例題集 / 電気・電子 / 電気回路 / 周波数特性・ベクトル軌跡

LR直列回路

知識・記憶レベル　難易度: ★

図1の L-R 直列回路の端子間に加える電圧 E の大きさを一定に保ち，周波数 f を 0 から広範囲に変化させた。以下の問いに答えよ。

(1) R の両端間の電圧 V_R の大きさ $|V_R|$ について，$f=0$，$f\to\infty$のときの値をそれぞれ求めよ。

(2) (1)の結果を用いて横軸 f，縦軸 $|V_R|$ の図を描け。

(3) 電圧 V_R の E に対する位相角 θ について，$f=0$，$f\to\infty$ のときの値をそれぞれ求めよ。

(4) (3)の結果を用いて横軸 f，縦軸 θ の図を描け。

(5) (1)，(3)で求めた $|V_R|$，θ を用いてベクトル軌跡を描け。必ず矢印でベクトルの軌跡の向きを示すこと。

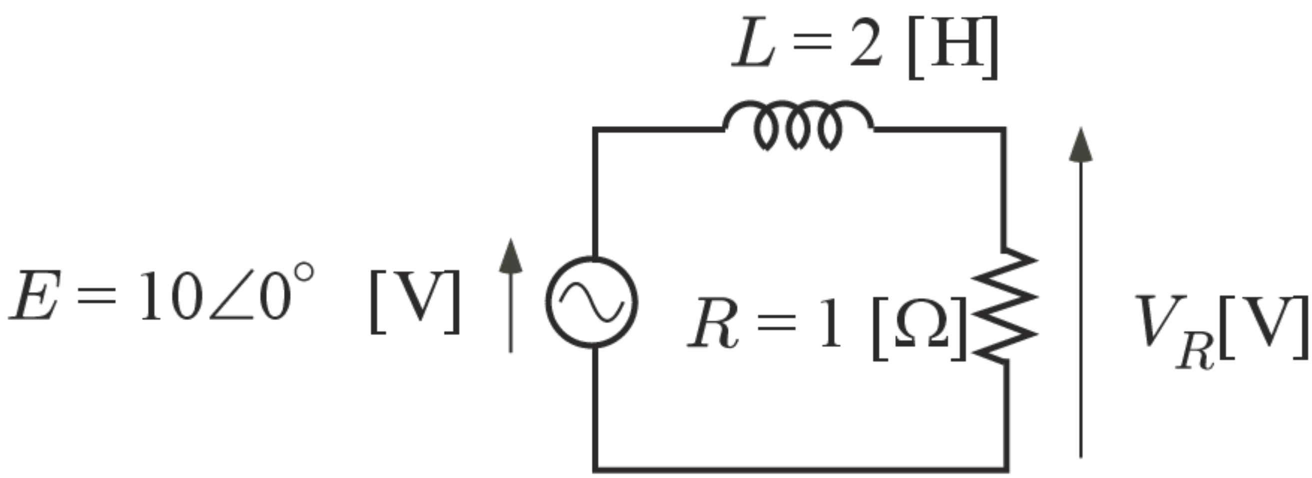

図1

解答例・解説

(1) 電圧 V_R は

$$V_R=\frac{R}{R+j\omega L}E=\frac{R}{R+j2\pi fL}E$$

となるので，その大きさ$|V_R|$ は

$$|V_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}\,|E|$$

となる。$f = 0$ のとき

$$|V_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2}}\,|E| = \frac{R}{R}\,|E| = |E| = \underline{10}\ [\mathrm{V}]$$

となる。$f \to \infty$ のとき

$$|V_R| = \frac{R}{\sqrt{(2\pi f L)^2}}\,|E| = \frac{R}{2\pi L f}\,|E| \to \underline{0}\ [\mathrm{V}]$$

