北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§3.2 向量组的线性相关性

3.2.1 向量组的线性相关与线性无关

3.2.2 向量组线性相关性的判别法

3.2.3 向量组的线性相关性的一些性质

3. 2. 1 向量组的线性相关与线性无关

定义3. 2. 1 设α_1, α_2, …, α_m, β都是数域P上的n维向量, 如果存在数域P上的数k_1, k_2, …, k_m,使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称β是向量α_1, α_2, …, α_m的线性组合(linear combination),或称β可由向量组α_1, α_2, …, α_m线性表出.(linear expression)

例如

向量$\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_2=(1, -1, 1)$, $\beta = (2, 0, 1)$,

有 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2,$

因此向量β是向量α_1, α_2的线性组合,或

β可由向量α_1, α_2线性表出.

设 n 维向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)$$

$$\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$$

则任何一个n维向量$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 都可由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$线性表出:

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

称$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$为基本单位向量(The basic unit vector).

定义3. 2. 2 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是数域$P$上的$m$个$n$维向量, 如果存在数域$P$上的$m$个不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$, 使得

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0}$$

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是线性相关的. (linear dependence) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 不是线性相关的, 就称为线性无关的. (Linear independent)

等价定义：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是m个n维向量，如果

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0}$$

则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是线性无关的充分必要条件是

$$\boldsymbol{k_1=k_2=\cdots=k_m=0.}$$

例如 对向量组$\alpha_1=(1, 1, 0), \alpha_2=(2, 1, 1), \alpha_3=(1, 0, 1)$有

$$1\cdot\alpha_1-1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0.$$

由定义3.2.2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关.

例3.2.1 试证：n 维基本单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性无关.

证 令

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$$

即

$$k_1(1,0,\cdots,0)+k_2(0,1,0,\cdots,0)+\cdots+k_n(0,0,\cdots,1)=(0,0,\cdots,0),$$

于是 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0)$,

因此 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

由定义3.2.2, 向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性无关.

线性相关的判别法

特殊情形:

当$m=1$时, 也即只有一个向量的向量组: α_1, 显然 α_1 线性相关的充分必要条件是$\alpha_1=0$. 如果当$\alpha_1 \neq 0$时, α_1 线性无关.

当$m=2$时, 即含有两个向量的向量组: α_1, α_2, 它们线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1=k\alpha_2$ 或 $\alpha_2 = h\alpha_1$, 或者说, α_1, α_2的对应坐标成比例. 否则α_1, α_2线性无关.

一般情形:

当$m \geq 3$时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的线性相关性的判别通常转化为齐次线性方程组是否有非零解来考虑.

例3. 2. 2 讨论向量组: $\alpha_1=(2, 1, 1)$, $\alpha_2=(1, 2, -1)$, $\alpha_3=(-2, 3, 0)$的线性相关性.

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 即

$$k_1(2,1,1)+k_2(1,2,-1)+k_3(-2,3,0)=(0,0,0)$$

从而

$$\begin{cases} 2k_1+k_2-2k_3=0, \\ k_1+2k_2+3k_3=0, \\ k_1-k_2 \qquad\quad =0. \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=15\neq 0$$

所以该方程组只有唯一零解: $k_1=k_2=k_3=0$, 因此向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

例3.2.3 讨论向量组: $\alpha_1=(0, 2, 1, 3)$, $\alpha_2=(3,1, 0, 1)$, $\alpha_3=(1, 1, 1, 2)$, $\alpha_4=(2,-4,-3,-7)$的线性相关性。

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

则k_1, k_2, k_3, k_4满足下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3k_2+k_3+2k_4=0, \\ 2k_1+k_2+k_3-4k_4=0, \\ k_1+k_3-3k_4=0, \\ 3k_1+k_2+2k_3-7k_4=0. \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -5 & 2 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

所以该方程组有非零解, 因此存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$$

成立, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 .

例3.2.4 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，证明：

(1) 向量组$\alpha_1-\alpha_3, 2\alpha_1-\alpha_2, 2\alpha_3-\alpha_2$线性相关；

(2) 向量组$\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$线性无关.

证 (1)设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_3})+k_2(\boldsymbol{2\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2})+k_3(\boldsymbol{2\alpha_3}-\boldsymbol{\alpha_2})=0$$

即

$$(k_1+2k_3)\boldsymbol{\alpha_1}+(-k_1-k_3)\boldsymbol{\alpha_2}+(-k_1+2k_3)\boldsymbol{\alpha_3}=\mathbf{0}$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0, \\ -k_2 - k_3 = 0, \\ -k_1 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

所以该方程组有非零解, 即存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3, 使

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3) + k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + k_3(2\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$$

故向量组$\alpha_1 - \alpha_3$, $2\alpha_1 - \alpha_2$, $2\alpha_3 - \alpha_2$线性相关.

(2) 同理,设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0$$

即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

于是

$$\begin{cases} k_1 \qquad\qquad + k_3 = 0, \\ -k_1 + k_2 \qquad\quad = 0, \\ \qquad\quad -k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以该方程组只有唯一零解, 即只有当 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

$$k_1(\boldsymbol{\alpha_1} - \boldsymbol{\alpha_2}) + k_2(\boldsymbol{\alpha_2} - \boldsymbol{\alpha_3}) + k_3(\boldsymbol{\alpha_3} + \boldsymbol{\alpha_1}) = 0$$

成立, 故向量组 $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

定理3.2.1 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m\geq 2)$线性相关的充分必要条件是: 其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出.

