Теоретический и практический минимум по дисциплине
«Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Теоретический минимум

1. Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений

1. Что называется матрицей размера $m \times n$?
2. Что называется диагональной матрицей?
3. Что называется единичной матрицей?
4. Что называется нулевой матрицей?
5. Определение транспонированной матрицы.
6. В каком случае матрицу $A_{m\times n}$ можно умножить на матрицу B?
7. Формула для вычисления определителя 3-го порядка разложением по 1-й строке.
8. Определение обратной матрицы.
9. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
10. Формула для нахождения обратной матрицы.
11. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
12. Что называется совместной системой линейных алгебраических уравнений?
13. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений?
14. Сколько решений может иметь система линейных алгебраических уравнений?
15. Формулы Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений. Какие системы линейных алгебраических уравнений можно решать методом Крамера?
16. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Какие системы линейных алгебраических уравнений можно решать матричным методом?
17. Какие системы линейных алгебраических уравнений можно решать методом Гаусса?
18. Что называется рангом матрицы?
19. Теорема Кронекера-Капелли.

2. Элементы векторной алгебры

20. Какой вектор называется единичным?
21. Примеры единичных векторов.
22. Какой вектор называется нулевым?
23. Что называется линейной комбинацией векторов?
24. Что называется линейно независимой системой векторов?
25. Что называется векторным базисом на плоскости?
26. В каком случае два вектора образуют базис на плоскости?

27. Что называется векторным базисом в пространстве?
28. В каком случае три вектора образуют базис в пространстве?
29. Как вычисляется длина вектора, если известны его координаты $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ в ортонормированном базисе?
30. Что называется направляющими косинусами вектора?
31. Основное свойство направляющих косинусов.
32. Как вычисляются направляющие косинусы вектора, если известны его координаты $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ в ортонормированном базисе?
33. Определение скалярного произведения.
34. Основные свойства скалярного произведения.
35. Геометрические и физические приложения скалярного произведения.
36. Как вычисляется скалярное произведение векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе?
37. Что называется правой тройкой векторов?
38. Определение векторного произведения.
39. Геометрические приложения векторного произведения.
40. Основные свойства векторного произведения.
41. Как вычисляется векторное произведение векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе?
42. Определение смешанного произведения.
43. Основные свойства смешанного произведения.
44. Геометрические приложения смешанного произведения.
45. Как вычисляется смешанное произведение векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе?
46. Какие векторы называются коллинеарными?
47. Условие коллинеарности двух векторов.
48. Какие векторы называются ортогональными?
49. Условие ортогональности двух векторов.
50. Какие векторы называются компланарными?
51. Условие компланарности трех векторов.

3. Элементы аналитической геометрии

52. Общее уравнение прямой на плоскости.
53. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
54. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $(x_0; y_0)$.
55. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
56. Угол между двумя прямыми на плоскости.
57. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
58. Какие линии относятся к кривым 2-го порядка на плоскости?
59. Определение эллипса.
60. Каноническое уравнение эллипса, рисунок.

61. Определение гиперболы.
62. Каноническое уравнение гиперболы, рисунок.
63. Определение параболы.
64. Каноническое уравнение параболы, рисунок.
65. Общее уравнение плоскости.
66. Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$.
67. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
68. Расстояние от точки до плоскости.
69. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
70. Уравнения прямой, проходящей в пространстве через две заданные точки.
71. Канонические уравнения прямой в пространстве.
72. Общие уравнения прямой в пространстве.
73. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
74. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

4. Линейные пространства. Линейные операторы

75. Определение линейного пространства.
76. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства.
77. Базис линейного пространства.
78. Размерность линейного пространства.
79. Координаты элемента линейного пространства в заданном базисе.
80. Как составляется матрица перехода от одного базиса к другому?
81. Преобразование координат при изменении базиса.
82. Определение линейного оператора.
83. Как составляется матрица линейного оператора?
84. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
85. Собственные значения и собственные векторы матрицы.
86. Характеристическое уравнение матрицы.
87. Как найти собственные значения матрицы?
88. Определение евклидова пространства.
89. Норма вектора евклидова пространства, ее свойства.
90. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
91. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве.
92. Квадратичная форма.
93. Матрица квадратичной формы.
94. Канонический вид квадратичной формы.

Практический минимум

1. Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений

1. Найти для матриц $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ произведения $AB,\ BA$, и $A^T B$, если они существуют.

2. Пусть $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу:

а) $D=AB-C^2$; **б)** $(2A^T-B)C^T$.

