北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§2.3 逆矩阵

2.3.1 逆矩阵的概念

2.3.2 正交矩阵

2.3.1 逆矩阵的概念

代数运算中，若$a \neq 0$, 则 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} = \mathbf{1}.$

矩阵运算中，对n 阶单位方阵E，有

$$AE = EA = A.$$

E 的作用与数1相同.

问题1：对n阶方阵A能否找到矩阵B使得

$$AB = BA = E.$$

问题2：如果存在这样的矩阵B，A满足什么条件时才能找到(数量?)，利用A如何求B.

定义2.3.1 设A是n阶方阵, 若有一个n阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则B称为A的**逆矩阵**(inverse matrix), A 称为**可逆矩阵**, 或**非奇异矩阵**(Nonsingular matrix).

说明: 否则称为**奇异矩阵**(Nonsingular matrix).

注意

1.可逆矩阵一定是方阵, 并且它的逆矩阵亦为同阶方阵;

2. 定义中的 A 和 B 的地位是平等的, 所以 B 也是可逆矩阵, 并且A 是 B 的逆矩阵.

定理2.3.1 若A是一个n阶可逆矩阵, 则它的逆矩阵是唯一的.

证 设A有两个逆矩阵B与C, 即

$$AB=BA=E,\quad AC=CA=E.$$

于是 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以逆矩阵是唯一的. 证毕.

注： 由于可逆矩阵的逆矩阵是唯一的，我们用A^{-1}表示A的逆矩阵，于是有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

定义2.3.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_{ij}为A的行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式，称

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为矩阵A的伴随矩阵(companion matrix).

引理 设 A 为 n 阶方阵, A^*为其伴随矩阵, 则

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

证: 设A为n阶矩阵, 由定理1.3.1和定理1.3.2,

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & |A| & \\ & & & |A| \end{pmatrix}, \quad = |A|E$$

定理 2.3.2 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$, 且A可逆时, 有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

其中A^*为A的伴随矩阵.

证 必要性 因为A可逆, 于是A^{-1}存在, 且

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

这样 $|A||A^{-1}|=|E|=1$, 因此 $|A|\neq O$.

充分性　当 $|A| \neq O$ 时, 由引理得

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E,$$

于是矩阵A可逆, 且 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}.$

证毕.

重要公式: $\boxed{AA^* = A^*A = |A|E}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.}$$

例2. 3. 1 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因为

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=9-18=-9\neq 0,$$

所以A可逆. 由于

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & -4 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & -4 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 2.3.2 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

问a, b, c, d满足何条件时, 矩阵A可逆? 当A可逆时, 求A^{-1}.

解 若$|A|\neq 0$, 则A可逆, 即$ad-bc\neq 0$时, A可逆.

当A可逆时,

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

注意二阶可逆矩阵的逆矩阵的特点.

推论 设A与B都是n阶方阵,若$AB=E$, 则A, B都可逆,并且 $A^{-1}=B$, $B^{-1}=A$.

证 因为 $AB = E$, 所以 $|AB| = E = 1$, 从而 $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.因此A,B都可逆.

由定理2.3.2, A^{-1},B^{-1}存在.

在$AB=E$两端左乘A^{-1},得 $A^{-1}=B$. 同理$B^{-1}=A$.

矩阵可逆的判断及证明

- 找一个同阶方阵, 使$AB = E$ 或 $BA = E$
- 若$|A| \neq 0$，则A可逆; 若$|A| = 0$, 则A不可逆.

例2.3.3　设方阵A满足$A^2+3A-2E=O$, 证明 $A+E$ 可逆，并求$(A+E)^{-1}$.

证　由 $A^2+3A-2E = O$, 有

$$(A+E)(A+2E)-4E=O,$$

即

$$(A+E)(A+2E)=4E,$$

于是

$$(A+E)\left(\frac{1}{4}(A+2E)\right)=E.$$

根据定理的推论, 矩阵$A+E$可逆, 且

$$(A+E)^{-1}=\frac{1}{4}(A+2E)$$

练习 设方阵A满足$A^2-A-2E=0$, 证明A, $A+2E$都可逆, 并求其逆矩阵.

解 由$A^2-A-2E=0 \Rightarrow A(A-E)=2E$

$$\Rightarrow |A|\,|A-E| \neq 0 \Rightarrow$$

A可逆, 且 $A^{-1}=(A-E)/2$.

由A可逆及 $A+2E=A^2 \Rightarrow A+2E$ 可逆.

$(A+2E)^{-1}=(A-E)^2/4$或$(3E-A)/4$.

