北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§2.2 矩阵的运算

2.2.1 矩阵的加法与数乘

2.2.2 矩阵的乘法运算

2.2.3 矩阵的转置

2. 2. 1 矩阵的加法与数乘

定义2.2.1 两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{s\times t}$, 如果$m = s$, $n = t$,称A与B是同型矩阵;若数域 $\boldsymbol{P}$ 上的同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与$B=(b_{ij})_{m\times n}$的对应元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$, 称$A$与$B$相等, 记作 $A=B$.

定义2.2.2 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，规定

$$
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}
$$

说明 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

定义2.2.3 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$为矩阵, k 是一个数, k 与矩阵A的每个元素相乘后得到的矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$称为数 k 与矩阵 A 的数量乘积, 简称为**数乘**(Multiply),记作

$$kA = Ak = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

由矩阵的数乘, 得

$$-A = (-1)A = (-a_{ij})_{m\times n}$$

矩阵 $-A$ 称为 A 的**负矩阵**, 规定

$$A - B = A + (-B).$$

例如

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

设A, B, C 均为$m\times n$矩阵， k, l为数, 不难验证, 矩阵的加法和数乘满足如下运算规律：

加法运算规则

- ✓交换律： $A+B = B+A$
- ✓结合律： $(A+B)+C = A+(B+C)$
- ✓$O + A = A + O = A$
- ✓$A+ (-A) = O$

数乘的运算规则:

$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$； $(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

$(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A}) = l(k\boldsymbol{A})$； $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例2.2.1　设$2A+3X=B$, 且

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 5 & 6 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}7 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

求矩阵X.

解　在矩阵方程两端同加上$-2A$, 得

$$3X=B-2A$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 5 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 10 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

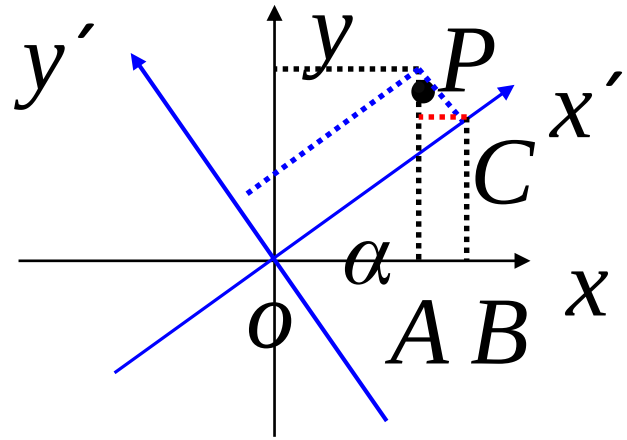
$$=\begin{pmatrix} 9 & -4 & -3 \\ -6 & -12 & -2 \end{pmatrix},$$

在这个方程两端同乘以 $\frac{1}{3}$ ，得

$$X=\begin{pmatrix} 3 & -\frac{4}{3} & -1 \\ -2 & -4 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2.2.2 矩阵的乘法运算

平面解析几何中将xoy旋转α角后的坐标系$x'oy'$坐标旋转公式的推导



$x = OA = OB - AB$

$= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$

同理有 $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$

得坐标旋转后的变换公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

再将$x'oy'$旋转β角得坐标系 $x''oy''$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x''\cos\beta - y''\sin\beta \\ y' = x''\sin\beta + y''\cos\beta \end{cases}$$ 对应矩阵 $$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

代入后得xoy与$x''oy''$之间的坐标变换公式

$$\begin{cases} x = x''(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ \qquad - y''(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ y = x''(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \qquad + y''(-\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) \end{cases}$$

此变换对应的系数矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

观察结果：矩阵C的第一行第一列元素

$$c_{11}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

是矩阵A的第一行元素与矩阵B的第一列元素依次相乘相加的结果，即 $c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}.$

同样可以看出 $c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21},$

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22},$ $c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}.$

矩阵C 称为矩阵 A与B的乘积.

即

$$C=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

定义2.2.4　设$A=(a_{ij})_{m\times k}$, $B=(b_{ij})_{k\times n}$, $C=(C_{ij})_{m\times n}$均为矩阵, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$$

$$=\sum_{t=1}^{k}a_{it}b_{tj}\quad(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

称矩阵C是A与B的乘积, 记作$C=AB$.

- 特别提示　只有当矩阵A的列数等于矩阵B的行数时, 乘积AB才有意义.

例 2.2.2 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}_{2\times3},B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-1&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}_{3\times3}$$

求AB.

解

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 2\quad 3}\\-1\quad 2\quad -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-1&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boxed{2}&-6&10\\-4&-2&8\end{pmatrix}$$

例2.2.3　设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \end{pmatrix}$$

求AB, BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{BA} = (\boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{b}_2, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{b}_n\boldsymbol{a}_n
$$

$$
= \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{b}_t\boldsymbol{a}_t .
$$

例2.2.4　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

计算 AB, BA, CA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix};$$

$$CA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

说明

1. 在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序.

2. 矩阵的乘法不满足交换律. 对同阶方阵 A, B, 若 $AB = BA$, 则称 A 与 B 是可交换的.

3. 若矩阵 A, B 满足 $AB = O$, 不能得到 $A = O$ 或 $B = O$; 由 $AB = AC$ 不能得到 $B = C$.

例2.2.5　已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$，求满足条件 $AX=XA$ 的矩阵X.

解　　由题设, 知 X 为二阶方阵. 设

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},$$

则由$AX=XA$得

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11} \\ x_{21} & x_{21} \end{pmatrix}.$$

由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=x_{11} \\ x_{12}+x_{22}=x_{11}, \\ x_{21}=0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_{21}=0 \\ x_{11}=x_{12}+x_{22} \end{cases}.$$

于是所有与A相乘可换的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

其中a, b为任意常数.

