抽象代数问题解答

王启明
2024级数学学院

2025 年 10 月 19 日

问题 1. 设H是G的正规子群，K是G的次正规子群。证明HK是G的正规子群，且$|HK|$整除$|H|\cdot|K|$。

解. (1) 证明HK是G的正规子群。首先，因为H是G的正规子群，有$HK = KH$，所以HK是G的一个子群。要证明$HK \triangleleft G$，我们需要对任意$g \in G$，$h \in H$，$k \in K$，证明$g(hk)g^{-1} \in HK$。

$$g(hk)g^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1})$$

因为 $H \triangleleft G$，所以 $ghg^{-1} \in H$。我们记 $h' = ghg^{-1}$。因为 K 是 G 的次正规子群，它在G的任何自同构下不变。共轭作用 $i_g(x) = gxg^{-1}$ 是G的一个内自同构，所以K在i_g下不变，即 $gKg^{-1} = K$。因此，$gkg^{-1} \in K$。我们记 $k' = gkg^{-1}$。所以，$g(hk)g^{-1} = h'k' \in HK$。这就证明了 HK 是 G 的正规子群。

(2) 证明$|HK|$整除$|H|\cdot|K|$。根据群论中的公式（第二同构定理的推论）：

$$|HK| = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$$

因为 $|H \cap K|$ 是一个正整数（至少为1，因为单位元在交集中），所以 $|HK|$ 必然是 $|H|\,|K|$ 的一个因子。 □

问题 2. 设H是G的正规子群，K为H的次正规子群。证明K是G的正规子群。

解. 要证明 $K \triangleleft G$，我们需要对任意 $g \in G$，证明 $gKg^{-1} = K$。考虑映射 $\phi_g : H \to H$，定义为 $\phi_g(h) = ghg^{-1}$。因为 $H \triangleleft G$，所以对任意 $h \in H$，有 $ghg^{-1} \in H$。因此 ϕ_g 是一个从H到H的良定义映射。我们可以验证 ϕ_g 是H的一个自同构：

- **同态性:** $\phi_g(h_1h_2) = g(h_1h_2)g^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = \phi_g(h_1)\phi_g(h_2)$。
- **单射性:** 若 $\phi_g(h) = e$，则 $ghg^{-1} = e$，推出 $h = e$。
- **满射性:** 对任意 $h' \in H$，取 $h = g^{-1}h'g$。因为 $H \triangleleft G$，所以 $h \in H$。那么 $\phi_g(h) = g(g^{-1}h'g)g^{-1} = h'$。

因为K是H的次正规子群，所以K在H的任何自同构下不变。特别地，$\phi_g(K) = K$。即 $gKg^{-1} = K$。因为这对所有 $g \in G$ 都成立，所以 K 是 G 的正规子群。 □

问题 3. 设H是G的次正规子群。对任何$g \in G$，证明gHg^{-1}也是G的次正规子群。

解. 这个证明是直接的。根据定义，H是G的次正规子群意味着对于G的每一个自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，都有 $\phi(H) = H$。内自同构 $i_g(x) = gxg^{-1}$ 是G的自同构的一种。因为H是次正规子群，所以它在所有内自同构下是不变的。因此，对任意 $g \in G$，我们有 $gHg^{-1} = i_g(H) = H$。题目要求证明 gHg^{-1} 是次正规子群。既然 $gHg^{-1} = H$，而H本身就是次正规子群，所以命题自然成立。 □

问题 4. *设H是G的正规子群且$[G:H]$有限。证明 $P(|G/H_G|) = P([G:H])$，这里H_G是H在G中的正规核，$P(n)$指n的所有不同素因子的集合。*

解. 这个命题陈述本身可能存在问题。 H在G中的正规核定义为 $H_G = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$。题目给定$H$是$G$的正规子群 ($H \triangleleft G$)，这意味着对所有 $g \in G$，都有 $gHg^{-1} = H$。因此，$H_G = \bigcap_{g\in G} H = H$。于是，原命题变为证明 $P(|G/H|) = P([G : H])$。因为商群的阶 $|G/H|$ 就等于子群的指数 $[G:H]$，所以这等价于证明 $P([G:H]) = P([G:H])$。这是一个重言式。

