北京航空航天大学
国际学院

线性代数

第五章 矩阵的相似变换

特征值是线性代数中的一个重要概念.在数学、物理学、化学、计算机等领域有着广泛的应用.

§5.1 方阵的特征值与特征向量

5.1.1 特征值与特征向量的概念

5.1.2 特征值与特征向量的求法

5.1.3 特征值与特征向量的性质

5.1.1 特征值与特征向量的概念

问题： $A_{n\times n}\alpha_{n\times 1}=\beta_{n\times 1}$

特殊情况：

$$A\alpha=\begin{pmatrix}3&3&2\\1&1&-2\\-3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}=\beta=4\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=4\alpha$$

定义5.1.1　设$\boldsymbol{A}$是数域$\boldsymbol{P}$上n阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{P}$上非零n维向量, 若有数$\lambda \in \boldsymbol{P}$使

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda \boldsymbol{\alpha}$$

则称λ为$\boldsymbol{A}$的特征值(**eigenvalue**), $\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{A}$的属于λ的特征向量(**eigenvector**).

问题:

(1) 是否任何方阵都存在特征值?

(2) 若方阵存在特征向量, 数量是多少?

定理5. 1. 1 若α_1, α_2, …, α_s是$\boldsymbol{A}$的属于λ的特征向量, 则α_1, α_2, …, α_s的任何非零线性组合$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s$也是$A$的属于$\lambda$的特征向量.

证 由条件有 $\boldsymbol{A}\alpha_i = \lambda\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, s$

从而 $$A\beta = A(k_1\alpha_1 + \ldots + k_s\alpha_s)$$
$$= k_1A\alpha_1 + \ldots + k_sA\alpha_s = k_1\lambda\alpha_1 + \ldots + k_s\lambda\alpha_s$$
$$= \lambda(k_1\alpha_1 + \ldots + k_s\alpha_s) = \lambda\beta$$

故由定义5.1.1, β是A的属于λ的特征向量, 证毕.

注:

（1） 若A有特征值λ, 则A的属于λ的特征向量有无穷多个.

（2） 若已知A有特征向量α, 则α只能属于A的一个特征值.

5.1.2 特征值与特征向量的求法

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$是数域$P$上的$n$阶方阵, 若$\lambda$是$A$的特征值,

$$\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

是A的属于λ的特征向量, 则有 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$,

得 $\lambda\alpha-\boldsymbol{A}\alpha=0$,

即 $(\lambda E-\boldsymbol{A})\alpha=0$.

由$\alpha\neq 0$, 即方程组$(\lambda E-A)x=0$有非零解, 因此$|\lambda E-A|=0$.

定义5.1.2　设 A 是数域P**上的**n阶方阵，λ是在P上取值的变量. 矩阵 $\lambda E-A$ 称为 A 的特征矩阵. 它的行列式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为A的特征多项式(**eigenpolynomial**). 它是数域P上以 λ 为变元的一个n次多项式.

π

说明: 根据讨论, 如果 λ 是方阵A的特征值, 则 λ 必是A的特征多项式的一个根; 反之, 如果 λ 是A的特征多项式在数域P中的一个根, 则齐次线性方程组 $(\lambda E - A)\,x = 0$ 必有非零解. 这样, λ就是A 的一个特征值, 而 $(\lambda E - A)\,x = 0$ 的非零解$\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^T$就是$A$的属于$\lambda$的特征向量.

求方阵A的特征值与特征向量的方法:

（1） 写出A的特征多项式$|\lambda E-A|$, 并求出它在数域P中全部的根(称为A的特征根), 这些根也就是A的全部特征值;

(2) 把所求得的特征值逐个地代入方程组 $(\lambda E-A)x = 0$, 对每个特征值解方程组$(\lambda E-A)x = 0$, 求出它的基础解系, 它们就是属于这个特征值的线性无关特征向量.

例5.1.1 求n阶数量矩阵 kE 的特征值与特征向量.

解 kE的特征多项式为

$$|\lambda E - kE| = \begin{vmatrix} \lambda - k & & & \\ & \lambda - k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - k \end{vmatrix} = (\lambda - k)^n$$

特征多项式的根为$\lambda=k$, 即kE的特征值只有k, 它是一个n重特征根.

