Мрежи на Петри

Мрежите на Петри са въведени от германеца Карл Адам Петри през 1962 г. Те са разработени специално за моделиране на сложни динамични системи, съдържащи взаимодействащи си паралелни процеси. В мрежите на Петри не се отчита времето, но структурата им е такава, че съдържа цялата необходима информация за определяне на възможните последователности от събития.

1. Структура и граф на мрежа на Петри

Мрежата на Петри C е четворката от елементи $C=(P,T,I,O)$, където:

$P=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$, $|P|=n\geq 0$ е крайно множество от **позиции**;

$T=\{t_1,t_2,\dots,t_m\}$, $|T|=m\geq 0$ е крайно множество от **преходи**;

$I:T\to P^{\infty}$ е **входна** функция, изобразяваща преходите в комплекти от входни позиции;

$O:T\to P^{\infty}$ е **изходна функция**, изобразяваща преходите в комплекти от изходни позиции.

Множествата P и T не се пресичат, т.е. $P\cap T=\Phi$. Те имат мощност съответно n и m. p_i, $i=1\div n$ е произволен елемент на P, t_j, $j=1\div m$ е произволен елемент на T.

Позицията p_i е **входна за прехода** t_j, ако $p_i\in I(t_j)$; p_i е **изходна позиция за прехода** t_j, ако $p_i\in O(t_j)$. Входовете и изходите на преходите са комплекти на позициите.

Комплектът е обобщение на множество, в което са включени многократно повтарящи се елементи. Позициите могат да бъдат **кратен вход** или **кратен изход на преходите**. Кратността на входната позиция p_i за прехода t_j е броят на появяване на позицията във входния комплект на прехода и се означава с $\#(p_i,I(t_j))$. Аналогично, кратността на изходната позиция p_i за прехода t_j е броят на появяване (повторение) на позицията в изходния комплект на прехода t_j, $\#(p_i,O(t_j))$. Ако входната и изходната функция са множества (а не комплекти), то кратността на всяка позиция е или 0, или 1.

Входните и изходните функции се използват за изобразяване на преходите в комплекти от позиции, а също и за изобразяване на позициите в комплекти от преходи.

Преходът t_j е вход за позицията p_i, ако p_i е изход за t_j. Преходът t_j е изход за позицията p_i, ако p_i е вход за t_j.

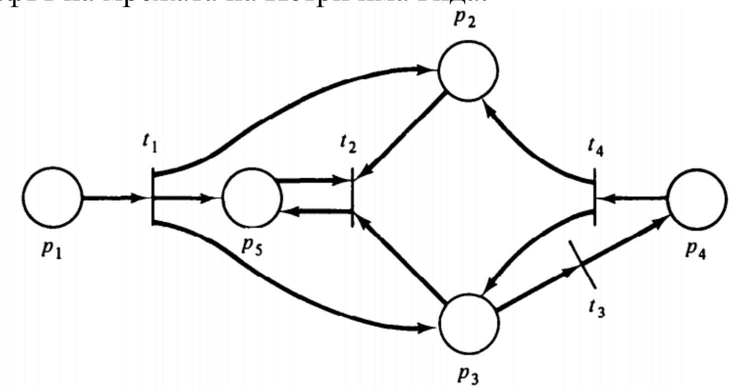
За мрежите на Петри се определят разширена входна функция I и изходна функция O: $I:P\to T^{\infty}$ и $O:P\to T^{\infty}$ по такъв начин, че: $\#(t_j,I(p_i))=\#(p_i,O(t_j))$, $\#(t_j,O(p_i))=\#(p_i,I(t_j))$.

