Представяне на графи

1. Матрица на съседство

$$\boldsymbol{A}=\left\|a_{ij}\right\|_{n\times n}=\begin{cases} a_{ij}=1 & \text{ако има дъга/ребро между връх } i \text{ и връх } j \\ a_{ij}=0 & \text{ако няма дъга/ребро между връх } i \text{ и връх } j \end{cases}$$

2. Претеглена матрица на съседство

Ако графът е претеглен – линиите/дъгите имат тегла, то вместо 1 в матрицата се вписва това число.

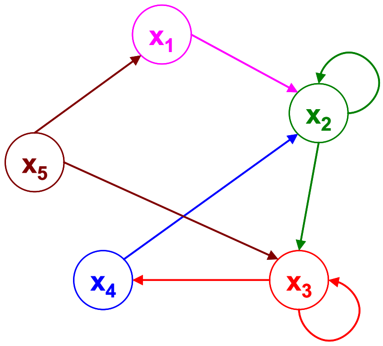
3. Матрица на достижимост (за ориентиран граф)

$$\boldsymbol{R}=\left\|r_{ij}\right\|_{n\times n}=\begin{cases} r_{ij}=1 & \text{ако върхът } x_i \text{ е достижим от върха } x_j \\ a_{ij}=0 & \text{ако върхът } x_i \text{ не е достижим от върха } x_j \end{cases}$$

Как се определя:

1) Определя се матрицата на съседство.

Например:



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1	0
x_4	0	1	0	0	0
x_5	1	0	1	0	0

Матрица на съседство: $\boldsymbol{A}=\|\;\|$

$$\boldsymbol{A}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

2) Определят се $\Gamma^{-1}(x_i)$ – множеството от върхове, непосредствено достижими от върха x_i.

$\Gamma^{-1}(x_1)=\{x_2\}$, $\Gamma^{-1}(x_2)=\{x_2,x_3\}$, $\Gamma^{-1}(x_3)=\{x_3,x_4\}$, $\Gamma^{-1}(x_4)=\{x_2\}$, $\Gamma^{-1}(x_5)=\{x_1,x_3\}$.

3) Определят се множествата на достижимост $R(x_i)$:

$R(x_i)=\{x_i\}\cup\Gamma^{-1}(x_i)\cup\Gamma^{-2}(x_i)\cup\ldots\cup\Gamma^{-p}(x_i)$.

$R(x_1)=\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\{x_2,x_3\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

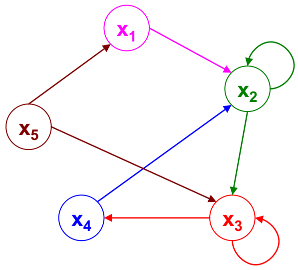
$R(x_2)=\{x_2\}\cup\{x_2,x_3\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}=\{x_2,x_3,x_4\}$

$R(x_3)=\{x_3\}\cup\{x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}=\{x_2,x_3,x_4\}$

$R(x_4)=\{x_4\}\cup\{x_2\}\cup\{x_2,x_3\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}=\{x_2,x_3,x_4\}$

$R(x_5)=\{x_5\}\cup\{x_1,x_3\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}\cup\{x_2,x_3,x_4\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

Задача: За графа от фигурата да се определят:
а) матрицата на съседство;
б) множествата на достижимост;
в) матрицата на достижимост;
г) матрицата на обратна достижимост.



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1	0
x_4	0	1	0	0	0
x_5	1	0	1	0	0

Матрица на съседство: $A = \| \quad \|$

Множества на достижимост на върховете:

$R(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$x_1 \to x_2$	$x_2 \to x_2$	$x_2 \to x_2$	$x_2 \to x_2$
	$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_3$
		$x_3 \to x_3$	$x_3 \to x_3$
		$x_3 \to x_4$	$x_3 \to x_4$
			$x_4 \to x_2$

$R(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

$x_2 \to x_2$	$x_2 \to x_2$	$x_2 \to x_2$
$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_3$
	$x_3 \to x_3$	$x_3 \to x_3$
	$x_3 \to x_4$	$x_3 \to x_4$
		$x_4 \to x_2$

$R(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

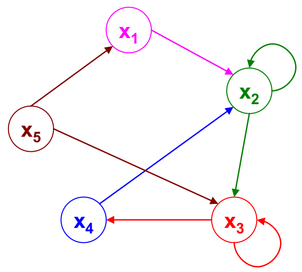
$x_3 \to x_3$	$x_3 \to x_3$	$x_2 \to x_2$
$x_3 \to x_4$	$x_3 \to x_4$	$x_2 \to x_3$
	$x_4 \to x_2$	$x_3 \to x_3$
		$x_3 \to x_4$
		$x_4 \to x_2$

