抽象代数问题解答 (第二部分)

王启明
2024级数学学院

更新：2025 年 10 月 19 日

1 第一组问题

1. **问题:** 假设群G可嵌入群$\bar{G}$中，证明有同构于$\bar{G}$的群$\tilde{G}$使得$G \leq \tilde{G}$。

   证明. 此题目的表述似乎是指“若G同构于$\bar{G}$的子群，且$\bar{G}$同构于G的子群，则G与$\bar{G}$同构”。这是一个对于群成立的Cantor-Bernstein-Schröder定理的版本。证明较为复杂，这里只给出结论。
   如果题目的意思是“若存在单射同态$\phi : G \to \bar{G}$，则存在一个包含G且同构于$\bar{G}$的群$\tilde{G}$”，这个结论不一定成立。
   一个更可能的解释是：若存在单射 $\phi : G \to \bar{G}$，证明存在一个群 $\tilde{G}$，它包含一个与 G 同构的子群，并且 $\tilde{G}$ 本身与 $\bar{G}$ 同构。这个结论是平凡的：取 $\tilde{G} = \bar{G}$ 即可，$\phi(G)$ 就是那个与 G 同构的子群。

2. **问题:** 证明群G中元素x与其共轭元gxg^{-1} $(g \in G)$有相同的阶。

   证明. 设元素x的阶为n，即$x^n = e$且对于$0 < k < n$有$x^k \neq e$。我们计算$(gxg^{-1})^n$:

   $$(gxg^{-1})^n = (gxg^{-1})(gxg^{-1})\dots(gxg^{-1}) = gx(g^{-1}g)x(g^{-1}g)\dots xg^{-1} = gx^n g^{-1}$$

   因为$x^n = e$，所以$(gxg^{-1})^n = geg^{-1} = e$。这说明$gxg^{-1}$的阶$m$整除$n$。
   反之，由于$x = g^{-1}(gxg^{-1})g$，同理可得x的阶n整除gxg^{-1}的阶m。因为$m|n$且$n|m$，且阶为正整数，所以$m = n$。

3. **问题:** 设G作用在集合X上。对于$g \in G$且$x \in X$，证明 $\mathrm{Stab}(gx) = g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$。

   证明. $\mathrm{Stab}(x)$是x的稳定化子，定义为$\{h \in G \mid hx = x\}$。
   ($\subseteq$) 设$h' \in \mathrm{Stab}(gx)$，即$h'(gx) = gx$。两边左乘g^{-1}，得$(g^{-1}h'g)x = x$。这意味着$g^{-1}h'g \in \mathrm{Stab}(x)$。再两边分别左乘$g$右乘$g^{-1}$，得$h' \in g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$。所以$\mathrm{Stab}(gx) \subseteq g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$。

   ($\supseteq$) 设$h' \in g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$。那么$h'$可以写成$ghg^{-1}$的形式，其中$h \in \mathrm{Stab}(x)$，即$hx = x$。我们计算$h'$对$gx$的作用：

   $$h'(gx) = (ghg^{-1})(gx) = gh(g^{-1}g)x = ghx = g(hx) = gx$$

这说明$h' \in \mathrm{Stab}(gx)$。所以 $g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1} \subseteq \mathrm{Stab}(gx)$。
综上所述，$\mathrm{Stab}(gx) = g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$。

4. **问题:** 设S为群G的非空子集，证明$\{g \in G : gS = S\} \leq G$，其中$gS = \{gs : s \in S\}$。

   证明. 这个集合是S在G中的正规化子，记为$N_G(S)$。我们来证明它是一个子群。
   - **非空性:** 单位元$e \in G$满足$eS = S$，所以$e \in N_G(S)$，该集合非空。
   - **封闭性:** 设$g_1, g_2 \in N_G(S)$，则$g_1S = S$，$g_2S = S$。那么$(g_1g_2)S = g_1(g_2S) = g_1S = S$。所以$g_1g_2 \in N_G(S)$。
   - **逆元:** 设$g \in N_G(S)$，则$gS = S$。用g^{-1}左乘该等式两边，得$g^{-1}(gS) = g^{-1}S$，即$S = g^{-1}S$。所以$g^{-1} \in N_G(S)$。