Пример: $C=(P,T,I,O)$: $P=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$ е крайно множество от **позиции**; $T=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ е крайно множество от **преходи**;

входна функция $I:T\to P^{\infty}$	**изходна функция** $O:T\to P^{\infty}$
$I(t_1)=\{p_1\}$ $I(t_2)=\{p_2,p_3,p_5\}$ $I(t_3)=\{p_3\}$ $I(t_4)=\{p_4\}$	$O(t_1)=\{p_2,p_3,p_5\}$ $O(t_2)=\{p_5\}$ $O(t_3)=\{p_4\}$ $O(t_4)=\{p_2,p_3\}$
разширена входна функция $I:P\to T^{\infty}$	**разширена изходна функция** $O:P\to T^{\infty}$
$I(p_1)=\{\ \}$ $I(p_2)=\{t_1,t_4\}$ $I(p_3)=\{t_1,t_4\}$ $I(p_4)=\{t_3\}$ $I(p_5)=\{t_1,t_2\}$	$O(p_1)=\{t_1\}$ $O(p_2)=\{t_2\}$ $O(p_3)=\{t_2,t_3\}$ $O(p_4)=\{t_4\}$ $O(p_5)=\{t_2\}$

Това формално въвеждане на мрежите на Петри е напълно достатъчно за работа с тях. По-удобно е, обаче, графичното им представяне чрез двудолен ориентиран мултиграф. Той има два вида възли: ○ – позиция и ▌ – преход. Ориентирани линии (дъги) свързват позициите с преходите. При това, дъгата, насочена от позицията p_i към прехода t_j, определя входната позиция за прехода. Дъгата, насочена от t_j към p_i, определя изходната позиция за прехода. Мрежата на Петри в мултиграф, защото кратните входове и изходи се представят с кратни дъги от един връх на графа към друг. Графът е двудолен, понеже върховете му са разделени на две множества (позиции и преходи) и всяка дъга е насочена от елемент на едното множество към елемент на другото.

За примера графът на мрежата на Петри има вида:



2. Маркировка на мрежа на Петри

Маркировката μ представлява присвояване на точки на позициите в мрежата на Петри. Тя може да се определи като функция $\mu : P \to N$, изобразяваща множеството на позициите P в множеството на целите неотрицателни числа $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Маркировката може да се определи и като n-мерен вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, където $n = |P|$ и $\mu_i \in N$ ($i = 1 \div n$). Векторът μ определя броя на точките μ_i за всяка позиция p_i.

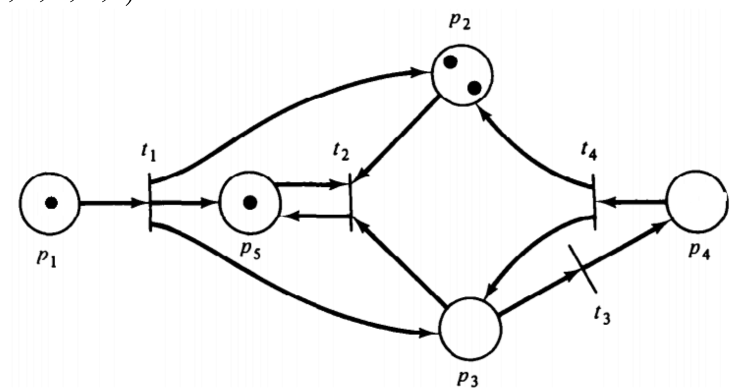
Връзката между определенията за маркировката като функция и като вектор се установява с отношението $\mu(p_i) = \mu_i$ (броят на точките в позицията p_i е равен на μ_i).

Маркираната мрежа на Петри $M = (C, \mu)$ е съвкупност от структурата на мрежата на Петри $C = (P, T, I, O)$ и маркировката μ.

Тя може да бъде записана във вида $M = (P, T, I, O, \mu)$.

В графа на мрежата на Петри маркировката се означава с малки точки вътре в окръжностите за съответните позиции или с числа (при голям брой на точките).

Пример: $\mu = (1, 2, 0, 0, 1)$.



Тъй като броят на точките, който може да бъде определен за всяка от позициите, е неограничен, то за мрежата на Петри съществуват безкрайно много маркировки. Множеството от всичките маркировки за мрежа на Петри с n на брой позиции е множеството от всичките n-мерни вектори, N^n. Това множество е безкрайно, но изброимо.

3. Изпълнение на мрежа на Петри

Изпълнението се управлява от броя и разпределението на точките в мрежата. Мрежата се изпълнява чрез сработване на преходи, при което от входните позиции на сработил преход се отделят точки, а в изходните му позиции се образуват нови точки.

Под изпълнение на мрежа на Петри се разбира всяка възможна последователност от сработили преходи.