となる。

(2) 図2となる。

(3) 位相角は

$$\theta = -\angle(R + j2\pi f L)$$

となる。 $f = 0$ のとき

$$\theta = -\angle R = \underline{0^\circ}$$

となる。また，$f \to \infty$ のとき

$$\theta = -\angle(j2\pi f L) = \underline{-90^\circ}$$

となる。

(4) 図3のようになる。

(5) 図4のようになる。

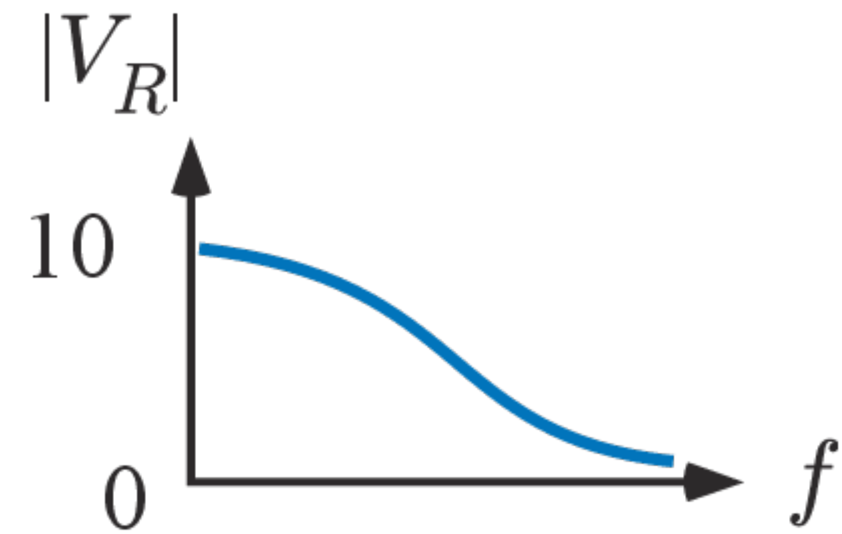

図2

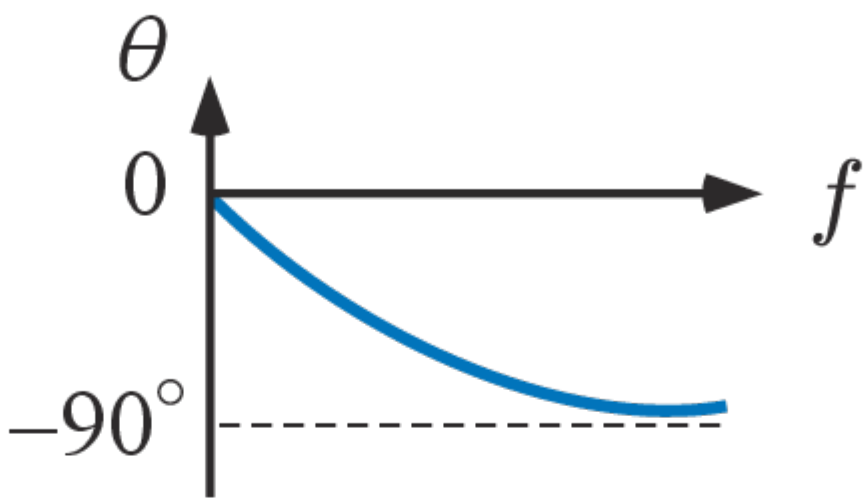

図3

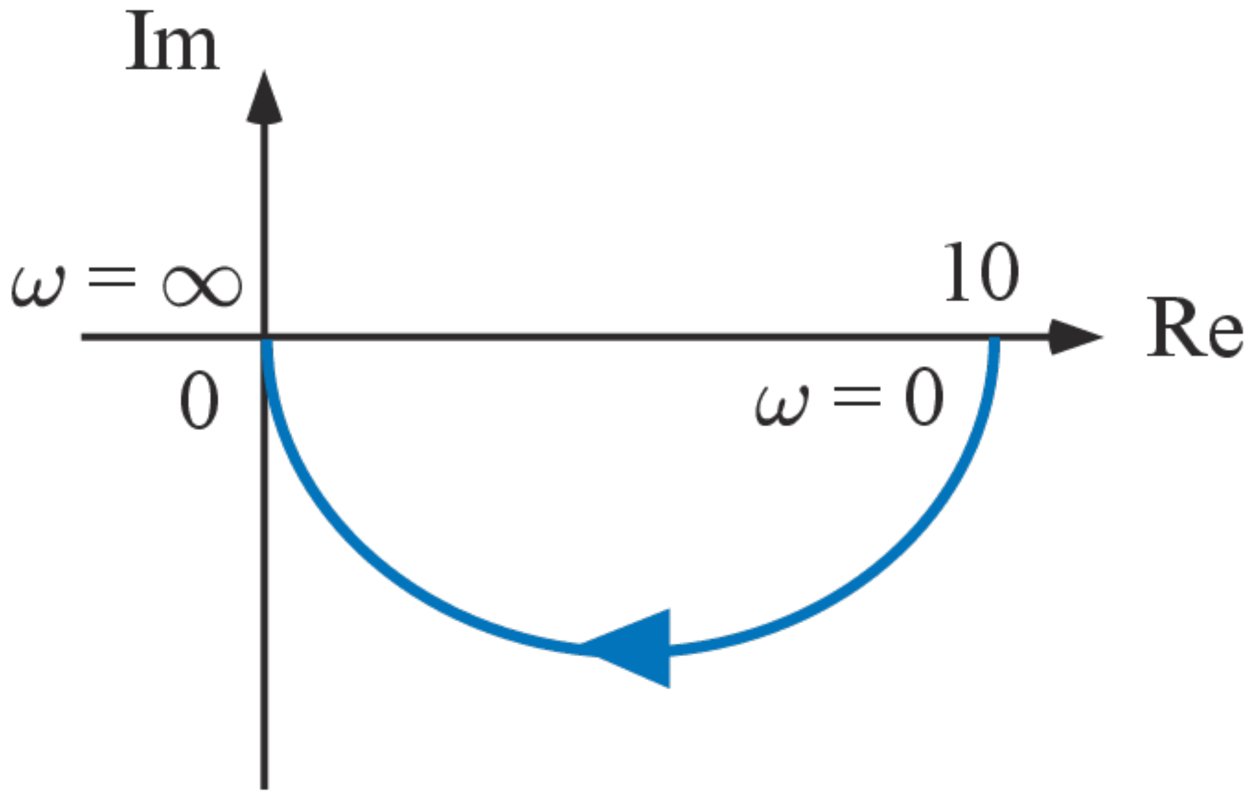

図4

RC直列回路 知識・記憶レベル 難易度: ★

図1 の C-R 直列回路の端子間に加える電圧 E の大きさを一定に保ち，周波数 f を 0 から広範囲に変化させた。以下の問いに答えよ。

(1) 電圧 V_R の大きさ$|V_R|$が $|V_R| = \dfrac{|E|}{\sqrt{2}}$ になる周波数 f_1 [Hz]を求めよ。

