北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§2.5 初等变换与初等矩阵

2.5.1 矩阵的初等变换

2.5.2 初等矩阵

2.5.1 矩阵的初等变换

定义2.5.1 矩阵A的下列变换称为它的初等行(或列) 变换(Elementary row transformation)

(1)互换矩阵A的第 i行与第 j行(或第 i列与第 j列)的位置，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$(或$c_i \leftrightarrow c_j$);

(2)用常数 $k \neq 0$去乘矩阵 A的第 j行(或第 j列)，记为 kr_j (或 kc_j);

(3)将矩阵A的第 j行(或第 j列)各元素的 k倍加到第 i 行(或第 i 列)的对应元素上去，记为 r_i+kr_j (或c_i+kc_j);

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.(elementary transformation)

定义2.5.2 如果矩阵A经过有限次初等变换化为矩阵 B, 则称 A与 B 等价(equivalence), 记为 $A \cong B$， 或 $A \to B$.

矩阵等价的基本性质:

(1) 自反性(Reflexivity)：$A \cong A$；

(2) 对称性(symmetry)：若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$;

(3) 传递性(Transitivity)：若$A \cong B$, $B \cong C$, 则 $A \cong C$.

说明: 在数学中把具有上述三个基本性质的关系称为**等价关系**(equivalence relation).

三角形的相似、全等(congruence)都是等价关系.

数之间的“大于”、“小于”不是等价关系.

定义2.5.3 如果矩阵A满足下列条件:

(1) 若有零行，则零行全在矩阵A的下方;

(2) A的各非零行的第一个非零元素的列序数小于下一行中第一个非零元素的列序数;

则称A为**行阶梯形矩阵，或阶梯形矩阵.**
(Echelon matrix)

例如

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为阶梯形矩阵.

如果矩阵 A除满足上述条件(1)、(2)外，还满足条件：

(3) 各非零行的第一个非零元素均为1，且所在列的其它元素都为零，

则称 A为简化阶梯形矩阵(Row simplest form).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的一般形式为

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & * & \vdots & \cdots & * \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_i & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & * \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

上述矩阵中, $b_k(1 \le k \le r)$为非零常数，*号表示某一常数.

定理2.5.1 任何非零矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}_{m\times n}
=
\begin{pmatrix}
E_r & O \\
O & O
\end{pmatrix}_{m\times n}
$$

矩阵的左上角是一个单位矩阵，称为矩阵A的标准形. (Standard form)

定理2.5.2 任意非零矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$都与它的标准形等价, 即存在矩阵

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

使 $$A \cong \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

其中E_r为 r 阶单位矩阵,$1\leq r\leq \min\{m, n\}$.

例2.5.1 用初等行变换把矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

化为阶梯形和简化阶梯形.

解

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_1]{r_3+(-2)r_1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

再对其进行初等行变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{2})r_3,\ \frac{1}{12}r_4]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(-2)r_3]{r_1+(-6)r_3}\begin{pmatrix}1&3&0&0&15\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_4]{\substack{r_1+(-15)r_4\\ r_2+(-5)r_4}}\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

此即矩阵A的简化阶梯形矩阵.

如果再对 A的简化阶梯形作列的初等变换，可得矩阵A的标准形

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+(-3)c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4 \leftrightarrow c_5]{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

练习：将下列矩阵化为标准形.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5.2 初等矩阵

定义2.5.4 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**(Elementary matrix).

由于矩阵的初等变换有三种，所以对应的初等矩阵有三类：

(1) 互换E的第i行(列)与第j行(列)，记为

$$
E(i,j)=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

用m阶初等矩阵$E_m(i,j)$左乘$A=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$E_m(i,j)A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

用初等矩阵$E(i,j)$左乘A相当于将A的第i行与第j行互换$(r_i \leftrightarrow r_j)$.

类似地, 以 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 A,

$$AE_n(i,j)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等列变换:

把 A 的第 i 列与第 j 列对调 $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

(2) 用数 $k \neq 0$ 乘 E 的第i行(列)，记为

$$\boldsymbol{E(i(k))} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

用m阶初等矩阵$E(i(k))$左乘$A=(a_{ij})_{m\times n}$, 得

$$E(i(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第i行

用初等矩阵$E(i(k))$左(右)乘A相当于用不为0的数k乘A的第i行(列).

(3) 用数k乘 E的第j行(i列)加到第i行(j列)上，记为

$$E(i,j(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

用m阶初等矩阵$E(i,j(k))$左乘$A=(a_{ij})_{m\times n}$, 得

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行}\rightarrow \\ \\ \text{第}j\text{行}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \quad E(i,j(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

用 $E(i,j(k))$ 左(右)乘A相当于用数k乘A的第j行(i列)加到第i行(j 列) . $r_i+kr_j(c_j+kc_i)$

定理2.5.3 设A是一个 $m\times n$ 矩阵, 对 A作一次初等行变换，相当于在 A的左边乘以相应的 m阶初等矩阵；对 A作一次初等列变换，相当于在 A的右边乘以相应的 n阶初等矩阵.

说明: 注意将一个初等矩阵乘以矩阵 A 时, 初等矩阵在 A 的左边, 对 A 的初等变换对应于初等矩阵按行变换得到; 若初等矩阵在 A 的右边, 对 A 的初等变换对应于初等矩阵按列变换得到.

初等矩阵的性质：

(1) 初等矩阵都是可逆矩阵；

(2) 初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵, 且

$$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$$

$$E^{-1}(i(k))=E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k))$$

逆矩阵 $\leftrightarrow$ 逆初等变换

(3) 初等矩阵的转置矩阵仍为同类型的初等矩阵.

定理2.5.4 $m\times n$矩阵A与B等价$\Leftrightarrow$有m阶初等矩阵$P_1,P_2,\dots,P_s$与n阶初等矩阵 $Q_1,Q_2,\dots,Q_t$,使得

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=B$$

推论1 对于任意非零 $m\times n$ 阶矩阵A，必存在 m 阶可逆矩阵 P与 n阶可逆矩阵Q, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

推论2 若A为n阶可逆矩阵，则$A \cong E$.

推论3 n 阶矩阵 A可逆的充分必要条件是它可表示成有限个初等矩阵的乘积.

推论4 $m \times n$矩阵A与B等价 $\Leftrightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵 Q , 使得

$$\boldsymbol{PAQ = B}$$

初等变换逆矩阵的方法:

若矩阵A可逆, 则存在有限个初等矩阵P_1, P_2, … , P_l使得

$$\boldsymbol{P_l \cdots P_2 P_1 A = E},$$

因此 $$\boldsymbol{P_l \cdots P_2 P_1 E = A^{-1}},$$

说明　如果用有限次初等行变换把可逆矩阵A化为单位矩阵E, 那么用同样的初等行变换作用到单位矩阵E, 就把E化为A的逆矩阵A^{-1}. 从而得到利用初等变换求逆矩阵的方法:

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ --- \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ --- \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

例2.5.2 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

用初等行变换法求A^{-1}.

解

$$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_2+(-2)r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{6}\right)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/6 & 1/3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+(-3)r_3]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/6 & -13/6 & 4/3\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/6 & 1/3\end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/6 & -13/6 & 4/3\\ 1/2 & 3/2 & -1\\ -1/6 & -1/6 & 1/3\end{pmatrix}.$$

练习 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，

用初等行变换法求A^{-1}.

解

$$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3 - r_2}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_2 - 5r_3}{\overset{r_1 - 2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

作业：P67 第2, 3(1)(2)题.