$R(x_4) = \{x_4\} \cup \{x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

$x_4 \to x_2$	$x_2 \to x_2$	$x_2 \to x_2$	$x_2 \to x_2$
	$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_3$
		$x_3 \to x_3$	$x_3 \to x_3$
		$x_3 \to x_4$	$x_3 \to x_4$
			$x_4 \to x_2$

$R(x_5) = \{x_5\} \cup \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$x_5 \to x_1$	$x_1 \to x_2$	$x_2 \to x_2$
$x_5 \to x_3$	$x_3 \to x_3$	$x_2 \to x_3$
	$x_3 \to x_4$	$x_3 \to x_3$
		$x_3 \to x_4$
		$x_4 \to x_2$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1	0
x_3	0	1	1	1	0
x_4	0	1	1	1	0
x_5	1	1	1	1	1

Матрица на достижимост: $\boldsymbol{R} = \| \quad \|$

Множества на достижимост на върховете:

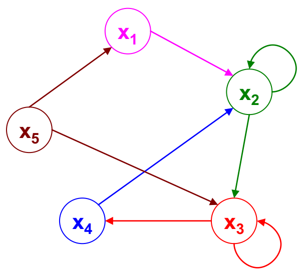
$R(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$R(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

$R(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

$R(x_4) = \{x_4\} \cup \{x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

$R(x_5) = \{x_5\} \cup \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$



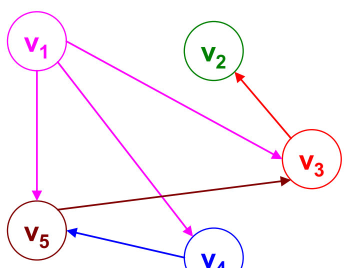
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1	0
x_3	0	1	1	1	0
x_4	0	1	1	1	0
x_5	1	1	1	1	1

Матрица на обратна достижимост: $\boldsymbol{Q} = \| \quad \|$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	1
x_2	1	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1	1
x_5	0	0	0	0	1

4. Нареждаща функция на ориентиран граф – тази функция съпоставя на всеки връх от графа ниво, към който той принадлежи.

1) Определяме матрицата на съседство:



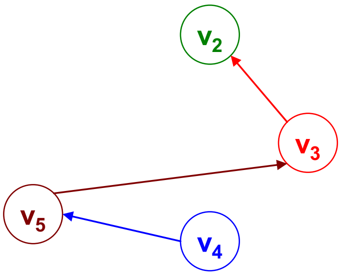
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	1	1
v_2	0	0	0	0	0
v_3	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1
v_5	0	0	1	0	0

Матрица на съседство: $\boldsymbol{A} = \| \quad \|$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2) Определяме върховете без входни дъги – в колоната за тях в матрицата на съседство има само 0. В случая това е v_1. $\Rightarrow N_1 = \{v_1\}$.

3) Премахваме тези върхове и излизащите им дъги и правим стъпки 1 и 2 за подграфа.

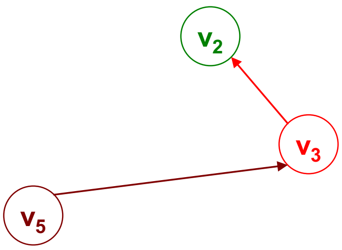


	v_2	v_3	v_4	v_5
v_2	0	0	0	0
v_3	1	0	0	0
v_4	0	0	0	1
v_5	0	1	0	0

Матрица на съседство: $A = \| \quad \|$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Върхове без входни дъги: v_4. $\Rightarrow N_2 = \{v_4\}$.

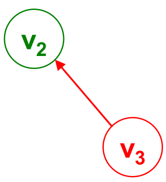


	v_2	v_3	v_5
v_2	0	0	0
v_3	1	0	0
v_5	0	1	0

Матрица на съседство: $A = \| \quad \|$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Върхове без входни дъги: v_5. $\Rightarrow N_3 = \{v_5\}$.

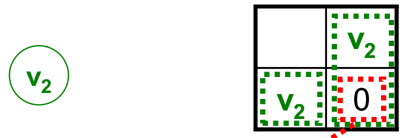


	v_2	v_3
v_2	0	0
v_3	1	0

Матрица на съседство: $A = \| \quad \|$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

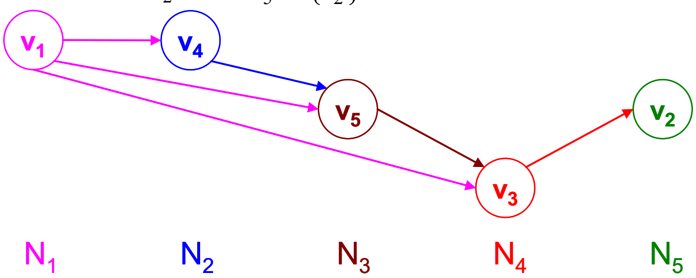
Върхове без входни дъги: v_3. $\Rightarrow N_4 = \{v_3\}$.



