении решений.
- 3. Ряды. Ряды Фурье.**
42. Что называется рядом? Что называется общим членом ряда?
43. Что называется n -й частичной суммой ряда? Что называется n -м остатком ряда?
44. Что называется суммой ряда? В каком случае ряд называется сходящимся? расходящимся?
45. Необходимый признак сходимости ряда.
46. Основные свойства числовых рядов.

47. Какие признаки используются для исследования сходимости числовых рядов с положительными членами?
48. Признак Даламбера.
49. Предельный признак сравнения.
50. Непредельный признак сравнения.
51. Интегральный признак Коши.
52. Какой ряд называется гармоническим? Сходится ли гармонический ряд?
53. Какой ряд называется обобщенным гармоническим рядом?
54. При каком условии обобщенный гармонический ряд является сходящимся? расходящимся?
55. Какой ряд называется знакопеременным?
56. Какой ряд называется знакочередующимся?
57. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
58. При каком условии знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся?
59. При каком условии знакопеременный ряд называется условно сходящимся?
60. Признак Лейбница.
61. Что называется степенным рядом?
62. Что называется областью сходимости степенного ряда? Что называется радиусом сходимости степенного ряда?
63. Как найти интервал сходимости степенного ряда?
64. Теорема Абеля.
65. Что называется рядом Тейлора для функции $f(x)$?
66. Что называется рядом Маклорена для функции $f(x)$?
67. Разложение в ряд Маклорена функции e^x .
68. Разложения в ряд Маклорена функций $\sin x$ и $\cos x$.
69. Разложение в ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$.
70. Разложения в ряд Маклорена функций $\frac{1}{1+x}$ и $\frac{1}{1-x}$.
71. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T = 2l$?
72. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$?
73. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$?
74. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T = 2\pi$ функции $f(x)$?
75. Достаточное условие сходимости ряда Фурье (теорема Дирихле).
76. Какой вид имеет ряд Фурье для четной периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?

77. Какой вид имеет ряд Фурье для нечетной периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?
78. Комплексная форма ряда Фурье.

Вариант 1.

1. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = 2x^3 + 3xy^2 - 4x^2y^3 - 5y^7 + 67y + 10$.

2. Найти градиент функции $u = x^2y + y^2z + xz^2$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ в точке $M(1; -1; 2)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = (3x + 6)y^2 - x^3 + 3x$.

4. Вычислить интеграл $\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy$.

5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 3$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = x$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $e^{x+3y} dy = x dx$.

7. $(y - xy') \cos \frac{y}{x} = x$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 4$. 9. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 2x - 1$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$.

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{4n-5}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^3} - \frac{1}{1+2^4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n \sqrt{n}}$.

17. Вычислить $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x|$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 2.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = 5x^3y^2 + 3x^2y^5 - 4x^5 - 6y^7 + 123$.

2. Найти градиент функции $u = 5xy^3z^2$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ в точке $M(2; 1; -1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 15 - (x - 3)^2 - 4(y + 7)^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} xy^2 dy$.

5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $(xy + x^2y)y' = 1 + y^2$.

7. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e^3$. 9. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^5}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2(n+2)}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{4}}{5} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{n}$.

17. Вычислить $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 1$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 3.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = y \sin(5x - 8y)$.

2. Найти градиент функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ в точке $M(-1; 2; 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 12$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y (x + y) dx$.

5. Вычислить $\iint_D x^2 y dx dy$ по области D , ограниченной линиями

$$y = 2x^3, y = 0, x = 1.$$

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$.

7. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}, y(0) = 2$.

9. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -2.$$

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

13. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n - 5}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$.

17. Вычислить $\int_0^1 x^5 \cos \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x + 2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = 3 - |x|$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 4.

1. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \ln(x + e^{-y})$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ для функции $u = \sqrt{x^2 - yx + 2yz}$ в точке $M(3; -2; 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} x^2 y dy$.

5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 4 - y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 0, 5x^2, y = 2$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $(x + 4)dy - xydx = 0$.

7. $y' = 2x(x^2 + y)$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $(x + 3y)dy = (x - y)dx, y(1) = 1$. 9. $y'' - 2y' - 8y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 2x - 3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3^n n!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{4+n^2} \right)^2$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{8 \cdot 9} - \frac{1}{16 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n}$.

