北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§1.4 克莱姆（Cramer）法则

本节讨论用 n 阶行列式解 n 元线性方程组 (Linear equation group)的问题.

设 n 个未知量， n个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.4.1)$$

它可以简写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

由方程组的未知量系数组成的n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组的系数行列式(coefficient determinant) .

定理1.4.1 (克莱姆(Cramer)法则) 如果线性方程组(1.4.1)的系数行列式 $D\neq 0$, 则方程组有唯一解, 并且解可以用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中D_j (j=1,2,…, n)是把系数行列式 D 中第 j列的元素用方程组(1.4.1)右端的常数项 $b_1,b_2,\ldots,b_n$代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{第 } j \text{ 列} & & & \\
\left| a_{11} \right. & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & \left. a_{1n} \right| \\
\left| a_{21} \right. & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & \left. a_{2n} \right| \\
\left| \vdots \right. & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \left. \vdots \right| \\
\left| a_{n1} \right. & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & \left. a_{nn} \right|
\end{array}$$

定义1.4.1 当线性方程组(1.4.1)右端的常数项 $b_1,b_2,\ldots,b_n$不全为零时, 称为非齐次线性方程组(Nonhomogeneous linear equations); 当$b_1, b_2, \ldots, b_n$全为零时，称为齐次线性方程组(Homogeneous linear equations).

显然齐次线性方程组总是有解的, 因为 $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ 就是它的一个解, 称为零解(Zero solution). 如果齐次线性方程组的解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$不全为零, 则称为非零解(Non zero solution).

定理1.4.2 若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad i=1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n$$

的系数行列式$D \neq 0$,则它只有唯一的零解.

推论 若齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D = 0$.

例1.4.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 \qquad\qquad - 6x_4 = 9, \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

由克莱姆法则，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -4 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -1 \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = 1$$

例1.4.2　k为何值时，方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解.

解 由定理1.4.2的推论知，若齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式$D=0$.

因为

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(k+1)(k-4)$$

所以, $k=-1$或$k=4$ 时，方程组有非零解.

练习　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

作业　P27　习题1.4　第1(1)，2，3 题.