注： 题目很可能意在假设 H 是 G 的一个（不一定正规的）有限指数子群。但即使在这种情况下，该命题也是错误的。例如，令 $G = S_4$，$H = S_3$。H是G的子群但不是正规子群。指数 $[G : H] = |S_4| / |S_3| = 24/6 = 4$。所以 $P([G : H]) = P(4) = \{2\}$。 H的正规核 H_G 是H所有共轭子群的交。S_3在S_4中的共轭子群是S_4中四个点的稳定化子，它们的交集是单位群 $\{e\}$。所以 $H_G = \{e\}$。那么 $|G/H_G| = |G/\{e\}| = |G| = 24$。所以 $P(|G/H_G|) = P(24) = \{2, 3\}$。显然 $\{2\} \neq \{2, 3\}$。 □

问题 5. *设G为有限Abel群，H为G的极大子群。证明$[G:H]$为素数。*

解. 因为G是Abel群，所以它的任何子群都是正规子群。因此，H是G的极大正规子群。根据极大子群的定义，不存在G的子群K使得$H \subsetneq K \subsetneq G$。考虑商群 G/H。根据对应定理， G/H 的子群与 G 中包含 H 的子群一一对应。因为 H 是 G 的极大子群，所以包含 H 的子群只有 H 和 G 本身。这意味着 G/H 的子群只有两个：平凡子群 $\{H\}$ 和 G/H 自身。一个只有两个子群的群，必然是素数阶循环群。因此，商群的阶 $|G/H|$ 是一个素数。又因为 $|G/H| = [G : H]$，所以H在G中的指数为素数。 □

问题 6. *设p^n整除有限群G的阶数，证明G必有p^n阶子群。*

解. 这是Sylow第一定理的一个推广形式。我们可以用对群阶 $|G|$ 的数学归纳法来证明。 **基础情形:** 若 $|G| = 1$，命题平凡成立。 **归纳假设:** 假设命题对所有阶数小于 $|G|$ 的群都成立。设 $|G| = p^k m$，其中 $p \nmid m$。我们已知 $p^n \,|\, |G|$，所以 $n \leq k$。考虑G的类方程: $|G| = |Z(G)| + \sum_i [G : C_G(x_i)]$，其中$Z(G)$是$G$的中心，$x_i$是大小大于1的共轭类的代表元。

情形1: p **整除** $|Z(G)|$。因为$Z(G)$是有限Abel群，根据Cauchy定理，它包含一个阶为p的元素，该元素生成一个阶为p的循环子群N。因为$N \subseteq Z(G)$，所以N是G的正规子群。考虑商群 G/N，其阶为 $|G/N| = |G| /p$。因为 $p^n \,|\, |G|$，所以 $p^{n-1} \,|\, |G/N|$。由于 $|G/N| < |G|$，根据归纳假设，G/N中存在一个阶为p^{n-1}的子群，记为K/N。根据对应定理，$H = K$是G中包含N的子群，其阶为 $|H| = |K/N| \, |N| = p^{n-1} \cdot p = p^n$。

情形2: p **不整除** $|Z(G)|$。从类方程来看，因为 $p \,|\, |G|$ 且 $p \nmid |Z(G)|$，所以必然存在某个i，使得p不整除指数 $[G : C_G(x_i)]$。我们有 $|G| = [G : C_G(x_i)] \, |C_G(x_i)|$。因为 $p^k m = [G : C_G(x_i)] \, |C_G(x_i)|$ 且 $p \nmid [G : C_G(x_i)]$，所以 p^k 必须整除 $|C_G(x_i)|$。又因为 $n \leq k$，所以 p^n 也整除 $|C_G(x_i)|$。由于 $x_i \notin Z(G)$，它的中心化子 $C_G(x_i)$ 是G的真子群，所以 $|C_G(x_i)| < |G|$。根据归纳假设，$C_G(x_i)$ 中存在一个阶为p^n的子群。这个子群也是G的子群。归纳完成。 □

问题 7. *整数加群 $\mathbb{Z}$ 是否有合成群列？*

解. 没有。一个群有合成群列，当且仅当它同时满足升链和降链条件。整数加群 $(\mathbb{Z},+)$ 不满足子群的降链条件。例如，考虑以下一串真子群链：

$$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 8\mathbb{Z} \supset \cdots \supset 2^k\mathbb{Z} \supset \dots$$

