

## “数值分析”考试试卷 (A 卷)

考试方式 闭卷 考试日期 2020-11-21 考试时长 150 分钟

专业班级 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
分值	15	15	8	15	21	16	10	100	
得分									

分数

可使用无记忆功能简单计算器

评卷人

## 一、分析题 (15 分)

(1) 已知  $x_1 = 1.25$ ,  $x_2 = 0.180$  是具有三位有效数字的近似值, 试分析  $x_1^2 - x_2^2$  计算结果的有效数字位数。(5 分)

解答内容不得超过装订线

(2) 防洪水文监测中心每 5 分钟接受某水库的实时水位数据, 由于某种故障, 监测中心从  $t$  时刻起的连续 33 分钟内只收到 5 组水位数值,  $t$  时刻起的第 3 个周期水位值缺失。试简要分析采用何种数值计算方法可填补第 3 周期的水位值。(5 分)

(3) 试分析下述数值计算过程中近似计算结果 0.207 的截断误差与舍入误差, 只需给出其估计式, 不必计算出误差或误差限的值。(5 分)

$$\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1} dx \approx \frac{\sqrt{2}-1}{2} [\sqrt{1^2-1} + \sqrt{(\sqrt{2})^2-1}] = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{1.414-1}{2} = 0.207$$

分数	
评卷人	

二、已知  $y=f(x)=\sqrt{x}$  ,  $x\in[0.25,2.25]$  的如下数据表: (3×5 分共 15 分)

$x$	0.25	1	2.25
$y$	0.5	1	1.5

- (1) 根据上述数据构造  $f(x)$  的二次插值多项式  $P(x)$ ;
- (2) 利用余项公式估计以  $P(x)$  计算  $f(0.75)$  近似值的误差限;
- (3) 如果考虑  $f'(1)=0.5$  , 试构造增加该数据后的三次 Hermite 插值多项式  $H(x)$  , 同时满足上述数据表以及该导数值, 并写出该 Hermite 插值多项式的余项表达式。

解答内容不得超过装订线

分数	
评卷人	

三、对于机械求积公式:  $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}})$ , (1) 求其代数精度, (2) 它是插值型的吗? 简述其理由。(4+4=8 分)

分数	
评卷人	

四、(15 分) 用某种数值积分法计算以下积分的近似值, 精度要求  $e = 0.5 \times 10^{-3}$ , 若计算时事先估计步长, 则  $e = 0.5 \times 10^{-2}$ 。写出求解过程, 要求中间结果保留 4 位小数位:  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$

分数	
评卷人	

五、(1) 使用下述公式求解微分方程初值问题  $\begin{cases} y' = -12y, 0 < x \leq 1; \\ y(0) = 1. \end{cases}$   
 在  $x=0.3$  的数值解，取  $h=0.1$  计算。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3} [f(x_n, y_n) + 2f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hf(x_n, y_n))]$$

- (2) 分析其稳定性，给出分析过程。  
 (3) 若初值准确，试分析上述  $p$  ( $p>1$ ) 阶公式求解该方程的收敛性。(7+7+7=21 分)

解答内容不得超过装订线

分数	
评卷人	

六、通过解方程  $f(x)=x^4-2=0$  求  $\sqrt[4]{2}$  的近似值, 有两种迭代格式:

A.  $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^4-2}{4},$       B.  $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^4-2}{4x_k^3}$

(1) 判断以上两种迭代格式是否局部收敛? 若收敛求其收敛速度; (2) 选择其中收敛较快的格式求  $\sqrt[4]{2}$  的近似值, 写出迭代过程 ( $x_0=1$ ), 使最终结果绝对误差限小于  $0.5\times10^{-2}$ . (8+8=16 分)

分数	
评卷人	

七、已知[a, b]中两两互异的 n+1 个点 $x_0,x_1,\mathbf{L},x_n$ ,  $l_0(x)$ 为以这些

点为插值节点的 Lagrange 插值基函数，即： $l_0(x)=\prod_{j=1}^n\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$ ,

基于插值法证明: (10 分)

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\mathbf{L}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\mathbf{L}(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\mathbf{L}(x_0-x_n)}$$