(2) 電圧 V_R の E に対する位相角 θ について，$f = f_1$ のときの θ の値を求めよ。

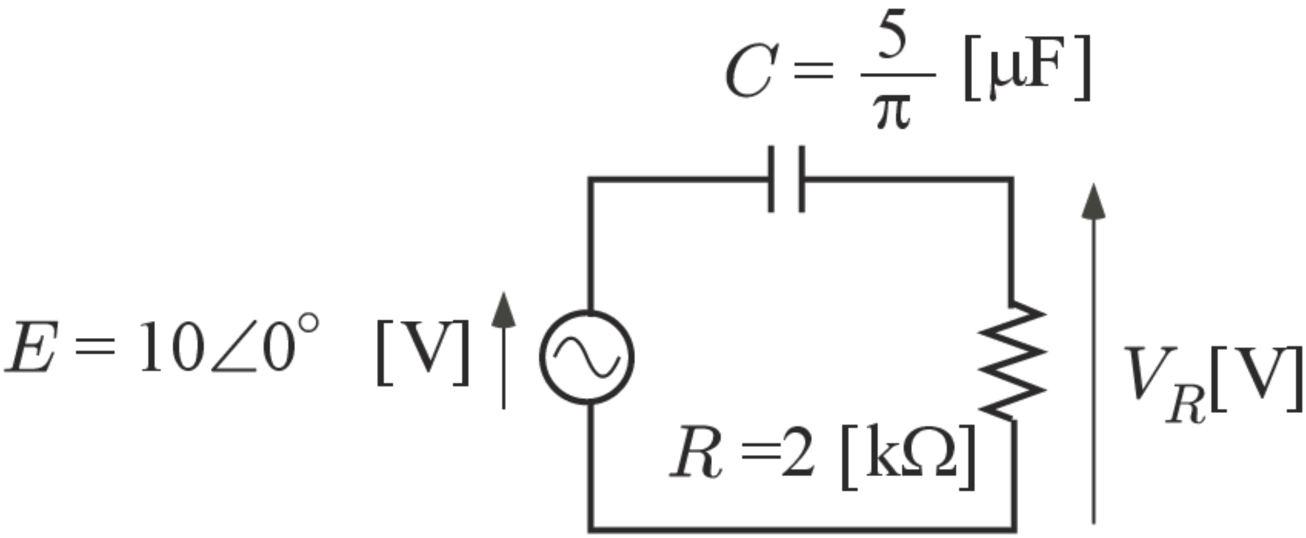

図1

解答例・解説

(1) V_R は

$$V_R = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R - j\frac{1}{2\pi f C}}$$

となり，大きさ $|V_R|$ は

$$|V_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}} |E|$$

となる。$f = f_1$ のとき，

$$\frac{|E|}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}} |E|$$

が成り立つ。展開すると

$$\begin{aligned}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2\pi f_1 C}\right)^2} &= \sqrt{2}R\\ R^2+\left(\frac{1}{2\pi f_1 C}\right)^2 &= 2R^2\\ R^2 &= \left(\frac{1}{2\pi f_1 C}\right)^2\\ f_1^2 &= \left(\frac{1}{2\pi RC}\right)^2\end{aligned}$$

となるので，$f_1 \geq 0$ より次のようになる。

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\times 2\times 10^3\times\frac{5}{\pi}\times 10^{-6}}\\ &= \frac{1}{20\times 10^{-3}} = \frac{1}{2}\times 10^2\\ &= \underline{50}\ [\mathrm{Hz}]\end{aligned}$$

(2) 位相角は

$$\begin{aligned}\theta &= -\angle\left(R-j\frac{1}{2\pi C f_1}\right)\\ &= -\angle\left(R-j\frac{1}{2\pi C\frac{1}{2\pi RC}}\right)\\ &= -\angle(R-jR)\\ &= -(-45^\circ) = \underline{45^\circ}\end{aligned}$$

となる。

RC直列回路(2)