17. Вычислить $\int_0^1 x^5 \sin \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} -x + 0,5, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 5$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 5.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 = 3xyz + 2y$.
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ для функции $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$ в точке $A(1; 2)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 (x^3 - 2y) dy$.
5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x, y = 1, x = 0$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = x^2 + 2y^2$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $y - xy' = 1 + x^2 y'$.
7. $y^2 dx + x^2 dy = 2xy dx$.
- В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 2$.
9. $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = 5x - x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 3$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)!}{n^7}$.
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{4n^4 - 5}}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{3^2}{4 \cdot 5} + \frac{3^3}{8 \cdot 9} - \frac{3^4}{16 \cdot 17} + \dots$.
- В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$.
17. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0,5x + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 6.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $xyz = e^z$.

2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ для функции $u = \frac{xy^2z^3}{6} - \frac{x}{\sqrt{z}}$ в точке $M(-2; 3; 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (y-x) dx$.

5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $z + x = 6$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 6$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $y' + y + y^2 = 0$. 7. $y' - y = e^x$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $y^2 + x^2 y' = xy y'$, $y(1) = 1$. 9. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = x - 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 10$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^n$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n-2}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} - \frac{1}{4 \cdot \sqrt{6}} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,5} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = x$ при $1 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 7.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \operatorname{tg}(xy^2)$.
2. Найти градиент функции $u = x^2y + xz^2 - 2$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ в точке $M(1; 1; -1)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2(x + y) - x^2 - y^2 - 12$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^5 dy \int_{y^2}^{5y} (1 + y) dx$.

5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $y^2 \ln x dx - (y - 1) x dy = 0$.

7. $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = 0$. 9. $y'' + 9y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{5^n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + 1}$.

15. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{2^4 \cdot 5} + \frac{1}{2^6 \cdot 9} - \frac{1}{2^8 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}$.

17. Вычислить $\int_0^1 x^5 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 2$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 8.

1. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \arcsin(x - y)$ уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -\vec{i} - 2\vec{k}$ для

функции $u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ в точке $M(-1; 1; 0)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x^2} (x+y) dy$.

5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $x + y + z = 3$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 1 - x^2, y = 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $(x + x^2)y dx + dy + y^2 dy = 0$.

7. $xy' + y = \ln x$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $y = xy' + x e^{\frac{y}{x}}, y(1) = 0$.

9. $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 4$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{2^n(n+2)!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} - \frac{1}{3^4 \cdot 4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,25} x \cos \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 9.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = e^{2x^3+3y^2}$.
2. Найти градиент функции $u = 3xy^2 + z^2 - xyz$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ в точке $M(1; 1; 2)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^3 dx \int_x^{5x} x(y-1)dy$.

5. Вычислить $\iint_D (x+y)dxdy$ по области D , ограниченной линиями $y^2 = x, y = x$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$. 7. $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $x^2 y' + xy + 1 = 0, y(1) = 2$. 9. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n n!}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{\frac{n}{(7n-1)^3}}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} - \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}} - \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 9}} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$.

17. Вычислить $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 0.5, & \text{если } x = 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 1; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 10.

1. Удовлетворяет ли функция $z = \cos(xy^2)$ уравнению $y \frac{\partial z}{\partial y} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$?
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ для функции $u = \ln \sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right)$ в точке $M(1; 0,5; \pi)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^2 dx \int_{x/2}^x (x-2)y dy$.
5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 1$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 4 - x - y$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$.
7. $y'x \ln x = y + 3 \ln x$.
- В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $xy' - y = \sqrt{xy}$, $y(1) = 4$.
9. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' - 8y = e^x$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4n+5}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2n}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $1 - \frac{2 \cdot 3}{2^2} + \frac{3 \cdot 4}{2^3} - \frac{4 \cdot 5}{2^4} + \dots$.
- В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{\sqrt{n^3+1}}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$.
17. Вычислить $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 5x - 1$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 11.

1. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = e^{2x^3 + 3xy^2}$.

2. Найти градиент функции $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = -4\vec{i} - 3\vec{k}$ в точке $M(1; 2; 2)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (x - y^2) dx$.

5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^2$, $9y = x^2$, $y = 2$, $x \geq 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $dy = \sin^2 x \operatorname{tg} y dx$.

7. $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

8. $xy' + x^2 = 3y$, $y(1) = -2$. 9. $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n5^n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-10}{n+100}}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{2^n + 1}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 12.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$.
2. Найти градиент функции $u = y^2 z - 2xyz + z^2$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 5\vec{k}$ в точке $M(3; 1; -1)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = 15 - (x - 2)^2 - 3(y + 7)^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{2x^3} x^2 y dy$.

5. Вычислить $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $dx = \sin^2 x \operatorname{tg} y dy$.

