北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§4.2 线性方程组解的求法

本节主要讨论有解线性方程组解的个数以及如何求解的问题. 本节学习的重点:熟练掌握线性方程组的解法.

例4.2.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$$

高斯消元法解方程组的过程中，对方程组的化简反复使用下面的三种运算：

（1）互换方程组中两个方程的位置；

（2）用一个非零常数k去乘方程组中某一个方程；

（3）把一个方程的k倍加到另一个方程上.

这三种方程组的同解运算称为方程组的初等变换.

说明:如果把方程组和它的增广矩阵 $\overline{A}$ 联系起来, 可以看出, 对方程组进行初等变换化为阶梯形方程组(消元)的过程, 实际上就是对它的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换化为简化阶梯形矩阵的过程.

下面研究一般线性方程组的解法.

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

它的系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $\overline{A}$,

$$R(A) = R(\overline{A}) = r.$$

由于 $R(\overline{A})=r$, 则矩阵$\overline{A}$中至少有一个r阶子式不为0, 从而这个不为0的r阶子式所在的r个行向量线性无关. 不失一般性, 不妨设它位于 $\overline{A}$ 的左上角.

于是矩阵 $\overline{A}$ 经过行初等变换可化为矩阵:

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $R(A)=R(\overline{A})=r=n$ 时，(A,b) 可化为

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这时方程组 $Ax = b$ 有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \quad \vdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

(2) 当 $R(A)=R(\overline{A})=r<n$ 时, $Ax=b$ 与下列方程组是同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n = d_1, \\ x_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\vdots \\ x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n = d_r. \end{cases}$$

把上式中含有变元x_{r+1}，x_{r+2}，…，x_n的项移到每个方程的右端, 得到

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = d_r - b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n. \end{cases}$$

给定$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$的任意一组值, 可得到方程组 $Ax = b$ 的一个解

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1 - b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n, \\
x_2 = d_2 - b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\
\quad \vdots \\
x_r = d_r - b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\
x_{r+1} = x_{r+1}, \\
\quad \vdots \\
x_n = x_n.
\end{cases}
$$

这里$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$为自由未知量．由于$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$可以任意选取，故方程组在 $R(A) = R(\overline{A}) = r < n$ 时有无穷多个解.

上式称为方程组$Ax = b$ 的通解或一般解.

一般可将通解写成向量形式:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} c_{1r+1} \\ c_{2r+1} \\ \vdots \\ c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1}
+
\begin{pmatrix} c_{1r+2} \\ c_{2r+2} \\ \vdots \\ c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+2}
+ \cdots +
\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n
$$

定理4.2.1 对于线性方程组 $Ax = b$, 有如下结果:

（1）当 $R(A) = R(\overline{A}) = r = n$ 时, 方程组有唯一解;

（2）当 $R(A) = R(\overline{A}) = r < n$ 时, 方程组有无穷多解.

例4.2.2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1/2. \end{cases}$$

解　对方程组的增广矩阵进行初等行变换，把其化为最简阶梯形矩阵，

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3/2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由于 $R(A)=R(\overline{A})=2<3$ ，从而方程组有无穷多解, 且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \dfrac{1}{2}, \\ x_3 - x_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

取x_2, x_4为自由未知量，方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

解的向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

例4. 2. 3 讨论λ取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

有解? 并求其解.

解法1 方程组中含有参数λ, 需要对 λ 的取值情况进行讨论.

对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换, 化为最简阶梯形矩阵.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda \neq 1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\lambda & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda \neq -2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\lambda & \lambda^2+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

下面对λ的取值情况进行讨论.

当 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{-\lambda - 1}{2+\lambda}, \qquad x_2 = \frac{1}{2+\lambda}, \qquad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{2+\lambda}$$

当 $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(\overline{A}) = 1 < 3$, 原方程组的同解方程组为: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

其中x_2, x_3为自由未知量.

解的向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

当$\lambda = -2$时，由于

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以 $R(A) = 2, R(\overline{A}) = 3$，此时方程组无解.

解法2 方程组的系数矩阵A的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

对分别对λ的取值情况进行讨论.

（1） 当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，$|A| \neq 0$, 由克莱姆法则，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{-\lambda - 1}{\lambda + 2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}$$

（2） 当$\lambda = 1$ 时，原方程组的三个方程相同，即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

这时 $R(A) = R(\overline{A}) = 1$, 原方程组有无穷多个解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

(3)　当 $\lambda = -2$ 时，通过初等行变换

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

显然, $R(A) = 2$, $R(\overline{A}) = 3$, 所以方程组无解.

把定理4.2.1应用到齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

可得

定理4.2.2 设A为齐次线性方程组$Ax=0$的系数矩阵,

如果 $R(A)=n$，则齐次线性方程组只有唯一零解；

如果$R(A)=r<n$，则齐次线性方程组除零解外，还有无穷多个非零解. 特别地，当方程的个数小于未知量个数, 即$m<n$时，齐次线性方程组必有无穷多个非零解.

推论　含有n个未知量n个方程的齐次线性方程组 $Ax=0$有非零解的充分必要条件是它的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

例4.2.4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

解　对方程组的系数矩阵作初等行变换,

化为阶梯形矩阵的最简形.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此得到原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_3+x_4=0,\\ x_2-\frac{7}{2}x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

$R(A)=2$. 取x_3, x_4为自由未知量，得方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4, \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

解的向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

作业：P112 习题 第1，3题.