系统建模与仿真
概率相关模型

宋　晓　(Song Xiao)

Email : Songxiao@buaa.edu.cn

基本的概率分布

- 随机变量及其分布
- 均匀分布
- 泊松分布
- 指数分布
- 随机数生成

累积分布函数

- 变量X在某个特定区间取值的概率
- 累积概率分布函数(cdf)用 F(x)表示, 即：$F(x) = P(X \le x)$
  - 如果X 是离散的, 那么 $F(x) = \Sigma p(x_i)$ over all $x_i \le x$
  - 如果X 是连续的, 那么 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- 分布函数的基本属性
  - F 非递减函数. If $a<b$, then $F(a) \le F(b)$
  - $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
  - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- 分布函数的其他特性, e.g.

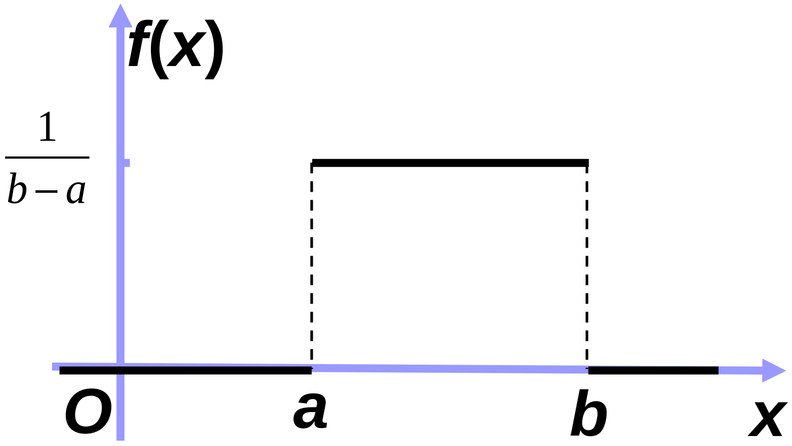
$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a), \text{ for all } a < b$$

均匀分布

1. 均匀分布 设连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称X在区间(a,b)上服从均匀分布, 记为$X\sim U(a,b)$.