知識・記憶レベル　難易度: ★

図1の回路で電源電圧 E の大きさを一定に保ち，周波数 f を広範囲に変化させた。以下の問いに答えよ。

(1) $f=0$，$f\to\infty$のときの電圧 V の大きさ$|V|$ をそれぞれ求めよ。

(2) 電圧 V の大きさ$|V|$は，どのように変化するか横軸 f，縦軸$|V|$ で 描け。

(3) 電圧 V のベクトル軌跡の概形を描け。ただし，位相角θは電源電圧 E に対して考えること。

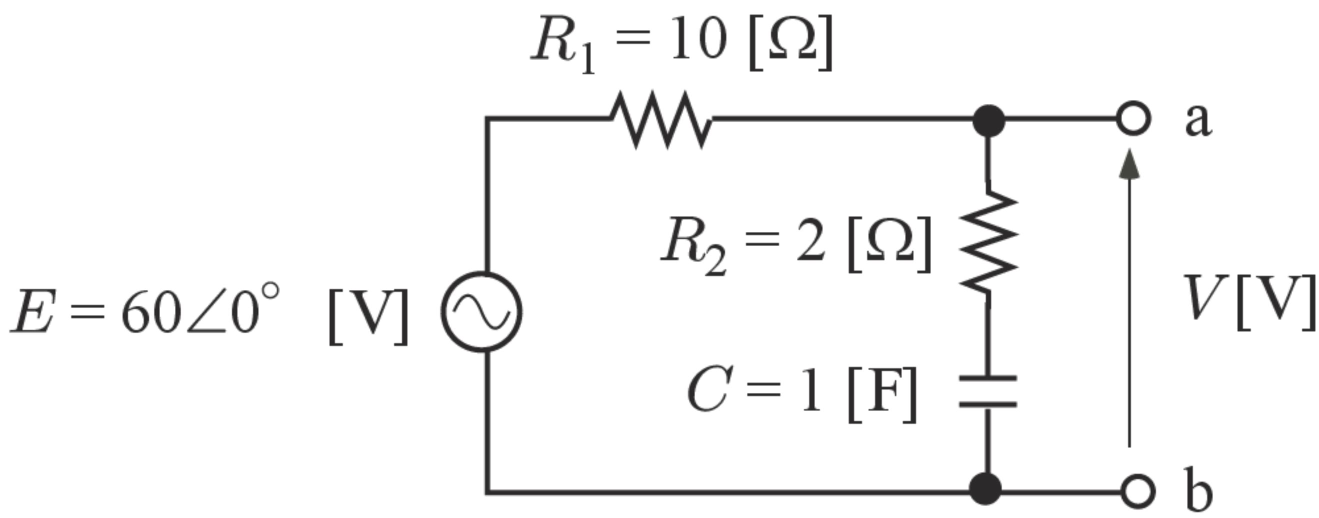

図1

解答例・解説

(1) 電圧 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} E = \frac{R_2 - j\frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2 - j\frac{1}{\omega C}} E \\
&= \frac{R_2 - j\frac{1}{2\pi f C}}{R_1 + R_2 - j\frac{1}{2\pi f C}} E
\end{aligned}
$$

となり，大きさ $|V|$ は次のようになる。

$$
|V| = \sqrt{\frac{R_2^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}}|E| \quad (1)
$$

$f \to \infty$のとき

$$\begin{aligned}|V| &= \sqrt{\frac{R_2^2+0}{(R_1+R_2)^2+0}}|E| = \frac{R_2}{R_1+R_2}|E| \\ &= \frac{2}{10+2}\times 60 = 2\times 5 \\ &= \underline{10}\ [\mathrm{V}]\end{aligned}$$

$f=0$のときは，(1)式を変形する。

$$|V| = \sqrt{\frac{(2\pi fCR_2)^2+1}{(2\pi fC(R_1+R_2))^2+1}}|E|$$

$f=0$ を代入すると

$$|V| = \sqrt{\frac{1}{1}}|E| = |E| = \underline{60}\ [\mathrm{V}]$$

となる。

(2) 図2のようになる。

(3) 電圧 Vの電源電圧 Eに対する位相角θは

$$\begin{aligned}\theta &= \angle\frac{R_2-j\frac{1}{\omega C}}{R_1+R_2-j\frac{1}{\omega C}} \\ &= \angle\left(R_2-j\frac{1}{\omega C}\right)-\angle\left(R_1+R_2-j\frac{1}{\omega C}\right) \\ &= \angle\left(R_2-j\frac{1}{2\pi fC}\right)-\angle\left(R_1+R_2-j\frac{1}{2\pi fC}\right)\end{aligned}$$

となる。 $f=0$ のとき，

$$\begin{aligned}\theta &= \lim_{f\to 0}\angle\left(-j\frac{1}{2\pi fC}\right)-\angle\left(-j\frac{1}{2\pi fC}\right) \\ &= -90^\circ-(-90^\circ)=0^\circ\end{aligned}$$

となり，$f\to\infty$ のとき，

$$\theta = \angle R_2-\angle(R_1+R_2)=0^\circ-(0^\circ)=0^\circ$$

となる。fが $0\sim\infty$ の間では，

$$\angle\left(R_2-j\frac{1}{2\pi fC}\right)-\angle\left(R_1+R_2-j\frac{1}{2\pi fC}\right)\le 0$$

