第5章 方程求根

计算机学院 孙伟平

方程求根

引言

科研工作或生产实践中遇到的数学问题，常常需要求解一元（单个变量）的方程（或方程组）

$$f(x) = 0$$

- 当 $f(x) = ax+b$，称上式为线性方程；
- 若 $f(x)$ 不是 x 的线性函数，则称上式为非线性方程；
- 如果 $f(x)$ 为某个 n 次多项式 $p_n(x)$，称上式为 n 次多项式方程或代数方程；
- 若 $f(x)$ 中有无法用自变数的多项式或开方表示的函数，则称上式为超越方程。如指数方程、对数方程、三角方程等。

$f(x) = 0$

- 方程的根 x^* 又称 $f(x)$ 的零点，它可以是实数，也可以是复数。本章我们主要学习实根的求法。
- 对于次数 $n \le 4$ 的多项式方程，它的根可以用公式表示，但是对于 $n = 3, 4$，其根的表达形式复杂。
- 理论上已证明，对于次数 ≥ 5 的多项式方程，它的根一般不能用解析表达式表示，需要借助群论的相关知识解决。
- 超越方程的求解无法利用代数几何来进行。大部分的超越方程求解没有一般的公式，很难求得解析解。
- 实际应用中，不一定必须得到方程根的解析表达式，只要得到满足一定精度要求的根的近似值就可以了。

方程求根问题

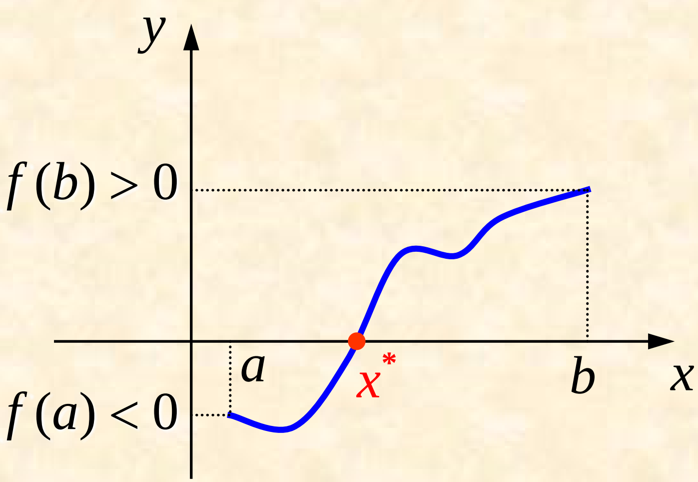
- 根的存在性：方程有没有根？如果有根，有几个根？
- 哪儿有根：求出有根的大致区间，即将 x 的取值范围划分为若干个小区间，使得每个区间或是没有根，或是只有一个根。
- 根的精确化：上述有根区间内的任一点均可看作方程根的较为粗略的近似值，在此基础上设法逐步把根精确化，直到满足精度要求为止。

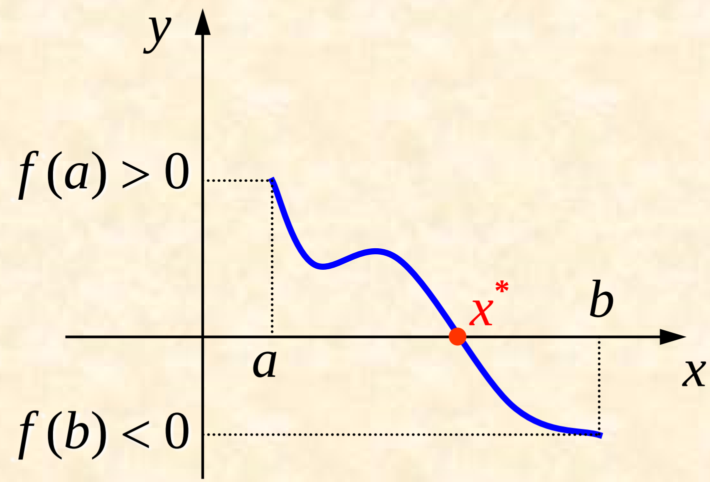
迭代法

5.1 二分法

零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上至少有一个根。





区间 $[a, b]$ 内如果至少有一个根，则称该区间为有根区间。通常可以用逐次搜索法求 $f(x) = 0$ 的有根区间。

逐次搜索法

在 x 的不同取值点上计算 $f(x)$，观察 $f(x)$ 的符号，只要在相邻两点函数值 $f(x)$ 反号，则以该两点为点的区间必然是有根区间。

例：求方程 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.8x-41.77=0$ 的有根区间.

