系统建模与仿真
基本模型的建立方法与实例

宋　晓　(Song Xiao)

Email : Songxiao@buaa.edu.cn

§ 例1 双层玻璃的功效

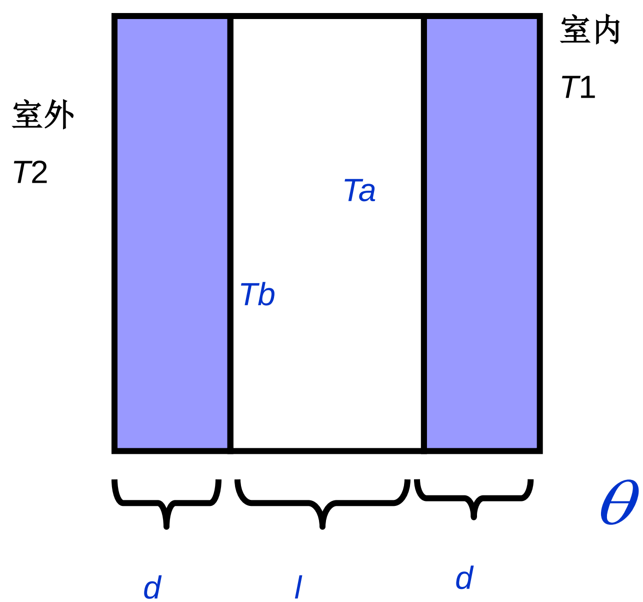
在寒冷的北方， 许多住房的 玻璃窗都是双层玻璃的，现在我们来建立一个简单 的数学模型，研究一下双层玻璃到底有多 大的功效。比较两座其他条件完全相同的房屋，它们的差异仅仅在窗户不同。

不妨可以提出以下 假设：

1、设室内热量的流失是热传导引起的，不存在户内外的空气对流。

2、室内温 度$T1$与户外温 度$T2$均为常数。

3、玻璃是均匀的，热传导系数为常数。



设玻璃的热传导系数 为$k1$，空气的热传导系数 为$k2$，单位时间通过单位面积由温度高的一侧流向温度低的一侧的热量为θ

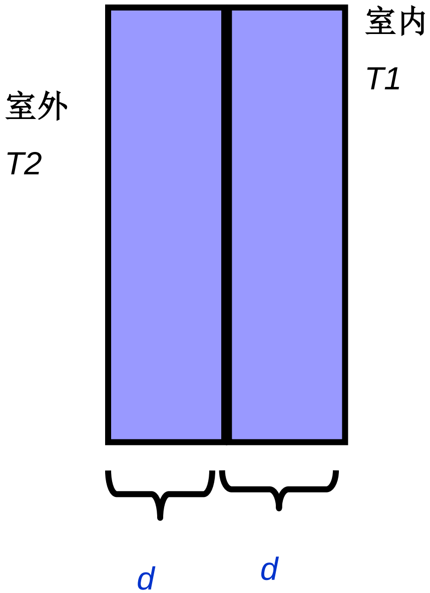
由热传导公式 $\theta=k\Delta T/d$

$$\theta = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

解得：

$$T_a = \frac{(1 + k_1 l / k_2 d) T_1 + T_2}{2 + (k_1 l) / (k_2 d)}$$

$$\theta = k_1 \frac{T_1 - \dfrac{(1 + k_1 l / k_2 d) T_1 + T_2}{2 + k_1 l / k_2 d}}{d} = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(2 + k_1 l / k_2 d)}$$

