北京航空航天大学
国际学院

线性代数

第四章 线性方程组

在自然科学、工程技术和生产实践中，大量的理论和实际问题往往需要归结为解线性方程组. 因此，研究线性方程组的解法和解的理论就显得十分重要. 本章主要研究一般的线性方程组, 讨论以下三个问题:

(1) 如何判断方程组是否有解？

(2) 如果方程组有解, 它有多少个解？如何去求解？

(3) 当方程组的解不唯一时, 这些解之间有什么关系？

§ 4.1 线性方程组有解的判定定理

n 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

其中x_i为未知量，m是方程的个数.

系数矩阵

常数项向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 则方程组的矩阵形式

$$AX=b.$$

在方程组的系数矩阵最后加上一列常数项，记为

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)=(A \mid b)$$

称为方程组的增广矩阵.

向量形式: 令

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

方程组可以写成

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n x_n = \boldsymbol{b}.$$

由此可以得到, 方程组有解的充分必要条件是 b 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出.

如果用$x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$代入方程组使方程组的每个方程的左右两边恒等，则称$(k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$为方程组的解或称为方程组的解向量，记为

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad 或 \quad X^T = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^T$$

方程组的全部解称为它的解集合. 若两个方程组的解集合相同，则称它们是同解方程组.

定理4.1.1 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(\overline{A}).$$

证 **必要性** 设线性方程组$Ax = b$有解,

说明 b 可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，因此向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$与向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$ b 等价, 从而

$$R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} = R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b\}.$$

所以

$$R(A) = R(\overline{A}) \;.$$

充分性 设 $R(A)=R(\overline{A})=r$,

要证明方程组$Ax=b$有解, 只要说明b可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出即可.

由$R(A)=r$, 则A的列向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组含有r个列向量, 不妨设为

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}.$$

由条件知它也是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b$的极大线性无关组. 这样$b$可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

因此b可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出.

例4.1.1 讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

当λ取何值时有解，λ取何值时无解？

解 对方程组的增广矩阵做初等行变换，则

$$\overline{A}=(A\quad b)=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&1-\lambda\end{pmatrix}$$

当$\lambda=1$或$\lambda\neq1,-2$时, $\boldsymbol{R(A)=R(\overline{A})}$, 方程组有解.

当$\lambda=-2$时，$R(A)=2, R(\overline{A})=3$，方程组无解.