Преход може да сработи само когато е разрешен. Той е разрешен, ако броят на точките във всяка негова входна позиция е поне толкова, колкото са на брой дъгите от позицията към този преход. Всяка входна дъга за прехода трябва да бъде обезпечена с точка в позицията, от която излиза; за кратни входни дъги са необходими кратни точки.

Преходът t_j е разрешен, ако за всяка от входните му позиции p_i е изпълнено:

$$\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)).$$

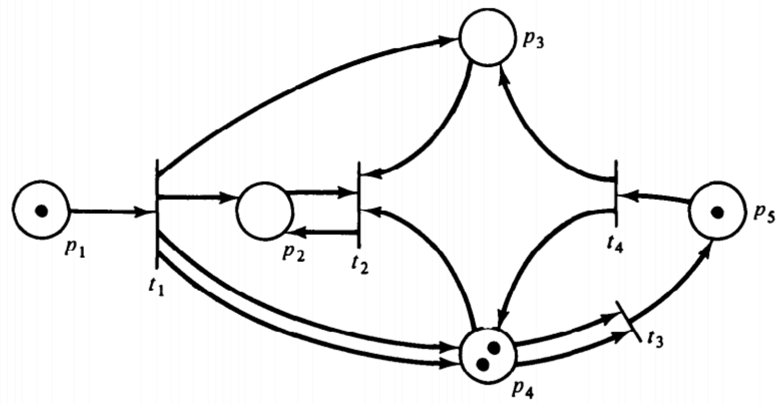
При сработването на преход всяка негова входна дъга отнема по една точка от позицията, от която излиза, а всяка негова изходна дъга създава по една точка в позицията, в която влиза.

Преходът t_j може да сработи винаги когато е разрешен. В резултат от маркировката μ се получава нова маркировка μ', при което:

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j)).$$

В тази формула $j = const$, а i се променя, за да се опишат всичките позиции p_i, свързани с прехода t_j.

Пример: $\mu^0 = (1, 0, 0, 2, 1)$



Началната маркировка е $\mu^0 = (1, 0, 0, 2, 1)$. Разрешени са преходите t_1, t_3 и t_4. Преходът t_2 не е разрешен.

При последователно сработване на t_4, t_1 и t_3, маркировката се променя:

$\mu^0 = (1, 0, 0, 2, 1)$

$t_4 \downarrow$

$\mu^1 = (1, 0, 1, 3, 0)$

$t_1 \downarrow$

$\mu^2 = (0, 1, 2, 5, 0)$

$t_3 \downarrow$

$\mu^3 = (0, 1, 2, 3, 1)$

и т.н.

Изпълнението на мрежата може да продължи докато съществува поне един разрешен преход. Когато не остане разрешен преход, то изпълнението се прекратява.

4. Пространство на състоянията за мрежа на Петри

Състоянието на мрежа на Петри се определя от нейната маркировка. Сработването на някой преход променя маркировката, а следователно и състоянието на мрежата. Пространство на състоянията за мрежа на Петри, имаща n позиции, е множеството от всичките възможни маркировки, т.е. N^n. Изменението на състоянието след сработване на преход се определя от функцията на следващото състояние δ. Когато тази функция се приложи за маркировката (състоянието) μ и прехода t_j (ако е разрешен), то след сработването му се получава нова маркировка (състояние) $\mu' = \delta(\mu, t_j)$, в резултат на отделяне на точки от входовете на t_j и добавянето на точки в изходите на t_j.

Функцията на следващото състояние: $\delta : N^n \times T \to N^n$ е определена само когато t_j е разрешен.

Чрез нея множествата от маркировки и преходи се съпоставят на множеството от маркировки.

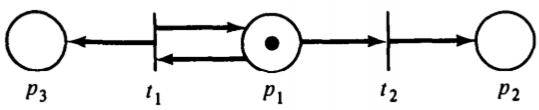
Ако началната маркировка е μ^0, то след сработване на разрешения преход t_j се получава нова маркировка $\mu^1 = \delta(\mu^0, t_j)$. Ако сега сработи друг разрешен преход, примерно t_k, се образува маркировката $\mu^2 = \delta(\mu^1, t_k)$. Този процес продължава докато съществува поне един разрешен преход. Ако се получи маркировка, за която няма разрешен преход, то функцията δ не е определена и изпълнението на мрежата спира.

