

# 北京航空航天大学 国际学院

## 线性代数

## § 3. 2 向量组的秩

3. 2. 1 向量组的秩与极大线性无关组

3. 3. 2 向量组的等价

### 3.2.1 向量组的秩与极大线性无关组

定义3.3.1 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的部分组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  满足条件

(1)  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关;

(2)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的任一向量均可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表出,

则称  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的一个极大线性无关组.(Maximal linearly independent group)

**说明** 据定义, 一个非零向量组必有极大线性无关组, 一个线性无关的向量组的极大线性无关组就是向量组本身.

**例 3.3.1** 求向量组  $\alpha_1=(1, -1, 0)$ ,  $\alpha_2=(0, 1, 2)$ ,  $\alpha_3=(2, -3, -2)$  的极大线性无关组.

**解** 由于  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2$  是该向量组的一个极大线性无关组. 显然  $\alpha_1, \alpha_3$  与  $\alpha_2, \alpha_3$  也是这个向量组的极大线性无关组.

**问题:** 同一个向量组的不同极大线性无关组所含向量的个数**是否相同**?

**定理 3.3.1** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中的每一个向量均可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性表出, 并且  $m > r$ , 那么向量组线性相关.

**证** 设

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\beta_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn}) \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

由条件

$$\alpha_i = k_{i1}\beta_1 + k_{i2}\beta_2 + \cdots + k_{ir}\beta_r, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

以这两个向量组的向量为行向量作  $(m+r) \times n$  矩阵  $C$ , 然后对矩阵  $C$  作初等行变换, 得到

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = C_1$$

于是  $R(C) = R(C_1)$ .

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ , 则

$$R(A) \leq R(C) = R(C_1) \leq r < m,$$

由定理3.2.3, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

**推论** 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每一个向量均可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出, 并且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 那么 $m \leq r$ .

**定理 3.3.2** 一个向量组中任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等.

**证** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的两个极大线性无关组分别为

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s} \quad \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$$

要证  $s=r$ .

由于  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  为极大线性无关组, 所以  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$  可由其线性表出, 又  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$  线性无关, 由定理 3.3.2 的推论,  $r \leq s$ ; 同理可证,  $s \leq r$ , 于是,  $s = r$ .



**定义 3.3.2** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的极大线性无关组中所含向量的个数称为这个向量组的**秩(rank)**, 记为  $R\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ .

**规定:** 全由零向量组成的向量组的秩为**零**.

**说明:** 由向量组秩的定义, 线性无关的向量组的秩等于向量组中所含向量的个数; 若向量组的秩小于向量组中所含向量的个数, 则向量组必然线性相关.

**例3.3.2** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的秩为  $r$ , 试证  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中任意  $r$  个线性无关的向量均为该向量组的一个极大线性无关组.

**证** 设  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是该向量组中任意  $r$  个线性无关的向量, 只需证明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中任意一向量, 可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表出即可.

事实上, 若存在该向量组中某一个向量  $\alpha_{i_0}$  ( $1 \leq i_0 \leq m$ ) 使  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_{i_0}$  线性无关, 那么  $R\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \geq r+1$  此与题设矛盾. 因此, 对于任意  $\alpha_i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) 向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$  线性相关. 由定理3.2.2,  $\alpha_i$  可由  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表出, 即  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的一个极大线性无关组.

### 3.3.2 向量组的等价

定义 3.3.3 设向量组

$$(I): \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r ;$$

$$(II): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s ,$$

若向量组(I)中的每一个向量可由向量组(II)线性表出, 同时向量组(II)中的每一个向量可由向量组 (I) 线性表出, 亦即它们可以互相线性表出, 则称向量组(I)与向量组(II) **等价**.

## 等价向量组的等价性质：

- (1) **自反性** 任何一个向量组都与它自身等价；
- (2) **对称性** 若向量组 (I) 与向量组(II) 等价，  
则向量组( II)也与向量组(I)等价；
- (3) **传递性** 若向量组(I)与向量组(II)等价，向  
量组(II)也与向量组(III)等价，则向量组(I)也与  
向量组(III)等价.

## 等价向量组的性质：

性质1 向量组都与它的任一极大线性无关组等价；

性质2 任何两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相同；

性质3 任何两个等价的向量组的秩相等.