Матрица на съседство: $A = \| \ \|$

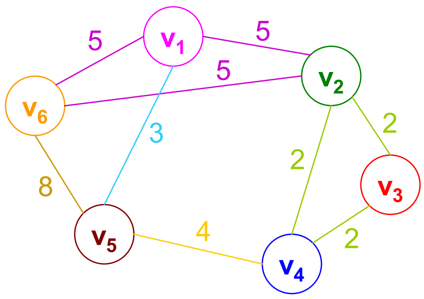
$$A = \|0\|$$

Върхове без входни дъги: v_2. $\Rightarrow N_5 = \{v_2\}$.



5. Минимално покриващо дърво (неориентиран граф)

Например, за следния граф:



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	5	0	0	3	5
v_2	5	0	2	2	0	5
v_3	0	2	0	2	0	0
v_4	0	2	2	0	4	0
v_5	3	0	0	4	0	8
v_6	5	5	0	0	8	0

Претеглена матрица на съседство: $A = \| \ \|$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{Vmatrix}$$

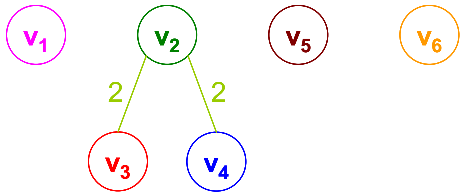
Всеки от върховете участва в дървото и на ниво 0 имаме:

k = 0

Търсим най-късите ребра в матрицата. Това са тези с дължина 2 в случая. Те свързват v_2 с v_3, v_2 с v_4 и v_3 с v_4.

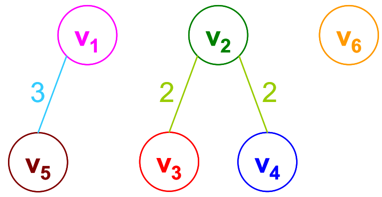
Добавяме първите две ребра, защото ако добавим и третото ще се получи цикъл, а в дърветата не може да има цикли.

k = 2



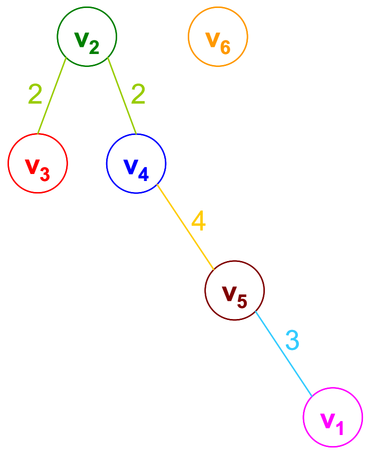
Следващото по дължина ребро е с дължина 3 и е между v_1 и v_5.

k = 3



Следващото по дължина ребро е с дължина 4 и е между v_4 и v_5. По този начин се свързват двете поддървета.

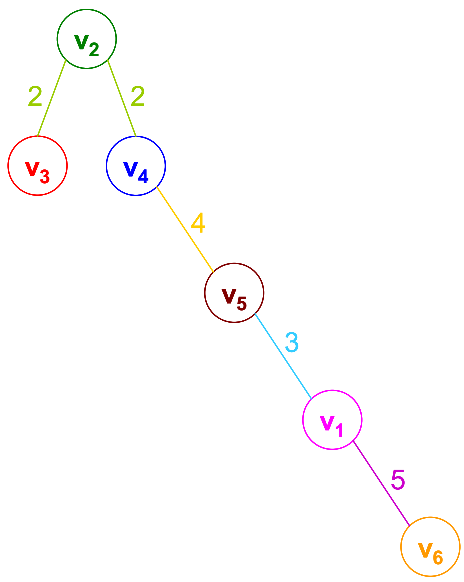
k = 4



Следващите по дължина ребра са с дължина 5 и са между:

- v_1 и v_2 – води до цикъл;
- v_1 и v_6 – може да се включи;
- v_2 и v_6 – вече сме добавили горното и това ще доведе до цикъл.

k = 5

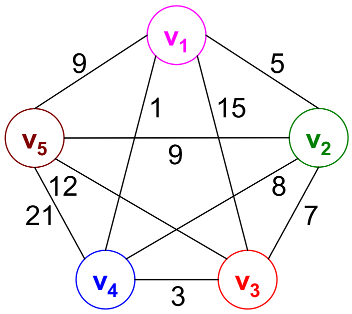


Полученото дърво има дължина: $2+2+4+3+5=16$.

6. Минимален Хамилтонов цикъл

Ако имаме N точки в равнината с разстоянията между тях, трябва да определим най-късият път, който минава във всяка точка по един път и се връща в началната (произволно избрана).