这是一个无限长的严格降链，所以 $\mathbb{Z}$ 没有合成群列。

另一个角度看，合成群列的商因子必须是单群。对于Abel群，单群就是素数阶循环群。如果 $\mathbb{Z}$ 有合成群列 $\{0\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = \mathbb{Z}$，那么 $\mathbb{Z}/G_{n-1}$ 必须是单群，即素数阶循环群 $\mathbb{Z}_p$。这意味着 $\mathbb{Z}/G_{n-1} \cong \mathbb{Z}_p$，所以 $G_{n-1} = p\mathbb{Z}$。同理 G_{n-1}/G_{n-2} 也必须是素数阶循环群，这意味着 G_{n-2} 是 $p\mathbb{Z}$ 的指数为素数的子群，例如 $pq\mathbb{Z}$。这个过程可以无限进行下去，无法终止于 $\{0\}$。 □

问题 8. *给出循环群 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ 的所有合成群列。*

解. $\mathbb{Z}_{18}$ 的阶为 $18 = 2 \cdot 3^2$。合成群列的商因子必须是素数阶循环群。根据Jordan-Hölder定理，任何两个合成群列都有相同的长度和相同的商因子集合（不计顺序）。 $\mathbb{Z}_{18}$ 的子群由18的因子决定，包括 $\langle 0\rangle, \langle 9\rangle, \langle 6\rangle, \langle 3\rangle, \langle 2\rangle, \mathbb{Z}_{18}$。它们的阶分别为 1, 2, 3, 6, 9, 18。我们寻找从 $\{0\}$ 到 $\mathbb{Z}_{18}$ 的极大子群链。 **路径1:**

$$\{\langle 0\rangle\} \triangleleft \langle 9\rangle\ (|\mathbb{Z}_2|) \triangleleft \langle 3\rangle\ (|\mathbb{Z}_3|) \triangleleft \mathbb{Z}_{18}\ (|\mathbb{Z}_3|)$$

商因子为 $(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$。 **路径2:**

$$\{\langle 0\rangle\} \triangleleft \langle 6\rangle\ (|\mathbb{Z}_3|) \triangleleft \langle 2\rangle\ (|\mathbb{Z}_3|) \triangleleft \mathbb{Z}_{18}\ (|\mathbb{Z}_2|)$$

商因子为 $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2)$。 **路径3:**

$$\{\langle 0\rangle\} \triangleleft \langle 6\rangle\ (|\mathbb{Z}_3|) \triangleleft \langle 3\rangle\ (|\mathbb{Z}_2|) \triangleleft \mathbb{Z}_{18}\ (|\mathbb{Z}_3|)$$

商因子为 $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3)$。

这三个是 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ 的所有合成群列。 □

问题 9. *设196阶群G有合成群列 $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$，求长度$n$的值。*

解. 群的阶为 $|G| = 196 = 2^2 \cdot 7^2$。根据Jordan-Hölder定理，一个有限群的任意两个合成群列的长度相同，并且商因子（composition factors）在同构意义下是唯一的。这些商因子是单群，其阶的乘积等于群的阶 $|G|$。设商因子为 $H_1, H_2, \dots, H_n$，其中 $H_i = G_i/G_{i-1}$。则

$$\prod_{i=1}^{n} |H_i| = |G| = 196 = 2^2 \cdot 7^2$$

因为G的阶是 $p^a q^b$ 的形式，根据Burnside定理，G是可解群。可解群的商因子是素数阶循环群。因此，这些商因子的阶必然是素数。唯一的可能是这些阶是 $\{2, 2, 7, 7\}$。合成群列的长度 n 就是商因子的个数。所以，$n = 4$。 □

问题 10. *对于S_5中元素 $\sigma = (13524)$ 与 $\tau = (12)(345)$，把 $\sigma\tau\sigma^{-1}$ 写成不相交轮换的乘积。*

解. 利用共轭运算的性质：$\sigma(a_1 a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots\sigma(a_k))$。

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma(12)(345)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5))$$