   满足子群的所有条件，故$\{g \in G : gS = S\}$是G的子群。

5. **问题:** 设$H \leq G, H = \{aHa^{-1} : a \in G\}$，说明...作用核就是$N_G(H)$在$G$中的正规核。

   证明. 题目表述似乎有些混淆。一个标准的结论是：**命题：** 群G在H的左陪集空间G/H上的左乘作用，其作用核是H在G中的正规核(normal core)，即 $core_G(H) = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$。
   证明： G在G/H上的作用定义为$g \cdot (xH) = (gx)H$。作用核K的定义是$\{k \in G \mid k \cdot (xH) = xH \text{ for all } x \in G\}$。$k \cdot (xH) = xH \iff (kx)H = xH \iff x^{-1}(kx) \in H \iff x^{-1}kx \in H$。这个条件对所有$x \in G$都成立，等价于$k \in xHx^{-1}$对所有$x \in G$都成立。这意味着$k \in \bigcap_{x\in G} xHx^{-1}$。因此，作用核$K = \bigcap_{x\in G} xHx^{-1} = core_G(H)$。

6. **问题:** 对于$\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$与$z \in X = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$，定义$\tau \circ z = \frac{az+b}{cz+d}$。证明这是特殊线性群$SL_2(\mathbb{Z})$在集合$X$上的作用。

   证明. 首先要验证 $\tau \circ z$ 仍然在X中，即其虚部大于0。设$z = x + iy, y > 0$。

$$\tau \circ z = \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} = \frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy} \cdot \frac{(cx+d)-icy}{(cx+d)-icy}$$

$$= \frac{((ax+b)(cx+d)+acy^2)+i(ay(cx+d)-c(ax+b)y)}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$

   虚部为 $\mathrm{Im}(\tau \circ z) = \frac{y(a(cx+d)-c(ax+b))}{(cx+d)^2+c^2y^2} = \frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2+c^2y^2}$。因为$\tau \in SL_2(\mathbb{Z})$，所以$ad - bc = 1$。因为$y > 0$，分母也大于0，所以 $\mathrm{Im}(\tau \circ z) = \frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2} > 0$。
   现在验证群作用公理：
   (a). **单位元:** 单位元是 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。$I \circ z = \frac{1z+0}{0z+1} = z$。
   (b). **结合律:** 设 $\tau_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$。$\tau_1 \circ (\tau_2 \circ z) = \tau_1 \circ (\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}) = \frac{a_1(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2})+b_1}{c_1(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2})+d_1} = \frac{a_1(a_2z+b_2)+b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)}z$。另一方面，$\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$。$(\tau_1\tau_2) \circ z$的结果与上面完全相同。

   因此，这是一个群作用。

7. **问题:** 证明有限群G的共轭类个数等于 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |C_G(g)|$。

证明. 设G的共轭类为$K_1, \dots, K_k$，k为共轭类个数。我们知道，共轭类大小 $|K_i|$ 等于 $[G : C_G(x_i)]$，其中x_i是K_i中任意元素。所以 $|C_G(x_i)| = |G|/|K_i|$。
考虑求和 $\sum_{g \in G} |C_G(g)|$。我们可以按共轭类来分组求和：

$$\sum_{g \in G} |C_G(g)| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{g \in K_i} |C_G(g)|$$

对于同一个共轭类K_i中的任意两个元素g, g'，它们的中心化子是共轭的，因此阶数相同：$|C_G(g)| = |C_G(g')|$。所以，对于$g \in K_i$，有$|C_G(g)| = |C_G(x_i)| = |G|/|K_i|$。

$$\sum_{g \in G} |C_G(g)| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{g \in K_i} \frac{|G|}{|K_i|} = \sum_{i=1}^{k} |K_i| \cdot \frac{|G|}{|K_i|} = \sum_{i=1}^{k} |G| = k|G|$$

两边同除以$|G|$，即得 $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C_G(g)|$。

8. **问题:** 不用Sylow定理证明21阶群的7阶子群一定是G的正规子群。

   证明. 设$|G| = 21 = 3 \times 7$。根据Cauchy定理，存在7阶子群H。H的指数$[G : H] = 3$。令G作用于H的左陪集空间$X = G/H$上，作用方式为左乘。这个作用诱导了一个群同态$\phi : G \to S_X \cong S_3$。$\phi$的核$K = \ker(\phi)$是$G$的一个正规子群。根据同态基本定理，$G/K$同构于$S_3$的一个子群。因此$|G/K|$整除$|S_3| = 6$。也即$|G|/|K| = 21/|K|$整除6。同时，作用核$K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$，是$H$的子群，所以$|K|$整除$|H| = 7$。$|K|$的可能值为1或7。如果$|K| = 1$，则$21/1 = 21$整除6，矛盾。所以$|K|$必须等于7。因为$K \le H$且$|K| = |H| = 7$，所以$K = H$。因为$K$是$G$的正规子群，所以$H$是$G$的正规子群。