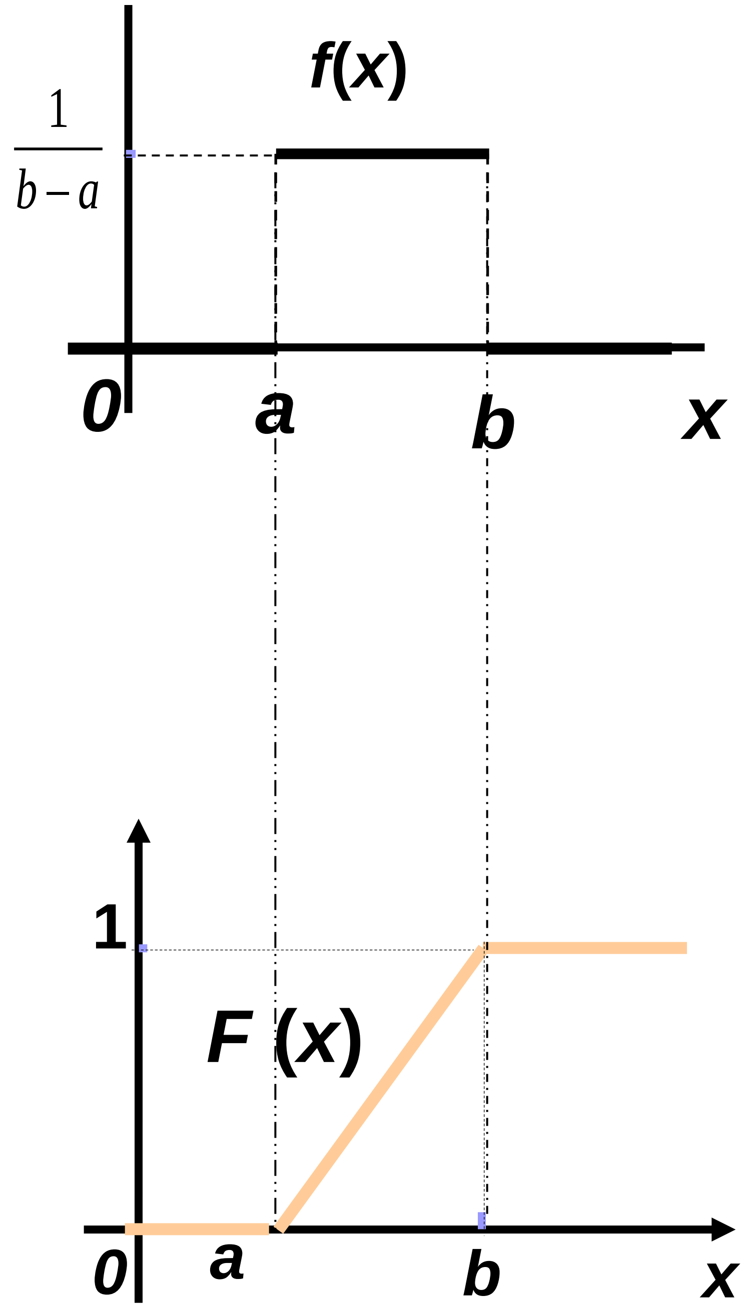
区间 $(c, c+l)$，且 $a \le c < c+l \le b$,

$$P\left(c < X < c+l\right)$$

$$= \int_c^{c+l} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{b-a}$$

分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 为：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$



泊松分布

在什么情形下应用泊松分布

泊松分布是一种用来描述一定的空间或时间里稀有事件发生次数的概率分布。

服从泊松分布的变量的一些例子：

- 一定畜群中某种患病率很低的非传染性疾病患病数或死亡数。
- 畜群中遗传的畸形怪胎数
- 单位时间内到达窗口的人数
- 每升饮水中的大肠杆菌数

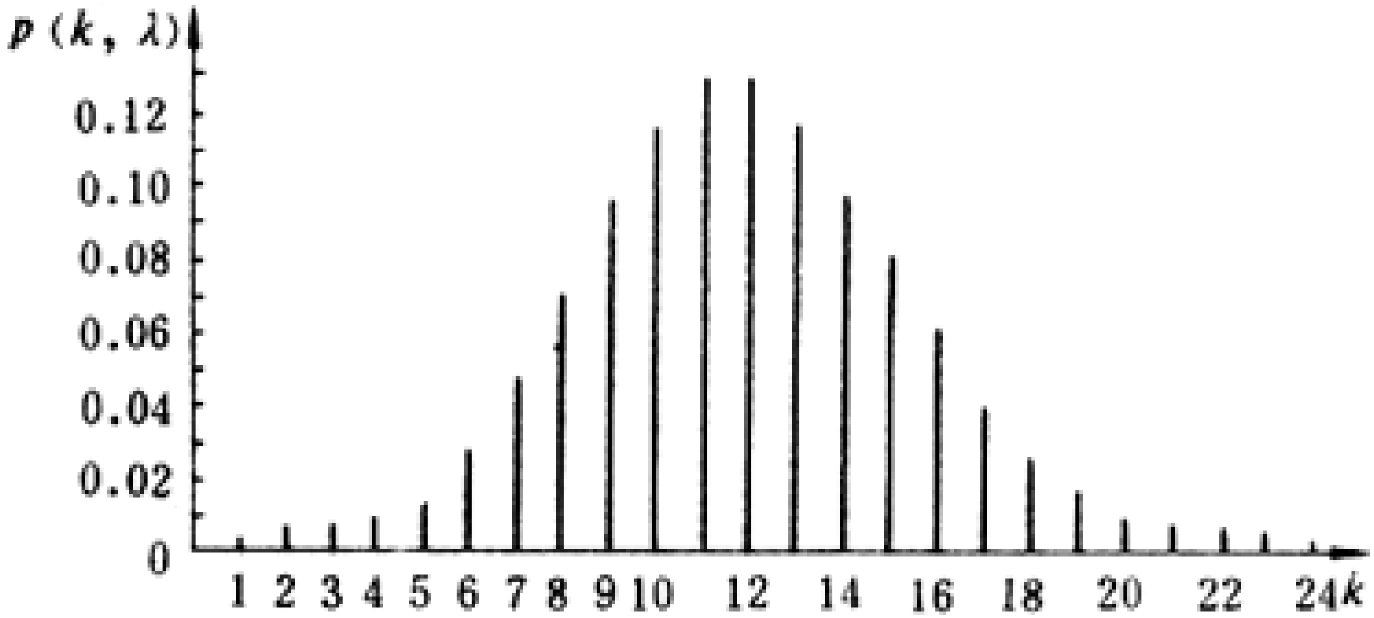
泊松分布的定义及图形特点

设随机变量X所有可能取的值为**0 , 1 , 2 , … ,** 且概率分布为:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\qquad,\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,$$

其中 **λ >0** 是常数,则称 ***X*** 服从参数为 λ 的泊松分布,记作***X*~*P*(** λ**).**

泊松分布的图形特点：*X~P(λ)*



泊松分布$P(\lambda)$ ($\lambda=12$)

- 泊松分布的平均数

$$E(X) = \lambda$$

- 泊松分布的方差和标准差

$$\sigma^2 = Var(X) = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

指数分布(连续型)

