北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§3.4　向量空间

3.4.1　向量空间的概念

3.4.2　基、维数与坐标

3.4.3　基变换与坐标变换

3.4.1 向量空间的概念

定义3.4.1 设V是数域P上的 n维向量的非空集合, 如果$\forall \alpha, \beta \in V, k \in P$ 满足

$$\alpha+\beta \in V, \quad k\alpha \in V$$

则称集合V为数域P上的向量空间.(Vector space)

当P为实数域R时, 称V为实向量空间, 当P为复数域C时, 称V为复向量空间.

例3.4.1 实数域R上n维向量的全体R^n是一个向量空间,

$$R^n=\{\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in R, \quad i=1,2,\cdots,n\}$$

例3.4.2　证明

(1) 集合

$$V_1 = \{\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, \quad i = 2,3,\cdots,n\}$$

是一个向量空间；

(2) 集合

$$V_2 = \{\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, \quad i = 2,3,\cdots,n\}$$

不是一个向量空间.

π

证 (1) 显然集合V_1非空, 对任意$\alpha=(0, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta=(0, b_2, \ldots, b_n)\in V_1$及任意实数$k$, 有

$$\alpha+\beta=(0, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)\in V_1$$

$$k\alpha=(0, ka_2, \cdots, ka_n)\in V_1$$

所以V_1是一个向量空间.

(2) 因为对于集合V_2中的任意两个向量

$\alpha=(1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta=(1, b_2, \ldots, b_n)$,

$\alpha+\beta=(2, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)\notin V_2$,

所以V_2不是一个向量空间.

定义3. 4. 2 设V_1，V_2是数域P上的两个向量空间，如果$V_1 \subseteq V_2$，则称V_1是V_2的**子空间**(subspace).

说明: (1) 在n维向量空间V中，零空间和空间V也是它的子空间，称为它的平凡子空间(trivial subspaces)，除此之外，V的其他子空间称为它的非平凡子空间.

(2) 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为一组$n$维向量，它的线性组合

$$V = \{\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_i \in R, 1 \le i \le m\}$$

是向量空间, 称为由向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 生成的向量空间. 记为$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

例3.4.3 如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$与向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$等价, 则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r).$$

证 $\forall \alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, 则 α 可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表出, 又可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出, 所以α 可由$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 线性表出,

即$\alpha \in L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$.

因此 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \subset L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$

同理可证 $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \subset L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$.

故 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$.

3.4.2 基、维数与坐标

定义3.4.3 设V是数域P上的向量空间, 向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$, 如果

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关;

(2) V 中任一向量都能由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 表示,

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 为空间V 的一组基(或基底)(base), m 称为向量空间 V 的维数(dimension), 记为$\dim V = m$, 并称V是数域P上的 m维向量空间.

零空间的维数规定为零.

注意:

1. 向量空间的维数和该空间中向量的维数是两个不同的概念.

2. 若把向量空间V看作一个向量组, 那么它的基就是 V的一个极大线性无关组, $\dim V$ 就是V的秩.

3. 若向量空间V的维数是m, 那么V中任意 m 个线性无关的向量都是V的一组基; 对于向量空间V的任一子空间V_1, $\dim V_1 \le \dim V$.

4. 对于向量空间R^n, 基本单位向量ε_1, ε_2, …, ε_n就是它的一组基, 有$\dim R^n = n$, 则称R^n为n维实向量空间.

定义3.4.3 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为向量空间$V$的一组基, $\forall \alpha \in V$ 有

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

则称有序数组$x_1, x_2, \ldots, x_m$为向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$下的坐标.(Coordinate) 记为$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

注意: α 在基底 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$下的坐标是唯一的.

例3. 4. 4 设 $\alpha_1=(1, 0, 2)$, $\alpha_2=(1, 0, 1)$，$\alpha_3=(-1, 2, 0)$，证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是向量空间$R^3$的一组基，并求向量$\alpha=(2, -3, 5)$在这组基下的坐标.

证明 以向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列向量做矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $|A|=2\neq 0$，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，因此它们是$R^3$的一组基.

设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

把$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$代入，比较等式两端向量的对应分量，可得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

解之，得 $x_1 = \dfrac{9}{2}, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -\dfrac{3}{2}$

于是向量在α基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为

$$\left(\frac{9}{2}, -4, -\frac{3}{2}\right).$$

练习：R^3的下列子集是否构成子空间？若是, 求出基底和维数.

$$(1) V_1 = \{x = (a_1, a_2, 0), a_i \in R, i = 1,2\}$$

$$(2) V_2 = \{x = (a, 2a, 3a), a \in R\}$$

$$(3) V_3 = \{x = (a_1, a_2, a_3), a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_i \in R, i = 1,2,3\}$$

3.4.3 基变换与坐标变换

此部分讨论向量空间 V中不同的两组基之间的关系与向量 α 在不同的基下的坐标之间的关系.

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$与$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$是向量空间$V$的两组基, 由基的定义, 它们可以互相线性表出. 用$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 表示 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, 则有

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + \cdots + p_{1m}\alpha_m, \\ \beta_2 = p_{21}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{2m}\alpha_m, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \beta_m = p_{m1}\alpha_1 + p_{m2}\alpha_2 + \cdots + p_{mm}\alpha_m. \end{cases}$$

记

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

由矩阵的乘法

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)P$$

称P为由基$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$到$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$的过渡矩阵(transition matrix), 上式称为由基 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 到基 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$的基底变换公式(Base conversion formula).

注：过渡矩阵P是可逆的.

定理3.4.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$与$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$是向量空间$V$的两组基，由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$到$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$的过渡矩阵为$P$，如果$V$中任意元素 α 在这两组基下的坐标分别为$(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$与$(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

称为坐标变换公式(Coordinate transformation formula).

证 由题设

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\alpha = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_m\beta_m = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

由 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)P$

则

$$\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

由向量α在基$\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_m$下坐标的唯一性, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

证毕.

例3.4.4　已知R^3中的二组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1);$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4),\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1),\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6);$$

(1) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵及坐标变换公式;

(2) 求向量$\beta=2\beta_1-\beta_2-\beta_3$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标;

(3) 求向量$\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标.

解 (1) 取R^3中的基

$$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0)^T,\quad \varepsilon_2=(0,\ 1,\ 0)^T,\quad \varepsilon_3=(0,\ 0,\ 1)^T$$

则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

于是

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$$

所以, 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

由基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$到$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的过渡矩阵为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 13 & 19 & \dfrac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\dfrac{63}{2} \\ 7 & 10 & \dfrac{99}{4} \end{pmatrix}$$

由此可得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(2) 于是向量$\beta=2\beta_1-\beta_2-\beta_3$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 58 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(3) 向量 $\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 156 \\ -109 \\ 86 \end{pmatrix}$$

作业　P100 习题3.4　第2，3题.