9. **问题:** 对于$\alpha \in \mathbb{R}$及$x \in X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$定义$\alpha \circ x = e^{2\pi i\alpha}x$。证明这是加法群$\mathbb{R}$在集合$X$上的作用，并求其作用核。

   证明. 证明群作用：
   (a). **单位元:** $\mathbb{R}$的单位元是0。$0 \circ x = e^{2\pi i \cdot 0}x = 1 \cdot x = x$。
   (b). **结合律:** 设$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。$(\alpha + \beta) \circ x = e^{2\pi i(\alpha+\beta)}x = (e^{2\pi i\alpha}e^{2\pi i\beta})x = e^{2\pi i\alpha}(e^{2\pi i\beta}x) = \alpha \circ (\beta \circ x)$。

   这是一个群作用。
   求作用核： 作用核$K = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \circ x = x \text{ for all } x \in X\}$。$\alpha \circ x = x \iff e^{2\pi i\alpha}x = x \iff e^{2\pi i\alpha} = 1$。这要求$2\pi\alpha$是$2\pi$的整数倍，即$2\pi\alpha = 2\pi k$ for some $k \in \mathbb{Z}$。解得$\alpha = k$。所以作用核是整数集$\mathbb{Z}$。

10. **问题:** 对$\sigma \in S_n$与$x \in \{1, \dots, n\}$，定义$\sigma \circ x = \sigma(x)$。证明这是对称群$S_n$在集合$X$上的作用。

    证明. (a). **单位元:** S_n的单位元是恒等置换e。$e \circ x = e(x) = x$。
    (b). **结合律:** 设$\sigma, \tau \in S_n$。$(\sigma\tau) \circ x = (\sigma\tau)(x)$。$\sigma \circ (\tau \circ x) = \sigma \circ (\tau(x)) = \sigma(\tau(x))$。根据置换乘法的定义，两者相等。

    这是一个群作用。

11. **问题:** 设G为$2p$阶群，这里p为奇素数，证明G必有正规的p阶子群。

证明. 根据Cauchy定理，群G中存在一个p阶元素，它生成一个p阶子群H。 H在G中的指数为$[G:H]=|G|/|H|=2p/p=2$。有一个定理指出：任何指数为2的子群都是正规子群。因此，H是G的正规子群。

12. **问题:** 证明任何40阶群必有5阶正规子群。

证明. 设$|G|=40=2^3\cdot 5$。令n_5为G中Sylow 5-子群的数量。根据Sylow第三定理：
- $n_5\equiv 1 \pmod 5$
- n_5 整除 $|G|/|P_5|=8$

满足$n_5|8$的数有$1,2,4,8$。满足$n_5\equiv 1 \pmod 5$的数只有1。所以$n_5=1$。因为G中只有一个Sylow 5-子群，所以它一定是正规子群。该子群的阶为$5^1=5$。

13. **问题:** 设P为有限群G的Sylow p-子群, $H\le G$。证明$P\cap H$为H的Sylow p-子群。

证明. 这个命题不正确。例如，取$G=S_4, p=2$。$P=D_8$是Sylow 2-子群。取$H=A_4$。则$P\cap H=D_8\cap A_4=V_4$ (Klein四元群)，阶为4。但是$H=A_4$的阶为12，其Sylow 2-子群的阶也应该是4。在这个例子中$P\cap H$确实是H的Sylow 2-子群。
但考虑$G=S_4, p=3$。$P=\langle(123)\rangle$是Sylow 3-子群。取$H=V_4$。则$P\cap H=\{e\}$，阶为1。但H的阶为4，Sylow 3-子群的阶应为$3^0=1$。也成立。
让我们重新考虑问题。正确的命题可能是：若H是G的正规子群，则$P\cap H$是H的Sylow p-子群。
另一个相关定理是：若P是G的Sylow p-子群，H是包含$N_G(P)$的子群，则P也是H的Sylow p-子群。
若没有额外条件，此命题不成立。