逆矩阵的性质

性质 1　若A可逆，则A^{-1}可逆，且

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

性质 2　若A, B可逆, 则AB可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广　设$A_1, A_2, \cdots, A_m$均为n阶可逆矩阵, 则$A_1A_2\cdots A_m$也可逆, 并且

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

性质 3　若A可逆, 则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\dfrac{1}{|A|}$.

性质 4　若A可逆, 则 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

性质 5　若A可逆, 数$k\neq 0$, 则 $\boldsymbol{(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}}$.

特别当$k=-1$时, $(-A)^{-1}=-A^{-1}$.

性质 6　若A可逆, 则A^*可逆, 并且

$$\boldsymbol{(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|},\quad |A^*|=|A|^{n-1}}.$$

性质 7　若A可逆, 则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

性质 8　若A可逆, k为正整数, 则

$$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k.$$

性质 9　若A可逆, 且$AB=O$, 则$B=O$.

性质10　若A可逆, 且$AB=AC$, 则$B=C$.

克莱姆法则的证明:

线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是 $|A|\neq 0$, 且有唯一解时, 解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证: 当$|A|=D\neq 0$时, 矩阵A可逆, 用A^{-1}左乘方程两边, 得

$$X = A^{-1}b = \frac{A^*}{|A|}b = \frac{A^*}{D}b$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$$

得到方程组 $Ax=b$ 的解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

由逆矩阵的唯一性, 这个解是唯一的.

说明：一般形式的矩阵方程

$$AX=C,\ XA=C,\ AXB=C$$

当A、B为可逆矩阵时，上述矩阵方程有唯一解

$$X=A^{-1}C,\quad X=CA^{-1},\quad X=A^{-1}CB^{-1}.$$

例2.3.4 解线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y \quad =-1 \\ x+y \quad =1 \end{cases}$

解 方程组的矩阵形式为 $AX=b$,

其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$

由于

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

从而A可逆, 于是有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即方程组的解为 $x = -2, y = 3, z = 1$.

例2.3.4 解矩阵方程 $2X=AX+B$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 由 $2X=AX+B$, 得 $(2E-A)X=B$. 因为

$$|2E-A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

所以矩阵$2E-A$可逆,

$$X=(2E-A)^{-1}B=\frac{(2E-A)^*}{|2E-A|}B$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

π

2.3.2 正交矩阵

定义2.3.3 设A为实数域R上的方阵,如果它满足$AA^T=A^TA=E$, 则称A为**正交矩阵**(orthogonal matrix).

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

均为正交矩阵.

定理2.3.3 实数域R上的方阵A为正交矩阵的充分必要条件是$A^{-1}=A^T$.

正交矩阵的性质：

（1） 若 A 为正交矩阵, 则$|A|=1$或 $|A|= -1$；

（2） 若 A 为正交矩阵, 则 A^{-1}, A^T仍为正交矩阵；

（3） 若A、B是同阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵;

（4） 正交矩阵的每行(列)元素的平方和等于1, 不同两行(列)的对应元素乘积之和等于0.

证 这里仅证性质(3)和(4).

（3）由于A, B是正交矩阵, 所以

$AA^T=E$, $BB^T=E$, 从而

$$(AB)(AB)^T=(AB)(B^TA^T)=A(BB^T)A^T$$
$$=AEA^T=AA^T=E$$

即AB为正交矩阵.

(4) 设$A=(a_{ij})_n$正交矩阵, 则

$$AA^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=E$$

根据矩阵乘法与矩阵相等的定义,

$$\begin{cases} a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=1, & (i=1,2,\cdots,n), \\ a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=0, & (i\neq j;\ \ i,j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

同理可证

$$\begin{cases} a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{nj}^2 = 1, & (j = 1,2,\cdots,n), \\ a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0, & (i \neq j;\ \ i,j = 1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

性质4成立.

例2.3.6 设 A 为正交矩阵, B 为与 A 同阶的对称矩阵, 且 $(A-B)^2=E$, 化简:
$(AB+E)^T(E-BA^T)^{-1}$.

解 由于$(A-B)^2=E$, 所以$A-B$可逆, 且 $(A-B)^{-1}=(A-B)$.

于是
$$
\begin{aligned}
(AB+E)^T(E-BA^T)^{-1} &= (B^TA^T+AA^T)(AA^T-BA^T)^{-1} \\
&= (B+A)A^T(A^T)^{-1}(A-B)^{-1} \\
&= (A+B)E(A-B) \\
&= (A+B)(A-B).
\end{aligned}
$$

作业：P49 习题2.3

第1(2)(3)；第2(2)(3)；3；8.