Марковски случайни процеси

1. Основни определения

Нека имаме някаква физическа система S, състоянието на която се променя във времето t. Ако тази промяна във времето на състоянието на S става по случаен, непредсказуем предварително начин, се казва, че в системата S протича случаен процес.

Този случаен процес се нарича Марковски или процес без последствия, ако за всеки момент от време t_0 вероятността системата да премине в кое да е свое състояние в бъдещето $(t > t_0)$ зависи само от нейното състояние в настоящето $(t = t_0)$ и не зависи от това кога и по какъв начин системата се е озовала в това състояние (т.е. не зависи от историята на системата или как е протичал процесът при $t < t_0$).

Един процес е Марковски, ако при фиксирано настояще, бъдещото му развитие не зависи от миналото!

Случайният процес е с дискретни състояния, ако възможните състояния на системата: $S_1, S_2, S_3, \ldots$ са краен брой или могат да се изброят едно след друго, а самият процес представлява последователност от мигновени или скокообразни преходи на S от едно състояние в друго във времето. Всяка възможна последователност от състояния на S се нарича ***верига***. При ограничен брой състояния веригата е ***крайна***. Ако преходите от S_i в S_j се извършват в определени моменти от време – веригата е с дискретно време.

2. Дискретни вериги на Марков

Нека състоянията на системата S са краен брой:

$$S_1, S_2, S_3, \dots S_n$$

и преходите на системата от състояние в състояние са възможни само в строго определени, предварително фиксирани моменти от времето:

$$t_1, t_{2,} t_3, \dots, t_k, \dots$$

Тези моменти във времето се наричат стъпки или етапи на процеса. В интервалите между тези моменти системата S запазва състоянията си. Случайният процес, протичащ в S, е с дискретно време и се разглежда като функция на целочислен аргумент: 1, 2, 3, …,k, … (номерът на стъпката).

S_0 – означава началното състояние на системата S. Това е състоянието преди първата стъпка и може да е зададено предварително или да е случайно избрано от възможните.

$S_{(k)} (k = 1,2,3, \dots)$ - е състоянието на S непосредствено след k-тата стъпка

$S_{(k)} = S_i (i = 1..n;\ k = 0,1,2,3, \dots)$ - означават случайни събития, такива че след k-тата стъпка системата S се намира в състояние $S_i (i = 1..n)$.

Марковският случаен процес с дискретни състояния и дискретно време се нарича дискретна Марковска верига (ДМВ).

ДМВ се описват с така наречените вероятности на състоянията и вероятности за преход между състоянията.

Във всеки момент от време системата S може да бъде само в едно от състоянията:

$$S_1, S_2, S_3, \dots S_n$$

следователно се осъществява едно от събитията:

$$S_{(k)} = S_i(i = 1..n;\ k = 0,1,2,3,\dots)$$

които образуват пълна група и са несъвместими.

Вероятностите за възникване на тези събития са:

$$p_{i_{(k)}} = P[S_{(k)} = S_i]$$

И за тях е в сила равенството:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i(k)} = 1\ (k = 0,1,2,\dots)$$

където:

$k = 0$ е началното състояние на системата

$p_{i(k)}(i = 1..n)$ – са вероятностите на състоянията на системата S непосредствено след k -тата стъпка.

Началното състояние на системата се описва с вектора на началното разпределение на вероятностите на състоянията:

$$p_{(0)} = \left\| p_{1(0)}\ p_{2(0)} \dots\ p_{n(0)} \right\| = \left\| p_{i(0)} \right\|_{1Xn}$$

Този вектор може да бъде предварително зададен или случаен.

За всяка стъпка k съществуват някакви вероятности за преход на системата от състояние S_i в произволно друго състояние S_j за една стъпка, както и вероятности системата да запази състоянието си. Тези вероятности се наричат преходни вероятности. Възможно е да не е възможно преминаване от едно състояние в някое друго и тези преходни вероятности да имат стойност 0 при невъзможен преход.

$$P_{ij(k)} = P\left[S_{(k)} = S_j / S_{(k-1)} = S_i\right]$$
$$(i, j = 1..n; k = 1,2,3,\dots)$$

ДМВ се нарича хомогенна, ако преходните вероятности не зависят от номера на стъпката – k, т.е. можем да считаме, че:

$$P_{ij(k)} = P_{ij}$$

И зависят само от състоянието S_i. В противен случай ДМВ е нехомогенна. Ние ще разглеждаме само хомогенни ДМВ.

Вероятностите P_{ij} са елементи на квадратната матрица на преходните вероятности:

$$||P_{ij(k)}||_{nxn} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \ldots \\ S_i \\ \ldots \\ S_n \end{array} \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & \ldots & S_j & \ldots & S_n \\ \left| \begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1j} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2j} & \ldots & P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{i1} & P_{i2} & \ldots & P_{ij} & \ldots & P_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nj} & \ldots & P_{nn} \end{array} \right| \end{array}$$

За всяка стъпка са в сила следните равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i(k)} = 1 \ (k = 0,1,2, \ldots)$$

$$p_{(k)} = p_{(k-1)}.P$$

Където $p_{(k-1)}$ е векторът на разпределение на вероятностите за предходната стъпка, а P е матрицата на преходните вероятности.

