北京航空航天大学
国际学院

线性代数

第三章 向量组的线性相关性

本章介绍 n 维向量及向量组，重要内容是向量组的线性相关与线性无关，它对第四章的学习有很大的帮助.

§3.1　向量的概念与运算

3.1.1 向量的概念

3.1.2 向量的运算

3.1.1 向量的概念

在解析几何中, 取定直角坐标系后, 平面上一个向量就与有序数组$(x,\ y)$一一对应; 空间上的一个向量就与有序数组(x, y, z)一一对应.

若要描述某一质点在空中的运行速度, 则至少要用到四个量, 即该质点在空中的位置及速度.

在下列线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

中, 每一个方程与$n+1$个数组成的有序数组

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, b_i) \qquad i=1, 2, \ldots, m$$

成对应关系.

定义3. 1. 1 由数域P上的n个数组成的有序数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，称为P上的一个n维行向量(n dimensional vector), 记为α, 即

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

其中 a_i 称为向量 α 的第 i 个分量(坐标coordinate).

说明: (1) 经常用小写希腊字母α, β, γ等来表示向量.

(2) $$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ 称为 n 维列向量.

例3.1.1　一个 $m\times n$ 矩阵

n列

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的每一行　$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\,(i=1,2,\cdots,m)$

可以看作一个n维行向量, 即

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),(i=1,2,\cdots,m).$$

矩阵A可看作由m个n维行向量组成的行向量组(Vector group).

同理, $m\times n$矩阵也可看作由n个m维列向量

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1j} \\ \boxed{\begin{matrix}\boldsymbol{a}_{2j} \\ \vdots\end{matrix}} \\ \boldsymbol{a}_{mj} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{j}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{n})$$

m行

组成的列向量组.

则A可写为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},$$

或

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

3.1.2 向量的运算

定义3.1.2 设

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

为数域 P 上的两个n维行向量，若 $a_i=b_i$, (i=1, 2, ..., n)，则称向量α与β相等，记作$\alpha=\beta$.

分量全为零的向量称为零向量，记作0.

向量$(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$称为向量$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$的负向量，记为$-\alpha$.

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

向量 $(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

称为向量α与β的和，记为 $\alpha+\beta$

即 $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.

又设k为一个数，则向量 $(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

称为向量α与数k的数乘积，简称数乘. 记为$k\alpha$,

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

向量α与β的差可以看作α与$(-\beta)$的和，记为$\alpha-\beta$，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n).$$

向量的加法、减法与数乘统称为向量的线性运算.(Linear operation)

说明: 利用向量的加法、数乘和相等，线性方程组可写成向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

其中 $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $j = 1, 2, \cdots, n$ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(2) 向量的线性运算满足以下基本运算规律:

设α、β、γ为数域P上的数，则有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{k\alpha}+\boldsymbol{k\beta}$$

$$(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$$

$$(kl)\alpha = k(l\alpha) = l(k\alpha)$$

$$1 \cdot \alpha = \alpha$$

根据定义还可以看出

$$0 \cdot \alpha = 0 \quad (-1) \cdot \alpha = -\alpha \quad k \cdot 0 = 0$$

若$k \neq 0,\ \alpha \neq 0$, 则 $k\alpha \neq 0.$

例3. 1. 2　设向量$\alpha_1 = (1, -2, 0, 4)$，$\alpha_2 = (-2, 5, 1, 3)$, $\alpha_3 = (5, 7, 9, -3)$, 求向量β, 使其满足条件

$$3\beta - \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

解

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & -3\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1, & -2, & 0, & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & -10 & -2 & -6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & -3\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}10, & -5, & 7, & -5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{10}{3}, & -\frac{5}{3}, & \frac{7}{3}, & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$