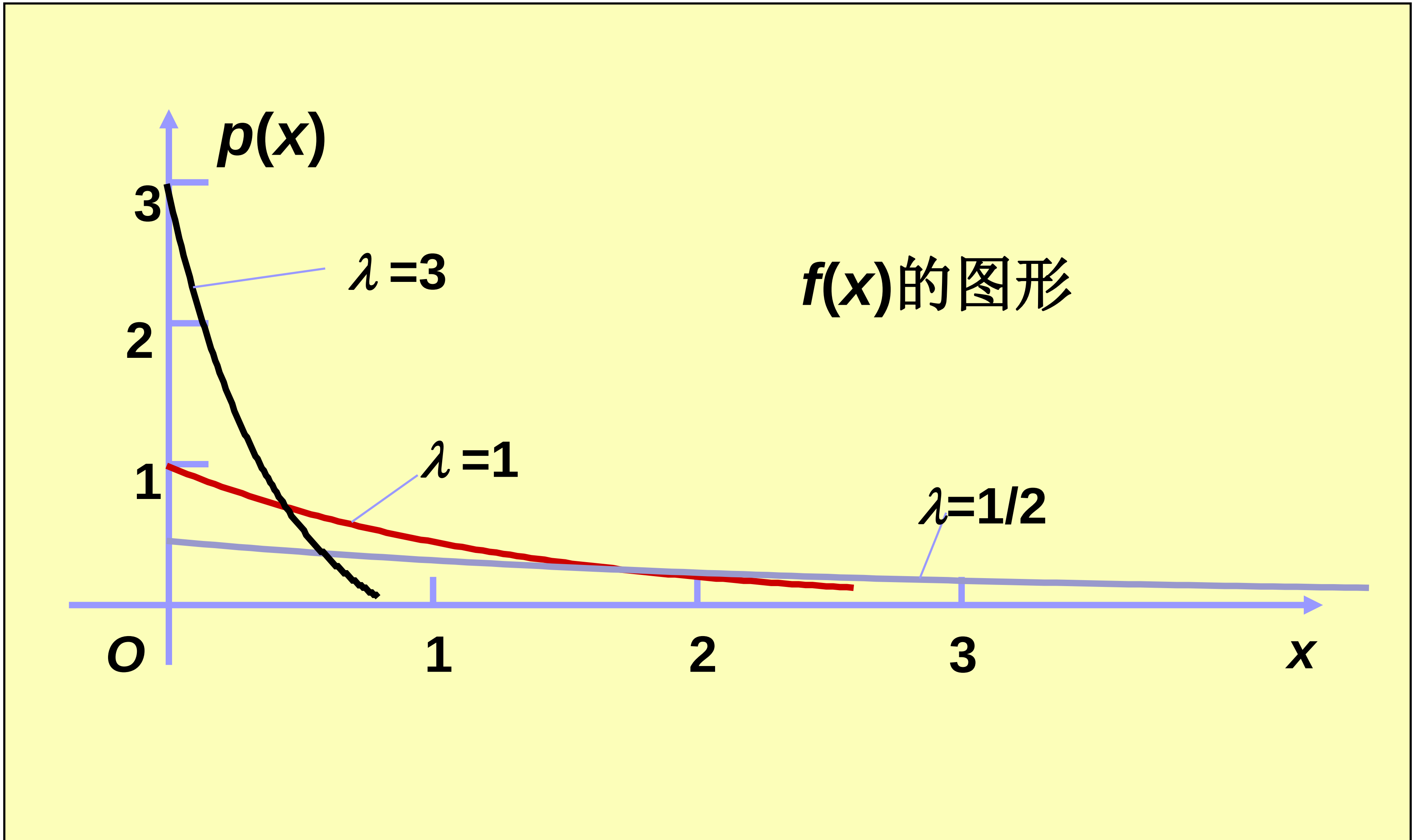
- 各种寿命X的近似分布，比如电子元件、动物的寿命；电话的通话时间；随机服务系统中的服务时间等；
- 用来对平均间隔时间(interarrival times)进行建模， 顾客到达窗口的时间和窗口的服务时间是完全随机的 (λ 是到达率或服务率，人/秒)
- 随机变量 X 服从参数为 λ > 0的指数分布，其概率密度函数(pdf)为:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