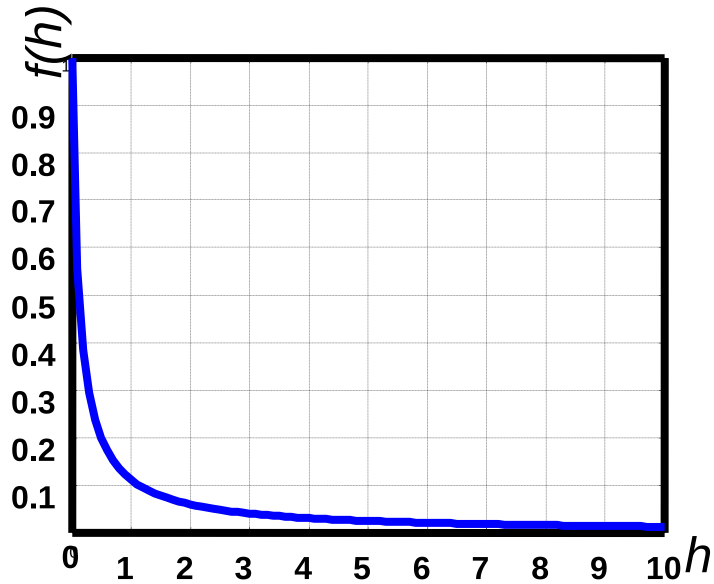


类似有 $$\theta' = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{2}{2 + (k_1 l)/(k_2 d)}$$

一般 $$\frac{k_1}{k_2} = 16 \sim 32$$ 故 $$\frac{\theta}{\theta'} \le \frac{1}{1 + 8l/d}$$

记$h=l/d$并令$f(h)=\dfrac{1}{8h+1}$ 此函数的图形为



考虑到美观和使用上 的方便，h不必取得过大，例如，可 取$h=4$，即$l=4d$，此时房屋热量的损失不超过单层玻璃窗时的 **3%** 。

§ 例2 赛艇成绩的比较(比例模型)

McMahon发现赛艇比赛冠军成绩与桨手数量之间存在某种联系，那么建立什么样的模型来拟合？

Types of boats	2000m Score t/min					boat length l/m	boat width b/m	l/b	boat weight w0/kg Number of paddles n
	1	2	3	4	Average				
Single crew	7.16	7.25	7.28	7.17	7.21	7.93	0.293	27	16.3
Two crews	6.87	6.92	6.95	6.77	6.88	9.76	0.356	27.4	13.6
Four crews	6.33	6.42	6.48	6.13	6.32	11.75	0.574	21	18.1
Eight crews	5.87	5.92	5.82	5.73	5.84	18.28	0.61	30	14.7

考察优秀赛艇选手在比赛中的实际表现可以发现，整个赛程大致可以分三个阶段， 即初始时刻的加速阶 段、中途的匀速阶段和到达终点的冲刺阶段 。由于赛程较长，可以略去前后两段而只考虑中间一段，为此，提出以下建模假设。

（1）设赛艇浸水部分的摩擦力是唯一阻力,阻力f正比 于sv^2,（见流体力学），空气阻力等其他因素不计。
（2）同一量级的选手有相同的体重***w***，选手的输出功 率***p***正比于***w***，且效率大体相同。

那么，$np \propto fv \propto sv^3, p \propto w$ 　　故 $v \propto \left(\frac{n}{s}\right)^{1/3}$

c: *艇的某特征尺寸*，$s \propto c^2,\ A \propto c^3,\ s \propto A^{2/3}$ 　A: 艇排水体积

艇重w_0与选手数n成正比，所以艇和选手的总质量$w' = w_0 + nw$也与n成正比

$$w' \propto n,\quad A \propto w',\quad s \propto n^{2/3},\quad t \propto n^{-1/9}$$

$$t = \alpha n^{\beta}, \quad \log t = \alpha' + \beta \log n, \quad \alpha' = \log \alpha$$

利用最小二乘法拟合上式，得到

$$t = 7.21 n^{-0.111}$$

可以看出这个结果与 $t \propto n^{-1/9}$ 吻合得相当好，但恐怕有很大成分的巧合。

§ 例3 崖高的估算

假如你站在崖顶且身上带着一只具有跑表功能的计算器，
你也许会出于好奇心想用扔下 一块石头听回声的方法来
估计山崖的高度， 假定你能准确地测定时间，你又怎样来推算
山崖的高度呢，请你分析一下这一问题。