由 $\sigma = (13524)$ 得： $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 2$。代入上式，得：

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (34)(512)$$

这已经是不相交轮换的乘积。 □

问题 11. 设 $\sigma \in S_n$ 可以写成m个长度分别为$k_1, \ldots, k_m$的不相交的轮换的乘积，求σ的阶$o(\sigma)$。

解. 设 $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_m$，其中 c_i 是长度为 k_i 的不相交轮换。一个长度为k的轮换的阶是k。因为不相交的轮换是可交换的，所以对任意整数 N，有：

$$\sigma^N = (c_1 c_2 \ldots c_m)^N = c_1^N c_2^N \ldots c_m^N$$

要使得 σ^N 为单位置换 e，必须对所有的 i 都有 $c_i^N = e$。这个条件成立当且仅当 N 是每个轮换的阶 k_i 的倍数。 σ 的阶是满足这个条件的最小正整数 N。这正是最小公倍数(lcm)的定义。所以，σ 的阶为：

$$o(\sigma) = \operatorname{lcm}(k_1, k_2, \ldots, k_m)$$

□

问题 12. 证明$n > 2$时$Z(S_n) = \{e\}$，$n > 3$时$Z(A_n) = \{e\}$。

解. (1) 证明$n > 2$时 $Z(S_n) = \{e\}$。设 $\sigma \in Z(S_n)$ 且 $\sigma \neq e$。那么存在 i 使得 $\sigma(i) = j$ 且 $i \neq j$。因为 $n > 2$，所以存在一个 k 与 i, j 都不同。考虑对换 $\tau = (jk)$。计算共轭 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 对 i 的作用：

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(i) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(i)))$$

因为 $i \neq j, k$，所以 τ 不动 i，即 $\tau(i) = i$ 且 $\tau^{-1}(i) = i$。所以 $(\tau\sigma\tau^{-1})(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(j) = k$。但是 $\sigma(i) = j$。因为 $j \neq k$，所以 $\tau\sigma\tau^{-1} \neq \sigma$。这与 σ 在中心 $Z(S_n)$ 中的假定矛盾。因此，中心里只能有单位元，即 $Z(S_n) = \{e\}$。

(2) 证明$n > 3$时 $Z(A_n) = \{e\}$。设 $\sigma \in Z(A_n)$ 且 $\sigma \neq e$。那么存在 i 使得 $\sigma(i) = j$ 且 $i \neq j$。因为 $n > 3$，所以存在两个元素 k, l 与 i, j 都不同。考虑3-轮换 $\tau = (jkl)$。3-轮换是偶置换，所以 $\tau \in A_n$。计算共轭 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 对 i 的作用：

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(i) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(i)))$$

因为 i 不在 τ 的轮换中，所以 $\tau^{-1}(i) = i$。所以 $(\tau\sigma\tau^{-1})(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(j) = k$。但是 $\sigma(i) = j$。因为 $j \neq k$，所以 $\tau\sigma\tau^{-1} \neq \sigma$。这与 $\sigma \in Z(A_n)$ 的假定矛盾。因此，$Z(A_n) = \{e\}$。 □

问题 13. 设G为合数阶单群，证明$G' = G$，这里G'为G的导群。

解. 导群 G'（或称交换子群）是由所有形如 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ 的交换子生成的子群。一个重要的性质是，G' 总是 G 的一个正规子群 ($G' \triangleleft G$)。群 G 是单群，这意味着它仅有的正规子群是平凡子群 $\{e\}$ 和 G 本身。因此，G' 只可能是 $\{e\}$ 或者 G。

如果 $G' = \{e\}$，这意味着对所有 $x, y \in G$，都有 $xyx^{-1}y^{-1} = e$，即 $xy = yx$。这说明 G 是一个Abel群。一个Abel群是单群，当且仅当它没有任何非平凡真子群，这要求该群是素数阶循环群。但是题目给定 G 的阶是合数。这产生了矛盾。所以 G 不可能是Abel群，从而 G' 不能是 $\{e\}$。因此，唯一剩下的可能性是 $G' = G$。 □