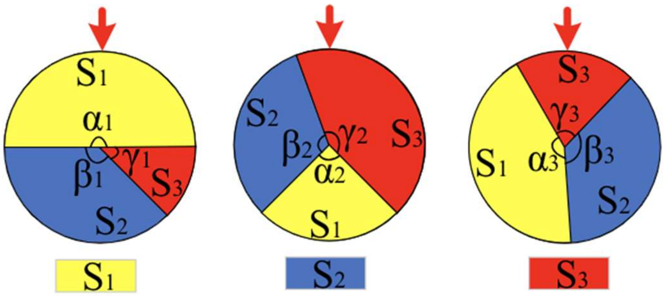
Векторът $p_\infty = \|p_1 p_2 \ldots p_n\|$ се нарича вектор на стационарните вероятности на състоянията на ДМВ.

$p_i(i = 1..n)$ – са вероятностите, че системата ще се окаже в състояние S_i в произволен момент в далечното бъдеще.

Смята се, че след много на брой стъпки векторът на разпределение на вероятностите остава постоянен и затова

$$p_\infty = p_\infty.P$$

Пример 1: Нека имаме 3 лотарийни кръга - S_1, S_2 и S_3, разделени на по 3 неравни сектора, означени за всеки от тях с $\propto_i$, β_i и γ_i. За всеки от кръговете, централните ъгли са означени съответно с α_i, β_i и γ_i, като $i = 1, 2, 3$ (фигура 78).



фигура 78. Схематично представяне на кръговете от пример 1.

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$$

Такива мерни единици са избрани за ъглите, че 360 градуса е равно на 1.

Завърта се някой от кръговете, като се започва в началото от случайно избран кръг. Всяко следващо завъртане се определя от резултата от предходния опит. Т.е. определя се от сектора, който сочи стрелката над кръга, който е бил завъртян. Предполага се, че вероятността за избор на даден сектор е равна на съответстващия ѝ централен ъгъл.

Имаме крайна хомогенна ДМВ. Състоянията ѝ - S_1, S_2 и S_3 представляват резултата от всяко завъртане на кръг на всяка стъпка $k = 1,2,3, \dots$.

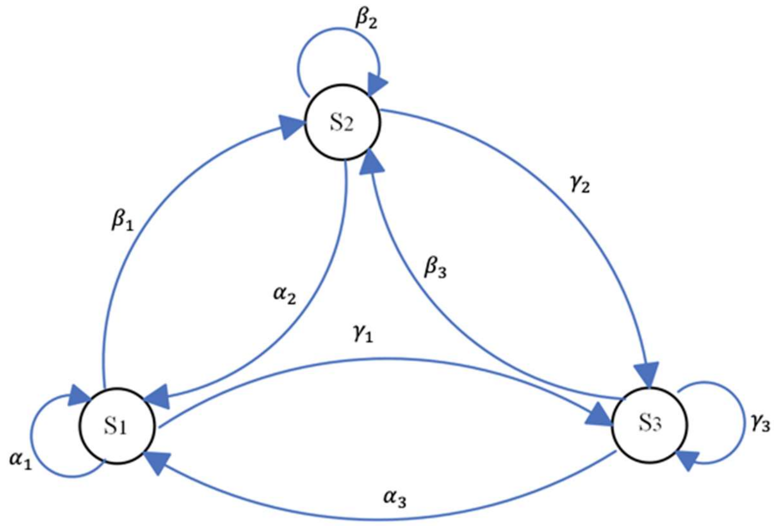
За тази ДМВ векторът на началните вероятности на състоянията е:

$$p_{(0)} = \left\| p_{1(0)} p_{2(0)} p_{3(0)} \right\|$$

В описанието е казано, че се започва от произволен кръг – избира се един от 3 на случаен принцип. Тъй като сумата от вероятностите да се избере всеки кръг е равна на 1, а броят на кръговете е 3 и те са с равни вероятности то:

$$p_{(0)} = \left\| \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3} \right\|$$

Графът на ДВМ има показания на фигура 79 вид.



фигура 79. Граф на състоянията на системата от пример 1.

На всяко състояние на системата съответства връх в графа, а на всеки преход от състояние в състояние – дъга, с тегло, което е равно на вероятността за преход. За матрицата на преходните вероятности можем да напишем:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Тогава

$$p_{(1)} = p_{(0)}.P$$

Трябва да умножим вектор по матрица:

$$p_{1(1)} = \frac{1}{3}.\alpha_1 + \frac{1}{3}.\alpha_2 + \frac{1}{3}.\alpha_3$$
$$p_{2(1)} = \frac{1}{3}.\beta_1 + \frac{1}{3}.\beta_2 + \frac{1}{3}.\beta_3$$
$$p_{3(1)} = \frac{1}{3}.\gamma_1 + \frac{1}{3}.\gamma_2 + \frac{1}{3}.\gamma_3$$

От тези три равенства можем да определим елементите на вектора на разпределение на вероятностите в момента $k = 1$. След това можем да изчислим този вектор за $k = 2$ и т.н.

За коректността на изчисленията си можем да направим проверка от равенството:

$$p_{1(1)} + p_{2(1)} + p_{3(1)} = 1$$

За вектора на разпределение на стационарните вероятности:

$$p_{\infty} = \|p_1\ p_2\ p_3\|$$

знаем, че:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_{\infty} = p_{\infty}.P$$

Следователно:

$$\|p_1\ p_2\ p_3\| = \|p_1\ p_2\ p_3\|.\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

или:

$$p_1 = p_1.\alpha_1 + p_2.\alpha_2 + p_3.\alpha_3$$

$$p_2 = p_1.\beta_1 + p_2.\beta_2 + p_3.\beta_3$$

$$p_3 = p_1.\gamma_1 + p_2.\gamma_2 + p_3.\gamma_3$$

И равенството:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Имаме система от 4 уравнения с три неизвестни и можем да я решим и определим стационарните вероятности или след много на брой завъртания на кръговете дали се очаква винаги да се пада завъртане на един и същ кръг.

