北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§1.2 行列式的性质

由行列式的定义知道，当行列式的阶数较高时，直接按定义计算它的值是比较麻烦的，为此本节将介绍行列式的一些基本性质，利用这些性质，可以将复杂的行列式化成形式特殊的行列式，如上三角形行列式等，再计算它的值.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式 (Transposed determinant).

性质1 行列式与它的转置行列式相等, 即

$$D = D^T.$$

注：性质1说明行列式中行与列具有同等的地位，因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质 2 **如果**行列式某一行(列)元素有公因数 k, 则 k 可以提到行列式符号外边,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　如果行列式中某一行(列)元素全为零，那么行列式等于零.

性质3 如果行列式中两行(列)互换，那么行列式只改变一个符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论1　若行列式中有两行(列)相同, 则行列式的值为零.

推论2　如果行列式中两行(列)的对应元素成比例, 那么行列式值为 0.

性质4 如果行列式某行(列)的各元素都可以写成两数之和，例如$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(i, j=1,2,\ldots,n)$, 则此行列式等于两个行列式的和, 即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

性质5 如果将行列式中某行(列)的各元素同**乘一数 k**后, 加到另一行(列)的各对应元素上, 则行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

说明：利用行列式的性质可简化行列式的计算，基本思路是根据性质把行列式化成上三角形行列式，它等于变换后的行列式的主对角元素的乘积.（例1.1.2）

记号：

以 r_i表示行列式的第i行(row), 以 c_j表示行列式的第 j列(column). 交换i, j两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；第 i行加上(或减去)第 j行的 k 倍记作 $r_i \pm kr_j$. 对列也有类似记号.

例1.2.1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

解 $D \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}}{\underset{r_4-2r_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} \overset{r_3+2r_2}{\underset{r_4+2r_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - \frac{17}{16} r_3} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-13) \times 16 \times \frac{3}{2} = -312$$

例1.2.2　试证

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$$

解：

$$\underline{\underline{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{matrix}}} \quad D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_2]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

例1.2.3　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解:

$$D_n \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ 1 & a & b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_i-r_1}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

练习：P13　习题1.2　第1(1)题.

最后，介绍两类特殊的行列式.在行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中，若 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ ，则称 D为对称行列式(Symmetrical determinant)；若 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\ldots,n)$,则称D为反对称行列式(skew-symmetric determinant). 由定义易知,在反对称行列式中, $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

例1.2.4　试证奇数阶反对称行列式等于0.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

是一个反对称行列式, n为奇数. 将 D的行列互换, 并在每一行中提出公因子(-1), 得

$$D = D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -D$$

所以 $D = 0$

作业：P13 习题1.2　第1(2)(3)(5)；

2(1)(2) 题.