方法一

假定空气阻力不计，可以直接利用自由落体运动的公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

来计算。例如， 设$t=4$秒，$g=9.81$米/秒^2，则可求得$h\approx 78.5$米。

用微分建模，我们可以做 得更好。

除去地球吸引力外，对石块下落影响最大的当 属空气阻力。根据流体力学知识，此时可设空气阻力正比于石块下落的速度，阻力系 数*K*为常数，因而，由牛顿第二定律可得：

$$F = m\frac{dv}{dt} = mg - Kv$$

令$k=K/m$，解得

$$v = ce^{-kt} + \frac{g}{k}$$

代入初始条件 $v(0)=0$，得$c=-g/k$，故有

$$v = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}e^{-kt}$$

再积分一次，得：

$$h = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + c$$

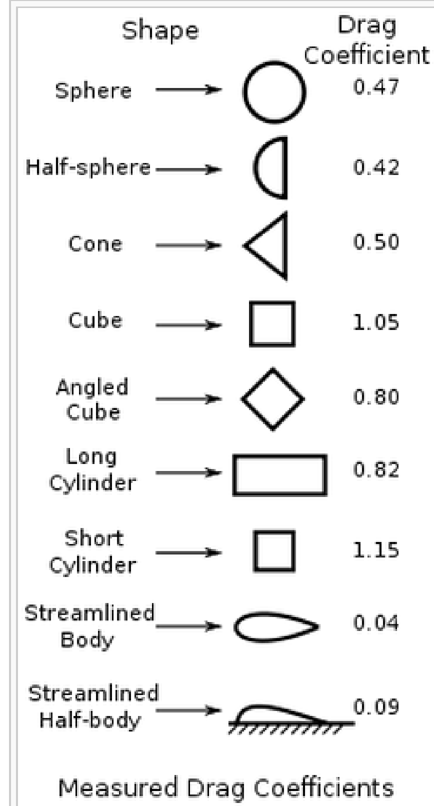
代入初始条 件$h(0)=0$，得到计算山崖高度的公式：

$$h = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} - \frac{g}{k^2} = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) - \frac{g}{k^2} \qquad ①$$

若设$k=0.05$并仍设 $t=4$秒，则可求 得$h\approx 73.6$米。

$$c_d = K = 2F_d/(\rho v^2 A)$$

标况下，空气密度约为$1.29 kg/m^3$



Drag coefficients in fluids with Reynolds number approximately 10^4

假设石子10cm*10cm，C_d 为1， v为10， 石子重100克

k = ？ ？ ？

进一步深入考虑

听到回声再按跑表，计算得到的时间中包含了 反应时间

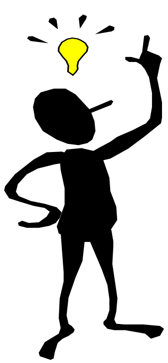
不妨设平均反应时间 为0.1秒 ，假如仍 设t=4秒，扣除反应时间后应 为3.9秒，代入 式①，求得h≈69.9米。

再一步深入考虑

还应考虑回声传回来所需要的时间。为此，令石块下落 的真正时间 为$t1$，声音传回来的时间记 为$t2$，还得解一个方程组：

$$\begin{cases} h = \dfrac{g}{k}\left(t_1 + \dfrac{1}{k}e^{-kt_1}\right) - \dfrac{g}{k^2} \\ h = 340t_2 \\ t_1 + t_2 = 3.9 \end{cases}$$

这一方程组是非线性的，求解不太容易



相对于石块速度，声音速度要快得多，我们可 先求一次 h，令 $t2=h/340$，校正t，求石块下落时间 $t1≈t-t2$将$t1$代入式①再算一次，得出崖高的近似值。例如， 若h=69.9米，则 $t2$≈0.21秒，故 $t1$≈3.69秒，求得 h≈62.3米。

小 结

- 基本比例模型的建立方法
- 微分模型的建立方法
- 模型与实际数据的比对

§ 例4 简单优化- 存储模型

考察这样的问题，配件厂为装配线生产若干种部件，轮换生产不同的部件时因更换设备要付生产准备费（与生产数量无关），同一部件的产量大于需求时因积压资金、占用仓库要付存储费。

今已知某一部件的日需求量**100**件，生产准备费**5000**元，存储费每日每件**1**元。如果生产能力远大于需求，并且不允许出现缺货，试安排该产品的生产计划，即多少天生产**1**次（称为生产周期），每次产量多少，可使总费用最小。

问题分析：

1、若每天生产**1**次，每次**100**件，无储存费，生产准备费**5000**元，每天费用**5000**元。

2、若**10**天生产**1**次，每次**1000**件，储存费**900+800+…+ 100= 4500**元，生产准备费**5000**元，总计**9500**元，平均每天**950**元。

3、若**50**天生产**1**次，每次**5000**件，储存费**4900+4800+…+ 100= 122500**元，生产准备费**5000**元，总计**127500**元，平均每天**2550**元。

§ 例3 简单优化- 存储模型

考察这样的不允许缺货的存储模型：产品需求稳定不变，生产准备费和产品储存费为常数、生产能力无限、不允许缺货，确定生产周期和产量，使总费用最小。

不妨可以提出以下 假设：

1、产品每天的需求量为常数r。

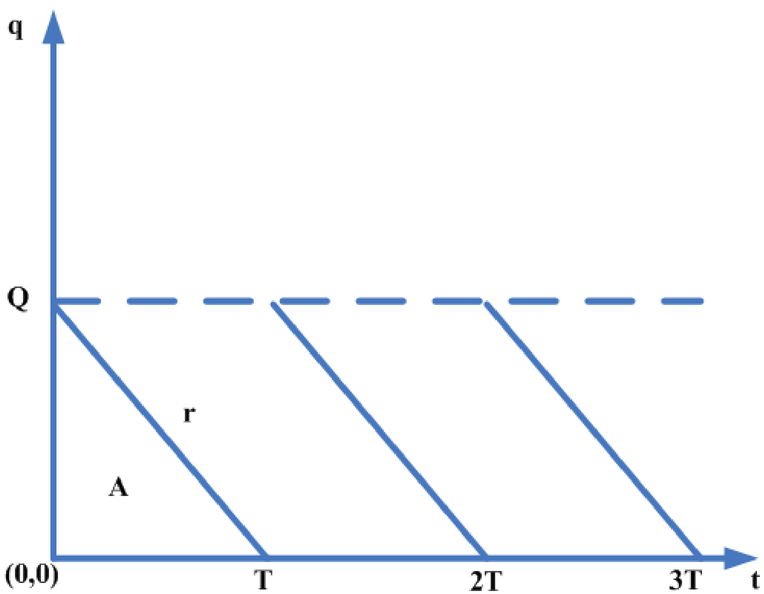
2、每次生产准备费为$c1$，每天每件产品存储费为$c2$。

3、生产能力（相对需求量）为无限大，当储存量降到0时，Q件产品立即生产出来供给需求，即不许缺货。

§ 例3 简单优化- 存储模型

模型建立：将存储量表示为时间t的函数q(t)，t=0生产Q件， 存储量q(0)=Q，q(t)以需求速率r递减，直到q(T) = 0，如下图。

那么有 Q = rT



不允许缺货的存储量q(t)

一个周期内的储存费是 $c_2\int_0^T q(t)dt$

此积分等于图中三角形A的面积 QT/2 .

1、一个周期的总费用：

$$\bar{C} = c_1 + c_2 QT/2 = c_1 + c_2 rT^2/2$$

2、于是每天的平均费用

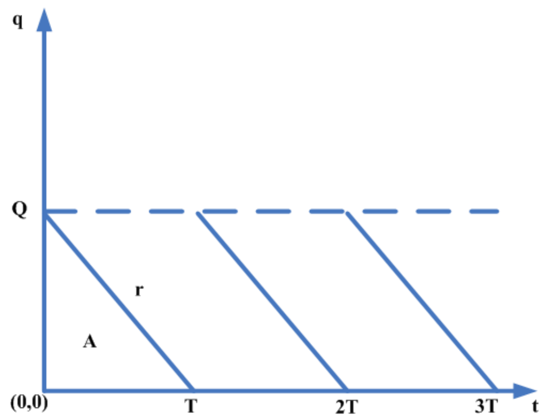
$$C(T) = c_1/T + c_2 rT/2 \quad (3)$$

此式为这个优化模型的目标函数。

§ 例3 简单优化- 存储模型

$$C(T) = c_1/T + c_2 rT/2 \quad (3)$$

模型求解：求T使（3）的C最小



容易得到

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \quad (4)$$

因为Q = rT

所以

$$Q = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} \quad (5)$$

总费用

$$C = \sqrt{2c_1 c_2 r}$$

结果解释：

当准备费c1增加时，生产周期和产量都变大；当存储费c2增加时，生产周期和产量都变小；当需求量r增加时，生产周期变小而产量变大。这些定性结果都是符合常识的。

但定量关系很难猜出。

(4),(5)就是经济学中著名的经济订货批量公式

EOQ：Economic Order Quantity

§ 例3 简单优化- 存储模型

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad (4)$$

结果解释：用的到的模型计算 开始的问题，c1=5000,c2=1,r=100,计算出T=10，C=1000元，这里得到的C与前面计算的950元有些出入，如何解释？

敏感性分析

$$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{dT/T}{dc_1/c_1} \qquad (7)$$

算出

$$S(T,c_1)=1/2,\ S(T,c_2)=-1/2,\ S(T,r)=-1/2.$$

所以 c1,c2,r 的微小变化对T的影响较小。

习题3.1，考虑生产费用。

习题3.2，如果生产能力有限，不是无限大，但大于需求量。

§ 例3 简单优化- 存储模型

考察这样的允许缺货的存储模型：产品需求稳定不变，生产准备费和产品储存费为常数、生产能力无限、允许缺货，确定生产周期和产量，使总费用最小。

不妨可以提出以下 假设：

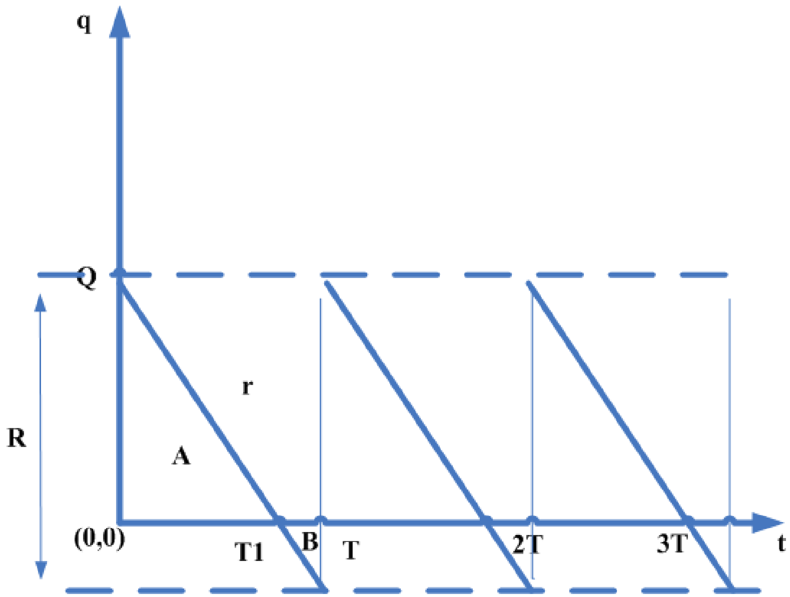
1、产品每天的需求量为常数r。

2、每次生产准备费为$c1$，每天每件产品存储费为$c2$。

3、生产能力（相对需求量）为无限大，允许缺货，每天每件产品缺货损失费为$c3$，但缺货数量需在下次生产（或订货）时补足。

§ 例3 简单优化- 存储模型

模型建立：**q(t)**可为负值， **t=0**生产**Q**件， 存储量 **Q=rT1,** 在**T1**到**T**这段缺货时段内需求率**r**不变，**q(t)**以需求速率**r**继续下降。由于规定缺货量补足，所以**t=T**时数量为**R**的产品立即到达，是下周期初的存货量恢复到**Q**。



允许缺货的存储量q(t)

与不允许缺货模型类似，一个周期内的储存费是**c2**乘以**A**的面积，缺货损失费是**c3**乘以**B**的面积，一个周期总费用：

$$\bar{C} = c_1 + c_2 Q T / 2 + c_3 r (T - T_1)^2 / 2$$

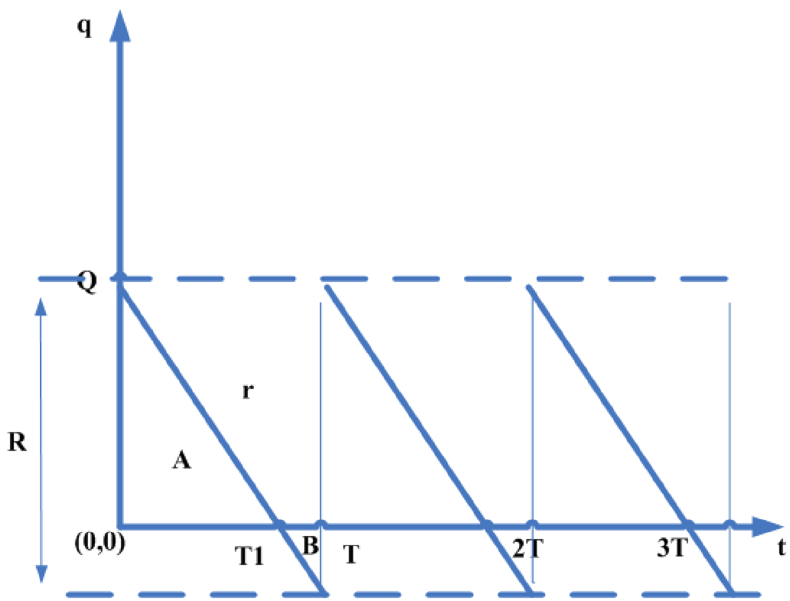
每天的平均费用：

$$C(T, Q) = c_1 / T + c_2 Q^2 / (2rT) + c_3 (rT - Q)^2 / (2rT)$$

存储模型

$$C(T,Q)=c_1/T+c_2Q^2/(2rT)+c_3(rT-Q)^2/(2rT)$$

利用微分法求T和Q使C（T，Q）最小， $\partial C/\partial T=0, \partial C/\partial Q=0$



得到 $T'=\sqrt{\dfrac{2c_1(c_2+c_3)}{c_2rc_3}}, \quad Q'=\sqrt{\dfrac{2c_1r\ c_3}{c_2(c_2+c_3)}}$ **(11)**

因为**R = rT'** $R=\sqrt{\dfrac{2c_1r\ (c_2+c_3)}{c_2\ c_3}}$

所以

$$T'=\lambda T, Q'=Q/\lambda, R=\lambda Q$$

$$\lambda>1 \qquad T'>T, Q'<Q, R>Q$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{(c_2+c_3)}{c_3}}$$

即允许缺货时周期及供货量应增加，周期初的储存量减少 。缺货损失费c3越大，λ越小，T'越接近于T，R越接近于Q。