北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§2.4 分块矩阵

2.4.1 分块矩阵的概念

2.4.2 分块矩阵的运算

2.4.3 准对角形矩阵

2. 4. 1 分块矩阵的概念

定义2.4.1 设A是一个矩阵,用贯穿于 A 的纵线和横线按某种需要将其划分成若干个阶数较低的矩阵, 这种矩阵称为A的子块或子矩阵, 以这些子块为元素构成的矩阵称为A的分块矩阵. (partitioned matrix)

例如 3×4 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

的分法:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$ 记为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

用一条横线两条纵线把下面的3×6矩阵A分成6个子块

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & -9 & -2 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right),$$

若记

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},\ A_{13}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 3 \end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix},\ A_{23}=\begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix},$$

则矩阵A就化成了2×3矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}.$$

2.4.2 分块矩阵的运算

我们把分块矩阵的子块当作矩阵中的数一样看待, 则分块矩阵的加法、数乘、乘法规则与一般矩阵相同.

注意:

1. 用分块矩阵作加法运算$A+B$时, A与B的行、列的划分均要一致.

2. 用分块矩阵作乘法运算AB时(设A的列数等于B的行数), 一定要使A的列的分法与B的行的分法相同, 而A的行的分法与B的列的分法可以任意.

1. 分块矩阵的加法、数乘与转置

设A, B为$m\times n$矩阵, 将A, B采用同样的方法进行分块, 得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1q} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{p1} & \boldsymbol{B}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{pq} \end{pmatrix}$$

其中子块A_{ij}与B_{ij} $(i=1, 2, \ldots, p; j=1, 2, \ldots, q)$是同型矩阵, 容易证明

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1q}+B_{1q} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2q}+B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1}+B_{q1} & A_{p2}+B_{q2} & \cdots & A_{pq}+B_{pq} \end{pmatrix},$$

即两个同型的分块矩阵相加，只需在相同的分法下，把相应的子块相加.

例 分块矩阵的加法

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ \hline -3 & 8 & -1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hline 8 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 \end{array}\right)=5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

设 k 是一个常数，容易证明

$$kA = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1q} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{p1} & kA_{p2} & \cdots & kA_{pq} \end{pmatrix},$$

即用数 k 乘一个分块矩阵, 只需用数 k 去乘矩阵的每一子块.

设分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

则

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{p1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{p2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1q}^T & A_{1q}^T & \cdots & A_{pq}^T \end{pmatrix}.$$

2. 分块矩阵的乘法

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$, 用分块矩阵计算A,B的乘积AB时, 一定要使A的列的分法与B的行的分法一致,这样不仅可以保证 A, B 作为分块矩阵可乘, 而且它们相应的各子块间的乘法也有意义, 即

$$A=\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \cdots & s_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rp} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \end{array}, \quad B=\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_q \end{array} & \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{array} \end{array}$$

其中矩阵A的子块 A_{ik} 为$m_i \times s_k$ $(i=1, 2, \ldots, r, k=1, 2, \ldots, p)$ 矩阵, 矩阵 B 的子块 B_{kj} 为 $s_k \times n_j$ $(k=1, 2, \ldots, p;\ j=1, 2, \ldots, q)$ 矩阵, 且

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m, \qquad \sum_{i=1}^{p} s_i = s, \qquad \sum_{i=1}^{q} n_i = n.$$

容易证明

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1q} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{r1} & \boldsymbol{C}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rq} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$ 为$m_i \times n_j$矩阵(i=1, 2, …, r; j=1, 2, …, q).

例如 对矩阵作如下划分

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 7 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ \hline 6 & 2 \end{array}\right)$$

或

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 7 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ \hline 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{array}\right)$$

可以作分块矩阵乘法.

而划分

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 7 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ \hline 6 & 2 \end{array}\right)$$

不可以作分块矩阵乘法.

例2.4.1　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

用分块矩阵计算AB.

解　将矩阵A,B作如下分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&2\\0&1&0&1\\\hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E_1&A_1\\O&E_2\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} E_1 & A_1 \\ O & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11}+A_1B_{21} & E_1+A_1B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

因

$$B_{11}+A_1B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$E_1+A_1B_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$AB=\begin{pmatrix}E_1 & A_1\\ O & E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & E\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

2.4.3 准对角形矩阵

定义2.5.2 设A为n阶方阵, 如果它的分块矩阵具有如下形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix},$$

其中$A_i\ (i=1, 2, \ldots, s)$为n_i 阶方阵, $\sum\limits_{i=1}^{s}\boldsymbol{n}_i=\boldsymbol{n},$

则称A为准对角形矩阵.

设 n 阶准对角形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$$

其中子块A_i和B_i(i=1, 2, …, s)为同阶方阵, 则有下述性质:

(1) $$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s+B_s \end{pmatrix};$$

(2) $$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix};$$

(3) $$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|;$$

(4) 若$|A_i|\neq 0(i=1, 2, \ldots, s)$, 则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix};$$

$$
\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.
$$

例2.4.2 设

$$
A = \left(\begin{array}{c|ccccc}
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\
\hline
a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

其中$a_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 试用分块矩阵求$A^{-1}$.

解　设 $$A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix},$$

其中
$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{pmatrix},\ A_2=(a_n).$$

因为
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix},$$

且

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix},\ A_2^{-1}=a_n^{-1}.$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

例2.4.3 设 $$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

其中 A, B分别为 s 阶、t 阶可逆矩阵, O 为 $s\times t$ 零矩阵, C 为 $t\times s$ 矩阵,

证明：矩阵D可逆，并求D^{-1}.

解 因为矩阵A,B可逆,所以$|A|\neq 0$, $|A|\neq 0$.由拉普拉斯定理, $|D|=|A||B|\neq 0$, 故矩阵D可逆.设

$$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & E_t \end{pmatrix}.$$

对上式左端作乘法运算，并对两端进行比较，有

$$\begin{cases} AX_{11}=E_s \\ AX_{12}=O \\ CX_{11}+BX_{21}=O \\ CX_{12}+BX_{22}=E_t \end{cases}$$

由于A可逆,用A^{-1}左乘第一式和第二式两端得

$$X_{11}=A^{-1},\ X_{12}=O;$$

代入第四式, 并注意到B可逆,得

$$X_{22}=B^{-1};$$

代入第三式,得

$$X_{21}=-B^{-1}CA^{-1}.$$

于是

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

作业: P56 习题2.4 第3, 4题.