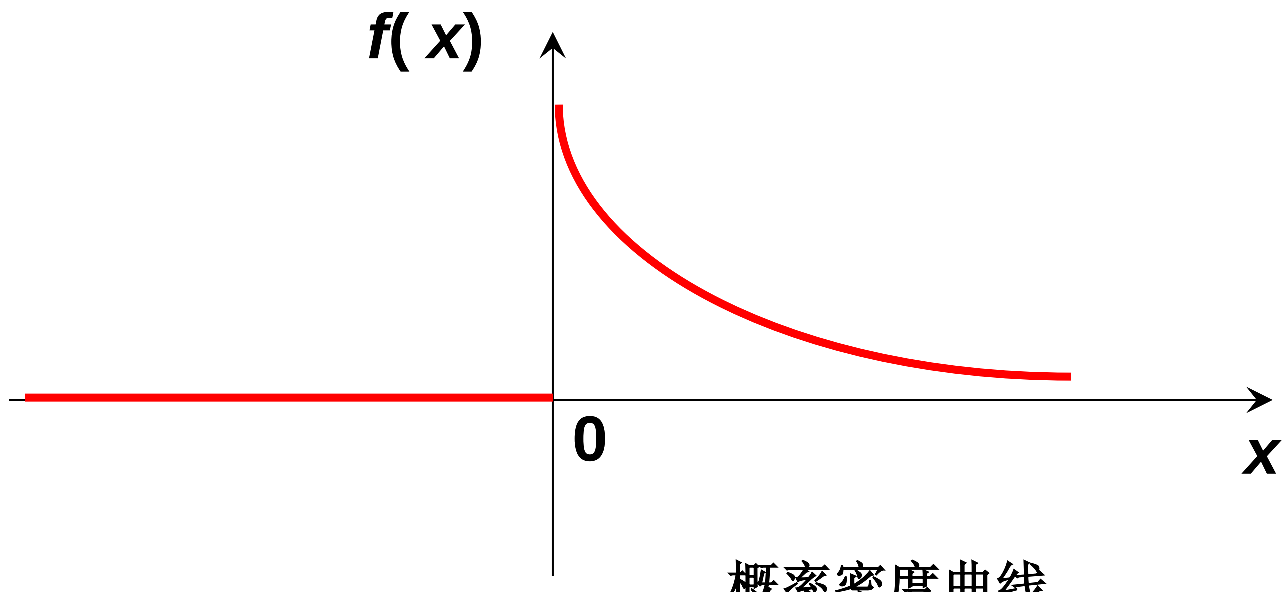
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- 期望值：E(X) = 1/λ， 方差： V(X) = $1/\lambda^2$

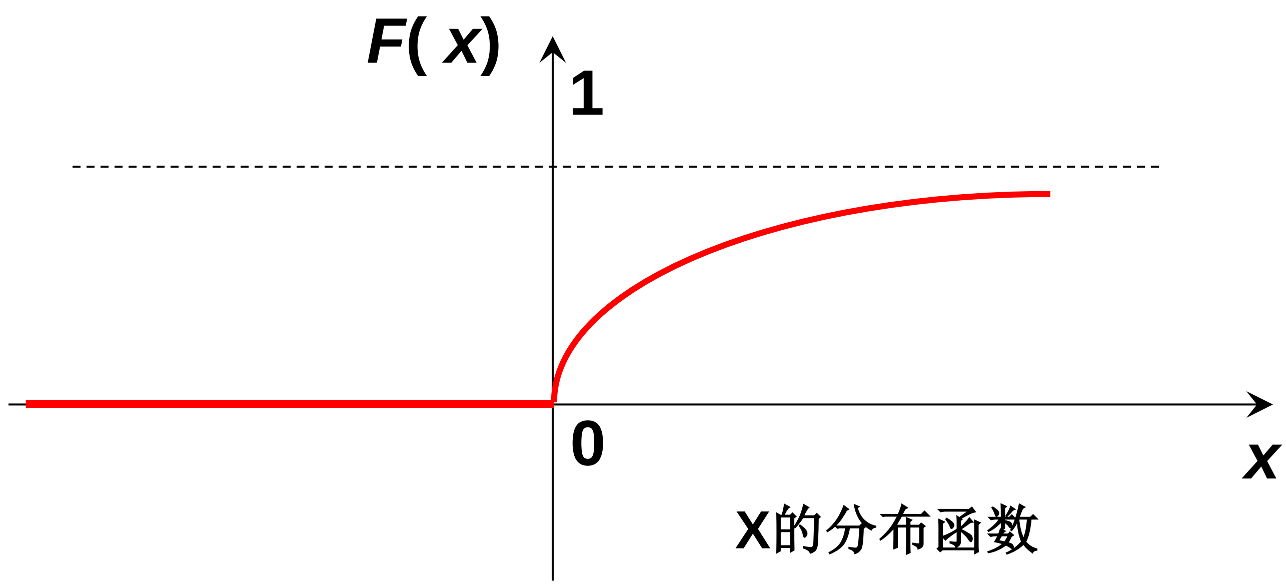
指数分布(连续型)



