北京航空航天大学
国际学院

线性代数

§4. 3线性方程组解的结构

4. 3. 1 齐次线性方程组解的结构

4. 3. 2 非齐次线性方程组解的结构

4.3.1 齐次线性方程组解的结构

设n元齐次线性方程组

$$AX = 0$$

其中$A=(a_{ij})_{m\times n}$为系数矩阵, $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$.

齐次线性方程组的解的性质

性质1 齐次线性方程组的两个解向量的和仍为它的解向量.

性质2 齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个解向量乘以常数 k 仍为它的解向量.

注:

由性质1和性质2可知, n元齐次线性方程组解向量的集合为一向量空间, 称为它的解空间, (solution space)它是n维向量空间的一个子空间.

定义4. 3. 1 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$是齐次线性方程组$Ax = 0$的一组解向量，并且

（1） $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$线性无关；

（2） 方程组$Ax = 0$的任意一个解向量均可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 线性表出.

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$是齐次方程组$AX = 0$的一个基础解系.(**basic system of solution**）

定理4.3.1 如果齐次线性方程组$AX=0$的系数矩阵A的秩$R(A)=r<n$, 则方程组有基础解系, 并且任一基础解系中含有$n-r$个解向量.

证 因为$R(A) = r <n$, 所以A中至少有一个r阶子式不为零, 不妨设A中位于左上角的r阶子式不为零, 按照定理4.2.1同样的方法, 方程组有无穷多解, 并且

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n, \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

其中$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$为自由未知量. 写成向量形式, 有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ c_{2,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \begin{pmatrix} c_{1,r+2} \\ c_{2,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+2} + \cdots + \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n$$

逐次取自由未知量 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$ 为$(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$则得

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ c_{2,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} c_{1,r+2} \\ c_{2,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此即为方程组的 $n-r$ 个解向量.

下面证明$a_1, a_2,\ldots, a_{n-r}$是方程组的一个基础解系.

首先它可以看成是在 $n-r$ 个 $n-r$ 维基本单位向量$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$中的每个向量上添加个分量而得到的, 所以$a_1, a_2, \ldots, a_{n-r}$线性无关.

其次, 设$a = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$是方程组的任意一个解向量, 将解的表达式写成向量形式, 有

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ c_{2,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k_{r+1} + \begin{pmatrix} c_{1,r+2} \\ c_{2,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k_{r+2} + \cdots + \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} k_n$$

即 $\alpha = k_{r+1}\alpha_1 + k_{r+2}\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_{n-r}$

这意味着方程组的任意解向量 α 均可由 α_1, α_2, …, α_{n-r} 线性表出. 于是当$R(A) = r < n$ 时, 方程组$AX = 0$存在基础解系, 它的基础解系中含有$n-r$个解向量. 证毕.

说明：如果齐次线性方程组$AX=0$的基础解系为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$$

那么$AX=0$的通解（或全部解）为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中$k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$为任意常数.

例4.3.1　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

的一个基础解系, 并写出解的结构.

解　对系数矩阵A作行初等变换, 化为最简阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1 \qquad +\dfrac{3}{2}x_3+x_4=0,\\ \qquad x_2-\dfrac{7}{2}x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

因$R(A) = 2$, 方程组有基础解系, 其中含有$n-R(A) = 4-2 = 2$个线性无关的解向量. 取x_3, x_4为自由未知量, 分别令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,得方程组的一个基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故原方程组的通解为$X = k_1a_1+k_2a_2$, 其中k_1, k_2为任意常数.

更一般做法:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $R(A)=2$, 因此基础解系有2个向量.

原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

因此方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

将其写为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_4 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \end{cases}$$

得方程组的通解为

$$X = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

x_3, x_4 为任意常数.

记为 $X = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 (k_1, k_2$ 为任意常数).

------ 解的结构式

显然 α_1, α_2 是两个线性无关的解向量,
即为基础解系.

例4.3.2 设A为 $m\times n$ 矩阵, B为 $n\times k$ 矩阵. 若$AB=0$, 证明 $R(A)+R(B)\leq n$.

证 设 $B=(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ 由$AB=O$, 则

$$AB=A\left(B_1, B_2, \cdots, B_k\right)=\left(AB_1, AB_2, \cdots, AB_k\right)=0$$

即

$$AB_1=0, AB_2=0, \cdots, AB_k=0$$

从而的列向量$B_1, B_2, \ldots, B_k$均为齐次线性方程组$AX=O$的解向量.