解：取步长为 1 对方程的根进行搜索，结果如下：

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$ 符号	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

因此方程 $f(x)=0$ 有三个有根区间，分别为：

[1, 2]、[3, 4]、 [5, 6]

二分法

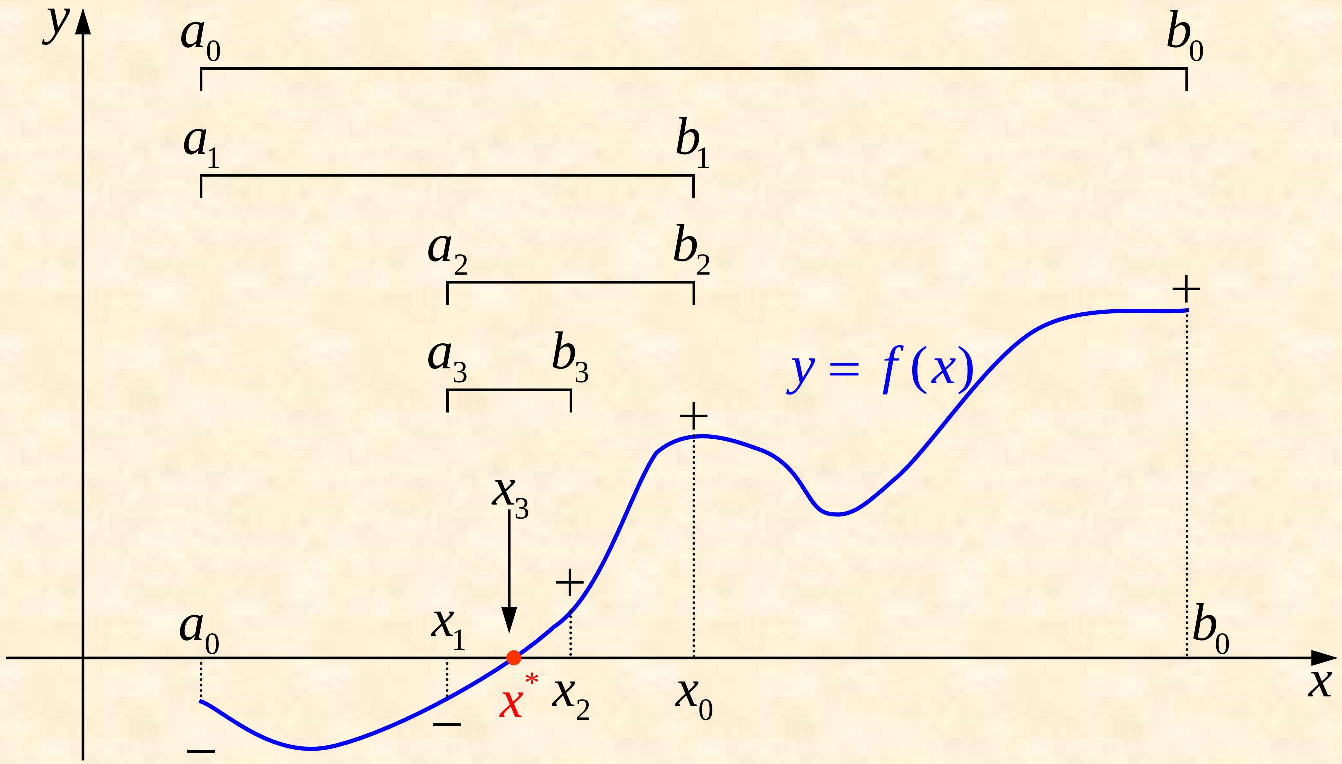
- 逐步将较大的有根区间进行二分，通过判断分割点处的函数值的符号，将原来较大的有根区间不断折半缩小，直至有根区间缩小到容许的误差范围内。
- 取一系列二分后，最后得到的有根区间的中点作为方程根的近似值。