概率密度曲线



概率密度曲线



X的分布函数

指数分布

- 无记忆属性

  对所有 **s , t >= 0:**

  $$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

例: 一批灯泡寿命服从 ~ exp(λ = 1/3), i.e. 1 failure per 3000 hours (单位是千小时)

它的寿命大于平均寿命3的概率是:

$$P(X > 3) = 1-(1-e^{-3/3}) = e\text{-}1 = 0.368$$

灯泡寿命在2 to 3 （千小时）的概率是:

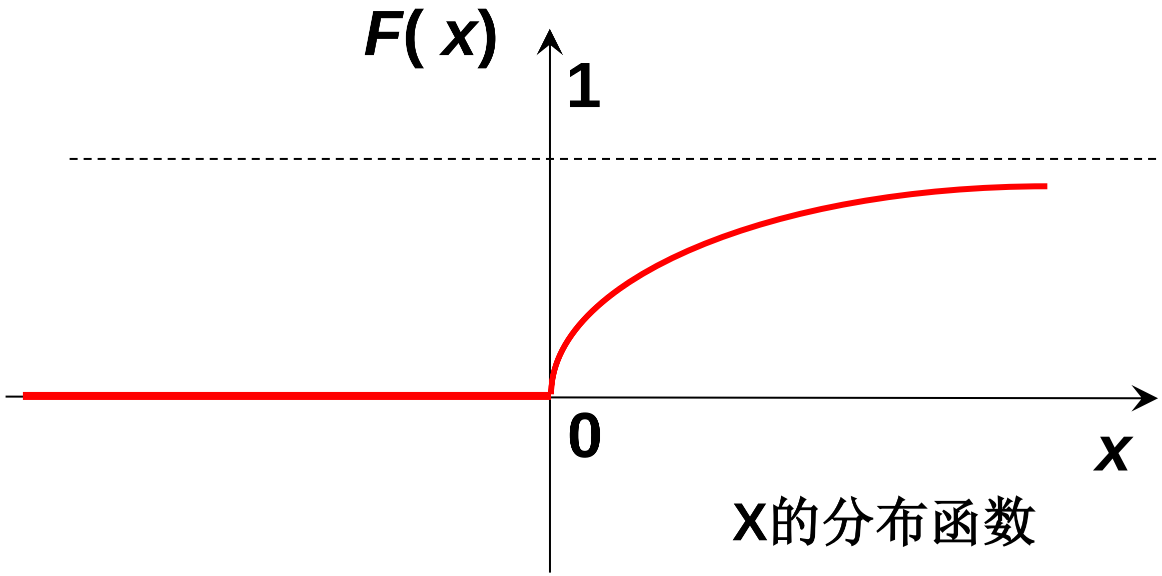
$$P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = 0.145$$

已运行2.5，再运行到3.5 的概率是:

$$P(X > 3.5 \mid X > 2.5) = P(X > 1) = e^{-1/3} = 0.717$$

生成指数分布的随机数

- 例: 某服务器的服务时间是指数分布的，服务率是 λ (即：平均服务时间是 1/λ)



X的分布函数

*u*是0~1之间的随机数

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$let: \quad u = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$-\lambda x = \ln(1-u)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(u)$$

随机函数及其小应用[*]

- 实际生活中有许多随机事件，如：扔硬币，投骰子。
- “随机”函数rand来模拟现实生活中的随机事件
- **rand( )**函数产生 **0** 到 **RAND_MAX** 之间的整数（**RAND_MAX** 是头文件 **<stdlib.h>** 中定义的常量，至少为**32767**，即**16**位所能表示的最大整数值）。
- 调用**rand( )**函数时，返回的值是 **0** 到 **RAND_MAX** 之间的整数，且这之间的每个整数出现的机会是相等的。

随机函数及其小应用

- **rand( )**函数产生的并不是真正的随机数，而是伪随机数（**pseudo-random number**），它是按一定规则（算法）来产生一系列看似随机的数，这种过程是可以重复的。
- 为了在每次重新执行程序时**rand**产生不同的随机序列，就需要为随机数产生器（算法）赋予不同的初始状态，这称为随机化过程**(randomizing)**。函数 **srand(unsigned)** 能设定随机函数 **rand** 的初始状态，由 **srand(unsigned)** 的参数决定。调用 **srand** 函数又称为设置随机函数的种子。**srand** 函数的参数通常设置为系统时钟。