の関係が成立するので，$\theta\le 0$ となる。よって，図3のようになる。

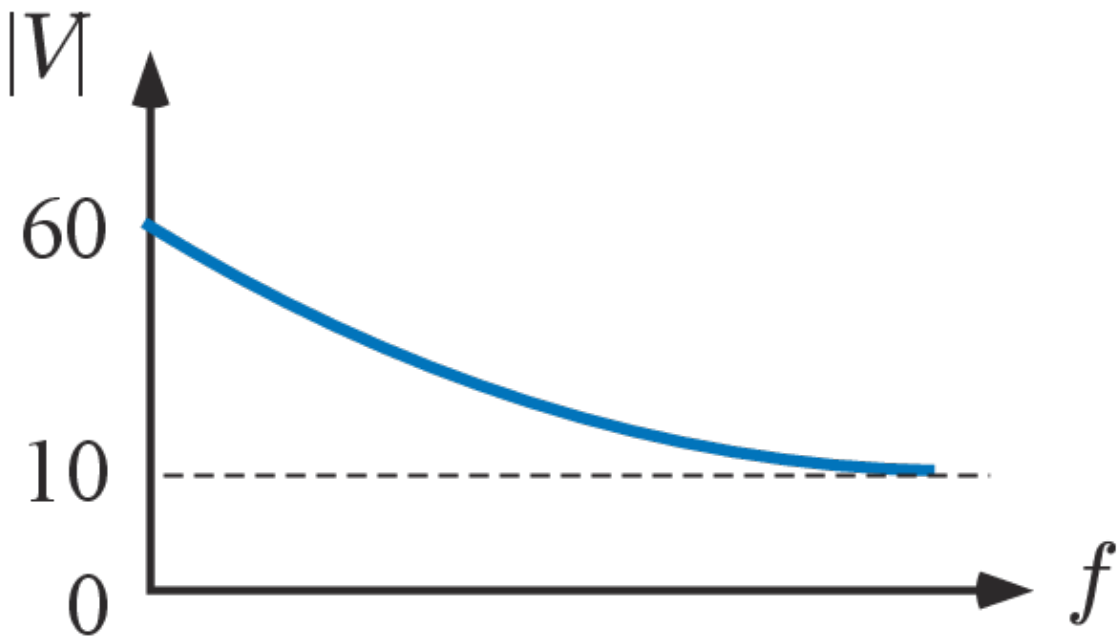

図2

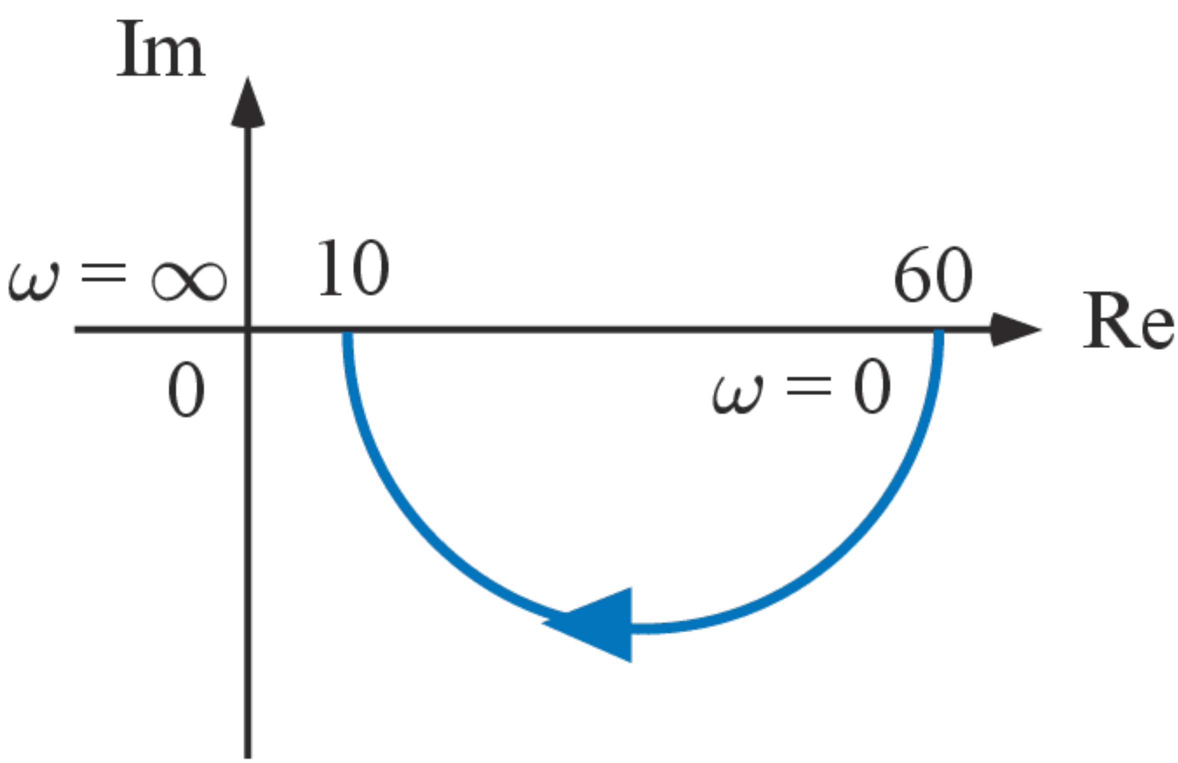

図3

RLC直並列回路

知識・記憶レベル　難易度: ★

図1の回路で電源電圧 E の大きさを一定に保ち，周波数 f を広範囲に変化させた。$\omega=0$，$\omega\to\infty$のときの電流 I の大きさ$|I|$ をそれぞれ求めよ。