**定理 3.3.3** 若向量组(I) :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

可由向量组 (II):  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

线性表出, 且向量组 (I) 的秩为  $p$ , 向量组 (II) 的秩为  $q$ , 则  $p \leq q$ .

**证** 设向量组 (I) 和 (II) 的极大线性无关组分别为

$$(I)': \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p} \quad (II)': \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_q}$$

因为向量组(I)'可由(I)线性表出, 而已知向量组 (II)可由(II)'线性表出, 向量组(I)可由(II)线性表出, 所以向量组(I) 可由(II)'线性表出.

由定理3.3.1的推论,  $p \leq q$ , 证毕.

**例 3.3.3** 证明 $n$ 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $n$ 维基本单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

**证 必要性.** 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

对任一 $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \varepsilon_i$ 为 $n+1$ 个 $n$ 维向量组成的向量组, 必然线性相关,

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 由**定理3.2.2**,

$\varepsilon_i$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 由 $\varepsilon_i$ 的任意性,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

## 充分性

已知向量组  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出,  
由定理3.3.3,

$$R\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} \leq R\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\},$$

而  $R\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} = n$ ,  $R\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \leq n$ .

于是  $R\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = n$ .

故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.



**定理 3.3.4** 矩阵A的秩等于它的行向量组的秩, 也等于它的列向量组的秩.

**证** 先证明矩阵A的秩等于它的行向量组的秩.

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

且  $R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = r$

若  $r = m$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 由定理3.2.3的推论1,  $R(A) = m$ .

若  $r < m$ , 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的任一极大线性无关组中只含有  $r$  个向量, 不妨设为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ . 那么矩阵  $A$  的前  $r$  行中必有一个  $r$  阶子式不等于零. 由于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中任意  $r+1$  个向量线性相关, 则矩阵  $A$  中所有的  $r+1$  阶子式都等于零.  $R(A) = r$ .

注意到  $R(A) = R(A^T) =$  矩阵  $A^T$  的行秩  $= A$  的列秩, 即知矩阵  $A$  的秩等于它的列向量组的秩. 证毕.

注

1. 向量组的极大线性无关组所含向量的个数就是该向量组构成的矩阵的秩.
2. 秩为 $r$ 的向量组, 任意 $r$ 个线性无关的向量都是其极大线性无关组.

例 3.3.4 求向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 2, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, -1, 2)^T, \\ \alpha_3 = (1, 0, -4, 4)^T, \alpha_4 = (0, 2, -3, -3)^T$$

的秩及它的一个极大线性无关组.

解 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列组成矩阵 $A$ 对其进行初等行变换, 则

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

所以 $R\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = R(A) = R(B) = 3$ . 由 $B$ 容易看出,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为向量组的一个极大线性无关组.

**例 3.3.5** 设向量组  $\alpha_1=(0, 0, -1, 1)$ ,  $\alpha_2=(1, 1, -1, 0)$ ,  $\alpha_3=(2, 2, -1, -1)$ ,  $\alpha_4=(-1, -1, 0, 0)$ , 求它的一个极大线性无关组及该向量组的秩.

解:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $R(A) = 3$ ，即极大无关组含有3个向量.

极大线性无关组为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  .

例 3.3.6 设 $A$ 是 $m \times k$ 矩阵,  $B$ 是 $k \times s$ 矩阵, 则

$$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$

证 设 $A$ 的列向量组为 $A_1, A_2, \dots, A_k$ , 矩阵 $B=(b_{ij})_{k \times s}$ , 矩阵 $C=AB$ 的列向量组为 $C_1, C_2, \dots, C_s$ , 则

$$C_j = b_{1j}A_1 + b_{2j}A_2 + \cdots + b_{kj}A_k \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

即 $C$ 的列向量组可由 $A$ 的列向量组线性表出, 由定理3.3.3及3.3.4知,

$$R(C) \leq R(A)$$

又

$$\begin{aligned} R(C) &= R(AB) = R((AB)^T) \\ &= R(B^T A^T) \leq R(B^T) = R(B) \end{aligned}$$

故  $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$

作业 P92 习题3.3 第2, 3题.