3. Вычислить определитель: **а)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу, если она существует:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 5x+7y=-13. \end{cases}$

7. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x+y-5z=-4, \\ x-z=1, \\ 3x+2y+2z=2. \end{cases}$

8. Решить систему уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-4, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1+x_2+2x_3=11; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+2y-3z=0, \\ 3x+4y-z=7, \\ 7x+10y-5z=2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+5x_4=4, \\ 2x_1+3x_2-x_3+6x_4=7; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x+4y=12, \\ 7x-5y=23; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 3x-2y-3z=5, \\ x-3y+4z=1, \\ 7x-7y-2z=0. \end{cases}$

2. Элементы векторной алгебры

9. Найти координаты и длину вектора $3\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-\vec{k}$.

10. Найти единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AB}$, если $A(3;2;1), B(1;-1;1)$.

11. Даны длины векторов $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=4,$ угол между векторами $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{2\pi}{3}.$

Найти: **а)** $\vec{a}\cdot\vec{b}$; **б)** $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

12. Найти скалярное произведение векторов и угол между векторами $\vec{a}=6\vec{j}-12\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

13. Найти угол ABC, если $A(2;-2;8), B(4;4;0), C(2;2;2)$.

14. Найти скалярные произведения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ и $(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CA}$, если $A(2;2;1), B(-3;4;2), C(0;2;-1)$.

15. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

16. Найти векторные произведения $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ и $(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AC}$, если $A(-1;2;3), B(-3;2;2), C(0;4;-1)$.

17. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A\left(-1;2;-3\right), B\left(-3;-1;1\right), C\left(2;4;-4\right)$.

18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;3;5\}$ $\vec{b}=\{-1;2;2\}$.

19. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{j}+6\vec{k}$.

20. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A\left(3;0;6\right), B\left(-2;3;0\right), C\left(0;2;4\right), D\left(1;1;1\right)$.

21. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\left\{3;-2;1\right\},\ \vec{b}=\left\{-1;1;-2\right\},\ \vec{c}=\left\{2;1;-3\right\}$.

22. Проверить, компланарны ли векторы: $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{j}+7\vec{k}$.

23. Проверить, лежат ли точки $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3)$ в одной плоскости.

24. При каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ будут ортогональны?

25. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\beta\vec{j}-9\vec{k}$ будут коллинеарны?

26. При каких значениях α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{j}+4\vec{k}$ будут компланарны?

3. Элементы аналитической геометрии

27. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-2;5)$, $B(4;2)$, $C(0;-6)$. Написать уравнения: **а)** стороны BC; **б)** медианы AM; **в)** высоты AH.

28. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;5)$ параллельно прямой $y=2x+1$. Сделать рисунок.

29. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1;-2)$: **а)** параллельно; **б)** перпендикулярно прямой $2x+3y=5$. Сделать рисунок.

30. Назвать и построить кривые: **а)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$; **б)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$; **в)** $36x=y^2$.

31. Найти точки пересечения линий $x=8y-y^2$ и $3x+4y=25$. Сделать рисунок.

32. Привести уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду; сделать рисунок:

а) $x^2+y^2+5x+6y=0$; **б)** $3x^2-2y^2-12x-20y=50$;

в) $16x^2+25y^2+32x-100y=284$; **г)** $3x^2+12x+20y=0$.

33. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(1;6;3)$, $B(2;1;-4)$.

34. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-2;3)$, $B(2;-1;4)$, $C(-1;-2;-3)$.

35. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;5)$: **а)** параллельно плоскости $6x-3z+8=0$; **б)** перпендикулярно прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{-2}=-z$.

36. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1;3;0)$: **а)** параллельно прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{4}$; **б)** перпендикулярно плоскости $5x-3y-z+2=0$.

37. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;4;0)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=-2t+1, \\ y=t-3, \\ z=t. \end{cases}$

38. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-3;1)$ параллельно прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{-2}=-z$.

4. Линейные пространства. Линейные операторы

39. Найти координаты:

а) вектора $\overline{y}=(0;11;-1)\in\mathbb{R}^3$ в базисе $\overline{x_1}=(0;1;3)$, $\overline{x_2}=(-2;1;0)$, $\overline{x_3}=(1;2;-1)$;

б) матрицы $\overline{a}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \overline{e_2}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\overline{e_3}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

в) многочлена $\overline{y}=13-5x-3x^2-5x^3$ в базисе $\overline{e_1}=x-x^3, \overline{e_2}=2x^3+x-2$, $\overline{e_3}=3-x^2$, $\overline{e_4}=x$.