问题 14. 设H与K都是群G的正规子群，而且G/H与G/K都可解，如何由G/H与G/K的$Abel$列来找出$G/(H \cap K)$的一个$Abel$列？

解. 首先证明 $G/(H \cap K)$ 是可解群。考虑一个同态映射 $\phi : G \to G/H \times G/K$，定义为 $\phi(g) = (gH, gK)$。这个映射的核是：

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid gH = H \text{ and } gK = K\} = H \cap K$$

根据同态第一基本定理，$G/(H\cap K)\cong \mathrm{Im}(\phi)$。而 $\mathrm{Im}(\phi)$ 是 $G/H\times G/K$ 的一个子群。因为 G/H 和 G/K 是可解群，它们的直积 $G/H\times G/K$ 也是可解群。可解群的子群也是可解群。因此，$G/(H\cap K)$ 是可解群。

现在构造 $G/(H\cap K)$ 的一个正规列，其商群为Abel群 (即Abel列)。设 G/H 的一个Abel列为 $\{\bar{E}_0\}\triangleleft\bar{E}_1\triangleleft\cdots\triangleleft\bar{E}_m=G/H$，其中 $\bar{E}_i=E_i/H$。设 G/K 的一个Abel列为 $\{\bar{F}_0\}\triangleleft\bar{F}_1\triangleleft\cdots\triangleleft\bar{F}_n=G/K$，其中 $\bar{F}_j=F_j/K$。$G/(H\cap K)$ 同构于 $G/H\times G/K$ 的一个子群 $\mathrm{Im}(\phi)$。$G/H\times G/K$ 有一个Abel列：

$$\{(H,K)\}\triangleleft(E_1/H\times\{K\})\triangleleft\cdots\triangleleft(G/H\times\{K\})\triangleleft(G/H\times F_1/K)\triangleleft\cdots\triangleleft(G/H\times G/K)$$

商群分别是 E_i/E_{i-1} 和 F_j/F_{j-1} 的同构，它们都是Abel群。令 L 为这个Abel列。令 $\bar{G}=G/(H\cap K)$。通过同构 $\psi:\bar{G}\to\mathrm{Im}(\phi)$，我们可以将 L 与 $\mathrm{Im}(\phi)$ 的交集拉回到 $\bar{G}$ 中，得到 $\bar{G}$ 的一个Abel列。具体地，令 $\bar{L}_i=\psi^{-1}(L_i\cap\mathrm{Im}(\phi))$，则 $\{\bar{L}_i\}$ 就是 $G/(H\cap K)$ 的一个Abel列。 □

问题 15. *任给两个群G_1与G_2，证明 $G_1\times G_2\cong G_2\times G_1$。*

解. 这个同构对任意两个群 G_1,G_2 都成立。考虑映射 $\phi:G_1\times G_2\to G_2\times G_1$，定义为 $\phi((g_1,g_2))=(g_2,g_1)$。

- ϕ 是一个同态：对任意 $(a,b),(c,d)\in G_1\times G_2$， $\phi((a,b)(c,d))=\phi((ac,bd))=(bd,ac)$。$\phi((a,b))\phi((c,d))=(b,a)(d,c)=(bd,ac)$。两者相等，所以 ϕ 是同态。
- ϕ 是一个双射：显然是单射（核为单位元）和满射（对任一 (g_2,g_1) 都有原像 (g_1,g_2)）。

因为 ϕ 是一个双射同态，所以它是一个同构。 □

问题 16. *证明本章定理5.2。*

解. 书中没有给出定理5.2的具体内容。但根据下一题的提示，定理5.2很可能是： **猜想的定理5.2：** 设 H 与 K 都是可解群，证明它们的直积 $H\times K$ 也可解。 **证明：** 一个群 G 是可解的，如果其导群列 $G^{(0)}=G,G^{(1)}=[G,G],G^{(n+1)}=[G^{(n)},G^{(n)}]$ 在有限步后终止于单位群，即存在 m 使得 $G^{(m)}=\{e\}$。设 $G=H\times K$。可以证明直积的导群等于导群的直积，即 $(H\times K)'=H'\times K'$。由此归纳可得 $(H\times K)^{(i)}=H^{(i)}\times K^{(i)}$。因为 H 和 K 是可解群，所以存在整数 n,m 使得 $H^{(n)}=\{e_H\}$ 和 $K^{(m)}=\{e_K\}$。令 $l=\max(n,m)$。那么

$$(H\times K)^{(l)}=H^{(l)}\times K^{(l)}$$

因为 $l\ge n$，所以 $H^{(l)}\subseteq H^{(n)}=\{e_H\}$。因为 $l\ge m$，所以 $K^{(l)}\subseteq K^{(m)}=\{e_K\}$。因此，$(H\times K)^{(l)}=\{e_H\}\times\{e_K\}=\{e_{H\times K}\}$。所以 $H\times K$ 的导群列终止于单位群，故 $H\times K$ 是可解群。 □