7. $y' + y = 2e^x$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $y(1) = 0,5$.

9. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 7} - \frac{8}{7 \cdot 9} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)x^n}{n!}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n n}$.

17. Вычислить $\int_0^1 x \ln(1 + x^6) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - x$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 13.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = y \operatorname{tg}(5xy)$.
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$ для функции $u = z \ln(x + y^2)$ в точке $A(5; 2; 3)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.

4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 (x^2 + y^2) dx$.

- 5.** Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 2x + 5y + 10$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $xy' - y = y^2$. 7. $y = xy' - x e^{\frac{y}{x}}$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $xy' - y = x^2$, $y(1) = -2$. **9.** $y'' + 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$.

- 10.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 3e^{-3x}$.

- 11.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y = \cos 6x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 3$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

$$\mathbf{12.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!}.$$

- 14.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{5} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

$$\mathbf{15.} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n. \qquad \mathbf{16.} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n^4}.$$

17. Вычислить $\int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

- 18.** Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

- 19.** Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{если } 1 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 14.

1. Удовлетворяет ли функция $z = \cos(x^2 y^2 - 5)$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$?

2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ для функции $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^2 dy \int_0^{y^3} xy dx$.

5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $x + 2y + z = 4$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: x = 2y^2, x + 2y = 4$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0$.

7. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $y' = \frac{y}{x} - 1, y(1) = 2$.

9. $y'' - 6y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 6$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = e^{5x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' + 4y' + 8y = -x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n!)^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3 + 1}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sin 1 - \sin \frac{1}{2^2} + \sin \frac{1}{3^2} - \sin \frac{1}{4^2} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} x^n$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{3n+1}}$.

17. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 15.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3y + 2y^3z + xz^3 = 3xyz$.
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ для функции $u = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$ в точке $A(2; 1; 8)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} x(2x+y)dy$.

5. Вычислить $\iint_D (x+y)dxdy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$. 7. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $x^2y' + xy + 1 = 0, y(1) = 3$. 9. $y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{4x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)4^n}{n+2}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{2n^2-1}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,5} (1 - e^{-x^2})dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 1-4x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 3$ при $-4 < x < 4$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 16.

1. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}$.
2. Найти градиент функции $u = \ln(x^3 + y^3 + z + 1)$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ в точке $M(1; 3; 0)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^8 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^3 (x+y)dx$.
5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = \sqrt{x}$, $x + y = 5$, $x = 0$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$. 7. $y = x(y' - x \cos x)$.
В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $y dx + 2\sqrt{xy} dy = x dy$, $y(1) = 4$. 9. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' - 6y = -(4x+1)e^{2x}$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = x - 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+2)!}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\frac{4}{1^2} - \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} - \frac{4}{7^2} + \dots$.
В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.
17. Вычислить $\int_0^1 x^2 \left(1 - \cos \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x - 3$ при $-3 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 17.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.

2. Найти градиент функции $u = x - 2y + e^z$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$ в точке $M(-4; -5; 0)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dy \int_{y^3}^y y(1-x) dx$.

5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = 3x^2 + 2y^2 + 1$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $1 + (1 + y')e^y = 0$.

7. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

8. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = e$. 9. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 3\cos 2x - 6\sin 2x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-1}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{n^4 + 1}}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+3} - \frac{2}{1+3^2} + \frac{3}{1+3^3} - \frac{4}{1+3^4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n \sqrt{n+1}}$.

17. Вычислить $\int_0^1 \frac{e^{-x^3} - 1}{x^3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 3$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1,5, \\ -1, & \text{если } 1,5 < x < 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 18.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$.
2. Найти градиент функции $u = x^y - 3xyz$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ в точке $M(2; 2; -4)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12 - x - y)$.

4. Вычислить интеграл $\int_1^2 dy \int_{1/y}^y \frac{x}{y^2} dx$.

5. Вычислить $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y^2 = 1 - x, x = 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $(1 + e^{3y})x dx = e^{3y} dy$. 7. $dy = (2e^x - y)dx$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

8. $y' = \frac{(x-y)y}{x^2}, y(1) = 0,5$. 9. $y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n-1}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)(3n+1)^3}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n-1}} x^n$. 16. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n-2)^2}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,25} \cos \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - |x|$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 19.

1. Удовлетворяет ли функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ уравнению $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$?

2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ для функции $u = x^3 + 2y^2 - z^4$ в точке $M(3; -2; 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

4. Вычислить интеграл $\int_{-5}^0 dy \int_{-y-5}^0 x(y+5)dx$.