При изпълнение на мрежа на Петри се получават две последователности: на маркировките $(\mu^0, \mu^1, \mu^2, \ldots)$ и на сработилите преходи $(t_{j0}, t_{j1}, t_{j2}, \ldots)$. Тези две последователности са свързани чрез съотношението $\delta(\mu^k, t_{jk}) = \mu^{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и представляват описание на изпълнението на мрежата.

Маркировката (състоянието) μ' е непосредствено достижима от маркировката (състоянието) μ, ако съществува такъв преход t_j, че $\delta(\mu, t_j) = \mu'$. Ако μ' е непосредствено достижима от μ, а μ'' – от μ', то μ'' е достижима от μ.

Множеството на достижимост $R(C, \mu^0)$ е множеството от всички маркировки, достижими от началната маркировка μ^0. То може да бъде крайно или безкрайно. Маркировката $\mu' \in R(C, \mu^0)$, ако съществува някаква последователност от преходи, променяща μ^0 в μ'.

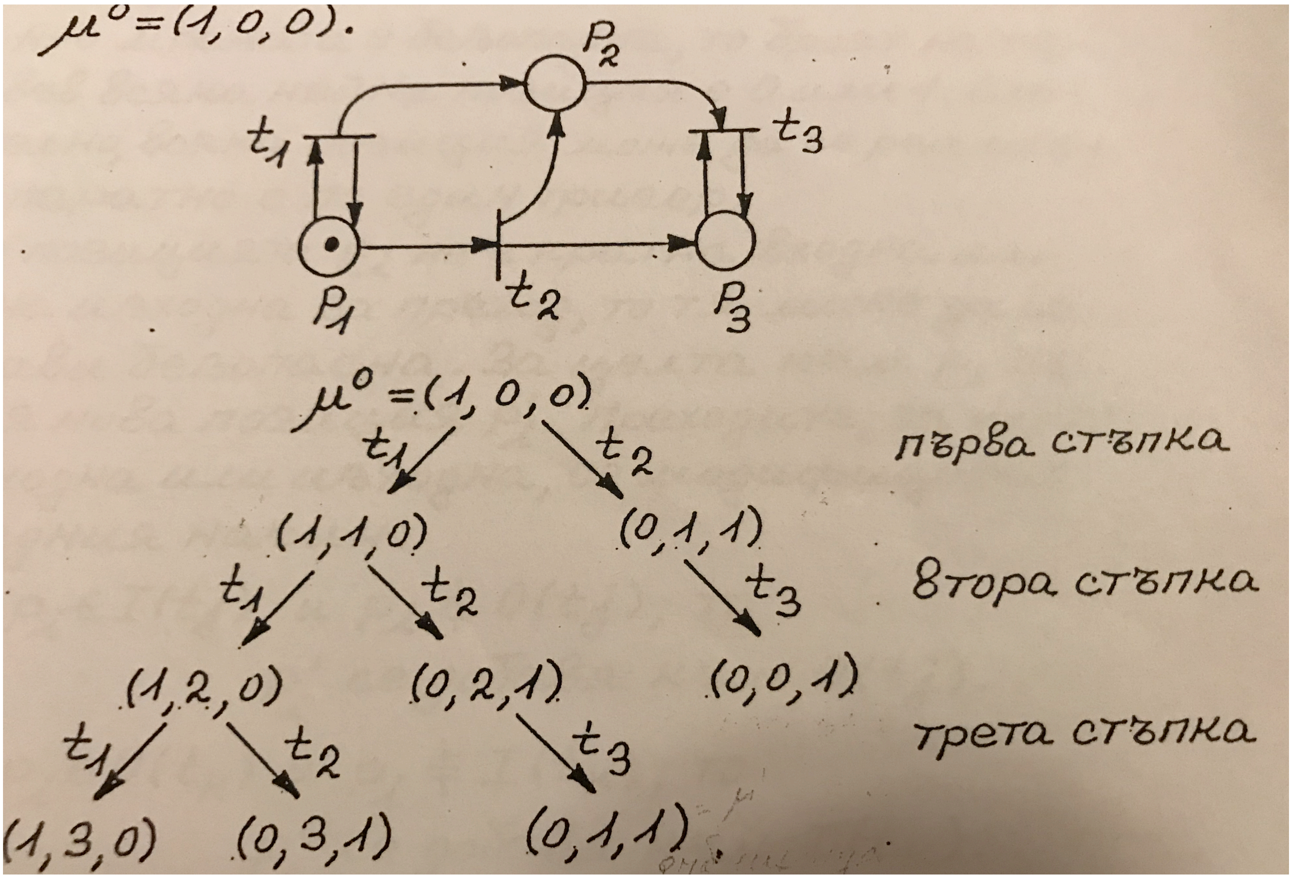
Пример:



От началната маркировка $\mu^0 = (1, 0, 0)$ непосредствено достижими са две маркировки: $\mu' = (1, 0, 1)$ и $\mu'' = (0, 1, 0)$. От μ'' не може да се получи друга маркировка. От μ' могат да се получат маркировките $(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 2)$, които са достижими от μ^0. Може да се покаже, че множеството на достижимост $R(C, \mu^0)$ има вида: $\{(1, 0, n), (0, 1, n) \mid n \geq 0\}$.

5. Дърво на достижимост за мрежа на Петри

Схематично множеството на достижимост $R(C, \mu^0)$ се представя чрез **дърво на достижимост**. Нека е зададена мрежа на Петри, маркирана с начална маркировка $\mu^0 = (1, 0, 0)$.



Началната маркировка $\mu^0 = (1, 0, 0)$ е **корен** на дървото на достижимост. За μ^0 са разрешени преходите t_1 и t_2. В резултат от сработването им се получават непосредствено достижимите маркировки $(1,1,0)$ и $(0,1,1)$, които са нови върхове на дървото. След това се разглеждат всичките маркировки, достижими от новополучените. От $(1,1,0)$ отново сработвайки t_1 се получава $(1,2,0)$, а сработвайки t_2 – $(0,2,1)$. От $(0,1,1)$ сработвайки t_3 се получава $(0,0,1)$, която е пасивна, понеже за нея не е разрешен нито един преход и следователно тя не може да предизвика никаква друга маркировка. От останалите маркировки могат да се получават нови маркировки, но $(0,1,1)$, получена от $(0,2,1)$ след сработването на t_3, вече е била получена непосредствено от μ^0 след сработването на t_2, т.е. тя е дублираща.

Повтаряйки процедурата многократно се получава всяка достижима маркировка. Дървото представлява всички възможни последователности от сработили преходи, т.е. всички възможни изпълнения на мрежата. Всеки път, започващ от корена, съответства на допустима последователност от сработили преходи. Полученото дърво, обаче, може да се окаже безкрайно дори и при крайно множество $R(C, \mu^0)$. В такъв случай то се свежда до дърво с краен размер въз основа на пасивните и дублиращите маркировки. При това, в някои от маркировките може да бъде използван символът ω, представящ произволно голяма стойност (т.е. безкрайност). Използването му означава, че в съответната позиция могат да бъдат създадени неограничен брой точки (маркери) в резултат на сработването на определена последователност от преходи.

