动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

模型1 已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}=\lambda i, \quad i(0)=i_0$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2　区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触率为λ，且使接触的健康人致病

λ ~ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

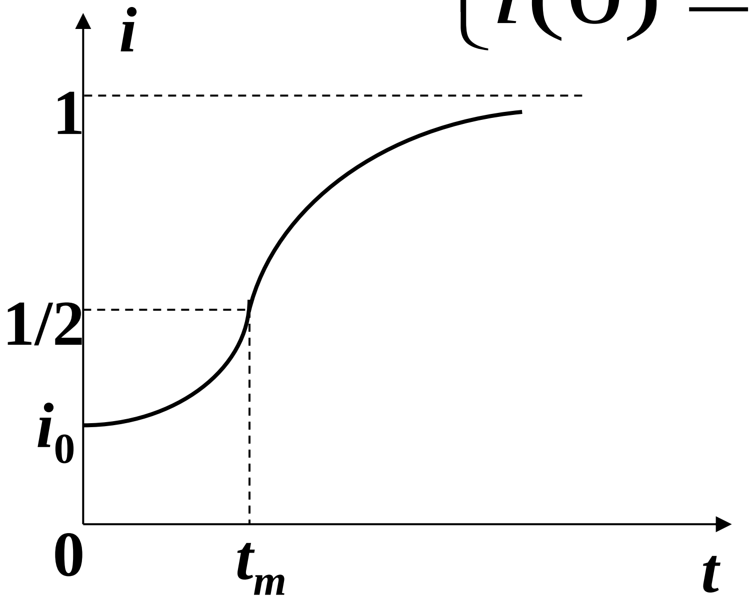
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$ **?**

病人可以治愈！

模型3

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设

3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ~日接触率

$1/\mu$~感染期

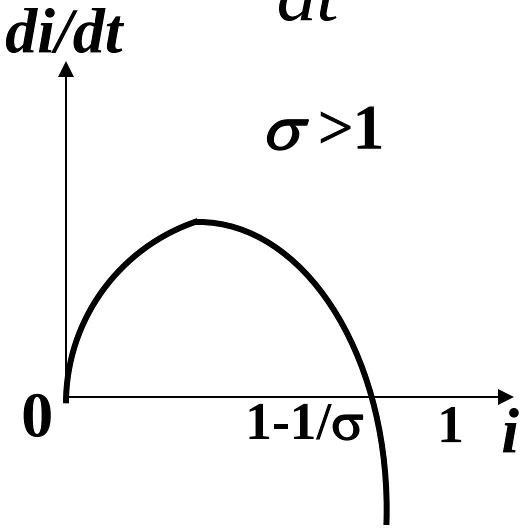
$\sigma=\lambda/\mu$

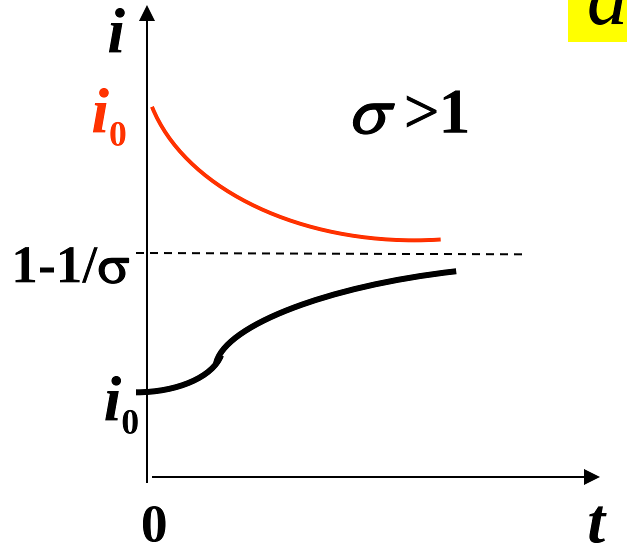
σ~一个感染期内每个病人的有效接触的平均人数，称为接触数。

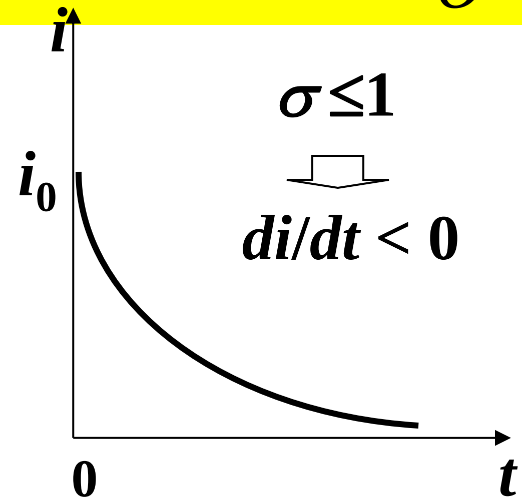
模型3

$$\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \quad \sigma=\lambda/\mu$$

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma\le 1 \Rightarrow i(t)\downarrow$

$\sigma>1$, i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4　传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases}$$

$i_0+s_0\approx 1$（通常$r(0)=r_0$很小）

⇒ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

⇓

在相平面 $s\sim i$ 上研究解的性质

模型4

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

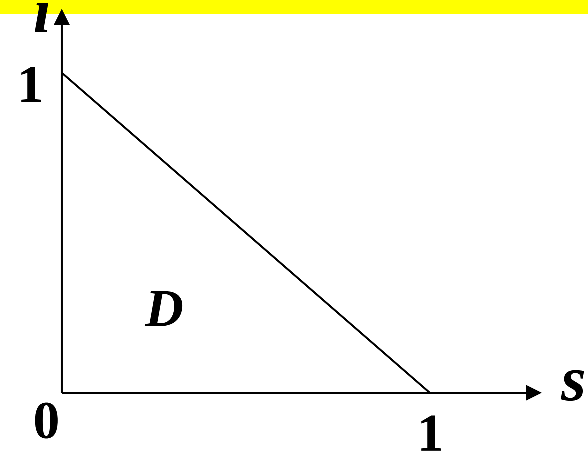
相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i) \mid s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$

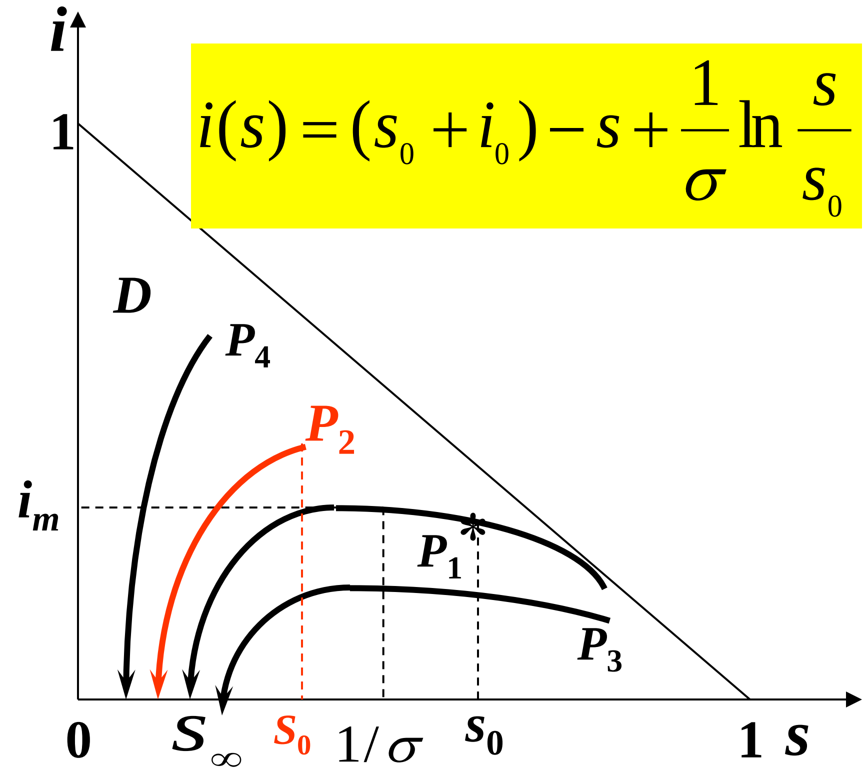
在D内作相轨线$i(s)$的图形，进行分析



模型4　相轨线 $i(s)$ 及其分析　SIR模型

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\[2mm]\dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\[2mm] i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\[2mm] i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$

$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s=1/\sigma,\ i=i_m \qquad t\to\infty,\ i\to 0$$

s_∞满足 $s_0+i_0-s_\infty+\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1: $s_0>1/\sigma$ → $i(t)$先升后降至0 ⇨ **传染病蔓延**

P_2: $s_0<1/\sigma$ → $i(t)$单调降至0 ⇨ **传染病不蔓延**

$1/\sigma$ ~ 阈值

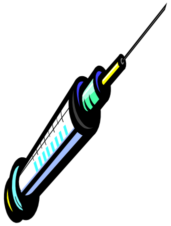
模型4 预防传染病蔓延的手段 SIR模型

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ $\Rightarrow$ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ $\Rightarrow$ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

  λ(日接触率)$\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平$\uparrow$

  μ(日治愈率)$\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平$\uparrow$



- 降低 s_0 $\Rightarrow$ 提高 r_0 $\Rightarrow$ 群体免疫

$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略i_0

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

模型4　被传染人数的估计　SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

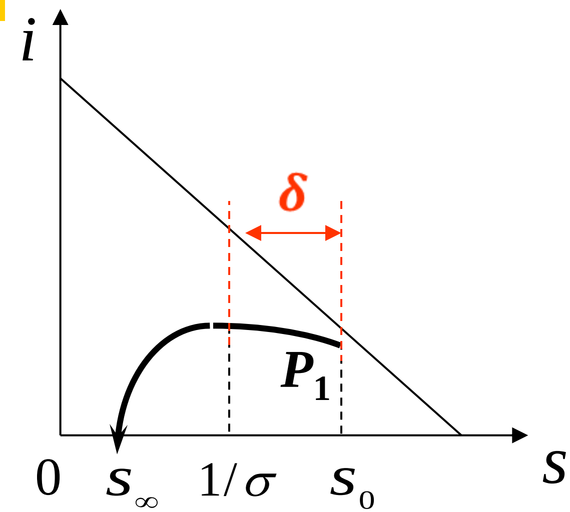
$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln(1 - \frac{x}{s_0}) \cong 0$$

$x << s_0$

$$x(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}) \cong 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma(s_0 - \frac{1}{\sigma})$$



$s_0 - 1/\sigma = \delta$

δ小, $s_0\sigma \cong 1$

$$x \cong 2\delta$$

提高阈值$1/\sigma$ →降低被传染人数比例 x