投单骰子游戏

【例】投一个骰子，点数为单数时玩家输，为双数时玩家赢。

投单骰子游戏

【例】投一个骰子，点数为单数时玩家输，为双数时玩家赢。

分析：

骰子的点数为 1~6

$0 \le \text{rand( )} \le$ RAND_MAX

$\Rightarrow\quad 0 \le$ rand( ) % 6 ≤ 5

$\Rightarrow\quad 1 \le 1 +$ rand( ) % 6 ≤ 6

%常用于比例缩放(scaling)，这里6称为比例因子(scaling factor)，1称为平移因子(moving factor)。

说明：时间函数time(0)返回当前时钟日历时间的秒数（从格林尼治标准时间1970年1月1日0时起到现在的秒数）。

练习：输赢规则不固定，由玩家押点决定，即玩家可押单（双）数，则投出单（双）数时玩家赢。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

int main(){
    int point;
    srand( time( 0 ) ); // unsinged int
time(..);

    point =  1 + rand()%6;
    printf("Dice is: %d\n", point);

    printf((point%2) ? "lose": "win");
    return 0;
}
```

小结

- 随机变量及其分布
- 均匀分布
- 泊松分布
- 指数分布
- 随机数生成

马尔科夫链模型

马氏链模型

描述一类重要的随机动态系统（过程）的模型

- 系统在每个时期所处的状态是随机的
- 从一时期到下时期的状态按一定概率转移
- 下时期状态只取决于本时期状态和转移概率

已知现在，将来与过去无关（无后效性）

马氏链 (Markov Chain)

——时间、状态均为离散的随机转移过程

1　健康与疾病

通过有实际背景的例子介绍马氏链的基本概念和性质

人的健康状态随着时间的推移会随机地发生转变

保险公司要对投保人未来的健康状态作出估计, 以制订保险金和理赔金的数额

例1. 人的健康状况分为健康和疾病两种状态，设对特定年龄段的人，今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8, 而今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7，

若某人投保时健康, 问若干年后他仍处于健康状态的概率

状态与状态转移

状态 $X_n = \begin{cases} 1, \text{第n年健康} \\ 2, \text{第n年疾病} \end{cases}$

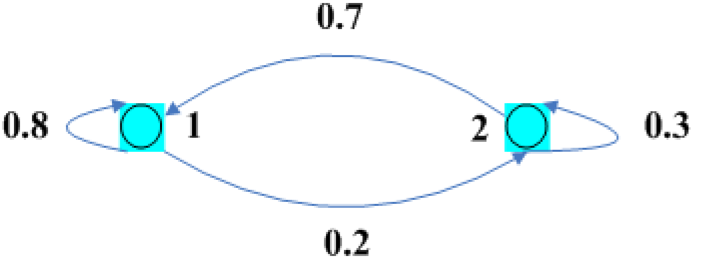
状态概率 $a_i(n) = P(X_n = i)$,

$i = 1,2,\ n = 0,1,$

转移概率 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\ i,j = 1,2,\ n = 0,1,$

$p_{11} = 0.8 \quad p_{12} = 1 - p_{11} = 0.2$

$p_{21} = 0.7 \quad p_{22} = 1 - p_{21} = 0.3$



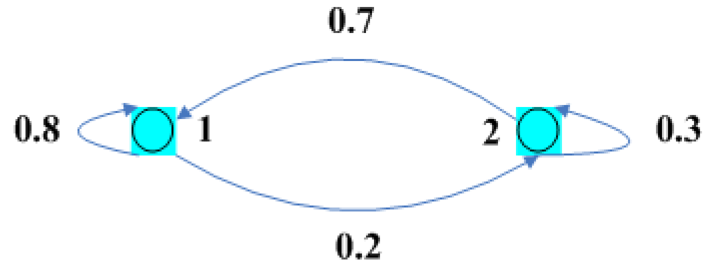
X_{n+1} 只取决于 X_n 和 p_{ij}，与 $X_{n-1}, \ldots$ 无关

状态转移具有无后效性

$$a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21}$$

$$a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22}$$

状态与状态转移



$$a_1(n+1) = a_1(n)\,p_{11} + a_2(n)\,p_{21}$$

$$a_2(n+1) = a_1(n)\,p_{12} + a_2(n)\,p_{22}$$

给定$a(0)$, 预测

$a(n)$, n=1,2…

	n	0	1	2	3	…	∞
设投保时健康	$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	…	7/9
	$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	…	2/9
设投保时疾病	$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	…	7/9
	$a_2(n)$	1	0.3	0.33	0.333	…	2/9

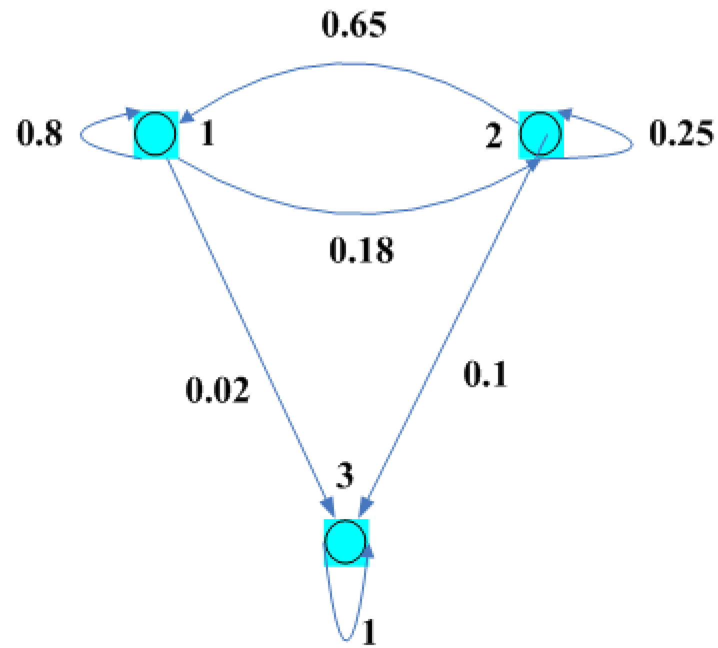
可以看到，$n \to \infty$ 时状态概率趋于稳定值；

该稳定值与初始状态无关，这是一种主要的马氏链模型的重要性质。

健康与疾病

例2. 健康和疾病状态同上，$X_n=1$~ 健康，$X_n=2$~ 疾病

死亡为第3种状态，记$X_n=3$



$p_{11}=0.8$，$p_{12}=0.18$，$p_{13}=0.02$

$p_{21}=0.65$，$p_{22}=0.25$，$p_{23}=0.1$

$p_{31}=0$，$p_{32}=0$，$p_{33}=1$

$$a_1(n+1)=a_1(n)\,p_{11}+a_2(n)\,p_{21}+a_3(n)\,p_{31}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)\,p_{12}+a_2(n)\,p_{22}+a_3(n)\,p_{32}$$

