北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§1.3 行列式的展开与计算

本节中介绍如何把高阶行列式转化为低阶行列式的计算方法.

1.3.1 行列式按一行(或一列)展开

1.3.2 拉普拉斯(Laplace)定理

1.3.1 行列式按一行(或一列)展开

定义1.3.1 在n阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$中，划掉元素 a_{ij}所在的第 i行和第 j列后,留下的元素按照原来的顺序组成的 $n-1$阶行列式称为元素 a_{ij}的余子式(Cofactor), 记为 M_{ij}.称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij}的代数余子式(Algebraic cofactor).

例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

定理1.3.1 n阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}\ (j = 1, 2, \dots, n).$$

——— **行列式按行(列)展开法则**

特例　一个 n 阶行列式, 如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零, 那末这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $\boldsymbol{D = a_{ij}A_{ij}}$.

例如

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{a_{24}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} & \boldsymbol{a_{44}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(-1)^{3+3} a_{33}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{24}} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{44}} \end{vmatrix}.$$

说明: 行列式可以按它的任一行展开,也可以按它的任一列展开.

例1.3.1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

符合特例

$$= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

符合特例

$$\xlongequal{r_2 + r_1}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例1.3.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解 $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{2+1}2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(-1)^{1+4}5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1080.$$

练习：P13 习题1.2 第1(1)题.

例1.3.3　计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解　按第1列展开

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & & x+a_1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= xD_{n-1} + a_n$$ ------ 递推公式

由于对于$n\geq 2$, $D_n = xD_{n-1}+a_n$ 都成立,从而

$$D_n = xD_{n-1} + a_n$$

$$= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n$$

$$= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \quad = \cdots$$

$$= x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

因为$D_1=a_1+x$, 于是

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

例1.3.4　证明n阶范得蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

证 数学归纳法(Mathematical induction).

当n =2 时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \le j < i \le 2} (a_i - a_j),$$

所以当 $n = 2$ 时结论成立.

假设对 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立, 考虑 n 阶范德蒙行列式. 从第 n行起, 每行减去前一行的 a_1倍, 得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开后, 将每一列的公因子$(a_i - a_1)$提出来, 得到

$$\boldsymbol{V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}}$$

上式右端是一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式,

由归纳假设得到

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

因此, 对 n阶范德蒙行列式结论成立.

练习: $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=$________.

定理1.3.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中某一行（列）的各个元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于0. 即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0(i\neq k),$$

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0(j\neq k).$$

把定理1.3.1与定理1.3.2结合起来, 得

$$\sum_{t=1}^{n} a_{kt}A_{it} = \begin{cases} D, 当\ i = k, \\ 0, 当\ i \neq k; \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{tk}A_{tj} = \begin{cases} D, 当\ j = k, \\ 0, 当\ j \neq k. \end{cases}$$

例1.3.5 设

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的 (i, j) 元的余子式和代数余子式分别记作 M_{ij} 和 A_{ij}, 求 $\boldsymbol{A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}}$ 及 $\boldsymbol{M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}}$.

解:

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} = 1\cdot A_{11}+ 1\cdot A_{12}+ 1\cdot A_{13}+ 1\cdot A_{14}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 4$$

$$\boldsymbol{M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14} = 1\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{12}+1\cdot A_{13}+(-1)\cdot A_{14}}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 18$$

1.3.2 拉普拉斯(Laplace)定理

拉普拉斯(Laplace)定理是行列式按一行（或一列）展开的更加一般的情形，即行列式按若干行（或若干列）展开的计算方法.

定义1.3.2 在n阶行列式D中, 任取k行、k列($1\le k \le n-1$)，由这些行和列交叉处的元素按照原来的相对位置所构成的k阶行列式N，称为D的一个**k阶子式**. 在行列式D中去掉k阶子式N所在的行和列以后，剩下的元素按原来的顺序构成的$n-k$阶行列式M, 称为N的**余子式**. 若N所在的行序数为$i_1,i_2,\ldots,i_k$, 所在的列序数为 $j_1,j_2,\ldots,j_k$, 则称

$$A = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M$$

为N的**代数余子式**.

例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ 的二阶子式

$$N = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$ 的余子式为 $$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix},$$

代数余子式为 $A=(-1)^{2+4+2+3}M$

$$= -M.$$

定理1.3.3 (拉普拉斯(Laplace)定理) 在 n 阶行列式 D 中任意选取k行（列）($1\le k\le n-1$)，则由这 k个 行（列）中的一切 k 阶子式 $N_1,N_2,\ldots,N_t$ 与它们所对应的代数余子式 $A_1,A_2,\ldots,A_t$乘积之和等于D，即

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{N}_t\boldsymbol{A}_t=\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{A}_i,$$

其中 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{C}_n^k.$

例1.3.6　计算五阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

解 利用定理1.3.3，把行列式按前二行展开，这两行共有 $C_5^2=10$ 个二阶子式，其中不为0的只有3个，即

$$N_1=\begin{vmatrix}5 & 6\\1 & 5\end{vmatrix}=19,\quad N_2=\begin{vmatrix}5 & 0\\1 & 6\end{vmatrix}=30,$$

$$N_3=\begin{vmatrix}6 & 0\\5 & 6\end{vmatrix}=36$$

它们对应的代数余子式分别为

$$A_1 = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 65$$

$$A_2 = (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -19,$$

$$A_3 = (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

于是

$$D = N_1A_1 + N_2A_2 + N_3A$$

$$= 19\times 65 - 30\times 19 = 665.$$

例1.3.7 计算 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

作　业

P22 习题1.3　第1(1)(5)，2(1)，3题.