华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称 **矩阵论** 课程类别 ☑公共课 □专业课 考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别 **研究生** 考试日期 **2019.12.19** 学生所在院系______

学号______ 姓名______ 任课教师______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

分　数	
评卷人	

一、填空题（15 分）（每小题 3 分，共 5 小题）

1. 已知矩阵 A 为 4 阶方阵，A 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，则 A

的 Jordan 标准型是______或______.

2. 设线性变换 T 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$，则 T 在 $\{\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1\}$

下的矩阵为______.

3. 矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$的 LDV 分解是______.

4. 已知 3 阶方阵$A=\begin{bmatrix}i & 2i & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 3+3i\end{bmatrix}$ 其中$i=\sqrt{-1}$，则$\|A\|_1=$ ______.

5. 矩阵$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$, $B=A^T$，则 $\text{rank}(A\otimes B)=$__________.

分　数	
评卷人	

二、（15 分）定义两组多项式序列

$$\mathrm{T}_{n+1}(x)=2x\mathrm{T}_n(x)-\mathrm{T}_{n-1}(x),$$
$$(\mathrm{n}+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-\mathrm{n}P_{n-1}(x)$$

其中 $\mathrm{n}\geq 1$，并且初始的多项式为 $\mathrm{T}_0(x)=P_0(x)=1$，$\mathrm{T}_1(x)=P_1(x)=\mathrm{x}$。两组多项式 $\{\mathrm{T}_0(x),\mathrm{T}_1(x),\cdots,\mathrm{T}_n(x)\}$，$\{\mathrm{P}_0(x),\mathrm{P}_1(x),\cdots,\mathrm{P}_n(x)\}$ 均构成多项式空间 $\mathcal{P}_n=L\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 的基。

(1) 求从基 $\{\mathrm{T}_0(x),\mathrm{T}_1(x),\mathrm{T}_2(x),\mathrm{T}_3(x)\}$ 到基 $\{P_0(x),P_1(x),P_2(x),P_3(x)\}$ 的过渡矩阵。

(2) 给定多项式 $f(x)=2\mathrm{T}_2(x)+3\mathrm{T}_3(x)$，求 $f(x)$ 在基 $\{P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\}$ 下的坐标。

分　数	
评卷人	

三、（15 分）已知线性空间 $V=\mathrm{R}^3$，以及 V 的子空间

$$M=L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

设 $\sigma(x)$ 是 V 到 M 的正交投影变换。

(1) 给定一组标准正交基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 $\sigma(x)$ 在该组基下的正交投影矩阵。

(2) 给定一个向量 $x=(1,\ \ 2,\ \ 1)^T$，求其投影后的向量。

分　数	
评卷人	

四、（10 分）设线性空间 $V_4(\mathrm{R})$ 的基为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，$T$ 是线性空间 $V_4(\mathrm{R})$ 上的线性变换，满足：

$$\begin{cases}T(\alpha_1)=2\alpha_1\\T(\alpha_2)=\alpha_1+2\alpha_2\\T(\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_3\\T(\alpha_4)=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\end{cases}$$

求线性空间 $V_4(\mathrm{R})$ 的一组基使得线性变换 T 在该基下的矩阵为 Jordan 标准型。

分　数	
评卷人	

五、（15 分）计算题

(1) （8 分）计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解，并由此给出 A^{+} 。

(2) （7 分）计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 4 & 2\end{bmatrix}$ 的 Moore-Penrose 广义逆。

分　数	
评卷人	

六、（10 分）求解下面的一阶线性常系数微分方程组

$$X'(t)=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{bmatrix}X(t),\quad X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

分　数	
评卷人	

七、（10 分）设矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵，证明：

(1) 矩阵 A 和 A^H 有相同的特征向量。

(2) 对任意的向量 $x \in \mathbb{C}^n$，Ax 和 $A^H x$ 有相同的长度。

分　数	
评卷人	

八、（10 分）设 A 和 C 都是 $n \times n$ 的矩阵，A 的特征值 λ_i $(i = 1,2,\cdots,n) \in \mathrm{R}$ (实数)，证明矩阵方程

$$X + AXA + A^2XA^2 = C$$

有唯一解。