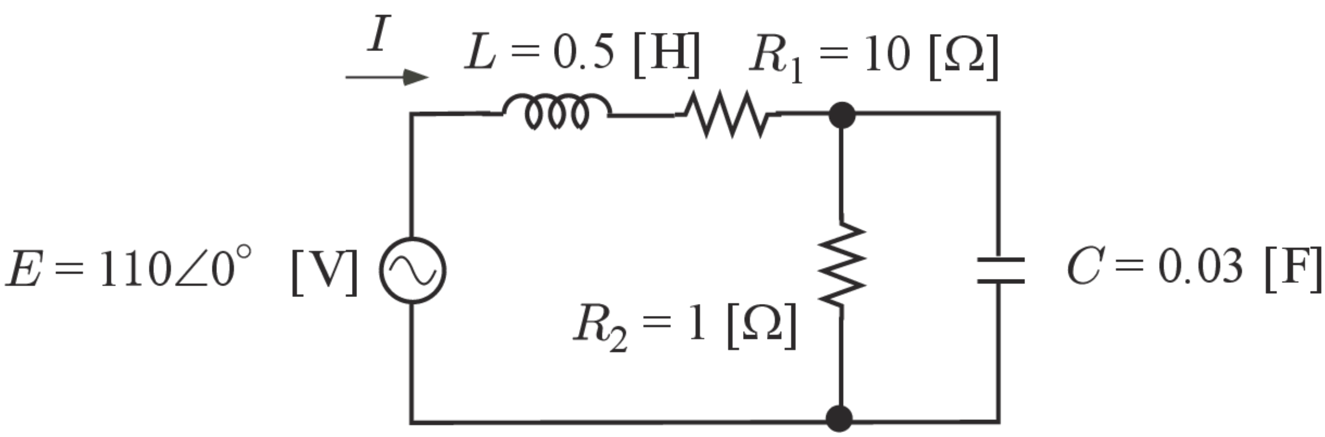

図1

解答例・解説

電流 I は

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{E}{R_1+j\omega L+\frac{R_2\frac{1}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}} = \frac{E}{R_1+j\omega L+\frac{R_2}{1+j\omega CR_2}} \\
&= = \frac{E(1+j\omega CR_2)}{(R_1+j\omega L)(1+j\omega CR_2)+R_2} \\
&= \frac{E(1+j\omega CR_2)}{(R_1+R_2-\omega^2LCR_2)+j\omega(L+CR_1R_2)}
\end{aligned}
$$

となる。よって，大きさは

$$
|I| = |E|\sqrt{\frac{1+(\omega CR_2)^2}{(R_1+R_2-\omega^2LCR_2)^2+\omega^2(L+CR_1R_2)^2}}
$$

となる。

$\omega\to\infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
|I| &= \lim_{\omega\to\infty} |E|\sqrt{\frac{1+(\omega CR_2)^2}{(R_1+R_2-\omega^2 LCR_2)^2+\omega^2(L+CR_1R_2)^2}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} |E|\sqrt{\frac{(\omega CR_2)^2}{(-\omega^2 LCR_2)^2+\omega^2(L+CR_1R_2)^2}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} |E|\sqrt{\frac{(\omega CR_2)^2}{\omega^4(LCR_2)^2+\omega^2(L+CR_1R_2)^2}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} |E|\sqrt{\frac{\omega^2(CR_2)^2}{\omega^4(LCR_2)^2}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} |E|\sqrt{\frac{1}{\omega^2 L^2}} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} |E|\frac{1}{\omega L} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega} \\
&= \underline{0}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

$\omega = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
|I| &= |E|\sqrt{\frac{1+0}{(R_1+R_2-0)^2+0}} \\
&= |E|\frac{1}{R_1+R_2} \\
&= \frac{110}{10+1} = \underline{10}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

となる。