北京航空航天大学
国际学院

线性代数

第二章　矩阵

矩阵(Matrix)理论是线性代数的重要组成部分，它不仅是解线性方程组的有力工具，而且在自然科学和工程技术领域都有广泛的应用.

本章主要介绍矩阵的运算, 逆矩阵(Inverse matrix), 分块矩阵(partitioned matrix), 矩阵的初等变换(Elementary transformation of matrix)与初等矩阵(Elementary matrix), 矩阵的秩(Rank)等有关内容.

矩阵的来历

矩阵这个词是由西尔维斯特（Sylvester, 1814–1897）于1850年首先提出。他开创了美国纯数学研究，并创办了《美国数学杂志》。在长达50多年的时间内，他是行列式和矩阵论始终不渝的作者之一。

§2.1 矩阵的概念

例 某化工厂所属的两个工厂都生产三种产品B_1, B_2, B_3. 在某年第一季度，各厂的生产情况如下表：

产量 \ 产品	B_1	B_2	B_3
A_1	20	17	12
A_2	30	20	10

$$\begin{pmatrix} 20 & 17 & 12 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

定义2.1.1 数域 P 上 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ 排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为P上的一个 m 行 n 列**矩阵**，或称为 $m \times n$ 矩阵, 简记为 $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 (a_{ij}).

其中a_{ij} (i=1, 2, …, m； j=1, 2, …, n)称为这个矩阵中第 i 行第 j 列的元素.

矩阵通常用大写英文字母A, B, C等来表示. 例如, 矩阵可记为

$$A = A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})$$

特殊矩阵及其元素表示

- 实矩阵 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in R,\ i = 1,2,\ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ldots,\ n$$

- 复矩阵 矩阵元素为复数，即

$$a_{ij} \in C,\ i = 1,2,\ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ldots,\ n$$

- 零矩阵 $O_{m\times n}$ 矩阵元素全为零，即

$$a_{ij} = 0,\ i = 1,2,\ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ldots,\ n$$

特别提示 具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵. 如$O_{2\times 3} \neq O_{2\times 6} \neq O_{3\times 2}$.

- 列矩阵 $n=1$的特殊矩阵 (列向量)

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

(Column matrix)

- 行矩阵 $m=1$的特殊矩阵 (行向量)

(Row matrix)

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

n阶方阵A：A的行数＝列数$= n$

设 n 阶方阵
(square matrix)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

称与此 n 阶方阵 A相对应的 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵A的行列式,
记为$|A|$或$\det A$.

特别提示 矩阵和行列式是两个完全不同的概念.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

但 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 对角阵A(Diagonal matrix)：亦记作

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

- 单位矩阵 E (Unit or Identity matrix)：

亦记作 I

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- 数量阵：λ为一数, 亦记作λE

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

- 上三角矩阵A 常用U表示

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = 0, \forall i > j, i, j = 1,2,\cdots,n$$

- 下三角阵A 常用L表示

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}=0,\forall i<j, i,j=1,2,\cdots,n$$