Пример 2: Чрез анкетиране се изследва потребителското мнение за три конкуриращи се продукта – например три вида вафли - S_1, S_2 и S_3.

Първоначално е установено, че - S_1, S_2 и S_3 се използват съответно от 50%, 20% и 30% от потребителите.

След 1 месец е установено, че 10% и 0% от потребителите на S_1вече си купуват съответно S_2 и S_3. 40% и 30% от потребителите на S_2си купуват S_1и S_3 съответно. И 70% и 10% от потребителите на S_3 вече са фенове на S_1 и S_2 съответно.

Да се определи:

1. Колко процента от феновете на вафли използват типовете S_1, S_2 и S_3 след първия месец?

2. Ако поведението на потребителите не се променя във времето, да се определи какъв процент използват съответно S_1, S_2 и S_3след неограничен, достатъчно голям брой месеци.

Решение:

Имаме ДМВ с 3 състояния: S_1, S_2 и S_3.

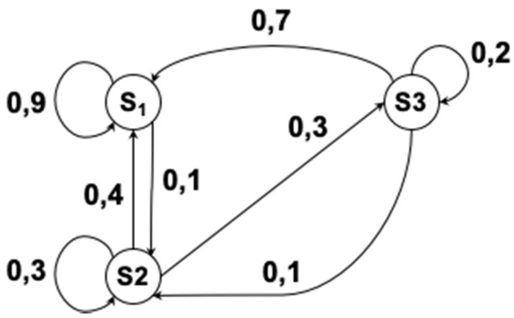
От условието:

"Първоначално е установено, че - S_1, S_2 и S_3 се използват съответно от 50%, 20% и 30% от потребителите."

Може да се определи векторът на началните вероятности:

$$p_{(0)} = \left\| p_{1(0)} p_{2(0)} p_{3(0)} \right\| = \|0{,}5\ 0{,}2\ 0{,}3\|$$

От описанието на поведението на потребителите в условието правим граф на състоянията на ДВМ, показан на фигура 80.



фигура 80. Граф на състоянията на системата от пример 2.

По условие имаме: ***„След 1 месец е установено, че 10% и 0% от потребителите на S_1 вече си купуват съответно S_2 и S_3.“***

Следователно:

$$p_{12} = 0{,}1$$

$$p_{13} = 0$$

И тъй като сумата от вероятностите винаги трябва да е равна на 1, то

$$p_{11} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Разсъждаваме аналогично за другите два продукта по описанието в условието: ***“40% и 30% от потребителите на S_2 си купуват S_1 и S_3 съответно.“***

$$p_{21} = 0{,}4$$

$$p_{23} = 0{,}3$$

И от изискването за сумата от вероятности да е равна на 1, то

$$p_{22} = 1 - 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}3$$

И за последния продукт имаме ***„70% и 10% от потребителите на S_3 вече са фенове на S_1 и S_2 съответно.“***

$$p_{31} = 0{,}7$$

$$p_{32} = 0{,}1$$

И от изискването за сумата от вероятности да е равна на 1, то

$$p_{33} = 1 - 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}2$$

Вероятностите за преход от състояние в състояние след първия месец или матрицата на преходните вероятности определяме като определим претеглената матрица на съседство за ориентирания граф на тази ДВМ:

$$P = \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}$$

Обърнете внимание, че сумата от стойностите във всеки ред на тази матрица винаги трябва да е равна на 1!!!

Векторът на разпределение на вероятностите след първия месец или първата стъпка в този случай

$$p_{(1)} = \left\| p_{1(1)} p_{2(1)} p_{3(1)} \right\|$$

И знаем, че:

$$p_{(1)} = p_{(0)}.P$$

Следователно:

$$\left\| p_{1(1)} p_{2(1)} p_{3(1)} \right\| = \| 0{,}5\ 0{,}2\ 0{,}3 \|. \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}$$

Всеки елемент на вектора за след 1 месец се получава от умножение на вектора на началното състояние със съответната колона от матрицата. (Как се умножава вектор с матрица си припомнете!).

$$p_{1(1)} = 0{,}5.0{,}9 + 0{,}2.0{,}4 + 0{,}3.0{,}7 = 0{,}74$$

$$p_{2(1)} = 0{,}5.0{,}1 + 0{,}2.0{,}3 + 0{,}3.0{,}1 = 0{,}14$$

$$p_{3(1)} = 0{,}5.0 + 0{,}2.0{,}3 + 0{,}3.0{,}2 = 0{,}12$$

Не забравяйте да проверите, дали сумата от получените вероятности е равна на 1!!!

От полученото следва, че след първия месец най-търсени са вафли от тип S_1, купуват ги 74% от потребителите, 14% купуват S_2 и останалите 12% - S_3 .

За втората част на задачата:

След неограничен брой месеци – трябва да определим стационарните вероятности в ДВМ:

$$p_\infty = \| p_1\ p_2\ p_3 \|$$

знаем, че:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_\infty = p_\infty . P$$

Следователно:

$$\|p_1\ p_2\ p_3\| = \ \|p_1\ p_2\ p_3\| . \begin{vmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{vmatrix}$$

или:

$$p_1 = p_1 . 0,9 + p_2 . 0,4 + p_3 . 0,7$$

$$p_2 = p_1 . 0,1 + \ p_2 . 0,3 + p_3 . 0,1$$

$$p_3 = p_1 . 0 + \ p_2 . 0,3 + p_3 . 0,2$$

и

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Сега остава да решим тази система.