5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y^2$, $x + y = 5$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$.

7. $xy' + x + y = 0$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0$. 9. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 3y = 70e^{4x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = 5x - x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n-1}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{3^2 \cdot 2} + \frac{5}{3^3 \cdot 3} - \frac{5}{3^4 \cdot 4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!n^2}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,25} x^2 \cos 4\sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } -4 < x < 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 4; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 20.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ для функции $z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ в точке $A(1; 2)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
4. Вычислить интеграл $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2-1}^3 (x-y) dy$.
5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 1 - x^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 3 - x, y = 0, x = \pm 1$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $(y + x^2 y)y' - y^2 = 1$. 7. $xy' = 2y + x^4$.
- В заданиях 8-9 решить задачу Коши.*
8. $xy' + y \ln \frac{y}{x} = y, y(1) = e^3$. 9. $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 8e^{3x}$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 4x + 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3, y'(0) = -6$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3 + 1}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд
$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{2}{4 \cdot 5} + \frac{3}{8 \cdot 9} - \frac{4}{16 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3n^3}$.
17. Вычислить $\int_0^{0,1} \frac{1 - e^{-4x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 1 + x$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 21.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x y z = e^x$.

2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ для функции $u = \frac{y\sqrt{z}}{4} + \frac{x^2}{z}$ в точке $M(-2; 3; 1)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 dx \int_{3x^2}^3 (x+1)y^2 dy$.

5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 1 - y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: x = y^2, x = 2y^2 + 1, y = \pm 1$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $y' = 2xy + x$.

7. $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

8. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2, y(0) = 1$. 9. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 80e^{2x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 2x - 3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2 \cdot n!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n-1}}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{\sqrt{n^5 + 4}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}(x-1)^n}{n^2}$.

17. Вычислить $\int_0^{0,36} \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -2 < x < 0, \\ -0.5, & \text{если } x = 0, \\ x/2, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 22.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = x e^{\frac{y}{x}}$.
2. Найти градиент функции $u = (x^2 + y^2 + z^2)^3$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ в точке $M(1; 2; -1)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_y^1 xy^2 dy$.

5. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $4z = y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 2x, x + y = 9, y = 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $2xyy' + x^2 = 1$. 7. $xy' - 2y + x^2 = 0$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $x dy + 2\sqrt{xy} dx = y dx, y(1) = 4$. 9. $y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 15e^x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, y'(0) = 14$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1)^3}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} - \frac{3^3}{4!} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+4)}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n)^2 (x-1)^n$.

17. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 2$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 23.

1. Удовлетворяет ли функция $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$?
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -\vec{i} - 2\vec{k}$ для функции $u = \frac{e^{x+y}}{z^2 + x}$ в точке $M(-1; 1; 0)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} (x^3 + y) dy$.
5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = 4x + 5y + 2$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $y' - xy^2 = 2xy$. 7. $(2x^2 + xy)y = xy + y^2$.
В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 2$. 9. $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 16y = 24e^{4x}$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 2$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)!}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 8}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\frac{1}{2!} - \frac{8}{4!} + \frac{27}{6!} - \frac{64}{8!} + \dots$.
В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n+2)}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n n}$.
17. Вычислить $\int_0^1 x^5 \cos \frac{x}{4} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 9x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } -3 < x < 0, \\ 1,5, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } 0 < x < 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 24.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = 3ye^{2x+y}$.
2. Найти градиент функции $u = x^2y + y^2z - 3z$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ в точке $M(0; -2; -1)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = (3x + 6)y^2 - x^3 + 3x$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} (2x+5y)dy$.

5. Вычислить $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями

$$y = x^3, y = 4x (y \geq 0).$$

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$.

7. $xy' + y = \sin x$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $2xyy' + x^2 + y^2 = 0, y(1) = 0$. 9. $y'' - 4y' + 8y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 7.$$

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n!}$.

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(n-1)(3n-1)^3}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sin 1 - \sin \frac{1}{2^3} + \sin \frac{1}{3^3} - \sin \frac{1}{4^3} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{6^n}$.

17. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x/3 - 3, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = 1 - |x|$ при $-3 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 25.

1. Удовлетворяет ли функция $z = \ln(x + e^{-y})$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$?
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ для функции $u = \ln \sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right)$ в точке $M(1; 0,5; \pi)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} (x^3 + 3y) dy$.
5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0, y = 0, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0$. 7. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.
В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $y' = \sin^2 x + y \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. 9. $y'' + 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 4$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 14y' + 49y = 72 \sin 7x$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 2$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n^2 + 4n + 1}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3^2} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} - \frac{\sqrt{4}}{3^4} + \dots$.
В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt[3]{n}}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{4^n}$.
17. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x^5} \sin \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -4 < x < 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x = 0, \\ 1 + x, & \text{если } 0 < x < 4; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 26.

1. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$.
2. Найти градиент функции $u = \ln(1+x^2-y^2+z^2)$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$ в точке $M(1; 1; 1)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} xy dx$.

5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $x + y = 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}$. 7. $(xy' - 1) \ln x = 2y$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $(x+2y)dx + xdy = 0$, $y(1) = 0$. 9. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 20xe^x.$$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2n^2-1}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+4n+8}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} - \frac{7}{4!} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)x^n}{7^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n(n+7)}$.

17. Вычислить $\int_0^2 \cos \frac{x^3}{16} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 4x - 3$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 27.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$.
2. Найти градиент функции $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ и производную по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ в точке $M(-1; 1; 1)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_{-2}^2 dy \int_{y-2}^{4-y^2} dx$.

5. Вычислить $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ по области D , ограниченной линиями $xy=1$, $y=x$, $y=2$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $2x^2yy' + y^2 = 2$. 7. $2x^3dy = y(2x^2 - y^2)dx$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $x^2 y' = 2xy + 3$, $y(1) = 0$. **9.** $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = 12e^{4x}$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^2 - 2n + 5}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 6n + 13}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2}{3^4} + \frac{3}{5^4} - \frac{4}{7^4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

$$\mathbf{15.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n} x^n. \qquad \mathbf{16.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n} (x-4)^n.$$

17. Вычислить $\int_0^2 \sin \frac{x^2}{4} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x/5 - 2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - x$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 28.

1. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = x \cos^2(x + y)$.
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$ для функции $u = z + \frac{x}{y} - \ln(x + z^2)$ в точке $A(5; 2; 3)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^3 dx \int_{x^2}^{3x} y(1 + x^2) dy$.
5. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0, x + y = 1, x + 2y + 2 = 0$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x^2$.
В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $y^2 y' + xy^2 y' + x = 0$. 7. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), y(1) = 1$. 9. $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' - 8y = xe^x$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 32e^{4x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 0$.
В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n^2 + 3}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 100}{100n^2 + 4}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд
$$\frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2} - \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 2^2} + \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 2^3} - \frac{\sqrt{6}}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{2n(2n+1)}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.
17. Вычислить $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 12$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} -1/2, & \text{если } -6 < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 6; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 29.

1. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{2xy + y^2}$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z}$?
2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ для функции $u = \frac{3(z+x)^3}{\sqrt{y}}$ в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$.
3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

4. Вычислить интеграл $\int_0^3 dy \int_y^{2y} (2x - y) dx$.

5. Вычислить $\iint_D xy^2 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $x = 2 - y^2, x = 0$.

В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

6. $x^2 y' = y' + xy$. 7. $x^2 dx + 2xy dy + y^2 dx = 0$.

В заданиях 8-9 решить задачу Коши.

8. $y' = x^2(3y + e^{-x^3})$, $y(0) = 1$. 9. $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = \sin 2x$.

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 8e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$.

В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n-1}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n^2+1)^3}$.

14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+1^2} - \frac{3}{1+2^2} + \frac{5}{1+3^2} - \frac{7}{1+4^2} + \dots$$

В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} x^n$. 16. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n-2)^2}$.

17. Вычислить $\int_0^2 \sin \frac{x^3}{16} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3 - 8x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ 4, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Вариант 30.

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$.
 2. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ для функции $u = \ln(x^2 - y^2)$ в точке $A(2; 1; 8)$.
 3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.
 4. Вычислить интеграл $\int_1^2 dx \int_0^{\ln x} e^y dy$.
 5. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 1, x^2 = y, y = 2, x = 0$.
- В заданиях 6-7 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.
6. $xdy + xydy + ydx = xydx$.
 7. $xy' + y = \ln x + 1$.
- В заданиях 8-9 решить задачу Коши.
8. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y(1) = 2$.
 9. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 6$.
10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 12y = (20x - 8)e^{4x}$.
11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 2$.
- В заданиях 12-13 исследовать сходимость числового ряда.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n+1)5^n}$.
 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n+n}}$.
14. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$.
- В заданиях 15-16 найти область сходимости степенного ряда.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$.
 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(x+6)^n$.
17. Вычислить $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \sin 2\sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.
18. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 7x - 1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 3$ при $-4 < x < 4$; построить графики функции и суммы ряда.