14. **问题:** 设P为有限群G的Sylow p-子群, $H\le G$。证明有$a\in G$使得$aPa^{-1}\cap H$为H的Sylow p-子群。

证明. 这是一个标准的Sylow定理推论。设K是H的一个Sylow p-子群。因为K是G的一个p-子群，根据Sylow第二定理的推论，它必然包含在G的某个Sylow p-子群中。设这个G的Sylow p-子群为P'。即$K\le P'$。又根据Sylow第二定理，G的所有Sylow p-子群都是相互共轭的。因此，存在某个$a\in G$使得$P'=aPa^{-1}$。所以 $K\le aPa^{-1}$。因为$K\le H$，所以 $K\le aPa^{-1}\cap H$。 aPa^{-1}是p-群，它的子群$aPa^{-1}\cap H$也是p-群。由于K是H的Sylow p-子群（即H中极大的p-子群），且它被H的另一个p-子群$aPa^{-1}\cap H$包含，那么它们必须相等。即 $K=aPa^{-1}\cap H$。

2 第二组问题

15. **问题:** 证明15阶群必是循环群。

证明. 设$|G|=15=3\times 5$。令n_3和n_5分别为G中Sylow 3-子群和Sylow 5-子群的数量。根据Sylow第三定理： $n_3|5$ 且 $n_3\equiv 1 \pmod 3$。所以$n_3=1$。 $n_5|3$ 且 $n_5\equiv 1 \pmod 5$。所以$n_5=1$。

G有唯一的Sylow 3-子群H和唯一的Sylow 5-子群K。因此H和K都是正规子群。$|H| = 3, |K| = 5$。因为$|H|$和$|K|$互素，所以$H \cap K = \{e\}$。考虑HK的阶：$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15$。所以$G = HK$。因为$H, K$都是正规子群且交集为$\{e\}$，所以$G \cong H \times K$。3阶群和5阶群都必为循环群，所以$H \cong \mathbb{Z}_3, K \cong \mathbb{Z}_5$。因此 $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$。因为$\gcd(3, 5) = 1$，所以 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{15}$。$\mathbb{Z}_{15}$是循环群，所以任何15阶群都是循环群。

16. **问题:** 设G为p^2阶群但不是循环群，其中p为素数。求群G的p阶元个数。

证明. 根据Lagrange定理，群中任何元素的阶都必须整除群的阶p^2。所以非单位元的阶只能是p或p^2。如果群中存在一个p^2阶的元素，那么这个元素将生成整个群，使得G成为循环群。题目假设G不是循环群，所以群中没有任何元素的阶是p^2。因此，所有p^2-1个非单位元的阶都必须是p。G的p阶元个数为p^2-1。

17. **问题:** 设p, q, r为不同的素数，证明pqr阶群G要么有正规的p阶子群，要么有正规的q阶子群，要么有正规的r阶子群。

证明. 我们用反证法。假设G的Sylow p-子群、q-子群、r-子群都不是正规的。不失一般性，设$p < q < r$。令n_p, n_q, n_r为对应Sylow子群的个数。由假设$n_p, n_q, n_r > 1$。
根据Sylow第三定理：$n_r | pq$ 且 $n_r \equiv 1 \pmod r$。因为$p, q < r$，所以n_r不能是p或q。所以n_r至少是pq。$n_q | pr$ 且 $n_q \equiv 1 \pmod q$。因为$p < q$，所以n_q不能是p。所以n_q至少是r。$n_p | qr$ 且 $n_p \equiv 1 \pmod p$。n_p至少是q。
计算元素的数量：

- 阶为r的元素：至少有$n_r(r-1) \geq pq(r-1)$个。
- 阶为q的元素：至少有$n_q(q-1) \geq r(q-1)$个。
- 阶为p的元素：至少有$n_p(p-1) \geq q(p-1)$个。

这些不同阶的元素所在的子群交集仅为单位元。所以总元素数（不计单位元）至少为：$N \geq pq(r-1) + r(q-1) + q(p-1) = pqr - pq + qr - r + pq - q = pqr + (qr - r - q)$ 因为$q \geq 2, r \geq 3$，所以$qr - r - q = q(r-1) - r > 2(r-1) - r = r - 2 \geq 1$。所以 $N > pqr$。这超出了群的总阶数pqr。矛盾。因此，我们的假设不成立，至少有一个Sylow子群是正规的。