$$a_3(n+1)=a_1(n)\,p_{13}+a_2(n)\,p_{23}+a_3(n)\,p_{33}$$

状态与状态转移

设投保时处于健康状态，预测 $a(n)$, n=1,2…

n	0	1	2	3	….	50	….	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.7285	…	0.1293		0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.1835	…	0.0326		0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.0880	…	0.8381		1

- 一旦$a_1(k)= a_2(k)=0$, $a_3(k)=1$, 则对于$n>k$, $a_1(n)=0$，$a_2(n)=0$, $a_3(n)=1$, 即从状态3不会转移到其它状态；
- 不论初始状态如何，最终都要转到状态3；这代表了另一种主要的马氏链模型。

马氏链的基本方程

状态X_n=1,2,…,k $(n=0,1,\ldots)$

状态概率 $a_i(n)=P(X_n=i)$, $i=1,2,\ldots,k,\ n=0,1,\ldots$ $\sum_{i=1}^{k} a_i(n)=1$

转移概率$p_{ij}=P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i),\ p_{ij}\ge 0,\ \sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1,\ i=1,2,\ldots,k$

基本方程 $a_i(n+1)=\sum_{j=1}^{k} a_j(n)p_{ji}=1,\ i=1,2,\ldots,k$

$a(n)=(a_1(n),a_2(n),\ldots,a_k(n))$ $a(n+1)=a(n)P$

~ 状态概率向量

$\Downarrow$

$P=\{p_{ij}\}_{k\times k}$ ~ 转移概率矩阵 $a(n)=a(0)P^n$

（非负，行和为1）

马氏链的两个重要类型

$$a(n+1)=a(n)P$$

1. 正则链 ~ 从任一状态出发经有限次转移能以正概率到达另外任一状态（如例1）。

$$\text{正则链} \Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$$

$$\text{正则链} \Rightarrow \exists w, a(n) \to w (n \to \infty)$$

w ~ 稳态概率

w满足 $wP=w$

例1. $P=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$

$0.8w_1+0.7w_2=w_1$

$0.2w_1+0.3w_2=w_2$

$0.2w_1=0.7w_2$

w满足 $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$

$w_1+w_2=1$

$w=(7/9,2/9)$

马氏链的两个重要类型

2. 吸收链 ~ 存在吸收状态（一旦到达就不会离开的状态i, $p_{ii}=1$），且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态（如例2）。

有r个吸收状态的吸收链的转移概率阵标准形式

$$P=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}, R\text{有非零元素}$$

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^s$$

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_{k-r})=Me$$

$$e=(1,1,\ldots,1)^T$$

y_i~ 从第 i 个非吸收状态出发，被某个吸收状态吸收前的平均转移次数。

定理1 吸收链的基矩阵M中的每个元素，表示从一个非吸收状态出发，过程到达每个非吸收状态的平均转移次数。

定理2 设$y=Me$，M为吸收链的基矩阵，$e=(1,1,\ldots,1)^T$，则y的每个元素表示从非吸收状态出发，到达某个吸收状态被吸收之前的平均转移次数。

定理3 设$F=MR=(f_{ij})$，其中M为吸收链的基矩阵，R为P中的子阵，则f_{ij}表示从非吸收状态i出发，被吸收状态j吸收的概率。

例2 钢琴销售的存贮策略

背景与问题

钢琴销售量很小，商店的库存量不大,以免积压资金

一家商店根据经验估计，平均每周的钢琴需求为1架

存贮策略：每周末检查库存量，仅当库存量为零时，才订购3架供下周销售；否则，不订购。

估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大，以及每周的平均销售量是多少。

问题分析

1. 顾客的到来相互独立，需求量近似服从泊松分布，其参数由需求均值为每周1架确定，由此计算需求概率

2. 存贮策略是周末库存量为零时订购3架 ->周末的库存量可能是0, 1, 2, 3，周初的库存量可能是1, 2, 3。

3. 用马氏链描述不同需求导致的周初库存状态的变化。

4. 动态过程中每周销售量不同，失去销售机会（需求超过库存）的概率不同。

