1　2023 年题

1. 记 W 为实数域上的所有 3 阶对称矩阵构成的线性空间，则 W 的维数为 __________.

2. 设自然基 $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，该矩阵在 i 行 j 列相交位置为 1 其余位置全为 0，则 $4E_{ij}$ 的 M-P 广义逆为 ________________.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & -4 \\ 3 & 7 & 12 \\ -20 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty =$ ________________.

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的最大奇异值为 ________________.

5. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，则

$$v_1 v_1^T + \cdots + v_n v_n^T = \underline{\hspace{3cm}}.$$

二、（15 分）设 T 是数域 F 上的 n 维线性空间 $V_n(F)$ 上的线性变换。设有非零向量 $\alpha \in V_n(F)$ 使得 $T^{n-1}(\alpha) \neq 0$ 且 $T^n(\alpha) = 0$。

(1) 证明：$\{\alpha, T(\alpha), T^2(\alpha), \cdots, T^{n-1}(\alpha)\}$ 构成 $V_n(F)$ 的一组基；

(2) 求线性变换在基 $\{\alpha, T(\alpha), T^2(\alpha), \cdots, T^{n-1}(\alpha)\}$ 下的矩阵 A。

三、(15 分) 设 T 为 $P_3[x]$ 上的线性变换，$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 为 T 在基 $\{1, x, x^2\}$ 下的矩阵。

(1) 求一组基 $\{f_1, f_2, f_3\}$，使得 T 在这组基下的矩阵为 Jordan 标准形 J_A，并求 J_A。

(2) 给出 T 的一个二维不变子空间 W，且 W 不构成特征子空间。

四、(10 分) 假设 3 阶方阵 A 满足

$$Ax = 2x - 3(x, u_1)u_1 - 2(x, u_2)u_2,$$

其中

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

求矩阵 A 的奇异值分解。

五、计算题

(1)（15 分）给定方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&1\\2&4&1&2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

问方程组是否有解？若有解，求最小范数解；若无解，求最小二乘解。

(2) (15 分) 求解以下微分方程组

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

六、(1) (8 分) 设 A，B 为 n 阶方阵，证明：

$$\|A \otimes B - B \otimes A\|_2 \leq 2\|A\|_2\|B\|_2,$$

这里 $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的 2 范数（由向量的 2 范数诱导）。

(2) (7 分) 矩阵 $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\alpha=\underbrace{(1,\ldots,1)}_{n}\in\mathbb{R}^{1\times n}$。则当向量 $x\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ 取何值，使得 $\|A-\alpha\otimes x\|_F$ 最小？这里 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。