北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§2.6　矩阵的秩

2.6.1 矩阵的秩的概念

2.6.2 用初等变换求矩阵的秩

2. 6. 1 矩阵的秩的概念

定义2.6.1 在矩阵A中,任取k行,k列$(1\le k\le \min(m,n))$, 由这些行列交叉处的k^2个元素按原来的顺序构成的k阶行列式, 称为矩阵A的一个k阶子式.(k order determinant)

例如 对3×4阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ 是一个二阶子式.

注: 在 $m\times n$ 矩阵 A 中, k 阶子式数量 $C_m^k C_n^k$

定义2.6.2 若在$m \times n$矩阵A中,有一个r阶子式不为零,而所有的$r+1$阶子式(若存在的话)都为零,则称r为矩阵A的秩(rank),记为$R(A) = r$.

注意 1. $R(A) \le \min\{m, n\}$. $R(A^T) = R(A)$, $R(kA) = R(A)(k \ne 0)$.

2. 规定零矩阵的秩为零 (零矩阵的各阶子式全为零).

3. $R(A)$是A中不为零的子式的最高阶数.

定理2.6.1 n阶方阵A的秩为n的充分必要条件是A为可逆矩阵.

说明: 对于n阶方阵A,若$R(A) = n$,则称A为满秩矩阵(Full rank matrix), 若$R(A) < n$,则称A为降秩矩阵(Reduced rank matrix).

由定理2.6.1,矩阵A可逆, 非奇异, 满秩是三个相互等价的概念.

例2.6.1　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

的秩.

解 A 的左上角的二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

因此 $R(A) \geq 2$.

A的三阶子式共有4个,且

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

所以 $R(A) = 2$.

练习

求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 因为B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，所以B的所有4阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$，所以 $R(B) = 3$.

2.6.2 用初等变换求矩阵的秩

定理2.6.2 初等变换不改变矩阵的秩.

用初等变换求矩阵的秩的方法:

把矩阵用初等行变换变为行阶梯形矩阵，阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例 2.6.2　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

的秩.

解　由于

$$A \xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3+2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\frac{1}{2}r_2 \quad r_3+(-r_2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-r_3)]{\frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $R(A)=3.$

练习 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

求矩阵A的秩及矩阵$B=(A|b)$的秩.

解 分析：设B的行阶梯形矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{B}}=(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$

则 $\tilde{A}$ 就是A的行阶梯形矩阵, 故从

$\tilde{\boldsymbol{B}}=(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{b}})$ 可同时求出$R(A)$与$R(B)$.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2,\ R(B)=3.$$

推论1　两个同型矩阵A与B等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$.

推论2　设A为$m\times n$矩阵,P和Q分别为m阶与n阶可逆矩阵,则

$$\boldsymbol{R(A)=R(PA)=R(AQ)=R(PAQ).}$$

说明：利用定理2. 5. 2，任意非零矩阵A都可以经过有限次初等变换化为标准形

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

它的标准形是唯一的, 并且 $R(A)=r$.

例2.6.3　求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$的秩.

解　a的取值不同,秩可能不同.

$|A|\neq 0$时, $R(A)=4$; $|A|=0$时, $R(A)<4$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{vmatrix}=(3a+1)(1-a)^3.$$

因此 $a \neq -\dfrac{1}{3}$ 且 $a \neq 1$ 时，$R(A) = 4.$

$a = -\dfrac{1}{3}$或$a = 1$时，$|A| = 0.$

当$a = 1$时，显然$R(A) = 1;$

当 $a = -\dfrac{1}{3}$ $R(A)=3.$ (初等变换)

练习 设 A 为 4×3 矩阵, 且 $R(A)=2$, 而

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$ 求$R(AB)$.

解 因

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=12\neq 0,$$ 故B可逆.

于是 $R(AB)=R(A)=2.$

练习 若矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的秩为2, 则 $a =$ __B____.

(A) 0　(B) 0或 -1　(C) -1　(D) -1或1

例2.6.4　设 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$,其中$A$为$m\times n$矩阵, B为 $p\times q$ 矩阵, 且 $R(A) = r, R(B) =s$, 求$R(G)$.

解　若A,B均为标准形, 显然

$$R(G)= R(A) +R(B) = r+s.$$

在一般情形下, 存在m阶可逆矩阵P_1, n阶可逆矩阵Q_1, p阶可逆矩阵P_2,q阶可逆矩阵Q_2,使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

对分块矩阵G作初等变换

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & E_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & E_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P_1AQ_1 & O \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & E_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

由定理2.6.2, $R(G) = r+s$.

例2.6.5 设A,B均为 $m\times n$ 矩阵, 证明 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

证 构造分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

并对其作初等变换

$$\begin{pmatrix} E_m & E_m \\ O & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix},$$

由例2.6.3及

$$R(A)+R(B)=R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}.$$

注意到

$$R(A+B)\le R\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix},$$

所以

$$R(A+B)\le R(A)+R(B).$$

矩阵的秩的性质总结:

(1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$.

(2) $R(A^T) = R(A)$.

(3) 若 $A \cong B$, 则 $R(A) = R(B)$.

(4) 若 P, Q 可逆, 则 $R(PAQ) = R(A)$.

(5) $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$.

特别地, 当 $B = b$ 为列向量时,

$$R(A) \le R(A, b) \le R(A) + 1.$$

(6) $R(A+B) \le R(A) + R(B)$.

(7) $R(A, B) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

(8) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \le n$.

作业：P74　习题2.6　第2题.