若$R(A) = r<n$, 则方程组AX=0有基础解系a_1, a_2, …, a_{n-r},于是B_1, B_2,…, B_k都可由a_1, a_2, …, a_{n-r} 线性表出, 由定理3.3.2

$$R\{B_1, B_2, \cdots, B_k\} \le R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}\}.$$

即

$$R(B) \le n - r = n - R(A),$$

所以

$$R(A) + R(B) \le n$$

若$R(A) = n$, 则$AX = 0$只有零解, 此时$B_1 = \ldots = B_k = 0$, 即$B = 0$, 从而$R(B) = 0$, 结论依然成立.

例4.3.3 设A是 $m\times n$ 阶实矩阵, 证明: $R(A^TA)=R(A)$.

证 作齐次线性方程组

$$AX=0 \text{ 或 } A^TAX=0$$

其中$X=(x_1, x_2,\dots, x_n)^T$. 显然, $AX=0$的解必定是$A^TAX=0$的解.

反之, 若X_0是$A^TAX=0$的解, 则

$$A^TAX_0=0$$

从而 $$X_0^TA^TAX_0=0$$

即
$$(AX_0)^T(AX_0)=0$$

设 $AX_0=(a_1, a_2,\ldots, a_m)^T$, 由上式

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2=0$$

由于$a_1, a_2, \ldots, a_m$都是实数, 所以

$$a_1=a_2=\cdots=a_m=0$$

即
$$AX_0=0$$

因此 X_0 也是 $AX=0$ 的解.

于是$AX=0$与$A^TAX=0$同解, 由于同解线性方程组的基础解系中含有相同个数的解向量, 所以

$$\boldsymbol{R(A) = R(A^T A)}.$$

推论：若齐次线性方程组$AX = 0$和 $BX = 0$同解, 则 $R(A) = R(B)$.

4.3.2 非齐次线性方程组解的结构

设n元非齐次线性方程组

$$AX = b$$

其中$A=(a_{ij})_{m\times n}$为系数矩阵，$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $b = (b_1,b_2, \ldots,b_n)^T$.

在$AX = b$ 中，令 $b = 0$，得到的齐次方程组 $AX = 0$ 称为方程组的导出组，或称为方程组 $AX = b$ 的对应齐次线性方程组.

非齐次线性方程组解的性质：

性质1　设X_1, X_2是非齐次线性方程组$AX = b$的任意两个解向量, 则$X_1 - X_2$是其导出组$AX = 0$的解向量.

性质2　非齐次线性方程组 $AX = b$ 的某一个解向量X_0与其导出组的任意一个解向量a之和仍为$AX = b$的解向量.

定理4. 3. 2 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 满足 $R(A)=R(\overline{A})=r<n$，X_0是它的一个解向量, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ 是它的导出组$AX=0$ 的一个基础解系, 则方程组$AX=b$ 的通解可表为

$$X = X_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中$k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$为任意常数.

证 设X_1是方程组 $AX=b$ 的任意一个解向量, 由非齐次线性方程组的解向量的性质1, X_1-X_0是其导出组$AX=0$的解向量, 于是它可由其基础解系α_1, α_2, …, α_{n-r}线性表出, 即

$$X_1-X_0=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

从而有

$$X_1=X_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

证毕.

例4.3.4　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 21. \end{cases}$$

的通解.

解 (1) 先求方程组的一个特解.

对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3 & 7\\ 3 & -6 & 4 & 2 & 7\\ 4 & -8 & 17 & 11 & 21\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3 & 7\\ 0 & 0 & -7/2 & -5/2 & -7/2\\ 0 & 0 & 7 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & -4/7 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -2/7 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(A) = A(\overline{A}) = 2 < 4$, 故方程组有无穷多个解, 它的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \dfrac{2}{7}x_4 = 1, \\ x_3 + \dfrac{5}{7}x_4 = 1. \end{cases}$$

取x_2, x_4为自由未知量,令$x_2 = x_4 = 0$, 得方程组的一个特解

$$X_0 = (1, \quad 0, \quad 1, \quad 0)^T$$

(2) 再求它的导出组的通解.

方程组的导出组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \frac{2}{7}x_4 = 0, \\ x_3 + \frac{5}{7}x_4 = 0. \end{cases}$$

同样取x_2, x_4为自由未知量.

令x_2=1, x_4=0, 得解 $\alpha_1 = (2,\ 1,\ 0,\ 0)^T$

令x_2=0, x_4=1, 得解 $\alpha_2 = (\frac{2}{7},\ 0,\ -\frac{5}{7},\ 1)^T$

则α_1, α_2为导出组的一个基础解系.于是导出组的通解为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

其中k_1, k_2为任意常数.

(3) 由非齐次线性方程组解的结构, 得方程组的通解为

$$X = X_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

其中k_1, k_2为任意常数.

更一般做法:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2/7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \dfrac{2}{7}x_4 = 1, \\ x_3 + \dfrac{5}{7}x_4 = 1. \end{cases}$$

于是方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4 + 1 \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}x_4 + 1 \end{cases}$$

x_2, x_4 为任意常数.

