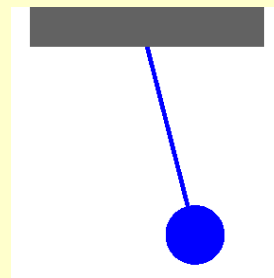


微分方程模型

北京航空航天大学自动化学院

songxiao@buaa.edu.cn

§ 微分方程的几个简单实例



在许多实际问题中，当直接导出变量之间的函数关系较为困难，但导出包含未知函数的导数或微分的关系式较为容易时，可用建立微分方程模型的方法来研究该问题，

本节将通过一些最简单的实例来说明微分方程建模的一般方法。在连续变量问题的研究中，微分方程是十分常用的数学工具之一。

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \cdots + a_n(t)y^0 = 0$$

则被称为方程对应的 **n** 阶常系数齐次线性微分方程。

根据特征根的不同情况，求齐次方程的通解

情况1 若特征方程 $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 有 n 个互不相同的实根

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ，则齐次方程的通解为

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (C_1, \dots, C_n \text{ 为任意常数})$$

情况2 若 λ 是特征方程的 k 重根，通解中对应于 λ 的项为 $(\bar{C}_1 + \cdots + \bar{C}_k t^{k-1}) e^{\lambda t}$

\bar{C}_i 为任意常数， $i=1, \dots, k$ 。

情况3 若特征方程有单重复根

$$\lambda = a \pm \beta i$$

通解中对应它们的项为 $\bar{C}_1 e^{at} \cos \beta t + \bar{C}_2 e^{at} \sin \beta t$

例1 （理想单摆运动） 建立理想单摆运动满足的微分方程，并得出理想单摆运动的周期公式。

(3.1) 的
近似方程

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

(3.2) 的解为: $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

当 $t = \frac{T}{4}$ 时, $\theta(t) = 0$

故有 $\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$

由此即可得出

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

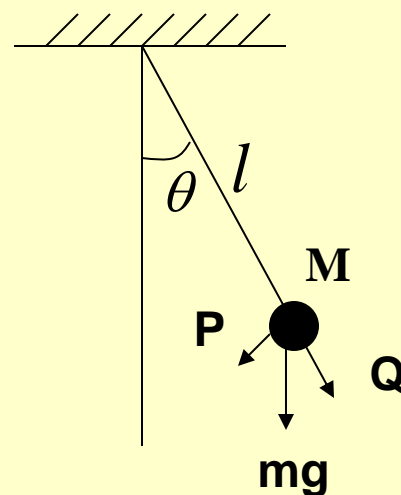


图3-1



§ 例2 Lanchester战争模型

简单的预测正规战与游击战结局的模型：只考虑双方兵力的多少和战斗力的强弱，并且，使用常规武器。

战斗力与射击率（单位时间的射击次数）、射击命中率以及战争类型有关。不考虑政治、经济等复杂因素。预测结果应该只适用于简单的局部战争。只是提供建模参考。

问题分析：

- 1、 $x(t)$, $y(t)$ 表示甲乙双方 t 时刻的兵力，即人数。
- 2、减员率取决于双方的兵力和战斗力， $f(x, y)$, $g(x, y)$ 。
- 3、非战斗减员率（疾病、逃跑）只与本方兵力成正比。
- 4、增援率： $u(t)$, $v(t)$ 。





§ 例2 Lanchester战争模型

$x(t)$, $y(t)$ 的微分方程:

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{x}(t) &= -f(x, y) - \alpha x + u(t), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{y}(t) &= -g(x, y) - \beta y + v(t), \quad \beta > 0 \end{aligned}$$

正规战争模型

甲乙双方都用正规部队作战。甲方减员率只与乙方兵力有关，可假设 f 与 y 成正比， $f=ay$. a 表示乙方平均每个士兵对甲方的杀伤率，称乙方的战斗有效系数。

a 可进一步分解为 $a=r_y p_y$, r_y 是乙方射击率(单位时间设计次数)， p_y 是射击命中率。

类似的， $g=bx$, $b=r_x p_x$

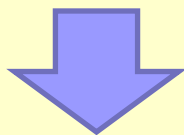


§ 例2 Lanchester战争模型

$x(t)$, $y(t)$ 的微分方程:

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{x}(t) &= -ay - \alpha x + u(t), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{y}(t) &= -bx - \beta y + v(t), \quad \beta > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{x}(t) &= -ay \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{y}(t) &= -bx \end{aligned}$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

由方程可知, $x(t), y(t)$ 都是单调减函数, 不妨认为兵力先减至0的一方为负方。

为了得到双方胜负的条件, 不必直接求解此方程组, 而可以在相平面上讨论相轨迹的变化规律



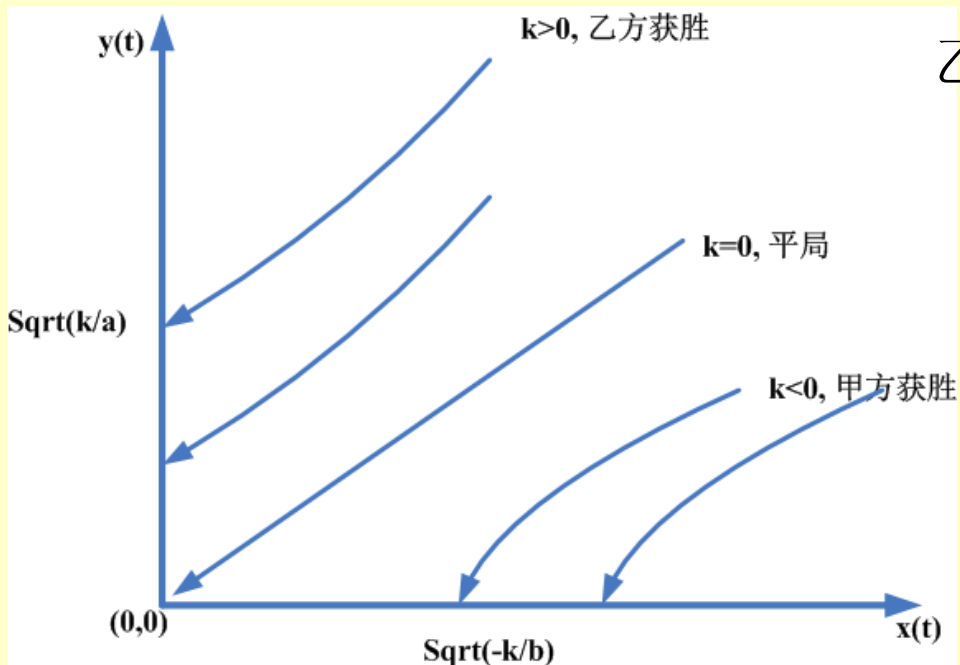
§ 例2 Lanchester战争模型

有上述方程组可得：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$$

其解为： $ay^2 - bx^2 = k$

$$k = ay_0^2 - bx_0^2$$



乙方获胜条件， $k > 0, (\frac{y_0}{x_0})^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$

上式说明，双方初始兵力之比以平方关系影响着战争的结局。例如，若乙方兵力增加到原来**2**倍，则影响战争能力增加到**4**倍。或者说，若甲方射击率 **r_x** 增加到**4**倍，那么为了抗衡，乙方只需将兵力增加到原来**2**倍。



§ 例2 Lanchester战争模型

游击战争模型

甲乙双方都用游击部队作战。甲方在乙方看不到的某个面积为 s_x 的隐蔽区域活动，乙方是向这个隐蔽区域射击。这时甲方减员率不仅与乙方有关，而且随着甲方兵力增加而增加。因为在一个有限区域内，士兵越多，被杀伤的就越多。这样可简单假设 $f=cxy$ ， $c=r_y p_y=r_y^* s_{ry}/s_x$ ，即命中率 p_y = 乙方射击的有效面积与甲方活动面积之比。

类似的， $g=dxy$ ， $d=r_x p_x=r_x^* s_{rx}/s_y$

$x(t)$, $y(t)$ 的微分方程：

- $$\dot{x}(t) = -cxy - \alpha x + u(t), \quad \alpha > 0$$

- $$\dot{y}(t) = -dxy - \beta y + v(t), \quad \beta > 0$$

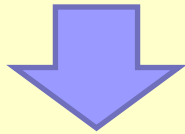


§ 例2 Lanchester战争模型

$x(t)$, $y(t)$ 的微分方程:

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{x}(t) &= -cxy - \alpha x + u(t), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{y}(t) &= -dxy - \beta y + v(t), \quad \beta > 0 \end{aligned}$$

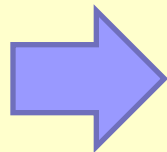


$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{x}(t) &= -cxy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \\ \dot{y}(t) &= -dxy \end{aligned}$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$



$$cy - dx = m$$

$$m = cy_0 - dx_0$$

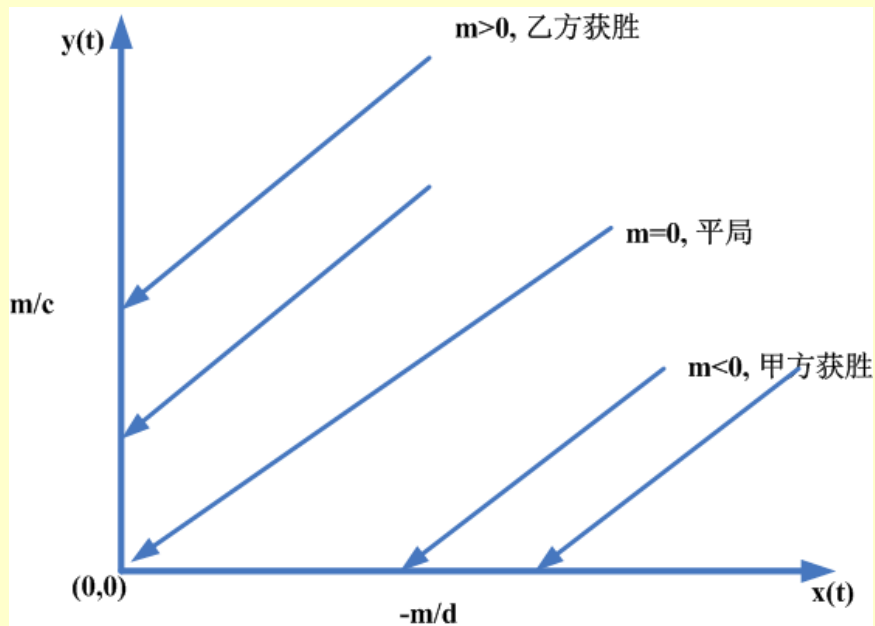


§ 例2 Lanchester战争模型

有上述方程组可得：

$$cy - dx = m$$

$$m = cy_0 - dx_0$$



乙方获胜条件， $m > 0$, $\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y}$

上式说明，双方初始兵力之比
以线性关系影响着战争的结局。
当射击率和射击有效面积一定时，
增加活动面积 s_y 与初始兵力
起着同样的作用。



§ 例2 Lanchester战争模型

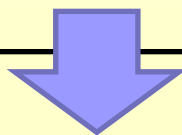
混合战争模型

甲方为游击部队，乙方为正规部队。

$x(t)$, $y(t)$ 的微分方程:

$$\begin{aligned} \bullet \\ x(t) &= -cxy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \\ y(t) &= -bx \end{aligned}$$



$$cy^2 - 2bx = n$$

$$n = cy_0^2 - 2bx_0$$

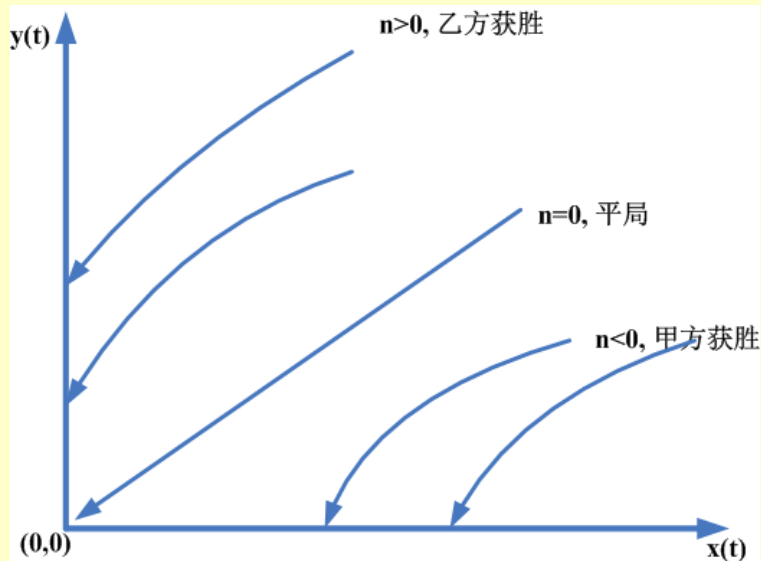


§ 例2 Lanchester战争模型

有上述方程组可得：

$$cy^2 - 2bx = n$$

$$n = cy_0^2 - 2bx_0$$



$$\text{乙方获胜条件, } n > 0, \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2b}{cx_0} = \frac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0}$$

计算实例
越南战争。

§ 例3 Malthus模型与Logistic模型

为了保持自然资源的合理开发与利用，人类必须保持并控制生态平衡，甚至必须控制人类自身的增长。本节将建立几个简单的单种群增长模型，以简略分析一下这方面的问题。

200多年前英国人口学家**Malthus**根据英国**100**多年的人口资料，得出了人口增长率不变的假设，并由此建立了著名的人口指数增长模型。

$$x_k = x_0 (1 + r)^k$$

种群的数量本应取离散值，但由于种群数量一般较大，为建立微分方程模型，可将种群数量看作连续变量，由此引起的误差将是十分微小的。

模型1 马尔萨斯 (Malthus) 模型

马尔萨斯在分析人口出生与死亡情况的资料后发现，人口净增长率 r 基本上是一常数，（ $r=b-d$, b 为出生率， d 为死亡率），即：

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dt} = rx \quad (3.5)$$

上式的解为：

$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)} \quad (3.6)$$

其中 $x_0=x(t_0)$ 为初始时刻 t_0 时的种群数。

马尔萨斯模型的一个显著特点：**种群数量翻一番所需的时间是固定的。**

令种群数量翻一番所需的时间为 T ，则有：

$$2x_0 = x_0 e^{rT}$$

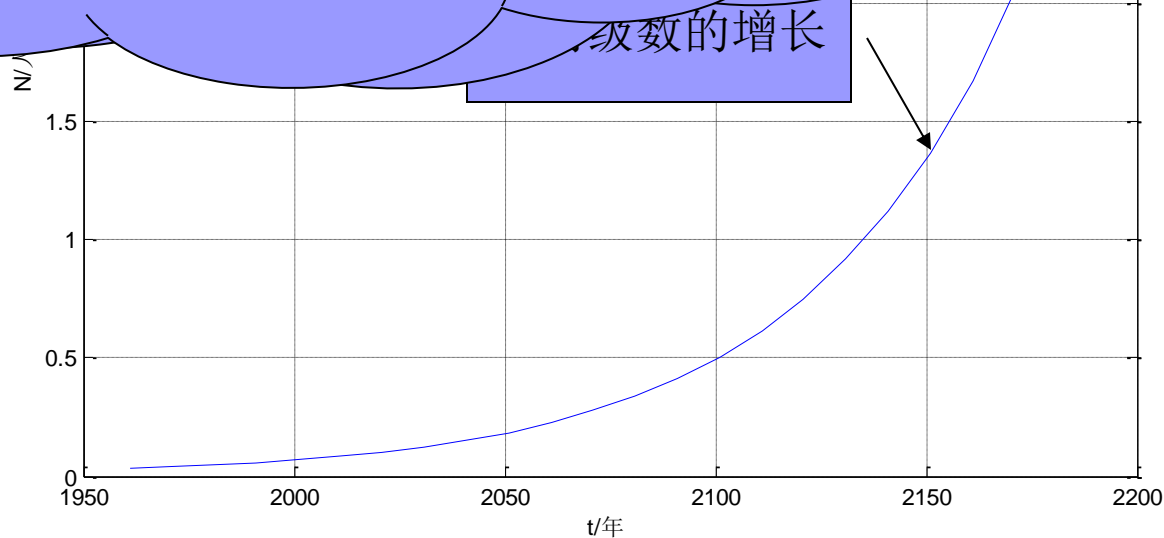
故 $T = \frac{\ln 2}{r} \approx 0.693 / r$

模型预测

假若历年数据能保持资料, 6年增加一倍, 增长的实际数字将以马尔萨斯模型的预报结果来推算, 那么到2150年, 世界人口将达到100亿, 即淹没全部陆地, 而到2300年, 人口数量将达到1000亿, 数量排第1000名。

Malthus模型实际上只考虑群体总数

所以Malthus模型假设的人口净增长率不可能始终保持常数, 它应当与人口数量有关。



模型2 Logistic模型

人口净增长率应当与人口数量有关，即： $r=r(x)$

(3.9)式还有另一解释，由于空间和资源都是有限的，不可能供养无限增长的种群个体，当种群数量过多时，由于人均资源占有率的下降及环境恶化、疾病增多等原因，出生率将降低而死亡率却会提高。设环境能供养的种群数量的上界为 x_m （近似地将 x_m 看成常数）， x 表示当前的种群数量， $x_m - x$ 恰为环境还能供养的种群数量，（3.9）指出，种群增长率与两者的乘积成正比，正好符合统计规律，得到了实验结果的支持，这就是（3.9）也被称为统计筹算律的原因。

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \quad (3.8)$$



（3.8）被称为Logistic模型或生物总数增长的统计筹算律，是由荷兰数学生物学家弗赫斯特（Verhulst）首先提出的。一次项系数是负的，因为当种群数量很大时，会对自身增大产生抑制性，故一次项又被称为竞争项。

对 (3.9) 分离变量:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x_m - x} \right) dx = r dt$$

两边积分并整理得:

$$x = \frac{x_m}{1 + Ce^{-rt}}$$

令 $x(0)=x_0$, 求得:

$$C = \frac{x_m - x_0}{x_0}$$

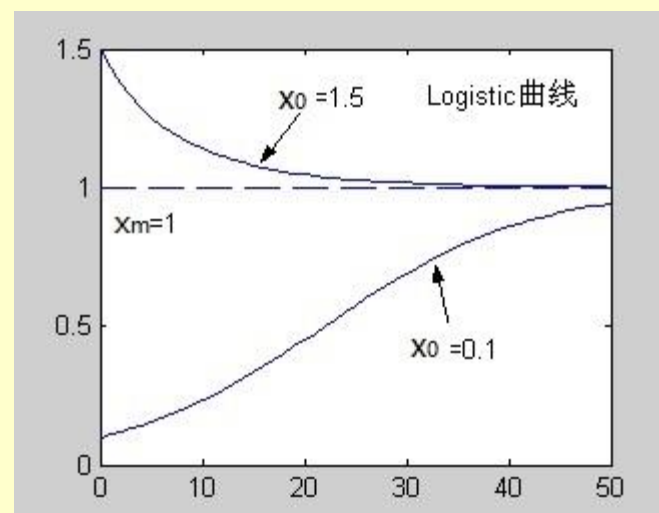
故 (3.9) 的满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解为:

$$x(t) = \frac{x_0 x_m}{x_0 + (x_m - x_0)e^{-rt}} \quad (3.10)$$

易见:

$$x(0)=x_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_m$$

$x(t)$ 的图形请看图



模型检验

用Logistic模型来描述种群增长的规律效果如何呢？1945年克朗皮克（Crombic）做了一个人工饲养小谷虫的实验，数学生物学家高斯（E·F·Gauss）也做了一个原生物草履虫实验，实验结果都和Logistic曲线十分吻合。

大量实验资料表明用Logistic模型来描述种群的增长，效果还是相当不错的。例如，高斯把5只草履虫放进一个盛有 0.5cm^3 营养液的小试管，他发现，开始时草履虫以每天230.9%的速率增长，此后增长速度不断减慢，到第五天达到最大量375个，实验数据与 $r=2.309$ ， $s=0.006157$ ， $x(0)=5$ 的Logistic曲线：

$$x(t) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}} \text{ 几乎完全吻合，见图3.6}$$

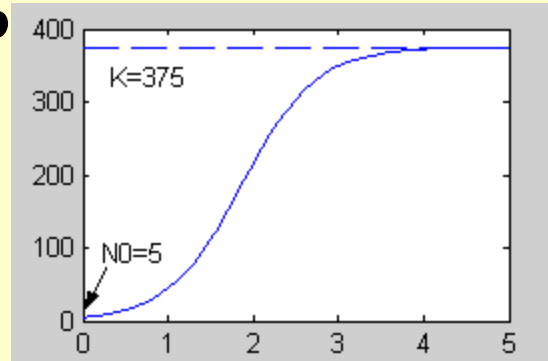


图3-6

Malthus模型和Logistic模型的总结

- Malthus模型和Logistic模型均为对微分方程 (3.7) 所作的模拟近似方程。前一模型假设了种群增长率 r 为一常数。后一模型则假设环境只能供养一定数量的种群，从而引入了一个竞争项。
- 用模拟近似法建立微分方程来研究实际问题时必须对求得的解进行检验，看其是否与实际情况相符或基本相符。相符性越好则模拟得越好，否则就得找出不相符的主要原因，对模型进行修改。

Malthus模型与Logistic模型虽然都是为了研究种群数量的增长情况而建立的，但它们也可用来研究其他实际问题，只要这些实际问题的数学模型有相同的微分方程即可。

第4次作业

习题5.4。

§ 3.3 为什么要用三级火箭来发射人造卫星



构造数学模型，以说明为什么不能用一级火箭而必须用多级火箭来发射人造卫星？为什么一般都采用三级火箭系统？

1、为什么不能用一级火箭发射人造卫星？

(1) 卫星能在轨道上运动的最低速度

假设：(i) 卫星轨道为过地球中心的某一平面上的圆，卫星在此轨道上作匀速圆周运动。

(ii) 地球是固定于空间中的均匀球体，其它星球对卫星的引力忽略不计。

分析：

R 为地球半径，
约为6400公里

根据牛顿第三定律，地球对卫星的引力为： $F = \frac{km}{r^2}$

在地面有： $\frac{km}{R^2} = mg$ 得： $k = gR^2$

故引力： $F = mg \left(\frac{R}{r} \right)^2$

假设(ii)



卫星所受到的引力也就是它作匀速圆周运动的向心力

故又有： $F = \frac{mv^2}{r}$ 从而： $v = R\sqrt{\frac{g}{r}}$

假设(i)

(2) 火箭推进剂/速度分析

假设：火箭重力及空气阻力均不计

分析：记火箭在时刻 t 的质量和速度分别为 $m(t)$ 和 $v(t)$

有： $m(t + \Delta t) - m(t) = \frac{dm}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2)$

记火箭喷出的气体相对于火箭的速度为 u （常数）；

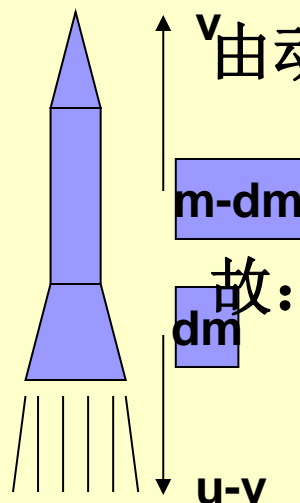
由动量守恒定理：

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - \left(\frac{dm}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \cdot (v(t) - u)$$

故： $m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$

由此解得： $v(t) = v_0 + u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right)$ (3.11)

v_0 和 m_0 一定的情况下，
火箭速度 $v(t)$ 由喷发
速度 u 及质量比决定。



卫星离地面高度 (公里)	卫星速度 (公里/秒)
100	7.86
200	7.80
400	7.69
600	7.58
800	7.47
	7.37

(2) 火箭推进力及速度的分析



现将火箭——卫星系统的质量分成三部分：

(i) m_P (有效负载，如卫星)

(ii) m_F (燃料质量)

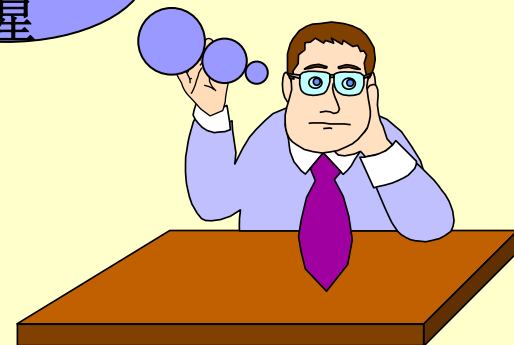
(iii) m_S (结构质量——如外壳、燃料容器及推进器)。

最终质量为 $m_P + m_S$ ，初始速度为0，

所以末速度： $v = u \ln \frac{m_0}{m_P + m_S}$

火箭推进力在加速整个火箭时，其实际效益越来越低。如果将结构质量在燃料燃烧过程中不断减少，那么末速度能达到要求吗？

超过6.0 km/s。目前根本不可能用一级火箭发射人造卫星





2、理想火箭模型

假设： 记结构质量 m_S 在 $m_S + m_F$ 中占的比例为 λ ，假设火箭能随时抛弃无用的结构，结构质量与燃料质量以 λ 与 $(1-\lambda)$ 的比例同时减少。

建模： 由 $m(t)v(t) = m(t + \Delta t) - \lambda \frac{dm}{dt} v(t) \Delta t - (1-\lambda) \frac{dm}{dt} (v(t) - u) \Delta t + O(\Delta t^2)$

得

考虑到空气阻力和重力等因素，估计（按比例粗略估计）发射卫星要使 $v=10.5$ 公里/秒才行，则可推算出 m_0/m_p 约为51，即发射一吨重的

卫星大约需要50吨重的理想火箭。在于，当火箭燃料耗尽时，结构质量已尽所抛尽，它的最终质量为 m_p ，

所以最终速度为：

$$v = u(1-\lambda) \ln \frac{m_0}{m_p}$$





3、理想过程的实际逼近——多级火箭卫星系统

记火箭级数为 n ，当第 i 级火箭的燃料烧尽时，第 $i+1$ 级火箭立即自动点火，并抛弃已经无用的第 i 级火箭。用 m_i 表示第 i 级火箭的质量， m_p 表示有效负载。

先作如下假设：

(i) 设各级火箭具有相同的 λ ，即 i 级火箭中 λm_i 为结构质量， $(1-\lambda) m_i$ 为燃料质量。

(ii) 设燃烧级初始质量与其负载质量之比保持不变，并记比值为 k 。

该假设有点强加的味道，先权作讨论的方便吧

考虑二级火箭：

由3.11式，当第一级火箭燃烧完时，并不还反力：

$$v_2 = u \ln \frac{m_1 + m_2 + m_p}{\lambda m_1 + m_2 + m_p}$$

当第二级火箭燃尽时，末速度为：

$$v_2 = v_2 + u \ln \frac{m_2 + m_p}{\lambda m_2 + m_p} = u \ln \left(\frac{m_1 + m_2 + m_p}{\lambda m_1 + m_2 + m_p} \cdot \frac{m_2 + m_p}{\lambda m_2 + m_p} \right)$$



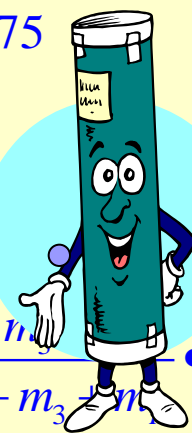
又由假设 (ii), $m_2 = km_P$, $m_1 = k(m_2 + m_P)$, 代入上式, 仍设 $u = 3$ 公里/秒, 且为了计算方便, 近似取 $\lambda = 0.1$, 则可得:

$$v_2 = 3 \ln \left[\left(\frac{m_1}{m_2 + m_P} + 1 \right) \left(\frac{m_2}{m_P} + 1 \right) \right] = 6 \ln \left(\frac{k+1}{0.1k+1} \right)$$

是否三级火箭就是最省呢? 最简单的方法就是对四级、五级等火箭进行讨论。

要使 $v_2 = 10.5$
即 $k \approx 11.2$, 而:

$$e^{1.5} \approx 5.75$$



类似地, 可以推算出三级火箭:

$$v_3 = u \ln \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_P}{\lambda m_1 + m_2 + m_3 + m_P} \cdot \frac{m_2 + m_P}{\lambda m_2 + m_3 + m_P} \cdot \frac{m_3 + m_P}{\lambda m_3 + m_P} \right)$$

在同样假设下: $v_3 = 3 \ln \left(\frac{k+1}{0.1k+1} \right)^3 = 9 \ln \left(\frac{k+1}{0.1k+1} \right)$

三级火箭比二级火箭几乎节省了一半

要使 $v_3 = 10.5$ 公里/秒, 则 $(k+1)/(0.1k+1) \approx 3.21$, $k \approx 3.25$, 而 $(m_1 + m_2 + m_3 + m_P) / m_P \approx 77$ 。

考虑N级火箭:

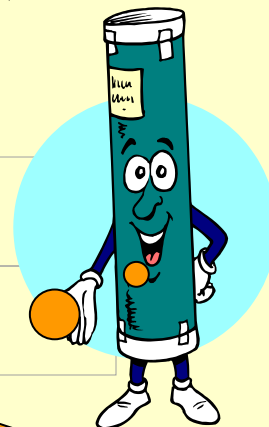
记 n 级火箭的总质量（包含有效负载 m_p ）为 m_0 ，在相同的假设下可以计算出相应的 m_0/m_p 的值，见表3-2

表3-2

n (级数)	1	2	3	4	5	...	∞ (理想)
火箭							50

当然若燃料的价钱很便宜而推进器的价钱很贵切且制作工艺非常复杂的话，也可选择二级火箭。

火箭推进器，所以使用四级以上火箭是不合算的，三级火箭提供了一个最好的方案。



4、火箭结构的优化设计



3中已经能说过假设(ii)有点强加的味道；现去掉该假设，在各级火箭具有相同 λ 的粗糙假设下，来讨论火箭结构的最优设计。

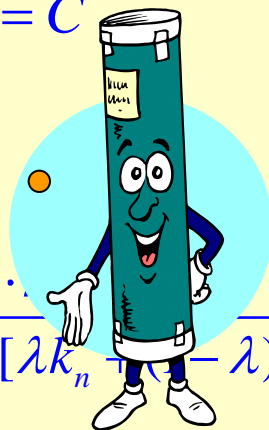
解条件

火箭结构优化设计讨论中我们得到与假设(ii)相符的结果，这说明前面的讨论都是有效的！

$$\frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{[\lambda k_1 + (1-\lambda)] \cdots [\lambda k_n + (1-\lambda)]} = C$$

或等价地求解无约束极值问题：

$$\min \left\{ k_1 k_2 \cdots k_n - a \left[\frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{[\lambda k_1 + (1-\lambda)] \cdots [\lambda k_n + (1-\lambda)]} - C \right] \right\}$$



可以解出最优结构设计应满足：

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n$$