От това уравнение:

$$p_3 = p_1 . 0 + \ p_2 . 0,3 + p_3 . 0,2$$

Можем да изразим p_3:

$$p_3 = p_1 . 0 + \ p_2 . 0,3 + p_3 . 0,2$$

$$p_3 - p_3 . 0,2 = \ p_2 . 0,3$$

$$0,8 . p_3 = \ p_2 . 0,3$$

$$p_3 = \frac{0,3}{0,8} . p_2$$

От:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 + p_3 = 1 - p_2$$

заместваме в:

$$p_2 = p_1 . 0{,}1 + \ p_2 . 0{,}3 + p_3 . 0{,}1$$

$$p_2 - 0{,}3 . p_2 = 0{,}1 . (p_1 + p_3)$$

$$0{,}7 . p_2 = 0{,}1 . (p_1 + p_3)$$

$$0{,}7 . p_2 = 0{,}1 . (1 - p_2)$$

$$0{,}7 . p_2 = 0{,}1 - 0{,}1 . p_2$$

$$0{,}8 . p_2 = 0{,}1$$

$$p_2 = \frac{0{,}1}{0{,}8}$$

$$p_2 = \frac{1}{8}$$

Замесваме в:

$$p_3 = \ \frac{0{,}3}{0{,}8} . p_2$$

И получаваме:

$$p_3 = \ \frac{3}{8} . \frac{1}{8} = \frac{3}{64}$$

От

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Получаваме:

$$p_1 = 1 - p_2 - p_3$$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{64}$$

$$p_1 = \frac{64}{64} - \frac{8}{64} - \frac{3}{64}$$

$$p_1 = \frac{53}{64}$$

Очевидно, след много на брой месеци, е най-добре да се инвестира в производството на вафли от първия вид, защото те ще бъдат най-търсени –

$$p_1 = \frac{53}{64}$$

Или приблизително 82,8% от потребителите ги купуват. Най-малко се търсят вафли от тип 3 – около 4,7% и от тип две – 12,5%.

Пример 3: Ако студент закъснее веднъж за лекция, то в 90 % от случаите следващия път не закъснява. Ако е отишъл навреме, то в 30 % от случаите на следващата лекция закъснява.

1. Да се състави Марковски модел на процеса.
2. Ако за някоя лекция (приета условно за нулева) вероятността студентът да закъснее е два пъти по-малка от вероятността да не закъснее, да се определят вероятностите студентът да закъснее или да не закъснее за следващите две лекции.
3. Да се определят вероятностите за закъснение и не закъснение след неограничен, достатъчно голям брой лекции (стационарни вероятности).
4. За установен режим за колко лекции средно ще закъснее и за колко няма да закъснее, ако се разглеждат 60 лекции?
5. Ако за някоя лекция вероятностите да закъснее и да не закъснее се отнасят тъй както 11 към 39, то какво са тези вероятности за предходната лекция?

Решение:

1. Да се състави Марковски модел на процеса.

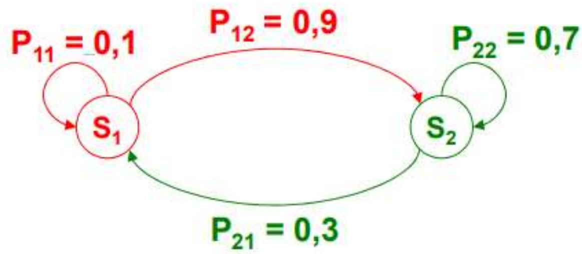
Възможните състояния са:

S_1– студентът е закъснял за лекцията

S_2– студентът не е закъснял за лекцията

P_{ij} – преходни вероятности, които получаваме като разсъждаваме върху условието на задачата: „Ако студент закъснее веднъж за лекция, то в 90 % от случаите следващия път не закъснява.“ Това ще рече, че преходът от състояние S_1 в състояние S_2 е с вероятност 0,9. Сумата от вероятностите трябва да е 1 и следователно с вероятност 0,1 системата може да остане в състояние S_1. „Ако е отишъл навреме, то в 30 % от случаите на следващата лекция закъснява.“ – с подобни разсъждения, ако системата е в S_2 – студентът не е закъснял, то с вероятност 0,3 следващия път може да закъснее – системата да премине в състояние S_1 или с вероятност 0,7 да остане в същото или студентът с вероятност 0,7 може пак да закъснее.

Графът на системата е показан на фигура 81.



фигура 81. Граф на състоянията на системата от пример 3.

Матрицата на преходните вероятности, която е претеглената матрица на ориентирания граф от фигура 81, е:

$$P = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix}$$

2. Ако за някоя лекция (приета условно за нулева) вероятността студентът да закъснее е два пъти по-малка от вероятността да не закъснее, да се определят вероятностите студентът да закъснее или да не закъснее за следващите две лекции.

За да определим вероятностите да закъснее или не закъснее за следващите две лекции (означени условно с 1 и 2), трябва да определим векторът на начално разпределение на вероятностите в момента 0 и да използваме равенството:

$$p_{(k)} = p_{(k-1)}.P$$

Знаем матрицата Р:

$$P = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{vmatrix}$$

От условието: ***„Ако за някоя лекция (приета условно за нулева) вероятността студентът да закъснее е два пъти по-малка от вероятността да не закъснее“*** можем да определим:

$$p_{(0)} = \left\| p_{1(0)} p_{2(0)} \right\|$$

По условие:

$$p_{1(0)} = \frac{p_{2(0)}}{2}$$

Освен това знаем, че:

$$p_{1(0)} + \, p_{2(0)} = 1$$

$$\frac{p_{2(0)}}{2} + p_{2(0)} = 1$$

$$3.\,p_{2(0)} = 2$$

$$p_{2(0)} = \frac{2}{3}$$

$$p_{1(0)} = \frac{p_{2(0)}}{2} = \frac{2}{2.3} = \frac{1}{3}$$

$$p_{(0)} = \left\| p_{1(0)} p_{2(0)} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \; \frac{2}{3} \right\|$$

Търсим:

$$p_{(1)} = p_{(0)}.P$$

$$p_{(1)} = \left\| p_{1(1)} p_{2(1)} \right\| = \left\| p_{1(0)} p_{2(0)} \right\|.P$$

$$p_{(1)} = \left\| p_{1(1)} p_{2(1)} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \; \frac{2}{3} \right\| \cdot \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{vmatrix}$$

$$p_{(1)} = \left\| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} \right\| = \left\| \frac{7}{30} \frac{23}{30} \right\|$$

За вероятностите за закъснение или не закъснение за втората лекция изчисляваме по аналогичен начин:

$$p_{(2)} = p_{(1)}.P$$

$$p_{(2)} = \left\| p_{1(2)} p_{2(2)} \right\| = \left\| p_{1(1)} p_{2(1)} \right\|.P$$

И след умножението на вектор с матрица получаваме:

$$p_{(2)} = \left\| \frac{7}{30} \cdot \frac{1}{10} + \frac{23}{30} \cdot \frac{3}{10} \quad \frac{7}{30} \cdot \frac{9}{10} + \frac{22}{30} \cdot \frac{7}{10} \right\| = \left\| \frac{76}{300} \frac{224}{300} \right\|$$

3. Да се определят вероятностите за закъснение и не закъснение след неограничен, достатъчно голям брой лекции (стационарни вероятности).

За определяне на стационарните вероятности в установен режим се използва равенството:

$$p_{\infty} = p_{\infty}.P$$

$$p_{\infty} = \| p_1 \; p_2 \|$$

$$\| p_1 \; p_2 \| = \| p_1 \; p_2 \|.P$$

И заедно с нормиращото условие получаваме система от 3 уравнения с 2 неизвестни:

$$p_1 = p_1.0{,}1 + p_2.0{,}3$$

$$p_2 = p_1.0{,}9 + p_2.0{,}7$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Системата се решава лесно, чрез заместване, и получаваме съотвтно:

$$p_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_2 = \frac{3}{4}$$

4. За установен режим за колко лекции средно ще закъснее и за колко няма да закъснее, ако се разглеждат 60 лекции?

Това подусловие се решава лесно, след като сме определили, че:

$$p_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_2 = \frac{3}{4}$$

Определяме:

$$60.\frac{1}{4} = 15$$

За 15 от тези 60 лекции ще закъснее и за останалите 45 ще е навреме.

5. Ако за някоя лекция вероятностите да закъснее и да не закъснее се отнасят тъй както 11 към 39, то какво са тези вероятности за предходната лекция?

$$p_{1(k)}: p_{2(k)} = 11: 39$$

Следователно можем да приемем, че:

$$p_{1(k)} = 11.m$$

$$p_{2(k)} = 39.m$$

Сумата им е равна на 1:

$$p_{1(k)} + p_{2(k)} = 11.m + 39.m = 1$$

$$50.m = 1$$

$$m = \frac{1}{50}$$

$$p_{1(k)} = \frac{11}{50}$$

$$p_{2(k)} = \frac{39}{50}$$

Знаем, че:

$$p_{(k)} = p_{(k-1)}.P$$

Следователно, ако означим:

$$p_{1(k-1)} = x$$

$$p_{2(k-1)} = y$$

Имаме следната система от три уравнения с две неизвестни:

$$x + y = 1$$

$$\left\| \frac{11}{50} \frac{39}{50} \right\| = \|x\ y\|. \left\| \begin{matrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{matrix} \right\|$$

Или:

$$x + y = 1$$

$$\frac{11}{50} = x.\frac{1}{10} + y.\frac{3}{10}$$

$$\frac{39}{50} = x.\frac{9}{10} + y.\frac{7}{10}$$

След решаване на системата получаваме, че:

$$x = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}$$

$$p_{1(k-1)} = x = \frac{2}{5}$$

$$p_{2(k-1)} = y = \frac{3}{5}$$

Следователно, вероятностите да закъснее или не закъснее за предходната лекция са били $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$.

Пример 4: На всеки изпит професор задава един от три въпроса, като никога не задава един от тези въпроси два пъти подред. Ако е задал въпрос № 1, той хвърля монета и ако се падне герб, задава въпрос № 2. Ако е задал въпрос № 2, той хвърля две монети и ако се паднат два герба, задава въпрос № 3. Ако е задал въпрос № 3, той хвърля три монети и ако се паднат три герба, задава въпрос № 1. Кой от тези въпроси професорът задава най-често и колко често?

Решение:

Първо да анализираме какви са вероятностите, съответстващи на резултатите от хвърляне на монетите.

Когато имаме една монета, то тя има лице и гръб и вероятността да се падне лицето или гърба са равни, т.е. всяко от тях се пада с вероятност 0,5 или $\frac{1}{2}$.

Когато имаме две монети, то вече имаме следните комбинации:

Монета 1	Монета 2
лице	лице
лице	гръб
гръб	лице
гръб	гръб

Всяка от тези комбинации е равно вероятна с останалите, т.е. всяка може да се падне с вероятност 0,25 или $\frac{1}{4}$.

При три монети ситуацията е:

Монета 1	Монета 2	Монета 3
лице	лице	лице
лице	лице	гръб
гръб	лице	лице
лице	гръб	лице
гръб	гръб	гръб
гръб	гръб	лице
лице	гръб	гръб
гръб	лице	гръб

Имаме 8 възможни варианта, като от тях един е с три герба, т.е. той би се паднал с вероятност $\frac{1}{8}$.

Разглежда се дискретна Марковска верига. Състояния на системата S съответстват на различните зададени въпроси:

- S_1 – въпрос No 1;
- S_2 – въпрос No 2;
- S_3 – въпрос No 3.

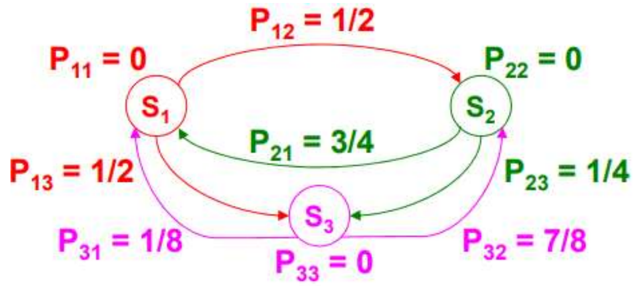
От условието на задачата:

- ***„…никога не задава един от тези въпроси два пъти подред“*** следва, че в графа на системата няма да имаме връзки на върховете сами със себе си;
- ***„Ако е задал въпрос № 1, той хвърля монета и ако се падне герб, задава въпрос № 2.“*** – както вече анализирахме комбинациите на монетите, в този случай с равна вероятност ще зададе или въпрос 2

или въпрос 3, но според горното уточнение, няма да зададе пак въпрос 1;

- ***„Ако е задал въпрос № 2, той хвърля две монети и ако се паднат два герба, задава въпрос № 3“*** – споменахме, че при хвърляне на две монети, вероятността да се паднат два герба и да зададе въпрос 3 съответно е $\frac{1}{4}$ и тъй като сумата на вероятностите за всяко състояние е равна на 1, за въпрос 1 остават $\frac{3}{4}$;
- ***„Ако е задал въпрос № 3, той хвърля три монети и ако се паднат три герба, задава въпрос № 1“*** – съгласно вече казаното, вероятността да се паднат три герба е $\frac{1}{8}$, остават $\frac{7}{8}$ вероятност да се падне въпрос 2.

Графът на състоянията на системата ще има показания на фигура 82 вид.



фигура 82. Граф на състоянията на системата от пример 4.

Матрицата на преходните вероятности определяме като претеглена матрица на съседство на този граф:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \end{Vmatrix}$$

Тъй като се търси кой от въпросите се задава най-често и колко често е това, то това означава да определим финалните вероятности за състоянията на системата или векторът

$$p_\infty = \|p_1 \;\; p_2 \;\; p_3\|$$

Знаем, че е в сила равенството:

$$p_\infty = p_\infty . P$$

Или:

$$\| p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \| = \| p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \| . P$$

Както и нормиращото условие:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

И получаваме следната система от 4 уравнения с три неизвестни:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$\| p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \| = \| p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \| . \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = 0.p_1 + \frac{3}{4}.p_2 + \frac{1}{8}.p_3 \\ p_2 = \frac{1}{2}.p_1 + 0.p_2 + \frac{7}{8}.p_3 \\ p_3 = \frac{1}{2}.p_1 + \frac{1}{4}.p_2 + 0.p_3 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} p_1 = 0.p_1 + \frac{3}{4}.p_2 + \frac{1}{8}.p_3 \\ p_2 = \frac{1}{2}.p_1 + 0.p_2 + \frac{7}{8}.p_3 \\ p_3 = \frac{1}{2}.p_1 + \frac{1}{4}.p_2 + 0.p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_1 = \frac{3}{4}.p_2 + \frac{1}{8}.p_3 \\ p_2 = \frac{1}{2}.p_1 + \frac{7}{8}.p_3 \\ p_3 = \frac{1}{2}.p_1 + \frac{1}{4}.p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_1 = \frac{3}{4}.p_2 + \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{2}.p_1 + \frac{1}{4}.p_2\right) \\ p_2 = \frac{1}{2}.p_1 + \frac{7}{8}.\left(\frac{1}{2}.p_1 + \frac{1}{4}.p_2\right) \\ p_3 = \frac{1}{2}.p_1 + \frac{1}{4}.p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} p_1=\frac{3}{4}.p_2+\frac{1}{16}.p_1+\frac{1}{32}.p_2 \\ p_2=\frac{1}{2}.p_1+\frac{7}{16}.p_1+\frac{7}{32}.p_2 \\ p_3=\frac{1}{2}.p_1+\frac{1}{4}.p_2 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} \left(1-\frac{1}{16}\right).p_1=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{32}\right).p_2 \\ \left(1-\frac{7}{32}\right).p_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{16}\right).p_1 \\ p_3=\frac{1}{2}.p_1+\frac{1}{4}.p_2 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} \frac{15}{16}.p_1=\frac{25}{32}.p_2 \\ \frac{25}{32}.p_2=\frac{15}{16}.p_1 \\ p_3=\frac{1}{2}.p_1+\frac{1}{4}.p_2 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} p_2=\frac{15}{16}.\frac{32}{25}p_1=\frac{6}{5}.p_1 \\ p_3=\frac{1}{2}.p_1+\frac{1}{4}.p_2=\frac{1}{2}.p_1+\frac{1}{4}.\frac{6}{5}.p_1=\frac{1}{2}.p_1+\frac{3}{10}.p_1=\frac{8}{10}.p_1=\frac{4}{5}.p_1 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{vmatrix}$$

$$p_1+p_2+p_3=1\Rightarrow p_1+\frac{6}{5}.p_1+\frac{4}{5}.p_1=1\Rightarrow 3.p_1=1\Rightarrow p_1=\frac{1}{3},$$

$$p_2=\frac{6}{5}.p_1=\frac{6}{5}.\frac{1}{3}=\frac{2}{5},\ p_3=\frac{4}{5}.p_1=\frac{4}{5}.\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$$

Решението на тази система е:

$$p_1=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$$

$$p_2=\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$$

$$p_3=\frac{4}{15}$$

Следователно, професорът задава най-често въпрос 2 и то в 40 % от случаите.

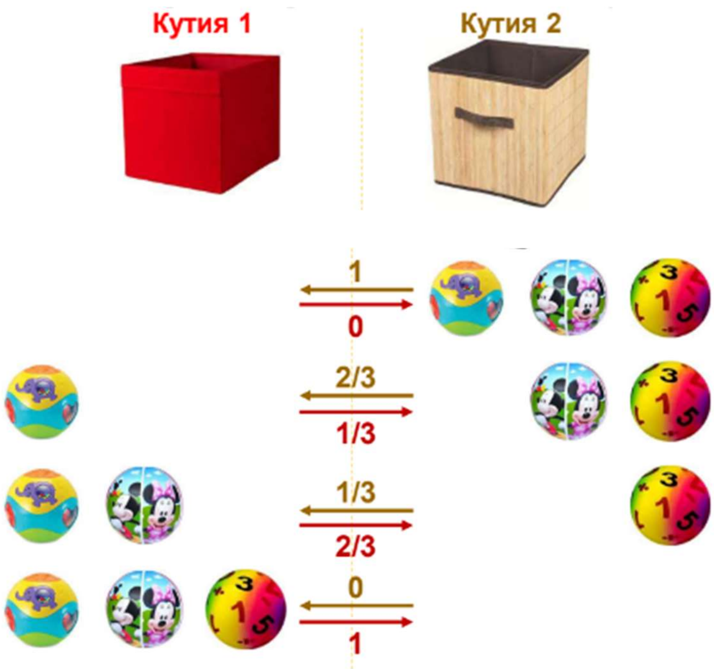
Пример 5: В две кутии има общо три топки. Всяка секунда по случаен начин се взема една от тях и се прехвърля от едната кутия в другата кутия. Разглежда се дискретна марковска верига S, състоянията на която означават броя на топките в едната кутия, приета условно за първа. Да се определи средното относително време, през което в първата кутия има една топка.

Решение:

Нека означим състоянията на дискретната Марковска верига S по следния начин:

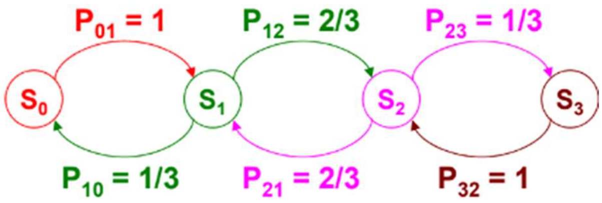
- S_0 – в първата кутия няма топка;
- S_1 – в първата кутия има една топка;
- S_2 – в първата кутия има две топки;
- S_3 – в първата кутия има три топки.

От условието на задачата следва, че преходите от състояние в състояние схематично изглеждат по показания на фигура 83 начин.



фигура 83. Схематично представяне на условието на задачата от пример 5.

Графът на състоянията на системата е даденият на фигура 84.



фигура 84. Граф на състоянията на системата от пример 5.

Матрицата на преходните вероятности определяме от този граф:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Тъй като се търси средното относително време, през което в първата кутия има една топка, то това означава да определим финалната вероятност системата да се намира в състояние S_1 – в първата кутия има една топка или векторът на финалните вероятности:

$$p_\infty = \|p_0\ \ p_1\ \ p_2\ \ p_3\|$$

Знаем, че е в сила равенството:

$$p_\infty = p_\infty . P$$

Или:

$$\|p_0\ \ p_1\ \ p_2\ \ p_3\| = \|p_0\ \ p_1\ \ p_2\ \ p_3\| . P$$

Както и нормиращото условие:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

И получаваме следната система от 4 уравнения с три неизвестни:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$\|p_0\ \ p_1\ \ p_2\ \ p_3\| = \|p_0\ \ p_1\ \ p_2\ \ p_3\|.\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} p_0 = 0.p_0 + \frac{1}{3}.p_1 + 0.p_2 + 0.p_3 \\ p_1 = 1.p_0 + 0.p_1 + \frac{2}{3}.p_2 + 0.p_3 \\ p_2 = 0.p_0 + \frac{2}{3}.p_1 + 0.p_2 + 1.p_3 \\ p_3 = 0.p_0 + 0.p_1 + \frac{1}{3}.p_2 + 0.p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{3}.p_1 \\ p_1 = p_0 + \frac{2}{3}.p_2 \\ p_2 = \frac{2}{3}.p_1 + p_3 \\ p_3 = \frac{1}{3}.p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{3}.p_1 \\ p_1 = \frac{1}{3}.p_1 + \frac{2}{3}.p_2 \\ p_2 = \frac{2}{3}.p_1 + p_3 \\ p_3 = \frac{1}{3}.p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{3}.p_1 \\ p_1 = \frac{1}{3}.p_1 + \frac{2}{3}.p_2 \Rightarrow \frac{2}{3}.p_1 = \frac{2}{3}.p_2 \Rightarrow p_2 = p_1 \\ p_2 = \frac{2}{3}.p_1 + p_3 \Rightarrow p_2 = \frac{2}{3}.p_2 + p_3 \Rightarrow \frac{1}{3}.p_2 = p_3 \Rightarrow p_2 = 3.p_3 \\ p_3 = \frac{1}{3}.p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}.p_1 + p_1 + p_1 + \frac{1}{3}.p_1 = 1 \Rightarrow \frac{8}{3}.p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{3}{8} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{3}.p_1 = \frac{1}{3}.\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \\ p_1 = \frac{3}{8} \\ p_2 = p_1 = \frac{3}{8} \\ p_3 = \frac{1}{3}.p_2 = \frac{1}{3}.\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Следователно, в първа кутия има една топка с вероятност $p_1 = \frac{3}{8}$ или това е 37,5% от времето.