6. Свойства на мрежите на Петри

1) Безопасност

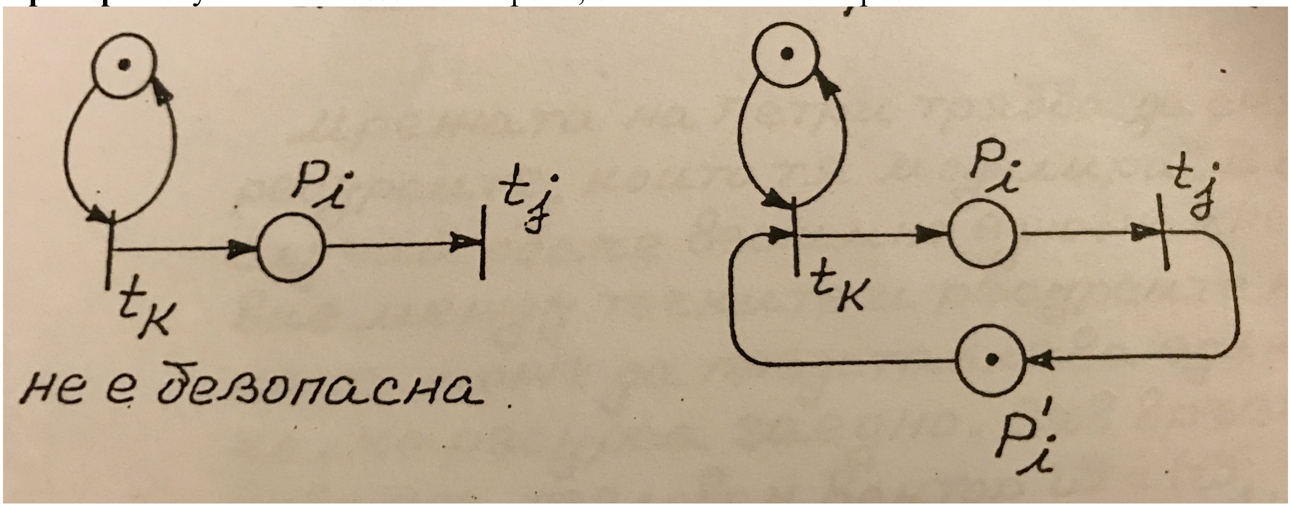
Позицията p_i е безопасна, ако $\mu'(p_i) \le 1$ за всяка маркировка $\mu' \in R(C, \mu^0)$. Мрежата е безопасна, ако е безопасна всяка нейна позиция. Ако мрежата е безопасна, то броят на точките във всяка нейна позиция е 0 или 1. Следователно, всяка позиция може да се реализира апаратно с по един тригер.

Ако позицията p_i не е кратна входна или кратна изходна за преход, то тя може да се направи безопасна. За целта към p_i се добавя нова позиция p_i'. Преходите, за които p_i е входна или изходна, се модифицират по следния начин:

Ако $p_i \in I(t_j)$ и $p_i \notin O(t_j)$, то p_i' се добавя към $O(t_j)$.

Ако $p_i \in O(t_k)$ и $p_i \notin I(t_k)$, то p_i' се добавя към $I(t_k)$.

Пример: Получаване на безопасна мрежа, еквивалентна по първоначалната.



Чрез въвеждането на p_i' се представя условието „p_i е празна". Следователно, p_i и p_i' са допълващи се: в p_i има точка само когато в p_i' няма точка, и обратно.

Всеки преход, отделящ точка от p_i, трябва да създаде точка в p_i', а всеки преход, отделящ точка от p_i', трябва да създаде точка в p_i. Началната маркировка също може да се наложи да се модифицира за да се обезпечи точно една точка или в p_i, или в p_i'. (Допуска се, че началната маркировка μ^0 е безопасна).

2) Ограниченост

Безопасността е частен случай на по-общото свойство – ограниченост. Позицията p_i е *k*-безопасна, или *k*-ограничена, ако броят на точките в нея не може да превиши цялото число *k*, т.е. $\mu'(p_i) \leq k$ за всяка $\mu' \in R(C, \mu^0)$.

Мрежата на Петри е *k*-ограничена, ако всичките нейни позиции са *k*-ограничени (тъй като броят на позициите е краен, то *k* е най-голямата от границите за всяка от позициите). Ограничената мрежа може да се реализира апаратно с по един брояч за всяка позиция.

