北京航空航天大学
国际学院

线性代数

第一章　行列式

§1.1　*n* 阶行列式

1.1.1　排列与逆序

1.1.2　二阶与三阶行列式

1.1.3　n阶行列式的定义

行列式的历史

行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的。行列式由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨各自独立得出，时间大致相同。

1.1.1　排列与逆序 (Arrangement and reverse)

定义1.1.1　由自然数1, 2, ⋯, n 组成的一个有序数组(ordered array)称为一个n阶排列(Arrangement or permutation), 记为 $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

例如1, 2, 3, 4可组成24=4!个不同的4阶排列. 1, 2, …, n可组成n!个不同的n阶排列.

对4阶排列1234及1324，1234为自然顺序，称为标准排列或自然排列.
(Natural arrangement)

定义1.1.2 在一个排列中, 若一个较大的数排在一个较小的数的前面, 则称这两个数构成一个逆序. (inverse)

一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$表示排列 j_1, j_2, …, j_n的逆序数.(Inverse number)

逆序数是偶数的排列称为偶排列(even permutation)逆序数是奇数的排列称为奇排列(odd permutation).

计算排列逆序数的方法

分别计算出排在 $1, 2, \ldots, n-1, n$ 后面比它小的数码之和即分别算出 $1, 2, \ldots, n-1, n$ 这 n 个元素的逆序数，元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

$$\tau(j_1 j_2 \ldots j_n) = \tau(j_1) + \tau(j_2) + \ldots + \tau(j_{n-1})$$

例如　排列32514 中，

$$\begin{array}{ccccc} \tau(3)=2 & & 2 & & \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & 1 & & 0 & \end{array}$$

故此排列的逆序数为　$2+1+2+0=5.$

例1.1.1 求排列35214, 34512 与 $n(n-1)\ \dots\ 321$ 的逆序数.

偶排列

解 $\tau(35214) = 2+3+1+0+0=6$;

$\tau(34512) = 0+0+2+2+2=6$;

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)$$
$$=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

当$n=4k$, $4k+1$时为偶排列;
当$n=4k+2$, $4k+3$时为奇排列.

定义1.1.3 把一个排列中某两个数的位置互换, 而其余的数不动, 就得到一个新的排列, 这种变换称为排列的一个**对换**.

定理1.1.1 一次对换改变排列奇偶性.

推论 任何一个 n 阶排列都可以通过对换化成标准排列, 并且所作对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

1.1.2 二阶与三阶行列式

用消元法去解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2, 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

用类似方法, 消去 x_1

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

称为二阶行列式(two order determinant),

a_{ij} 称为行列式的元素.

二阶行列式的计算 —— **对角线法则** (Diagonal rule)

主(main)对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意 分母都为原方程组的系数行列式 (coefficient determinant).

同理，考虑三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由于D中共有三行三列, 把它称为三阶行列式, 又称其为方程组的系数行列式. 如果$D \neq 0$,容易算出方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 分别是在 D 中把第 j 列的元素换成方程组右端的常数项 b_1,b_2,b_3 得到.

例1.1.2　计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

练习:　计算行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

二阶、三阶行列式的共同特征:

1. 行列式的每一项都是取自不同行不同列的元素的乘积.

2. 所得项中一半正号，一半负号.

并且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义1.1.4 由 n^2个元素排成 n 行 n 列, 以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之，称其为 n阶行列式,它代表一个数值.

此数值是取自上式中不同行不同列的n个元素 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 乘积的代数和，其中

π

$j_1,j_2,\ldots,j_n$是数字$1,2,\ldots,n$的某一个排列，故共有$n!$项. 每项前的符号按下列规定: 当 $j_1,j_2,\ldots,j_n$为偶排列时取正号, 当$j_1,j_2,\ldots,j_n$为奇排列时取负号, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\ldots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 取和.

注意: 当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a|=a$.

n 阶行列式也可记为 $D_n=|a_{ij}|_n$.

练习: P7 习题1.1 第2(1)题.

例1.1.3　计算n阶**下三角形**行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，对于上三角形行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, 对于对角形行列式 (Diagonal determinant), 有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

例1.1.4　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}$$

练习 计算

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

例1.1.5　求出

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项.

解 展开式中与主对角线上元素乘积对应的项为

$$(-1)^{\tau(1,2,3,4)} 5x \cdot x \cdot x \cdot 2x = 10x^4.$$

除主对角线上元素乘积所对应的项外，

展开式中的其它项至多含x的3次方．而含

3次方的项只有下列两种情况:

$$(-1)^{\tau(2,1,3,4)}\, x\cdot 1\cdot x\cdot 2x = -2x^3.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4,2,3,1)}\, x\cdot x\cdot x\cdot 3 = -3x^3.$$

故展开式中含x^4和x^3的项为 $10x^4-5x^3$.

注意：(1) 在行列式定义中规定n个元素相乘时, 元素的行序数按标准排列, 由列序排列的奇偶性决定各项的正负号, 可改为将元素的列序按标准排列，由行序排列的奇偶性决定每项的正负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}.$$

其中 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对1,2,…, n这 n个数组成的所有排列$i_1, i_2, \ldots, i_n$取和.

(2) 行列式中项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

例如 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 的符号为

$$(-1)^{\tau(2314)+\tau(1243)}=-1.$$

事实上， $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}= a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$, 故其符号为 $(-1)^{\tau(4123)}=-1$. 或 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}= a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}$, 其符号为 $(-1)^{\tau(2341)}=-1$.

作业：P7　习题1.1 第2(2)，4(1)(3)题.