Търговски пътник трябва да обходи N града, като тръгне от един (приет за начален) и се върне в него, без да минава два пъти през един и същ град, и цената на транспортните разходи да бъде минимална.

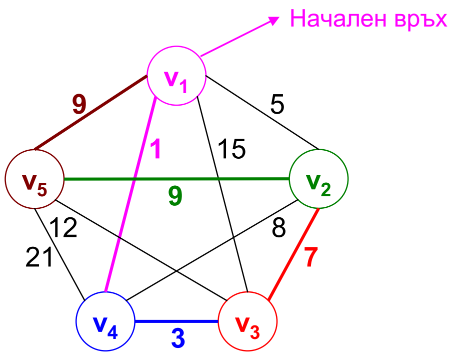


	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	5	15	1	9
v_2	5	0	7	8	9
v_3	15	7	0	3	12
v_4	1	8	3	0	21
v_5	9	9	12	21	0

Матрица на съседство: $A = \| \;\|$

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 5 & 15 & 1 & 9 \\ 5 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 15 & 7 & 0 & 3 & 12 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 21 \\ 9 & 9 & 12 & 21 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$v_1 \xrightarrow{1} v_4 \xrightarrow{3} v_3 \xrightarrow{7} v_2 \xrightarrow{9} v_5 \xrightarrow{9} v_1$$

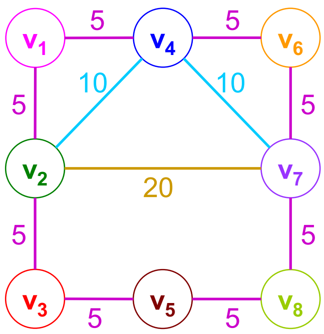


	√	√	√	√	√
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	5	15	<u>1</u>	9
v_2	5	0	7	8	<u>9</u>
v_3	15	<u>7</u>	0	3	12
v_4	1	8	<u>3</u>	0	21
v_5	<u>9</u>	9	12	21	0

Матрица на съседство: $A = \| \;\|$

Задача 1.

1. Претеглена матрица на съседство
2. Локални степени на върховете
3. Брой ребра
4. Цикломатично число
5. Ойлеров цикъл
6. Хамилтонов цикъл



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	5	0	5	0	0	0	0
v_2	5	0	5	10	0	0	20	0
v_3	0	5	0	0	5	0	0	0
v_4	5	10	0	0	0	5	10	0
v_5	0	0	5	0	0	0	0	5
v_6	0	0	0	5	0	0	5	0
v_7	0	20	0	10	0	5	0	5
v_8	0	0	0	0	5	0	5	0

Претеглена матрица на съседство: $A = \| \ \|$

1. Претеглена матрица на съседство

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 10 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$$

2. Локални степени на върховете

$\rho(v_1) = 2$ – върхът v_1 е свързан с два върха v_2 и v_4;

$\rho(v_2) = 4$ – върхът v_2 е свързан с четири върха v_1, v_3, v_4 и v_7;

$\rho(v_3) = 2$ – върхът v_3 е свързан с два върха v_2 и v_5;

$\rho(v_4) = 4$ – върхът v_4 е свързан с четири върха v_1, v_2, v_6 и v_7;

$\rho(v_5) = 2$ – върхът v_5 е свързан с два върха v_3 и v_8;

$\rho(v_6) = 2$ – върхът v_6 е свързан с два върха v_4 и v_7;

$\rho(v_7) = 4$ – върхът v_7 е свързан с четири върха v_2, v_4, v_6 и v_8;

$\rho(v_8) = 2$ – върхът v_8 е свързан с два върха v_5 и v_7.

3. Брой ребра

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{8} \rho(v_i)}{2} = \frac{2+4+2+4+2+2+4+2}{2} = 11$$

4. Цикломатично число

$\lambda = m - n + 1 = 11 - 8 + 1 = 4$ (брой върхове $n = 8$)

5. Ойлеров цикъл

Условието за **Ойлеров цикъл** е локалните степени на върховете да са четни числа. В този граф, от точка 2 се вижда, че е така. Следователно, има Ойлеров цикъл и един такъв е:

(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_8), (v_8, v_7), (v_7, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_4), (v_4, v_1).

6. Хамилтонов цикъл – няма критерий за такъв, но в случая има Хамилтонов цикъл и един примерен такъв е:

(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_8), (v_8, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_4), (v_4, v_1).

Задача 2.

