1　2021 年题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0&i\\0&2&0&0\\0&0&3&-1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ ＿＿＿＿＿＿。

2. 矩阵 $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为 ＿＿＿＿＿＿。

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&8&5\\1&11&4\end{pmatrix}$，则 A 的 LDV 分解为：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

4. 令 $A=\begin{pmatrix}0.1&0.3\\0.7&0.6\end{pmatrix}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}A^k=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

5. R^3 中的镜像变换 S 定义为 $S(x)=x-2(x,u)u$，这里 u 为单位向量。若 $S\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，则 $S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=$ ＿＿＿＿＿＿。

二、(15 分) 设已知 T 是 $R^{2\times 2}$ 到 $R^{2\times 2}$ 上的变换，且对 $\forall X \in R^{2\times 2}$，有 $T(X) = BXC$，其中

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 证明 T 是线性变换；

(2) 求 T 在基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵 A；

(3) 求 $R^{2\times 2}$ 的一组基，使 T 在该基下有对角矩阵表示。

三、(15 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

(1) 求其 Jordan 标准型 J_A 及相应的矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J_A$;

(2) 求微分方程组 $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = (1 \quad 2 \quad 1)^T$。

四、(10 分) 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解 (SVD)$A = U\Sigma V^H$ (请给出 U, Σ, V 具体矩阵形式)。

五、计算题

(1)（10 分）矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, b=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$。计算不相容方程组 $Ax=b$ 的最佳最小二乘解。

(2)（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，计算 $e^{A}\sin(I-A)$。

六、证明题

(1) (8 分) 假设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，I 为 n 阶单位矩阵。证明：

$$A^+ = \lim_{t\to 0}(A^2 + tI)^{-1}A$$

(2) (7 分) 设非奇异矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，向量 $b \in \mathbb{R}^n$，并设 σ_1 和 σ_n 分别为 A 的最大和最小奇异值。若 $Ax = b$ 且 $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$，证明

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \gamma \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

其中 $\gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$，范数为向量的 2 范数。