5. 可按稳态情况（时间充分长以后）计算失去销售机会的概率和每周的平均销售量。

模型假设

钢琴每周需求量服从泊松分布，均值为每周1架

存贮策略：当周末库存量为零时，订购3架，周初到货；否则，不订购。

以每周初的库存量作为状态变量，状态转移具有无后效性。

在稳态情况下计算该存贮策略失去销售机会的概率和每周的平均销售量。

模型建立

D_n~第n周需求量，均值为1的泊松分布

$$P(D_n = k) = e^{-1}/k! \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

D_n	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

S_n~第n周初库存量(状态变量)

$S_n \in \{1,2,3\}$

状态转移阵

状态转移规律

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n - D_n, & D_n < S_n \\ 3, & D_n \ge S_n \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 1) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{12} = P(S_{n+1} = 2 | S_n = 1) = 0$$

$$p_{13} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 1) = P(D_n >= 1) = 0.632$$

……

$$p_{33} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 3) = P(D_n = 0) + P(D_n >= 3) = 0.448$$

模型建立

状态概率 $a_i(n)=P(S_n=i),\ i=1,2,3$

马氏链的基本方程 $a(n+1)=a(n)P$

$$P=\begin{bmatrix}0.368 & 0 & 0.632\\ 0.368 & 0.368 & 0.264\\ 0.184 & 0.368 & 0.448\end{bmatrix}$$

已知初始状态，可预测第 n 周初库存量 $S_n=i$ 的概率

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^N>0$

正则链 $\Rightarrow \exists w, a(n)\to w\ (n\to\infty)$

$P^2>0$ ⇨ 正则链

⇩ 稳态概率分布 w 满足 $wP=w$

$$w=(w_1,w_2,w_3)=(0.285,0.263,0.452)$$

$n\to\infty$，状态概率 $a(n)=(0.285, 0.263, 0.452)$

模型求解

1. 估计在这种策略下失去销售机会的可能性

第n周失去销售机会的概率

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^{3} P(D_n > i \mid S_n = i) P(S_n = i), n\text{充分大时，} P(S_n = i) = w_i$$

$$= P(D>1)w_1 + P(D>2)w_2 + P(D>3)w_3$$

D	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

$w = (0.285, 0.263, 0.452)$

$$= 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

从长期看，失去销售机会的可能性大约 10%。

模型求解　　2. 估计这种策略下每周的平均销售量

第n周平均售量:

$$R_n=\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{i-1} jP(D_n=j|S_n=i)+iP(D_n\ge i|S_n=i)\right]P(S_n=i)$$

需求不超过存量,销售需求　　　　需求超过存量,销售存量

n充分大时　$P(S_n=i)=w_i$

=0.632×0.285+0.896×0.263+0.977×0.452=0.857

从长期看，每周的平均销售量为 0.857(架)

思考：为什么这个数值略小于每周平均需求量1(架)？

敏感性分析

当平均需求在每周1 (架) 附近波动时，最终结果有多大变化。

设D_n服从均值为 λ 的泊松分布

$P(D_n=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!,\ (k=0,1,2\ldots\ )$

状态转移阵

$$P=\begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda}/2 & \lambda e^{-\lambda} & 1-(\lambda+\lambda^2/2)e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

第n周(n充分大)失去销售机会的概率 $P=P(D_n>S_n)$

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

当平均需求增长（或减少）10%时，失去销售机会的概率将增长（或减少）约1.5% 。

本讲作业

1. 习题12.1, 12.9。

2. 钢琴的销售策略中，结果是每周平均销售量 为0.857(架)，为什么这个数值略小于每周平均需求量1(架)？