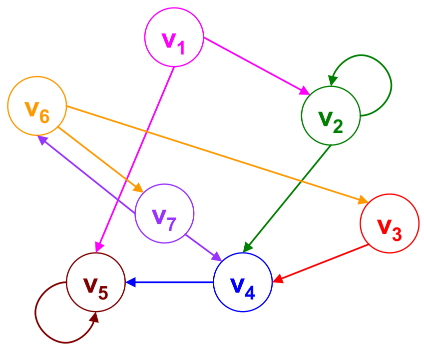
За графа да се определят:

1. Матрица на съседство;

2. Матрица на достижимост;

3. Матрица на обратна достижимост – $\boldsymbol{Q}$ (получава се от матрицата $\boldsymbol{R}$, като стълбът v_i от $\boldsymbol{R}$ става ред v_i в $\boldsymbol{Q}$).

1. Матрица на съседство;



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	0	0	1	0	0
v_2	0	1	0	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	1	0	0	0	1
v_7	0	0	0	1	0	1	0

Матрица на съседство: $\boldsymbol{A} = \| \;\; \|$

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

2. Матрица на достижимост:

$$R(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_2, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$

$$R(v_2) = \{v_2\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4, v_5\}$$

$$R(v_3) = \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_3, v_4, v_5\}$$

$$R(v_4) = \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_4, v_5\}$$

$$R(v_5) = \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_5\}$$

$$R(v_6) = \{v_6\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} =$$
$$= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$R(v_7) = \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$R(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_2, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$$

$$\begin{array}{lll} v_1 \to v_2 & v_2 \to v_2 & v_2 \to v_2 \\ v_1 \to v_5 & v_2 \to v_4 & v_2 \to v_4 \\ & v_5 \to v_5 & v_4 \to v_5 \\ & & v_5 \to v_5 \end{array}$$

$$R(v_2) = \{v_2\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4, v_5\}$$

$$\begin{array}{lll} v_2 \to v_2 & v_2 \to v_2 & v_2 \to v_2 \\ v_2 \to v_4 & v_2 \to v_4 & v_2 \to v_4 \\ & v_4 \to v_5 & v_4 \to v_5 \\ & & v_5 \to v_5 \end{array}$$

$$R(v_3) = \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_3, v_4, v_5\}$$

$$v_3 \to v_4 \quad v_4 \to v_5 \quad v_5 \to v_5$$

$$R(v_4) = \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_4, v_5\}$$

$$v_4 \to v_5 \quad v_5 \to v_5$$

$$R(v_5) = \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_5\}$$

$$v_5 \to v_5$$

$$R(v_6) = \{v_6\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} =$$

$$\begin{array}{lllll} v_6 \to v_3 & v_3 \to v_4 & v_4 \to v_5 & v_3 \to v_4 & v_4 \to v_5 \\ v_6 \to v_7 & v_7 \to v_4 & v_6 \to v_3 & v_5 \to v_5 & v_5 \to v_5 \\ & v_7 \to v_6 & v_6 \to v_7 & v_7 \to v_4 & v_6 \to v_3 \\ & & & v_7 \to v_6 & v_6 \to v_7 \end{array}$$

$$= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

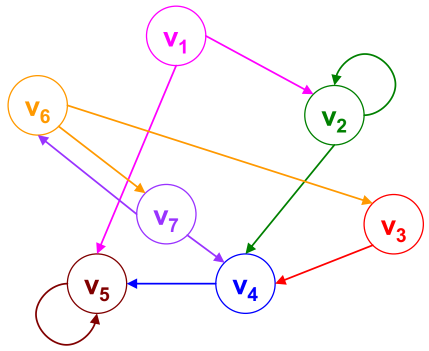
$$R(v_7) = \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} =$$

$$\begin{array}{llll} v_7 \to v_4 & v_4 \to v_5 & v_3 \to v_4 & v_4 \to v_5 \\ v_7 \to v_6 & v_6 \to v_3 & v_5 \to v_5 & v_5 \to v_5 \\ & v_6 \to v_7 & v_7 \to v_4 & v_6 \to v_3 \\ & & v_7 \to v_6 & v_6 \to v_7 \end{array}$$

$$= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

Матрица на достижимост:

$$\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$



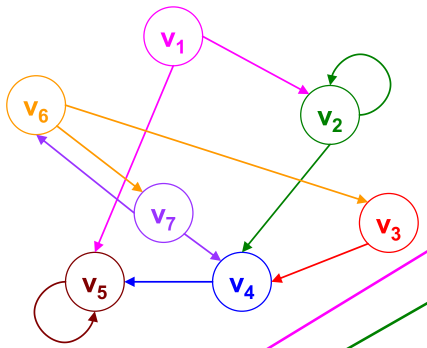
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	1	1	0	1	1	0	0
v_2	0	1	0	1	1	0	0
v_3	0	0	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	1	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	1	1	1	1	1
v_7	0	0	1	1	1	1	1

Матрица на достижимост: $R = \| \; \|$

Множества на достижимост на върховете:

$R(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_2, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$
$R(v_2) = \{v_2\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4, v_5\}$
$R(v_3) = \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_3, v_4, v_5\}$
$R(v_4) = \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_4, v_5\}$
$R(v_5) = \{v_5\} \cup \{v_5\} = \{v_5\}$
$R(v_6) = \{v_6\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} =$
$= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
$R(v_7) = \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} =$
$= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

3. Матрица на обратна достижимост – $\boldsymbol{Q}$ (получава се от матрицата $\boldsymbol{R}$, като стълбът v_i от $\boldsymbol{R}$ става ред v_i в $\boldsymbol{Q}$).



