北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§5.3　实对称矩阵的相似对角化

5.3.1　向量的内积与施密特正交化方法

5.3.2　实对称矩阵的特征值与特征向量

5.3.3　实对称矩阵的相似对角化

5.3.1 向量的内积与施密特正交化方法

定义5.3.1 设

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

是实n维向量空间R^n中任二向量, 令

$$\langle\alpha,\beta\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称实数 $<\alpha, \beta>$ 为向量α与β的内积(Inner product or scalar product).

内积性质：

1. 对称性 $<\alpha,\beta>=<\beta, \alpha>$
2. 线性性 $<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$

   $<k\alpha,\beta>=k<\alpha,\beta>$
3. 恒正性 $<\alpha, \alpha> >0$ 当 $\alpha\neq 0$ 时.

定义5. 3. 2 若$\langle\alpha, \beta\rangle=0$, 称向量$\alpha$与$\beta$**正交**.

定义5. 3. 3 设α是n维向量, 称

$$\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$$

为α的长, 记为 $|\alpha|$. 若 $|\alpha|=1$, 称α为**单位向量**.

注：(1) $|\alpha|=0$当且仅当α为零向量.

(2) 对任何 $\alpha\neq 0$, 有 $|\alpha|>0$, 且有

$$|\boldsymbol{k\alpha}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{k\alpha}, \boldsymbol{k\alpha} \rangle} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{\alpha}|$$

(3) 任给非零向量 α, $\boldsymbol{\alpha}^{\circ} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$

是单位向量.

定义5.3.4　设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是一组非零向量. 若其中任两个向量都是正交的, 则称其为一个正交向量组. 仅由一个非零向量组成的向量组也称为正交向量组.

若正交向量组中每个向量都是单位向量, 则称其为标准正交组.

例5.3.1　设 $\alpha_1=(1, 2, -1, 1)$, $\alpha_2=(1, -1, 0, 1)$, $\alpha_3=(-1, 1, 3, 2)$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^4$中正交向量组, 但不是标准正交组.

解: $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 1 - 2 + 0 + 1 = 0$

$\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = -1 + 2 - 3 + 2 = 0$

$\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = -1 - 1 + 0 + 2 = 0$

故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是正交向量组, 又

$$|\alpha_1| = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7}$$

$$|\alpha_2| = \sqrt{1+1+0+1} = \sqrt{3} \quad |\alpha_3| = \sqrt{1+1+9+4} = \sqrt{15}$$

从而$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$都不是单位向量. 因此不是标准正交组.

说明：单位化之后的向量组

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}\alpha_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}\right)$$

则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是标准正交组.

正交向量组有下列性质:

定理5. 3. 1 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$R^n$中的向量组，则有

(1) 若β与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$的每一个向量正交，则$\beta$必与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$的任一线性组合正交.

(2) 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是正交组, 它们必线性无关.

证明: (1) 若$<\alpha_i, \beta>=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, 任给$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$的线性组合$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$, 由内积的线性性

$$\begin{aligned}\langle \beta,\gamma\rangle &= \langle \beta, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\rangle \\ &= k_1\langle\beta,\alpha_1\rangle+k_2\langle\beta,\alpha_2\rangle+\cdots+k_m\langle\beta,\alpha_m\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

故β与γ正交.

(2) 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,

用α_1与上式两边作内积运算, 得

$$k_1\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle+k_2\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle+\cdots+k_m\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle=<\boldsymbol{\alpha}_1,0>=0$$

由于$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m$两两正交, 则当$j\neq1$时, $<\alpha_1, \alpha_j>=0$. 于是得到, $k_1<\alpha_1, \alpha_1>=0$,

即$k_1|\alpha_1|^2=0$. 由于α_1是非零向量, 故$|\alpha_1|\neq 0$, 因此$k_1=0$.

用α_i替代α_1重复以上论证, 可得$k_i=0, i=2,\ldots, m$, 这就证明了$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m$线性无关. 证毕.

定理5. 3. 2　(施密特正交化定理) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m \le n)$是$R^n$中线性无关向量组，则必存在标准正交组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$，使$\beta_i$是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (i=1, 2, \ldots, m)$的线性组合.

施密特(Schimidt)正交化过程:

取　$\gamma_1 = \alpha_1$;　　$\gamma_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \gamma_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle} \gamma_1$;

$$\gamma_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \gamma_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle} \gamma_1 - \frac{\langle \gamma_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle} \gamma_2; \ \cdots\cdots$$

$$\gamma_r = \alpha_r - \frac{\langle \gamma_1, \alpha_m \rangle}{\langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle} \gamma_1 - \frac{\langle \gamma_2, \alpha_m \rangle}{\langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle} \gamma_2 - \cdots - \frac{\langle \gamma_{m-1}, \alpha_m \rangle}{\langle \gamma_{m-1}, \gamma_{m-1} \rangle} \gamma_{m-1}.$$

再单位化，令

$$\beta_j = \frac{1}{|\gamma_j|}\gamma_j (j = 1,2,\cdots,m)$$

则$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 是标准正交向量组.