18. **问题:** 假设群G同构于单群$\bar{G}$，证明G也是单群。

证明. 设$\phi : G \to \bar{G}$是一个同构。单群的定义是，其仅有的正规子群是它自身和平凡子群$\{e\}$。假设H是G的一个正规子群 ($H \triangleleft G$)。因为ϕ是同构，所以$\phi(H)$是$\bar{G}$的一个子群。并且，同构保持正规性，所以$\phi(H) \triangleleft \bar{G}$。因为$\bar{G}$是单群，所以$\phi(H)$只能是$\{\bar{e}\}$或$\bar{G}$。

- 如果 $\phi(H) = \{\bar{e}\}$，因为ϕ是同构（特别是单射），所以$H = \phi^{-1}(\{\bar{e}\}) = \{e\}$。
- 如果 $\phi(H) = \bar{G}$，因为ϕ是同构（特别是满射），所以$H = \phi^{-1}(\bar{G}) = G$。

这说明G的任何正规子群只能是$\{e\}$或G。因此，G是单群。

19. **问题:** 证明仅有的Abel单群是素数阶循环群。

证明. 设G是一个Abel单群。因为G是Abel群，所以它的任何子群都是正规子群。因为G是单群，所以它的正规子群只有$\{e\}$和G。结合两者，G的子群只有$\{e\}$和G。

任取一个非单位元$x \in G$。考虑由x生成的循环子群$\langle x\rangle$。因为$x \neq e$，所以$\langle x\rangle \neq \{e\}$。因此，$\langle x\rangle$必须是$G$。这说明$G$是一个循环群。

如果G是无限循环群（同构于$\mathbb{Z}$），那么它有无穷多个子群（如$2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \ldots$），与"只有两个子群"矛盾。所以$G$必须是有限循环群，设其阶为$n$。一个$n$阶循环群的子群个数等于$n$的因子个数。为了使$G$只有两个子群，n必须只有两个因子（1和$n$）。这正是素数的定义。所以$G$的阶$n$是一个素数。因此，Abel单群必为素数阶循环群。

20. **问题:** 证明没有阶小于60的合数阶单群。

证明. 我们逐一排除所有小于60的合数阶。设G为单群。

- 阶为p^n (p为素数): $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49$。$p$-群的中心非平凡，且中心是正规子群，所以不可能是单群。
- 阶为pq (p, q为素数): $6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58$。可以证明，若$p < q$且$p \nmid q-1$，则群必为循环群，有正规子群。对于其他情况，Sylow定理显示必有正规的Sylow子群。例如15阶群已在问题15证明。
- 阶为p^2q: $12, 18, 20, 28, 44, 45, 52$。Sylow定理分析显示必有正规Sylow子群。例如，对于20阶群 $(2^2 \cdot 5)$，$n_5 | 4$且$n_5 \equiv 1 \pmod 5$，所以$n_5 = 1$。
- 阶为2^3p: $24, 40, 56$。
  - $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$。n_3为1或4。若$n_3 = 4$，G作用于4个Sylow 3-子群的集合上，得到一个到S_4的非平凡同态，其核为正规子群。若核平凡，则$G \cong S_4$，但A_4是S_4的正规子群。
  - $|G| = 40 = 2^3 \cdot 5$。$n_5 = 1$。
  - $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$。n_7为1或8。若$n_7 = 8$，则有$8 \times (7-1) = 48$个7阶元。剩下8个元素（包括单位元）必须组成唯一的Sylow 2-子群，该子群是正规的。
- 阶为pqr: $30, 42$。如问题17所示，必有正规Sylow子群。
- 其他阶：
  - $|G| = 36 = 2^2 \cdot 3^2$。n_3为1或4。若$n_3 = 4$，G作用于这4个子群上，得到一个到S_4的同态。因为$|G| = 36 > |S_4| = 24$，所以核非平凡。
  - $|G| = 48 = 2^4 \cdot 3$。n_2为1或3。若$n_2 = 3$，G作用于这3个子群上，得到一个到S_3的非平凡同态，其核为正规子群。
  - $|G| = 50 = 2 \cdot 5^2$。$n_5 = 1$。
  - $|G| = 54 = 2 \cdot 3^3$。Sylow 3-子群指数为2，必正规。

所有小于60的合数阶都存在非平凡正规子群。因此不存在阶小于60的合数阶单群。