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	1	1	0	1	1	0	0
v_2	0	1	0	1	1	0	0
v_3	0	0	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	1	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	1	1	1	1	1
v_7	0	0	1	1	1	1	1

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	1	0	0	0	0	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	0	1	0	0	1	1
v_4	1	1	1	1	0	1	1
v_5	1	1	1	1	1	1	1
v_6	0	0	0	0	0	1	1
v_7	0	0	0	0	0	1	1

Матрица на обратна достижимост:

$Q = \| \; \|$

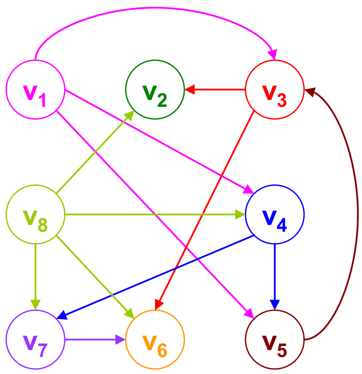
Матрица на обратна достижимост:

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Задача 3.

За зададения с матрицата на съседство ориентиран граф D да се определи нареждащата функция:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

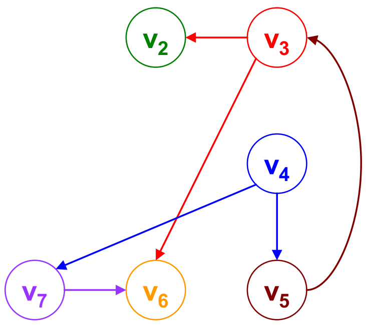


Матрица на съседство: $A = \| \ \|$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	0	1	1	1	0	0	0
v_2	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	1	0	0	0	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	1	0
v_5	0	0	1	0	0	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	0	1	0	0
v_8	0	1	0	1	0	1	1	0

Определяме върховете без входни дъги – в колоната за тях в матрицата на съседство има само 0. В случая това са v_1 и v_8. $\Rightarrow N_1 = \{v_1, v_8\}$.

Премахваме тези върхове и излизащите им дъги и повтаряме стъпките за подграфа.

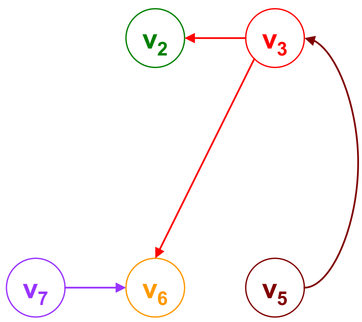


	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_2	0	0	0	0	0	0
v_3	1	0	0	0	1	0
v_4	0	0	0	1	0	1
v_5	0	1	0	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0	1	0

Матрица на съседство: $\boldsymbol{A} = \| \ \|$

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Върхове без входни дъги: v_4. $\Rightarrow N_2 = \{v_4\}$.

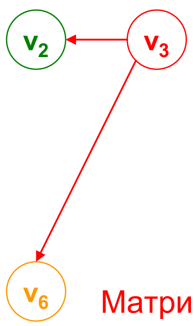


	v_2	v_3	v_5	v_6	v_7
v_2	0	0	0	0	0
v_3	1	0	0	1	0
v_5	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	1	0

Матрица на съседство: $\boldsymbol{A} = \| \ \|$

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Върхове без входни дъги: v_5 и v_7. $\Rightarrow N_3 = \{v_5, v_7\}$.



	v_2	v_3	v_6
v_2	0	0	0
v_3	1	0	1
v_6	0	0	0

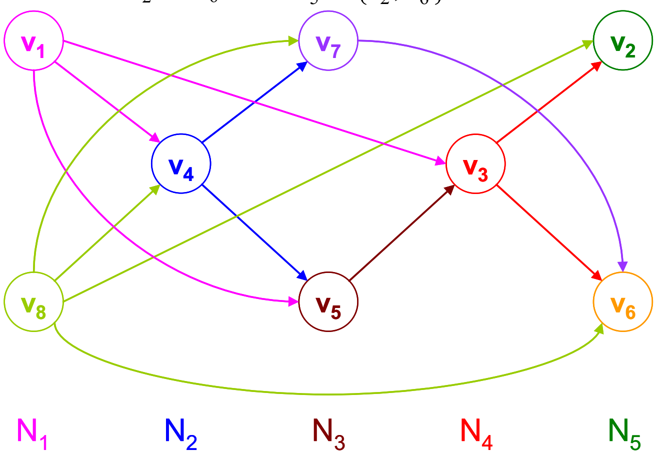
Матрица на съседство: $\boldsymbol{A} = \| \ \|$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Върхове без входни дъги: v_3. $\Rightarrow N_4 = \{v_3\}$.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Върхове без входни дъги: v_2 и v_6. $\Rightarrow N_5 = \{v_2, v_6\}$.