把 $\lambda=k$ 代入$(\lambda E-kE)\alpha=0$, 得

$$0\,\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

它的非零解为任意非零向量. 故任何非0向量都是kE的特征向量. 直接由特征向量的定义也可知, 数量矩阵kE左乘任何向量α后得到$k\alpha$.

例5.1.2 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

为实数域R上的矩阵, 求A的特征值与特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

故A的特征值是-1(二重特征根)和3.

把特征值 1代入齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$

得 $$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

它的基础解系是 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$

故属于 -1的线性无关特征向量就是α_1，而属于 -1 的全部特征向量是 $k_1\alpha_1$， 其中$k_1 \neq 0$.

再把特征值 3 代入 $(\lambda E - A)X = 0$， 得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

它的基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

它就是属于3的一个线性无关特征向量. 属于3的全部特征向量就是 $k\alpha_2$, $k \in R$, $k \neq 0$.

例5.1.3 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

为实数域R上的矩阵，求A的特征值与特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

故A的特征值是-1(二重特征根)和5.

把特征值 -1 代入齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$

得
$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

它的基础解系是 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

故属于 -1 的两个线性无关特征向量就是 α_1, α_2,
而属于 -1 的全部特征向量是 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 k_1, k_2 为不同时为零的所有实数.

再把特征值 5 代入 $(\lambda E - A)X = 0$, 得

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

它的基础解系是

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

它就是属于5的一个线性无关特征向量. 属于5的全部特征向量就是$k\alpha_3$, $k \in R$, $k \neq 0$.

说明:

当 λ_0 是特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的单根时，属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数只有一个;

如果 λ_0 是特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的重根，属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数可能等于λ_0 的重数，也可能小于λ_0 的重数.

定理5. 1. 2 设λ_0 是 n 阶方阵 A 的 k 重特征值，则 A 的属于特征值 λ_0 的线性无关的向量个数不超过 k 个.

5.1.3 特征值与特征向量的性质

矩阵A的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+C$$

令 $\lambda=0$，可求得 $C=(-1)^n|A|.$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

定义5.1.3 方阵A的主对角线元素之和($a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$)称为**$A$的迹**, 记为$\mathrm{tr}\, A$.

定理5.1.3 若 n 阶方阵A在数域P上有n个特征值(重根按重数计), 则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$$

定理5.1.4 设 λ 是 A 的特征值，则

(1) λ^2 是 A^2 的特征值，λ^k 是 A^k 的特征值；

若 A 是可逆矩阵，则

(2) $1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值；

(3) $|A|/\lambda$ 是 A^* 的特征值.

例5. 1. 4　证明若λ是正交矩阵Q的特征值,则$1/\lambda$也是Q的特征值.

证　设Q为正交矩阵，则

$$Q^T Q = QQ^T = E \quad 且 \quad Q^{-1} = Q^T$$

由定理5. 1. 4， $1/\lambda$是Q^{-1}的特征值, 从而是Q^T 的特征值.由于

$$|\lambda E - Q| = |(\lambda E - Q)^T| = |\lambda E - Q^T|$$

故Q与Q^T的特征多项式相等, 即Q与Q^T有相同特征值.这就证明了$1/\lambda$也是Q的特征值.

例5. 1. 5　设A是准对角阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

则A_1, A_2, …, A_s 的所有特征值就是A的全部特征值.

证　令$E_i\,(i=1, 2, \ldots, s)$是与$A_i\,(i=1, 2, \ldots, s)$同阶的单位阵, 则有

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda E_1 - A_1 & & & \\ & \lambda E_2 - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_s - A_s \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda E_1 - A_1|\,|\lambda E_2 - A_2| \cdots |\lambda E_s - A_s|$$

从而A的特征多项式是所有$A_i\,(i=1, 2, \ldots, s)$的特征多项式之积.故$A_i\,(i=1, 2, \ldots, s)$的所有特征值就是A的全部特征值.

定理5.1.5 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.详细地说, 若$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$是$A$的$m$个不同特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是分别属于它们的特征向量, 则$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$是线性无关的.

更一般的结果参见定理5.1.6.

作业 P133 习题5.1 第1(1)(2).