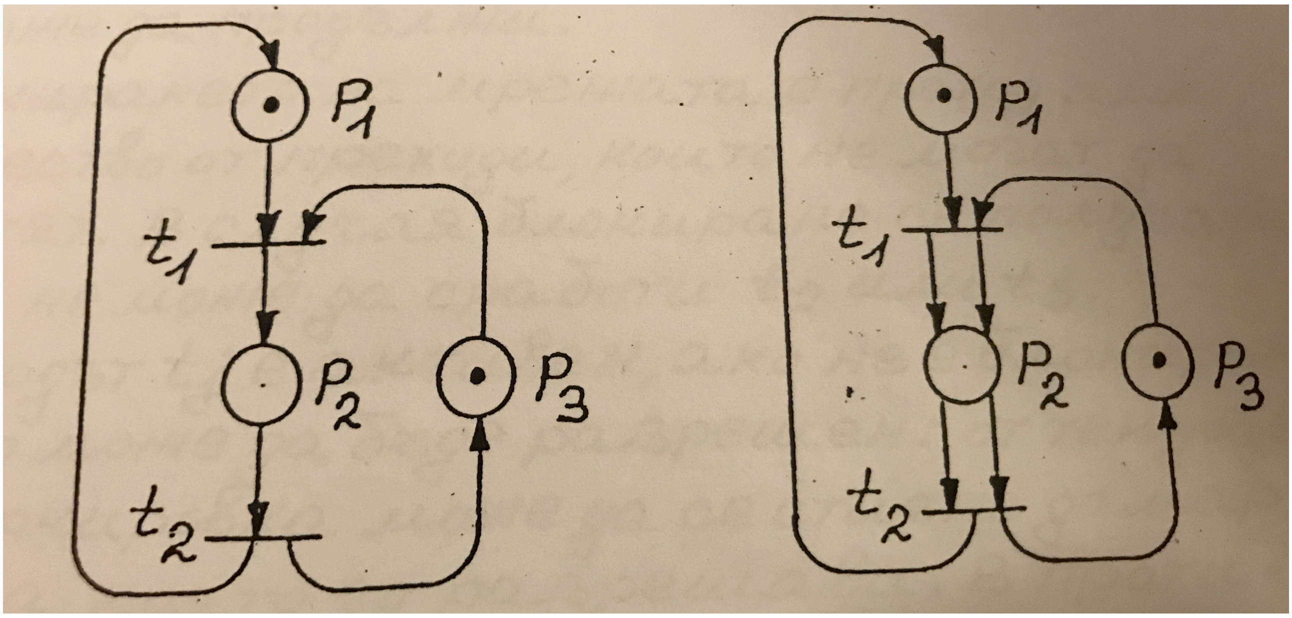
3) Съхранимост

В системите за разпределение на ресурси (памет, устройства за вход / изход и др.) точките, представляващи тези ресурси, никога не се създават или не се унищожават. Най-простият способ за реализиране на това е да се изисква мрежата, моделираща такава система, да бъде съхраняваща, т.е. общият брой на точките в мрежата винаги да е постоянен.

Мрежата на Петри C с начална маркировка μ^0 е строго съхраняваща, ако за всяка маркировка $\mu' \in R(C, \mu^0) \Rightarrow \sum_{p_i \in P} \mu'(p_i) = \sum_{p_i \in P} \mu^0(p_i)$.

Това е много силно ограничение. От него следва, че за всеки преход t_j броят на входовете трябва да е равен на броя на изходите, $|I(t_j)| = |O(t_j)|$. В противен случай, сработването на прехода t_j би променило общия брой на точките в мрежата.

Пример: Не строго съхраняваща мрежа, преобразувана в строго съхраняваща.



Мрежата на Петри трябва да съхранява ресурсите, които тя моделира. В общия случай, обаче, взаимно еднозначно съответствие между точките и ресурсите няма. Точката може да представлява един или няколко ресурса заедно. Във връзка с това се въвежда тегловен вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, определящ теглото ω_i на точките за всяка позиция p_i на мрежата. При това $\omega_i \geq 0$ ($i = 1 \div n$).

Тогава мрежата на Петри е съхраняваща относно тегловния вектор ω, ако за всяка маркировка $\mu' \in R(C, \mu^0) \Rightarrow \sum_i \omega_i . \mu'(p_i) = \sum_i \omega_i . \mu^0(p_i)$.

За строго съхраняваща мрежа тегловният вектор е $\omega = (1, 1, \ldots, 1)$. Всяка мрежа е съхраняваща относно нулевия тегловен вектор $\omega = (0, 0, \ldots, 0)$. Разгледаната в примера не строго съхраняваща мрежа е съхраняваща относно тегловния вектор $\omega = (1, 2, 1)$.