Задачи:

Задача 1: Машина може да бъде в три различни състояние: в ремонт, в изчакване за работа и в режим на работа. Ако машината работи, то с вероятност 0,05 може да се повреди и да премине в режим на ремонт, а с вероятност 0,1 може да изпълни задачата и да премине в изчакване. Ако машината е в ремонт, с вероятност 0,1 ще бъде ремонтирана и ще остане да изчаква за работа. Ако машината е в режим на изчакване, с вероятност 0,9 преминава в режим на работа. Никога не може да премине директно в режим на работа след ремонт. Изчакваща машина няма как да се счупи.

1. Опишете Марковския модел на тази система – граф на ДВМ и матрица на преходни вероятности;
2. Ако в момент $t = 0$ е в режим на изчакване, то в момент $t = 1$ какви са вероятностите да е в режим на работа или да е в ремонт;
3. Каква е вероятността да бъде в режим на работа след много дълъг период от време?

Задача 2: Сензор има три състояния – анализ, измерване и сравнение.

Докато е в режим на анализ, вероятността за ново измерване е 0,8 и за сравнение е 0,1. Докато е в режим на измерване, вероятността да премине в режим анализ е 0,9 и в режим на сравнение – 0,1. Ако сензорът сравнява, то с вероятност 0,2 преминава в анализ и с вероятност 0,2 в режим измерване.

1. Опишете процеса с модел на ДВМ – граф и матрица на преходни вероятности;
2. Ако в момент $t = 0$ е в режим на сравнение, то в момент $t = 1$ каква е вероятността да бъде в режим на анализ;
3. При $t = 2$ каква е вероятността да бъде в режим на измерване;
4. Каква е средната вероятност да е в режим на сравнение след много дълъг период от време?

Задача 3: Машина може да бъде в четири различни състояние: в ремонт, в изчакване за работа, в режим на работа 1 и в режим на работа 2. Ако машината работи в режим 1, то с вероятност 0,1 може да се повреди и да премине в режим на ремонт, а с вероятност 0,2 може да изпълни задачата и да премине в изчакване. Ако машината е в ремонт, с вероятност 0,1 ще бъде ремонтирана и ще остане да изчаква за работа. Ако изчаква, с вероятност 0,5 идва работа за режим 1 и с вероятност 0,4 за режим 2. Никога не може да премине директно в режим на работа след ремонт. Изчакваща машина няма как да се счупи.

1. Опишете Марковския модел на тази система – граф на ДВМ и матрица на преходни вероятности;
2. След две стъпки с каква вероятност машината ще бъде в ремонт, ако при започване на процеса машината е в режим на работа 1;
3. Каква е вероятността да бъде в режим на работа 2 след много дълъг период от време?

Задача 4: Всеки ден търговски агент се намира в един от три града. При това той никога не е два последователни дни в град 1 или в град 2. Ако е в град 1, то вероятността на следващия ден да бъде в град 2 е три пъти по-голяма от вероятността на следващия ден да бъде в град 3. Ако е в град 2, то вероятността на следващия ден да бъде в град 3 е три пъти по-голяма от вероятността за това на следващия ден да бъде в град 1. Ако е в град 3, то с равни вероятности на следващия ден може да остане в този град или да го напусне. Ако го напусне, то с равни вероятности може да отиде в град 1 или в град 2. Да се определи колко често търговският агент е във всеки от трите града.

Задача 5: Радиостанция може да бъде в едно от три състояния: приемане, очакване, предаване. Преходите от едно състояние в друго се извършват във фиксирани дискретни моменти от времето (т.е. на стъпки). След приемане, на следващата стъпка винаги се преминава в очакване. След очакване, с вероятност

¾, на следващата стъпка състоянието не се променя, ако обаче се промени, то с равни вероятности може да премине в състояние на приемане или в състояние на предаване. След предаване, на следващата стъпка винаги се преминава в друго състояние, при което вероятността на преход в състояние на очакване е три пъти по-голяма от вероятността за преход в състояние на приемане. Да се определят средните относителни времена, през които радиостанцията е в отделните състояния при установен режим на работа.

Задача 6: Климатът на една планета е много променлив. Там никога не е слънчево два дни поред. След слънчев ден, с равни вероятности на следващия ден вали дъжд или сняг. Ако някой ден вали дъжд или сняг, то с вероятност ½ на следващия ден времето не се променя. Ако обаче се промени, то в половината от случаите дъждът се заменя със сняг или обратно и само в половината от случаите следващият ден ще бъде слънчев. Да се определи колко често времето е слънчево и каква е вероятността два дни след дъждовен да следва слънчев ден.