问题 17. *设H与K都是可解群，证明它们的直积$H\times K$也可解。*

解. 见上一题（问题16）的解答。 □

问题 18. *设G为n阶加法Abel群。任给$a_1,\ldots,a_n\in G$，证明有$1\le j\le k\le n$使得 $\sum_{i=j}^{k}a_i=0$。*

解. 考虑$n+1$个部分和： $s_0=0$ $s_1=a_1$ $s_2=a_1+a_2$ ... $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

这$n+1$个和 $s_0,s_1,\ldots,s_n$ 都是群G中的元素。而群G的阶为n，即G中只有n个不同的元素。根据鸽巢原理，这$n+1$个和中至少有两个是相等的。设 $s_j=s_k$，其中 $0\le j<k\le n$。那么它们的差为0：$s_k-s_j=0$。在加法群中，这意味着：

$$(a_1+\cdots+a_k)-(a_1+\cdots+a_j)=0$$

$$a_{j+1} + \cdots + a_k = 0$$

这就找到了满足条件的和。这里下标的范围是 $j+1$ 到 k，符合题目要求的形式。 □

问题 19. *互不同构的72阶Abel群有多少个？*

解. 根据有限Abel群的基本定理，一个n阶Abel群的同构类的数量等于n的每个素数幂因子的划分数之积。首先对72进行素因子分解：$72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$。我们需要计算指数3和2的整数划分数。

- 指数3的划分有:
  - 3
  - 2+1
  - 1+1+1

  共有3种划分。对应的群因子是 $\mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^1}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。
- 指数2的划分有:
  - 2
  - 1+1

  共有2种划分。对应的群因子是 $\mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$。

总的同构类的数量是这些划分数的乘积：$3 \times 2 = 6$。所以，共有6个互不同构的72阶Abel群。 □

问题 20. *乘法群 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 是否为有限生成的Abel群？*

解. 不是。这个群通常被称为圆周群，记为 $U(1)$ 或 T。它在复数乘法下构成一个Abel群。我们可以用两种方式说明它不是有限生成的。

方法1：基于可数性 假设该群是有限生成的，设生成元为 $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$。每个生成元可以写成 $g_k = e^{i\theta_k}$ 的形式。那么群中的任意元素 z 都可以表示为 $z = g_1^{a_1} g_2^{a_2} \ldots g_n^{a_n}$，其中 $a_k \in \mathbb{Z}$。 z 的辐角可以表示为 $a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \cdots + a_n\theta_n \pmod{2\pi}$。所有可能组合的集合 $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个可数集。因此，所有可以生成的元素的辐角也构成一个可数集。然而，圆周群包含了所有辐角在 $[0, 2\pi)$ 内的复数，这是一个不可数集。因为可数个生成元无法生成一个不可数的群，所以圆周群不是有限生成的。

方法2：基于挠子群 一个群的挠子群（torsion subgroup）由其所有有限阶元素构成。对于圆周群，其有限阶元素是所有的单位根 $e^{2\pi i(p/q)}$。对任意正整数n，都存在一个阶为n的元素（例如n次本原单位根 $e^{2\pi i/n}$）。这意味着圆周群的挠子群包含任意阶的循环群。根据有限生成Abel群的结构定理，任何有限生成Abel群G都可以分解为 $G \cong \mathbb{Z}^r \times T$，其中$T$是挠子群，且 $T \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_s}$。在这个结构中，挠子群$T$中所有元素的阶都有一个上界（例如 $\text{lcm}(m_1, \ldots, m_s)$）。但是圆周群中元素的阶没有上界。因此，它不可能是有限生成的。 □