40. Являются ли линейно независимыми:

а) векторы $\overline{x_1}=(1;1;2;-1), \overline{x_2}=(3;5;0;5), \overline{x_3}=(0;0;1;-1)$, $\overline{x_4}=(0;5;6;-1)$ в $\mathbb{R}^4$;

б) матрицы $\overline{e_1}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 4\end{pmatrix}, \overline{e_2}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \overline{e_3}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \overline{e_4}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$;

в) многочлены $\overline{e_1}=2x+5x^2, \overline{e_2}=x^2+x+2, \overline{e_3}=3+x-x^2$, $\overline{e_4}=x+2x^2+x^3$?

41. Какие из векторов $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$, $\overline{x_2}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, $\overline{x_3}=\begin{pmatrix}4\\ -8\end{pmatrix}$, $\overline{x_4}=\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix}$ являются собственными векторами линейного оператора с матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$?

42. Найти собственные значения матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 6\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

Ответы. **1.** $AB=\begin{pmatrix}3 & 14\\ 11 & -4\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}6 & 12 & 2\\ 9 & 0 & 15\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix}$; A^TB не существует.

2. а) $\begin{pmatrix}9 & 7\\ 2 & 9\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}10 & 8\\ -2 & -12\\ 19 & 20\end{pmatrix}$. **3. а)** -2; **б)** 1; **в)** -38. **4. а)** $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

б) $B^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 9\\ -5 & -3 & 8\\ -4 & -1 & 5\end{pmatrix}$. **5. а)** $r=2$; **б)** $r=1$; **в)** $r=3$; **г)** $r=3$. **6.** $x=3; y=-4$.

7. $\{(2;-3;1)\}$. **8. а)** $\{(2;-1;3)\}$; **б)** несовместна; **в)** $\{(-1+2c;1+c;c), c\in\mathbb{R}\}$;

г) $\left\{\left(\frac{5+5c_1-9c_2}{7};\frac{13-c_1-8c_2}{7};c_1;c_2\right), c, c_2\in\mathbb{R}\right\}$; **д)** $\{(4;1)\}$; **е)** несовместна.

9. $3\vec{a}-\vec{b}=\{6;-3;-2\}$; $|3\vec{a}-\vec{b}|=7$. **10.** $\vec{e}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}};-\frac{3}{\sqrt{13}};0\right\}$. **11. а)** -6; **б)** -2.
12. $\vec{a}\vec{b}=24$; $\varphi=\arccos\frac{4}{3\sqrt{5}}$. **13.** $\arccos\frac{8}{\sqrt{78}}$. **14.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-4$; $(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CA}=-28$. **15.** $11\vec{i}+11\vec{j}-11\vec{k}$. **16.** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-9\vec{j}-4\vec{k}$; $(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-27\vec{j}-12\vec{k}$. **17.** $2{,}5\sqrt{6}$. **18.** $\sqrt{146}$. **19.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=65$; $\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-65$. **20.** $\frac{1}{6}$. **21.** 4. **22.** Компланарны. **23.** Да. **24.** -2. **25.** $\alpha=1$; $\beta=0$.
26. 1; 3.
27. а) $y=2x-6$; **б)** $7x+4y-6=0$; **в)** $x+2y-8=0$. **28.** $y=2x+9$.
29. а) $2x+3y+4=0$; **б)** $3x-2y-7=0$. **30. а)** эллипс; **б)** гипербола; **в)** парабола. **31.** $M_1(7;1), M_2\left(-2\frac{7}{9};8\frac{1}{3}\right)$. **32. а)** $(x+2{,}5)^2+(y+3)^2=15{,}25$; **б)** $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+5)^2}{6}=1$; **в)** $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$; **г)** $(x+2)^2=-\frac{20}{3}(y-0{,}6)$.
33. $x-1=\frac{y-6}{-5}=\frac{z-3}{-7}$. **34.** $3x-2y+z-4=0$. **35. а)** $6x-3z+9=0$; **б)** $3x-2y-z-2=0$. **36. а)** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{4}$; **б)** $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-3}=-z$.
37. $2x-y-z-8=0$. **38.** $\begin{cases} x=3t+2, \\ y=-2t-3, \\ z=-t+1. \end{cases}$
39. а) $\{1;2;4\}$; **б)** $\{2;-2;2\}$; **в)** $\{1;-2;3;-4\}$. **40. а)** линейно зависимы; **б)** линейно независимы; **в)** линейно независимы. **41.** $\overline{x_1},\overline{x_4}$. **42. а)** $\lambda_1=-5$; $\lambda_2=7$; **б)** $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=1$; **в)** $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=7$; **г)** $\lambda_1=1$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=5$.