写成下面的形式

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \dfrac{2}{7}x_4 + 1 \\ x_2 = 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 + 0 \\ x_3 = 0 \cdot x_2 - \dfrac{5}{7}x_4 + 1 \\ x_4 = 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_4 + 0 \end{cases}$$

再将其写成向量形式

$$X = k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

k_1, k_2 为任意常数.

说明: 若将上述通解记为

$$X = X_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

则 α_1, α_2 为原方程组的导出组的基础解系, X_0 为原方程组的一个特解.

方程组 $AX = b(AX = O)$ 的求解过程:

(1) 将方程组的增广矩阵 (或系数矩阵) 化为阶梯形(判断解的情形);

(2) 若方程组有无穷多解或唯一解, 继续将增广矩阵 (或系数矩阵) 化为简化阶梯形;

(3) 根据简化阶梯形写出原方程组的等价方程组及一般解(唯一解时直接写出结果);

(4) 再将上述一般解转化为向量形式, 按要求向量形式中可以得到$AX = b$ 的特解或$AX = O$ 的基础解系.

例4.3.5 设$X_1=(1,0,0)^T$, $X_2=(1,1,0)^T$, $X_3=(1,1,1)^T$为非齐次线性方程组 $AX=b$的三个解向量, 且 $A\neq O$.

(1) 求其导出组$AX=0$的通解；

(2) 求$AX=b$的通解.

解 (1) 由题设条件, $AX=O$为三元齐次线性方程组, 且$1\leq R(A)<3$, 由非齐次线性方程组解的性质1, $\alpha_1=X_2-X_1=(0,1,0)^T$, $\alpha_2=X_3-X_2=(0,0,1)^T$为 $AX=0$的解向量, 由于α_1, α_2线性无关及$A\neq O$, 所以$R(A)=1$, 于是α_1, α_2 为$AX=O$ 的基础解系. 故$AX=O$的通解为

$$\boldsymbol{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2}$$ 其中k_1, k_2为任意常数.

(2) 由非齐次线性方程组解的结构, 知方程组 $AX = b$ 的通解为

$$X = X_1 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

其中k_1, k_2为任意常数.

例4.3.6　已知向量

$$\beta=(1,3,-3)^T,\alpha_1=(1,2,0)^T,$$

$$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$$

试讨论a, b为何值时,

(1) β不能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示;

(2) β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一地表示, 并求出表示式;

(3) β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$表示, 但表示式不惟一, 并求出表示式.

解　作线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$$

对上述线性方程组的增广矩阵做初等行变换，有

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 当$a=0, b=0$时, $\boldsymbol{R(A)=1}$, $\quad \boldsymbol{R(\overline{A})=2}$, 方程组无解; 当$a=0, b\neq 0$时, $R(A)=1$, $\boldsymbol{R(\overline{A})=3}$, 方程组也无解.

因此, 当$a=0$, b为任意值时, 方程组无解, 即β不能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

(2) 当$a\neq 0$且$a\neq b$时

$$\overline{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1-1/a\\ 0 & 1 & 0 & 1/a\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

这时方程组有唯一解:

$$x_1 = 1-\frac{1}{a}, x_2 = \frac{1}{a}, x_3 = 0$$

从而有唯一表示式:

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2$$

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时， $\boldsymbol{R(A)=R(\overline{A})=2,}$

方程组有无穷多个解, 这时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-a&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&1/a\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-1/a\\0&1&-1&1/a\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

于是得原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 & = 1 - \dfrac{1}{a}, \\ x_2 - x_3 & = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

取x_3为自由未知量, 令 $x_3 = k$, 得方程组的一个解:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{a}, \quad x_2 = k + \frac{1}{a}, \quad x_3 = k$$

从而有表示式:

$$\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + (k + \frac{1}{a})\alpha_2 + k\alpha_3$$

其中k为任意常数.

例4.3.7 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

证明 **必要性** 设三直线交于一点,则方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c \\ bx+2cy=-3a \\ cx+2ay=-3b \end{cases}$$

有唯一解, 故系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$$

的秩均为2, 于是 $\left|\overline{A}\right|=0$,而

$$\left|\overline{A}\right|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}$$

$$=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

因 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \neq 0$

故 $a+b+c=0.$

充分性 由 $a+b+c=0$, 则 $|\overline{\boldsymbol{A}}| = \mathbf{0},$

所以 $R(\overline{A})<3.$

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -[a(a+b)+b^2]$$

$$= -2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2] \neq 0$$

故 $R(A) = 2.$

于是 $R(A) = R(\overline{A}) = 2$

因此方程组有唯一解, 即三直线交于一点.

作业: P122 习题4.3 第2(1)(3);4;6;7.