待定系数法:

取 $\gamma_1 = \alpha_1$; $\gamma_2 = \alpha_2 + k_1\alpha_1$;

利用 γ_1, γ_2 正交确定 k_1,

$\gamma_3 = \alpha_3 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$;

利用γ_3 与 γ_1, γ_2 正交确定 $l_1, l_2, \ldots$

最后将所得的向量单位化即可.

例5.3.2 设 $\alpha_1=(1,1,1)$ $\alpha_2=(0,1,2)$ $\alpha_3=(2,0,3)$ 是R^3中的向量组, 用施密特正交化方法把它们化为标准正交组.

解 易验证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 从而可施行施密特标准正交化.

令 $\gamma_1=\alpha_1=(1,1,1)$

$$\gamma_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\gamma_1\rangle}{\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle}\gamma_1=(0,1,2)-\frac{3}{3}(1,1,1)=(-1,0,1)$$

$$\gamma_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\gamma_2\rangle}{\langle\gamma_2,\gamma_2\rangle}\gamma_2-\frac{\langle\alpha_3,\gamma_1\rangle}{\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle}\gamma_1$$

$$=(2,0,3)-\frac{1}{2}(-1,0,1)-\frac{5}{3}(1,1,1)$$

$$=\left(\frac{5}{6},-\frac{5}{3},\frac{5}{6}\right)$$

再令

$$\beta_1=\frac{1}{\left|\gamma_1\right|}\gamma_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\beta_2=\frac{1}{\left|\gamma_2\right|}\gamma_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\beta_3=\frac{1}{\left|\gamma_3\right|}\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

则$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的标准正交组.

5.3.2　实对称矩阵的特征值与特征向量

定理5.3.3　设A是实对称矩阵, 则 A 的特征值全为实数.

说明: 由定理实对称矩阵的特征向量是实向量.

定理5.3.4　设A是实对称矩阵, 则R^n中属于A的不同特征值的特征向量必正交.

5.3.3 实对称矩阵的相似对角化

定理5.3.5 设A是n阶实对称矩阵, 则必有n阶正交矩阵 Q 使

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

为对角形. 其中Q的列向量是 A 的 n 个相互正交的单位特征向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的全部实特征值.

用正交矩阵把实对称阵A相似对角化的步骤:

第一步: 写出A的特征多项式$|\lambda E-A|$, 并求出所有特征根(均为实数);

第二步: 对每个互异的特征根, 求出其全部线性无关特征向量;

第三步: 对属于同一个特征值 λ 的线性无关特征向量, 用施密特正交化方法化为标准正交向量组, 由定理5.1.1, 它们仍是属于的特征向量;

第四步: 用所得到的所有标准正交特征向量作为列向量组成矩阵Q, 则 $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ$必是对角形, 且对角线上元素为A的全部特征值.

例5.3.3　对下列各实对称矩阵, 分别求出正交矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$$(1) A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad (2) A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解　(1) 第一步　求 A 的特征值

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

得　$\lambda_1=4, \lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

第二步，由 $(A-\lambda_i E)x = 0$，求出 A 的特征向量

对 $\lambda_1 = 4$，由 $(A-4E)x = 0$，得

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2 = 1$，由 $(A-E)x = 0$，得

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=-2$, 由 $(A+2E)x=0$, 得

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

第三步　将特征向量正交化

由于 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是属于 A 的三个不同特征值的特征向量, 故它们一定两两正交.

第四步　将特征向量单位化

令 $$\eta_i=\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|},\quad i=1,2,3.$$

得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}.$$

构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\-1&-2&2\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)^2,$$

得特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4.$

对 $\lambda_1=2$, 由 $(A-2E)x=0$, 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_{2,3}=4$, 由 $(A-4E)x=0$, 得基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$ ξ_2,ξ_3 恰好正交.

因此 ξ_1,ξ_2,ξ_3 一定两两正交.

将特征向量单位化

令 $$\eta_i=\frac{\xi_i}{\left\|\xi_i\right\|},\quad i=1,2,3.$$

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

于是得正交阵

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

例5.3.3 设4阶实对称方阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

用正交矩阵把A相似对角化.

解:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

得A的特征值$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$; 其中λ_1是三重根.

再求属于$\lambda=1$的特征向量, 代入 $(\lambda E - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得基础解系

$$\alpha_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)^T,\quad \alpha_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)^T,\quad \alpha_3 = (-1,\ 0,\ 0,\ 1)^T$$

对之进行正交化, 得 $\beta_1=\alpha_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)^T,$$

再单位化得

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right)^T,\qquad \gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0\right)^T,$$

$$\gamma_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{3}{\sqrt{12}}\right)^T$$

再求属于λ_2= -3的特征向量, 把λ=-3代入式, 求得基础解系

$$\alpha_4=(1,\quad -1,\quad -1,\quad 1)^T$$

将其单位化得 $$\gamma_4=\left(\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\right)^T$$

以$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$为列向量组成正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

作业：P148 习题5.3 第6(1)(2),7.