例 2.2.6　利用矩阵乘法与矩阵相等的概念，可以把线性方程组写成矩阵乘积的形式．设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

于是有

$$AX = b$$

对于$m \times n$矩阵A, 显然有以下结论：

$$E_{m\times m}A = AE_{n\times n} = A;\ O_{m\times m}A = AO_{n\times n} = O_{m\times n}.$$

矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$;

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;

证(1)：设

$$A = (a_{ij})_{m\times k}, \quad B = (b_{ij})_{k\times s}, \quad C = (c_{ij})_{s\times n}.$$

容易看出, $(AB)C$与$A(BC)$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 因此只需证明(1)式两端的对应元素相等即可.

由矩阵乘法的定义，矩阵$(AB)C$中第i行第j列的元素为

$$\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{t=1}^{k}a_{it}b_{tl}\right)c_{lj}=\sum_{l=1}^{s}\sum_{t=1}^{k}(a_{it}b_{tl}c_{lj})$$

$$=\sum_{t=1}^{k}a_{it}\left(\sum_{l=1}^{s}b_{tl}c_{lj}\right)$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ \ j=\mathrm{i},2,\cdots,\ \ \mathrm{n}).$$

上式右端正好是矩阵$A(BC)$中第i行第j列的元素，根据矩阵相等的定义，有

$$(AB)C=A(BC).$$

定义2.2.5 设A是n阶矩阵, k为正整数, 定义k个A的连乘积为 A的k次**幂**(Power),记作A^k, 即

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k}.$$

说明: (1) 规定 $A^0=E$.

(2) 说明乘法的结合律, 有

$$A^m A^l = A^{m+l}, (A^m)^l = A^{ml}.$$

(m, l均为正整数).

(3) 矩阵乘法不满足交换律, 一般对于n阶方阵A与B,

$$(\boldsymbol{AB})^m \neq \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m.$$

例2.2.7 设矩阵 $A=PQ$

其中 $P=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, 求$A^{10}$.

解 由于

$$\boldsymbol{A}^{10}=\underbrace{(\boldsymbol{PQ})(\boldsymbol{PQ})\cdots(\boldsymbol{PQ})}_{10}=\boldsymbol{P}\underbrace{(\boldsymbol{QP})(\boldsymbol{QP})\cdots(\boldsymbol{QP})}_{9}\boldsymbol{Q},$$

$$A = PQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3,$$

所以

$$A^{10} = P \cdot 3^9 \cdot Q = 3^9 PQ = \begin{pmatrix} 3^9 & -2 \cdot 3^9 & 2 \cdot 3^9 \\ 2 \cdot 3^9 & -4 \cdot 3^9 & 4 \cdot 3^9 \\ 3^{10} & -2 \cdot 3^{10} & 2 \cdot 3^{10} \end{pmatrix}.$$

注：对于方阵A, 可以定义**矩阵多项式**. 设

$$f(x)=a_m x^m + a_{m-1} x_{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是 x 的 m 次多项式, A是一个n阶方阵, E为n阶单位阵, 称

$$f(A)=a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

为方阵A的多项式. 显然, $f(A)$仍是一个n阶方阵.

例2.2.8 设 $f(x)=2x^2-5x+3$, $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. 计算$f(A)$.

解 $f(A)=2A^2-5A+3E$

$$=2\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}7 & -4\\ 8 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15 & 5\\ -10 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & -4\end{pmatrix}.$$

定理2.1.1 设A、B均为n阶方阵, k为常数, 则

(1) $|kA|=k^n|A|$;

(2) $|AB|=|A||B|$.

注意 当A, B不是同阶方阵时, 显然

$$|AB| \neq |A| \cdot |B|.$$

推论 设$A_1, A_2, \ldots, A_m$是m个n阶方阵, 则

$$|A_1 A_2 \ldots A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|.$$

2.2.3 矩阵的转置

定义2.2.6 设$m\times n$矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

将矩阵A的行列互换, 而不改变其先后次序得到的$n\times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的转置矩阵(Transpose matrix), 记为A^T(或A').

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

矩阵的转置运算规律:

(1) $(A^T)^T=A$;

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(3) $(kA)^T=kA^T$（k为任意常数）;

(4) $|A^T|=|A|$（A为方阵）；

(5) $(AB)^T=B^TA^T$.

- 对称阵A(Symmetric matrix)： $A=A^T$亦记作 $A=A'$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}=a_{ji}, \forall i \neq j, i,j=1,2,\cdots,n$$

- 反对称阵A (Antisymmetric matrix): $A=-A^T$ 亦记作 $A=-A'$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{ij}=-a_{ji}, \forall i \neq j, i,j=1,2,\cdots,n$$

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 为对称矩阵,

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称矩阵.

另外，对称矩阵的和、数量乘积仍为对称矩阵，反对称矩阵的和、数量乘积仍为反对称矩阵.

例2.2.9 设A为n阶反对称矩阵, B为n阶对称矩阵, 试证$AB-BA$为对称矩阵.

证 由已知得 $A^T=-A$, $B^T=B$ 于是

$$
\begin{aligned}
(AB-BA)^T &= (AB)^T-(BA)^T \\
&= B^T A^T - A^T B^T \\
&= B(-A)-(-A)B \\
&= AB-BA
\end{aligned}
$$

所以$AB-BA$为对称矩阵.

作 业

P42　习题2.2　第1，2(3)(4)，4，8(2).