Задача 4.

Система за предаване на информация има 10 станции $v_1 \div v_{10}$. Всяко предаване на съобщение от станция *i* към станция *j* става с определена вероятност P_{ij} за прихващане на съобщението. Да се определи начинът, по който трябва да се предаде информацията до всички станции, така че рискът от прихващане на съобщение да е минимален, ако вероятностите са следните:

$P_{14} = 0{,}11$	$P_{25} = 0{,}8$	$P_{46} = 0{,}1$	$P_{79} = 0{,}4$	$P_{24} = 0{,}18$
$P_{15} = 0{,}5$	$P_{27} = 0{,}11$	$P_{47} = 0{,}7$	$P_{710} = 0{,}13$	$P_{39} = 0{,}6$
$P_{12} = 0{,}6$	$P_{34} = 0{,}8$	$P_{56} = 0{,}15$	$P_{89} = 0{,}14$	$P_{78} = 0{,}9$
$P_{910} = 0{,}19$	$P_{23} = 0{,}15$	$P_{38} = 0{,}18$	$P_{57} = 0{,}9$	

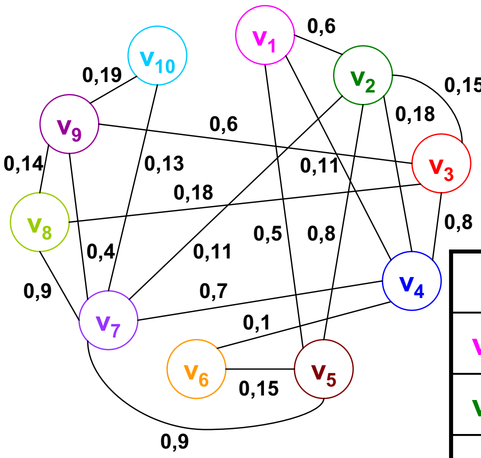
Решение:

Всяка станция е **връх** в графа.

Вероятността за прихващане е **линия/ребро** в графа между връх *i* и връх *j*.

Предаването на информацията до всички станции с минимална вероятност от прихващане на съобщението е **минималното покриващо дърво на този граф**.

Задачата може да се сведе до намиране на минимално покриващо дърво, като системата се замени с граф върховете, на който съвпадат със станциите, а ребрата са вероятностите за прихващане на съобщението при предаването му между съответната двойка станции.



Претеглена матрица на съседство: $A = \| \; \|$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1	0	0,6	0	0,11	0,5	0	0	0	0	0
v_2	0,6	0	0,15	0,18	0,8	0	0,11	0	0	0
v_3	0	0,15	0	0,8	0	0	0	0,18	0,6	0
v_4	0,11	0,18	0,8	0	0	0,1	0,7	0	0	0
v_5	0,5	0,8	0	0	0	0,15	0,9	0	0	0
v_6	0	0	0	0,1	0,15	0	0	0	0	0
v_7	0	0,11	0	0,7	0,9	0	0	0,9	0,4	0,13
v_8	0	0	0,18	0	0	0	0,9	0	0,14	0
v_9	0	0	0,6	0	0	0	0,4	0,14	0	0,19
v_{10}	0	0	0	0	0	0	0,13	0	0,19	0

Съответната претеглена матрица на съседство е:

$$
\boldsymbol{A} = \left\| \begin{matrix}
0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}11 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}6 & 0 & 0{,}15 & 0{,}18 & 0{,}8 & 0 & 0{,}11 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}15 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}18 & 0{,}6 & 0 \\
0{,}11 & 0{,}18 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}5 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}11 & 0 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}13 \\
0 & 0 & 0{,}18 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}14 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}14 & 0 & 0{,}19 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}13 & 0 & 0{,}19 & 0
\end{matrix} \right\|
$$

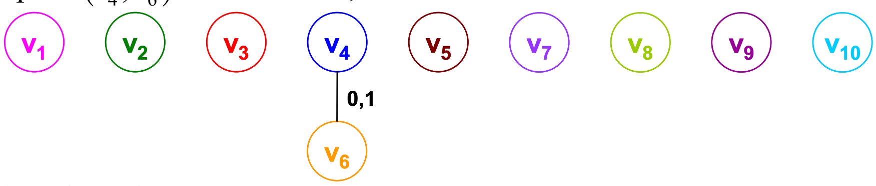
Съгласно алгоритъма на Краскал се строят частичните графи:

$G_0 \rightarrow$

k = 0

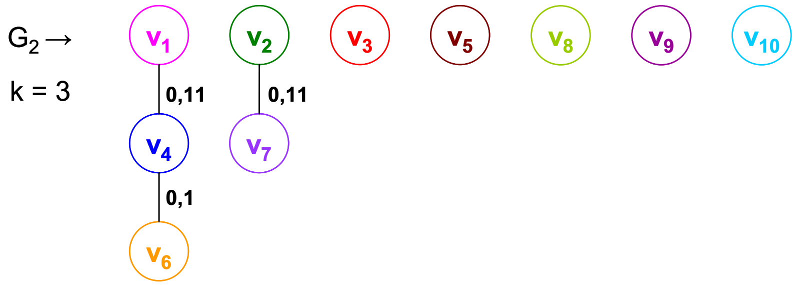
Най-късото ребро е (v_4, v_6) с дължина 0,10.

$G_1 \rightarrow$

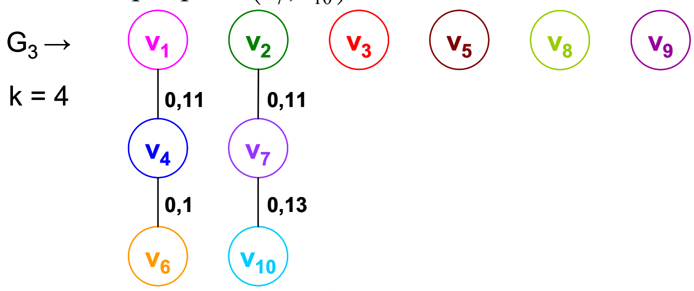


k = 1

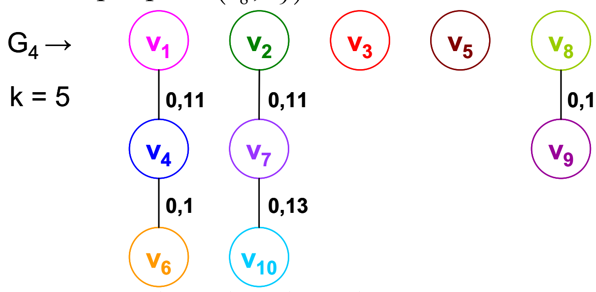
Ребрата (v_1, v_4) и (v_2, v_7) са с дължина 0,11.



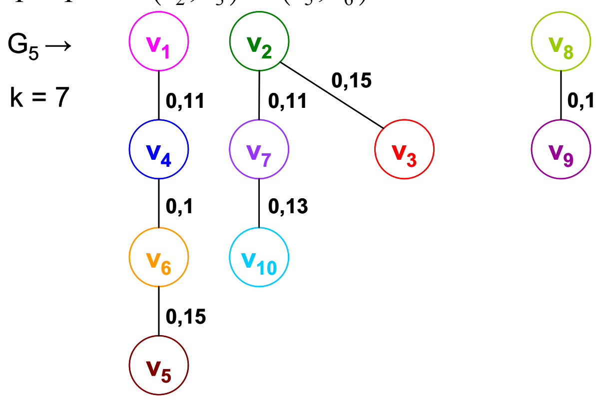
Следващото по дължина ребро е (v_7, v_{10}) с дължина 0,13.



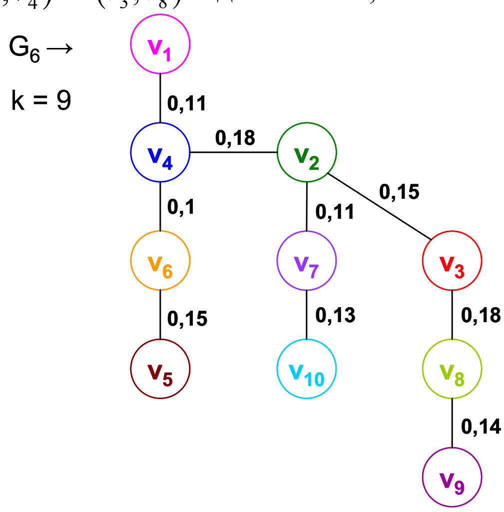
Следващото по дължина ребро е (v_8, v_9) с дължина 0,14.



С дължина 0,15 са ребрата: (v_2, v_3) и (v_5, v_6).



Добавяме ребрата (v_2, v_4) и (v_3, v_8) с дължина 0,18.



Това е минималното покриващо дърво за този граф и от него ясно се вижда оптималния начин за предаване на информацията до всички станции. Минималното покриващо дърво е с дължина: