


《数学建模》 课程内容

- ▶ 模型绪论、初等模型
 - ▶ 简单优化模型
 - ▶ 数学规划模型
 - ▶ 微分方程模型
 - ▶ 差分方程模型
 - ▶ 概率模型
 - ▶ 马氏链模型
 - ▶ 离散事件模型
 - ▶ 人群仿真模型
 - ▶ 博弈模型
 - ▶ 层次分析模型
- 



数学建模

- 宋晓
- 副教授，博导
- songxiao@buaa.edu.cn

教材参考

- 1.姜启源.《**数学模型**》（第4版）,高等教育出版社. 2011.
2. 《**Theory of Modeling and Simulation**》 Second Edition,
BERNARD P.ZEIGLER, ACADEMIC PRESS, 2000.

本课程群二维码



第一章 建模基础

1.1 从现实对象到数学模型

1.2 数学建模的重要意义

1.3 数学建模的基本方法

1.4 数学模型的特点和分类

1.5 怎样学习数学建模

1.6 初等数学模型

1.1 从现实对象到数学模型

我们常见的模型



玩具、照片、飞机、火箭模型... ..

~ 实物模型

水箱中的舰艇、风洞中的飞机... ..

~ 物理模型

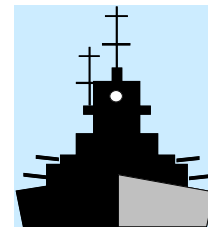
地图、电路图、分子结构图... ..

~ 符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的**原型**的替代物

模型集中反映了**原型**中人们需要的那一部分特征

你碰到过的数学模型——“航行问题”



甲乙两地相距**750**千米，船从甲到乙顺水航行需**30**小时，从乙到甲逆水航行需**50**小时，问船的速度是多少？

用 x 表示船速， y 表示水速，列出方程：

$$\begin{array}{l} (x + y) \times 30 = 750 \\ (x - y) \times 50 = 750 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{求解} \end{array} \quad \begin{array}{l} x=20 \\ y=5 \end{array}$$

答：船速每小时**20**千米/小时。

航行问题建立数学模型的基本步骤

- 作出简化假设（船速、水速为常数）；
- 用符号表示有关量（ x , y 表示船速和水速）；
- 用物理定律（匀速运动的距离等于速度乘以时间）列出数学式子（二元一次方程）；
- 求解得到数学解答（ $x=20$, $y=5$ ）；
- 回答原问题（船速每小时**20**千米/小时）。

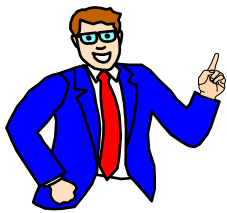
数学模型 (Mathematical Model) 和 数学建模 (Mathematical Modeling)

数学模型

对于一个**现实对象**，为了一个**特定目的**，根据其**内在规律**，作出必要的**简化假设**，运用适当的**数学工具**，得到的一个**数学结构**。

数学 建模

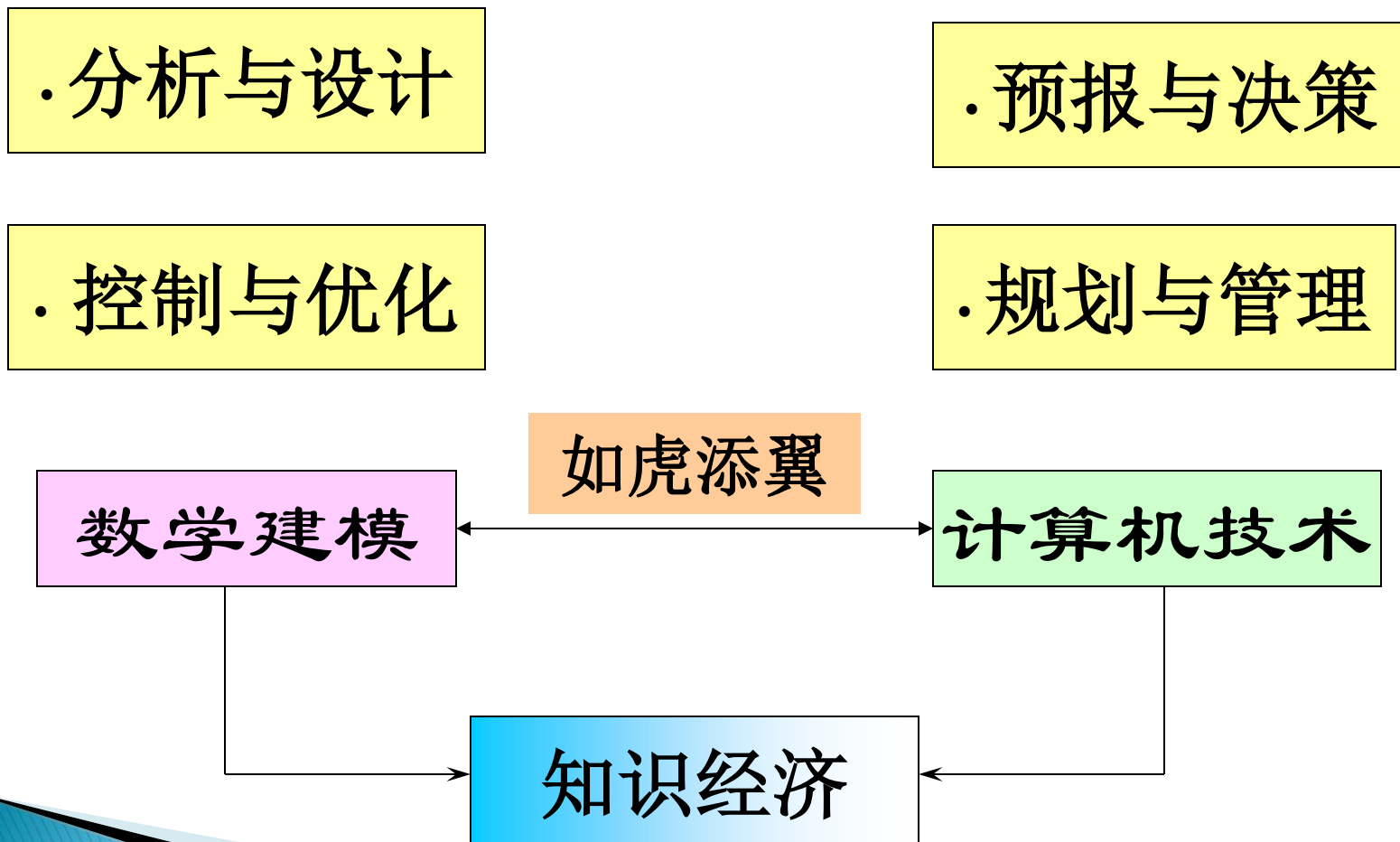
建立数学模型的全过程
(包括表述、求解、解释、检验等)



初等数学模型示例

•**例1** 某人‘甲’平时下班总是按预定时间到达某处，然后他妻子开车接他回家。有一天，他比平时提早了三十分钟到达该处，于是此人就沿着妻子来接他的方向步行回去并在途中遇到了妻子，这一天，他比平时提前了十分钟到家，问此人共步行了多长时间？

数学建模的具体应用



例2 椅子在不平的地面上放稳吗？



问题分析 通常：三只脚着地 放稳：四只脚着地

模型假设

- 四条腿一样长，椅脚与地面是点接触，四脚连线呈正方形；
- 地面高度连续变化，可视为数学上的连续曲面；
- 地面相对平坦，使椅子在任意位置至少三只脚同时着地。

模型构成

用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

• 椅子位置 利用正方形(椅脚连线)的对称性

用 θ (对角线与x轴的夹角)表示椅子位置

• 四只脚着地 椅脚与地面距离为零
距离是 θ 的函数

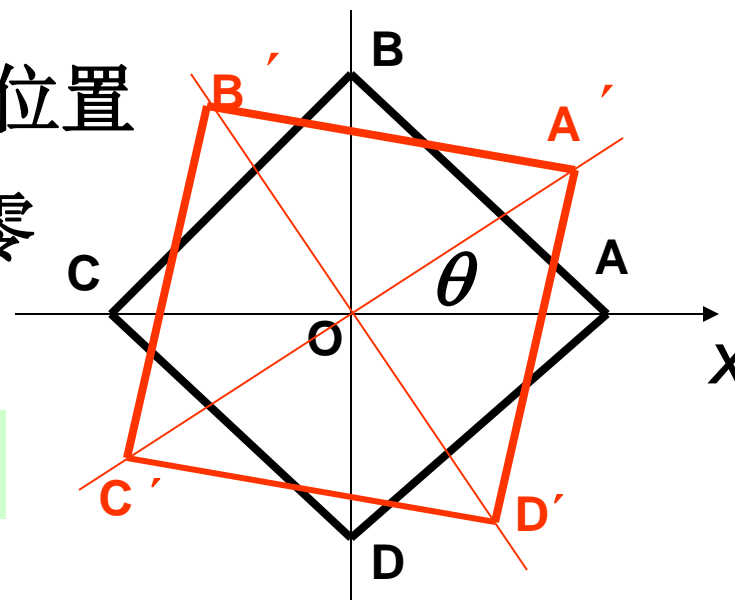
四个距离
(四只脚)

→
正方形
对称性

两个距离

A,C 两脚与地面距离之和: $f(\theta)$

B,D 两脚与地面距离之和: $g(\theta)$

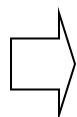


正方形ABCD
绕O点旋转

模型构成

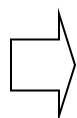
用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

地面为连续曲面



$f(\theta)$, $g(\theta)$ 是连续函数.

椅子在任意位置
至少三只脚着地



对任意 θ , $f(\theta)$, $g(\theta)$ 至少一个为0.

数学
问题

已知: $f(\theta)$, $g(\theta)$ 是连续函数;
对任意 θ , $f(\theta) \cdot g(\theta) = 0$;
且 $g(0) = 0$, $f(0) > 0$.

证明: 存在 θ_0 , 使 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

模型求解



给出一种简单、粗糙的证明方法

将椅子旋转 90° ，对角线AC和BD互换。

由 $g(0)=0$ ， $f(0) > 0$ ，知 $f(\pi/2)=0$ ， $g(\pi/2)>0$ 。

令 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$ ，则 $h(0) > 0$ 和 $h(\pi/2) < 0$ 。

由 f, g 的连续性知 h 为连续函数，据连续函数的基本性质，必存在 θ_0 ，使 $h(\theta_0)=0$ ，即 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$ 。

因为 $f(\theta) \cdot g(\theta)=0$ ，所以 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$ 。

评注和思考：建模的关键： θ 和 $f(\theta), g(\theta)$ 的确定

假设条件的本质与非本质 考察四脚呈长方形的椅子

1.3 数学建模的基本方法

• 机理分析

根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律。

• 测试分析

将对象看作“黑箱”，通过对量测数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型。

• 二者结合

用机理分析建立模型结构,用测试分析确定模型参数。

机理分析没有统一的方法，主要通过实例研究
(Case Studies)来学习。以下建模主要指机理分析。

数学建模的一般步骤

模型
求解

各种数学方法、软件和计算机技术

模型
分析

如结果的误差分析、统计分析、
模型对数据的稳定性分析

模型
检验

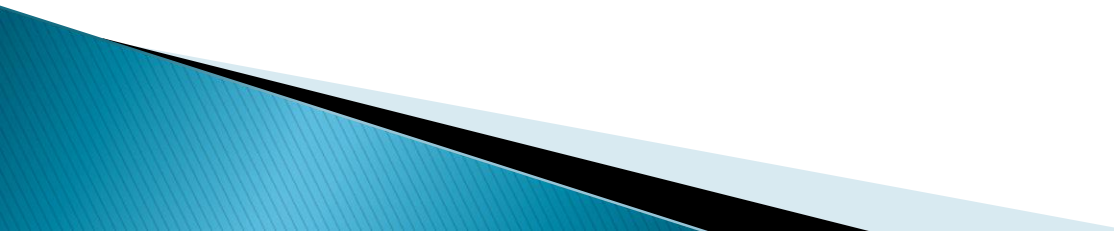
与实际现象、数据比较，
检验模型的合理性、适用性

模型应用

数学模型的分类

分类标准	具体类别
对某个实际问题了解的深入程度	白箱模型、灰箱模型、黑箱模型
模型中变量的特征	连续型模型、离散型模型或确定性模型、随机型模型等
建模中所用的数学方法	初等模型、微分方程模型、差分方程模型、优化模型等
研究课题的实际范畴	人口模型、生态系统模型、交通流模型、经济模型、基因模型等

小结

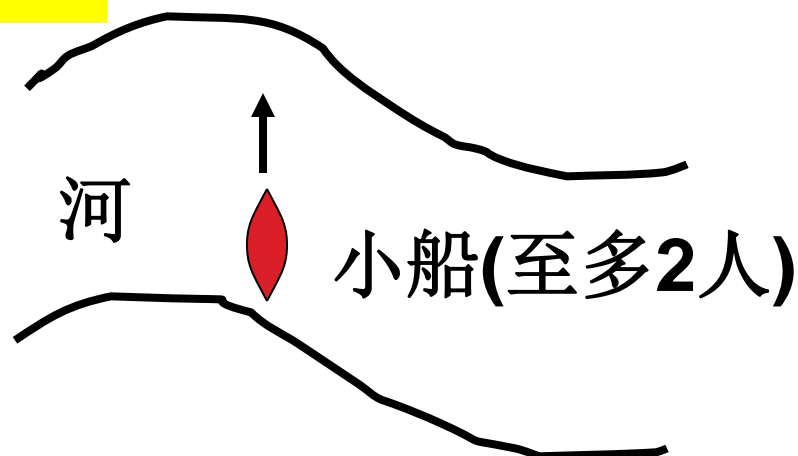
- ▶ 模型的概念、分类
 - ▶ 数学建模的主要步骤
 - ▶ 数学建模需要使用抽象的数学符号来表达思路
 - ▶ 建模需要灵活的思维
- 

例4 商人们怎样安全过河

问题(智力游戏)

随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货。

但是乘船渡河的方案由商人决定。
商人们怎样才能安全过河？



△ △ △ 3名商人

× × × 3名随从

问题分析

多步决策过程

决策：每一步(此岸到彼岸或彼岸到此岸)船上的人员

要求：在安全的前提下(两岸的随从数不比商人多)，经有限步使全体人员过河。

模型构成

X_k :第 k 次渡河前此岸的商人数

$x_k, y_k=0,1,2,3;$

Y_k :第 k 次渡河前此岸的随从数

$k=1,2,\dots$

$s_k=(x_k, y_k)$:过程的状态

S : 允许状态集合

$S=\{(x, y) \mid x=0, y=0,1,2,3; x=3, y=0,1,2,3; x=y=1,2\}$

U_k :第 k 次渡船上的商人数

$u_k, v_k=0,1,2;$

V_k :第 k 次渡船上的随从数

$k=1,2,\dots$

$d_k=(u_k, v_k)$:决策

$D=\{(u, v) \mid u+v=1, 2\}$:允许决策集合

$s_{k+1}=s_k +(-1)^k d_k$

:状态转移律

多步决策
问题

求 $d_k \in D(k=1,2, \dots, n)$, 使 $s_k \in S$, 并按转移律由 $s_1=(3,3)$ 到达 $s_{n+1}=(0,0)$.

模型求解

- 穷举法 :编程上机

- 图解法:

状态 $s=(x,y)$:16个格点

允许状态 : 10个●点

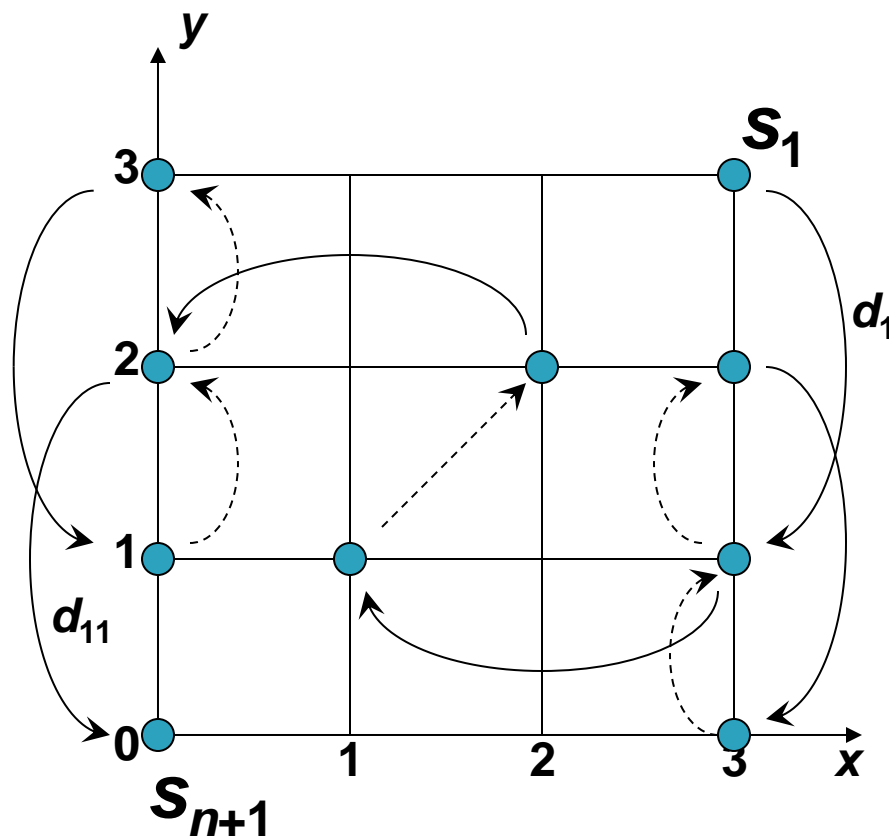
允许决策 : 移动1或2格;
 k 奇,左下移; k 偶,右上移.

d_1, \dots, d_{11} 给出安全渡河方案

评注和思考

规格化方法, 易于推广

$$S=\{(x, y) \mid x=0, y=0,1,2,3; \\ x=3, y=0,1,2,3; x=y=1,2\}$$



考虑选择题, 编程思路

本讲作业

1. 怎样解决下面的实际问题。包括需要哪些数据资料，要做些什么观察、试验以及建立什么样的数学模型等：
 - (1) 估计一个人体内血液的总量；
 - (2) 估计一批日光灯管的寿命。
2. 在“椅子能在不平的地面上放稳吗”的假设条件中，将四脚的连线呈正方形改为长方形，其余不变。试构造模型并求解。
3. 选做：编程解决商人过河问题。