北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§5.2 矩阵的相似对角化

5.2.1 相似矩阵

5.2.2 矩阵的相似对角化

5.2.1 相似矩阵

定义5.2.1　设A、B为数域P上两个 n 阶矩阵, 若存在一个数域P上的 n 阶可逆阵P使

$$P^{-1}AP=B$$

称矩阵A与B相似(similar), 记为$A\backsim B$.

用可逆矩阵P对A作运算$P^{-1}AP$, 称为对矩阵A进行一次相似变换.(Similarity transformation)

矩阵相似的性质:

1. 矩阵的相似关系是一种等价关系:

   (1) 反身性: 对任意n阶方阵A, 有$A \backsim A$;

   (2) 对称性: 若$A \backsim B$, 则$B \backsim A$;

   (3) 传递性: 若$A \backsim B$, 则$B \backsim C$, 则$A \backsim C$.

2. 若$P^{-1}A_1P = B_1$, $P^{-1}A_2P = B_2$, 则

$$P^{-1}(A_1 + A_2)P = B_1 + B_2;$$

3. 对数域P上的矩阵A、B, 若$A \backsim B$, 则 $kA \backsim kB$, 对任意$k \in P$成立;

4. 若$P^{-1}A_1P = B_1$, $P^{-1}A_2P = B_2$, 则

$$P^{-1}(A_1A_2)P = P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P = B_1B_2.$$

特别, 若$A \backsim B$, 则$A^r \backsim B^r$, r为正整数;

5. 若$A \backsim B$, $f(x)$是数域P上的一个多项式, 则 $f(A) \backsim f(B)$.

定理5. 2. 1 设$A \backsim B$, 则有

(1) $R(A) = R(B)$, 此处$R(A)$, $R(B)$ 是A、B的秩;

(2) $|A| = |B|$;

(3) A可逆时B也可逆, 反之亦然.

当A可逆时还有$A^{-1} \backsim B^{-1}$.

定理5.2.2 相似的矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

证 设$A \backsim B$，则有可逆阵P使$P^{-1}AP=B$，从而

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P|$$

$$= |P^{-1}||\lambda E - A||P| = |P^{-1}P||\lambda E - A| = |\lambda E - A|$$

这样，A与B有相同特征多项式. 从而有相同的特征值. 证毕.

注： 定理5.2.2的逆是不成立的. 特征多项式相同的矩阵未必是相似的. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2.2 矩阵的相似对角化

定义5.2.2　设A是数域P上的n阶方阵.
如果存在P上可逆阵P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \lambda_i\in K,\quad i=1,2,\cdots,n$$

则称A是可相似对角化的方阵, 简称为A可对角化.

π

定理5.2.3 n 阶矩阵A可相似对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

证明: 如果A可相似对角化, 则存在可逆阵P使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

从而有

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

把P写成列向量分块矩阵, 记$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为$P$的列向量, 则有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

即

$$(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{\alpha}_n)$$

这样得 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i \qquad i=1,2,\cdots,n$

由于P可逆, 说明 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$是线性无关的. 因此$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 A的n个线性无关的特征向量, 与A相似的对角形矩阵中的 $\lambda_i(i=1, \ldots, n)$则是$A$的特征值.

下证充分性.

设A有n个线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 分别属于特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则有

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

令P=$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$是由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为列向量作成的矩阵, 则$P$是可逆阵. 且

$$AP = (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

从而A可相似对角化. 证毕.

推论1　若n阶矩阵A在数域P中有n个不同的特征值, 则A可对角化.

推论2　若A是复数域上的n阶矩阵, 且A在复数域上的特征根都是单根, 则A在复数域上可相似对角化.

数域 P 上 n 阶矩阵 A 相似对角化的步骤:

第一步: 求特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$

若 $f(\lambda)$在数域P上不能分解为一次因式之积, 则 A 不能对角化;

第二步: 若可分解, 求出 A 的全部特征值;

第三步: 对每一个 λ, 求 $(\lambda E-A)x=0$ 的基础解系, 得到 A 的所有的线性无关的特征向量, 若数量为 n 个, 则 A 可以相似对角化, 否则不能.

第四步: 令$P=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 其中 α_i 为特征向量, 则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

注意α_i 与λ_i 的对应.

例5.2.1 设
$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},$$
为实数域R上的三阶方阵, 问A是否可对角化? 若可对角化, 求出可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$为对角形.

解: 特征多项式为
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$
因此 A 的特征值为 $-1,-1,5$.

当 $\lambda=-1$ 时,

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $(-E-A)x=0$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

因此属于特征值 -1 的线性无关的特征向量为 α_1,α_2 .

当 $\lambda = 5$ 时,

$$5E - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $(5E-A)x = 0$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此属于特征值 5 的线性无关的特征向量为 α_3 .

由定理5.1.6, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, A的全部线性无关特征向量有3个, 故A可对角化 .

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

例5.2.2 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

为实数域R上的三阶方阵, 问A是否可对角化? 若可对角化, 求出可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$为对角形.

解: 特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

因此 A 的特征值为1, 1, 3.

当 $\lambda = 1$ 时,

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $(E-A)x = 0$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此属于特征值 1的线性无关的特征向量为 α_1, α_2 .

当 $\lambda = 3$ 时,

$$3E-A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $(3E-A)x = 0$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

因此属于特征值 3 的线性无关的特征向量为 α_3 .

由定理5.1.6, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, A的全部线性无关特征向量有3个, 故A可对角化 .

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

例5.2.5 已知三阶矩阵A在实数域R上有3个不同特征值$-1, 1, 2$, 矩阵 $B=A^3+2A+E$, 问B在实数域上是否可对角化? 并求 $|B|$.

解 已知A有3个不同特征值, 由定理5.2.3的推论1, A必可对角化, 即有可逆阵P使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

从而 $$P^{-1}A^3P=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 8\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(2A)P = 2(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

于是

$$P^{-1}BP = P^{-1}(A^3 + 2A + E)P = P^{-1}A^3P + 2P^{-1}AP + E$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 13 \end{pmatrix}$$

故B可对角化, 且B的特征值为 -2, 4, 13. 于是

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 13 \end{vmatrix} = -104$$

说明: 方阵 A 的特征值有如下性质

若 λ 是 A 的特征值, $f(A)$ 为关于 A 的矩阵多项式, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

例5. 2. 4 设三阶方阵 A, $4E-A$, $A+5E$ 都不可逆, 问 A 是否可以对角化, 若可对角化, 写出其对角阵.

解: 由题意 $|A|=|4E-A|=|A+5E|=0$

从而 0,4,−5 是 A 的三个不同的特征值, 因此 A 可以相似对角化. 其对角化矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 4 & \\ & & -5 \end{pmatrix}.$$

作业：P140 习题5.2 第5(1)(2)(3)(4).