证 必要性

由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关, 则存在不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

不妨设 $k_s \neq 0 (0 \leq s \leq m)$, 于是

$$\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1} - \frac{k_{s+1}}{k_s}\alpha_{s+1} - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m,$$

即α_s可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m$线性表示出.

充分性

不妨设α_1, 可由$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$线性表出, 即有数 $k_2, \ldots, k_m$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即存在一组不全为零的数$1, -k_2, \ldots, -k_m$,使下式成立

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - k_2\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关, 证毕.

推论 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m\geq 2)$线性无关的充分必要条件是: 其中每一个向量都不能由其余向量线性表出.

定理3.2.2 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$无关, 而$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出,而且表法唯一.

证 由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$线性相关, 即存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m, k$使得

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\beta = 0.}$$

若$k = 0$, 则有不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$, 使得

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0}$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关, 与已知矛盾, 所以$k\neq 0$, 于是

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\alpha_m.$$

下证表法的唯一性.

若有两种表法: $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$$

两式相减, 得

$$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关, 故必有

$$k_i-l_i=0\ (i=1,2,\cdots,m)$$

即 $k_i=l_i\ (i=1,2,\cdots,m)$. 所以表法唯一. 证毕.

3. 2. 2 向量组线性相关性的判别法

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_{i1} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), i = 1,2, \ldots, m,$$

以它们为行(或列)可确定一个矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix};$$

反之, 若把矩阵A的每一行(或列)看作一个向量, 则可确定一个向量组.

设向量组

$$\beta_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \beta_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

则矩阵 A 可写为

$$A=\left(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定理3.2.3　向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关的充要条件是 $R(A) < m$.

证　必要性.设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关, 欲证 $R(A) < m$.

若 $n < m$, 则显然有 $R(A) < m$.

若$n \geq m$, 由已知条件, 则显然有m个行向量中至少有一个是其余 $m-1$个行向量的线性组合.

不妨设α_m是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$的组合, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_m = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$$

对矩阵A进行初等行变换，则

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\\ \alpha_m-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1})\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_m+\sum_{i=1}^{m-1}(-k_i)r_i}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{m-1}\\ 0\end{pmatrix}=B.$$

于是有 $R(A)=R(B)\le m-1$，即$R(A)<m$.

充分性. 设$R(A) < r = m$, 由定理2.5.4推论2, 存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

即

$$PA = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}$$

令

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

则由矩阵的分块乘法可得

$$\begin{pmatrix} p_{11}\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + \cdots + p_{1m}\alpha_m \\ \vdots \\ p_{r1}\alpha_1 + p_{r2}\alpha_2 + \cdots + p_{rm}\alpha_m \\ p_{r+1,1}\alpha_1 + p_{r+1,2}\alpha_2 + \cdots + p_{r+1,m}\alpha_m \\ \vdots \\ p_{m1}\alpha_1 + p_{m2}\alpha_2 + \cdots + p_{mm}\alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_r \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix}$$

比较上式两端,得

$$p_{m1}\alpha_1 + p_{m2}\alpha_2 + \cdots + p_{mm}\alpha_m = O$$

由于P为可逆阵,所以它的最后一行元素$p_{m1}, p_{m2}, \ldots, p_{mm}$不全为零, 从而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关. 证毕.

注: 根据定理2.3.3, 列向量组 $A=(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)$ 线性相关的充要条件是 $R(A)<n$.

推论1 $m\times n$矩阵A个m行向量线性无关的充要条件是$R(A)=m$; $m\times n$矩阵A个的n个列向量线性无关的充要条件是$R(A)=n$.

推论2 如果一个向量组中向量的个数 m 大于向量的维数n, 则该向量组线性相关; 特别地, 任意$n+1$个n维向量必定是线性相关的.

推论3 设$\boldsymbol{\alpha}_i=(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}), i=1, 2, \ldots, n$,则

(1) n个n维向量线性无关的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2\boldsymbol{n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}1} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{nn}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(2) n个n维向量线性相关的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2\boldsymbol{n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}1} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{nn}} \end{vmatrix} = 0.$$

例3.2.5 判断向量组

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\6\end{pmatrix},$$

的线性相关性.

解法一:

利用定理3.2.3，对矩阵进行初等变换求秩.

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\-2&1&3&2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 12\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 12\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & -118 & -118\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此 $R(A) = 3 < 4$, 所以向量组线性相关.

解法二:

利用推论3, 计算行列式得 $|A| = 0$, 因此向量组线性相关.

3.2.3 向量组线性相关性的一些性质

性质1 含有零向量的向量组必线性相关.

性质2 向量组若有一个部分组线性相关,则整个向量组也线性相关.

性质3 若向量组线性无关,则它的任意一个部分组也线性无关.

---- 为性质2的逆否命题

性质4 若向量组

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\qquad i=1,2,\cdots,m$$

线性相关, 则去掉最后r个分量($1\le r<n$)后,

所得到的向量组:

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in-r})\quad i=1,2,\cdots,m$$

也线性相关.

性质5　若向量组

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,\quad 2,\cdots,\quad m$$

线性无关,则在每个向量上任意增加r个分量后所得到的向量组

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},a_{in+1},\cdots,a_{in+r}),i=1,\quad 2,\cdots,\quad m$$

也线性无关.

作业　P87　习题3.2

第1(1), 2, 3(1)(4), 5题.