二分法（续）

假设已找到 $f(x)$ 的较为粗略的有根区间 $[a_0, b_0]$，即 $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$，并且 $f(x)$ 在 $[a_0, b_0]$ 上连续。

- 取中点 $x_0=(a_0+b_0)/2$ 将区间 $[a_0, b_0]$ 分成两半，检查 $f(x_0)$ 与 $f(a_0)$ 是否同号。
  - 同号：说明根 x^* 在 x_0 的右侧，取 $a_1=x_0,\ b_1=b_0$得到只原有根区间一半长度的新有根区间 $[a_1, b_1]$。
  - 异号：说明根 x^* 在 x_0 的左侧，取 $a_1=a_0,\ b_1=x_0$ 得到只原有根区间一半长度的新有根区间 $[a_1, b_1]$。
- 重复上述过程，取 $x_1=(a_1+b_1)/2$ 将区间 $[a_1, b_1]$ 分半，确定根 x^* 在 x_1 的哪一侧，得到新区间 $[a_2, b_2]$。

二分法（续）



二分法（续）

- 这样便可以得到一系列有根区间：

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

其中每一个区间的宽度都是前一个区间长度的一半，因此 $[a_n, b_n]$ 的宽度为：

$$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{2^2}(b_{n-2}-a_{n-2})=\cdots=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$$

- 取每个有根区间的中点 $x_i=(a_i+b_i)/2$ 作为 x^* 的近似值，则在二分过程中，可以得到一系列精度越来越高的方程根的近似值序列：

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

- 显然，当 $n \to \infty$ 时，必然有：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = x^*$$

- 对于有限次二分后得到的 x_n，它是准确根 x^* 的近似值，且它的绝对误差为：

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

- 如果给定了某个精度要求ε，则二分法的二分过程一直要持续到新的有根区间长度的一半不大于 ε.

二分法的特点

- 二分法计算过程简单，程序容易实现，可以在大范围内求根。
- 若方程$f(x)$=0在区间[a,b]上根多于1个时, 只能求出其中的一个根。
- 若方程$f(x)$=0在区间[a,b]上有偶数个重根时，不满足$f(a)f(b)<0$。
- 二分法收敛较慢，其收敛速度仅与一个以 1/2 为比值的等比级数相同。
- 二分法一般用于求根的初始近似值，然后再使用其它的求根方法对根精确化。

例 题

- 求方程 $f(x) = x^3 - e^{-x} = 0$ 的一个实根，要求精确到小数点后第 3 位。

解：因为 $f(0) < 0$, $f(1) > 0$。 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 区间内有根，由精度要求可知：

$$|x_n - x^*| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即： $2^n \ge 10^3 \longrightarrow n \ge 9.968$

所以需要将区间 (0, 1) 二分 10 次才能找到满足精度要求的近似根。各次计算结果见下表

n	a_n		b_n		x_n	$f(x_n)$ 符号
0	0.0000	−	1.0000	+	0.5000	−
1	0.5000	−	1.0000	+	0.7500	−
2	0.7500	−	1.0000	+	0.8750	+
3	0.7500	−	0.8750	+	0.8125	+
4	0.7500	−	0.8125	+	0.7812	+
5	0.7500	−	0.7812	+	0.7656	−
6	0.7656	−	0.7812	+	0.7734	+
7	0.7656	−	0.7734	+	0.7695	−
8	0.7695	−	0.7734	+	0.7714	−
9	0.7714	−	0.7734	+	0.7724	−
10	0.7724	−	0.7734	+	0.7729	+

5.2 迭代法及其收敛性

5.2.1 迭代法的基本概念

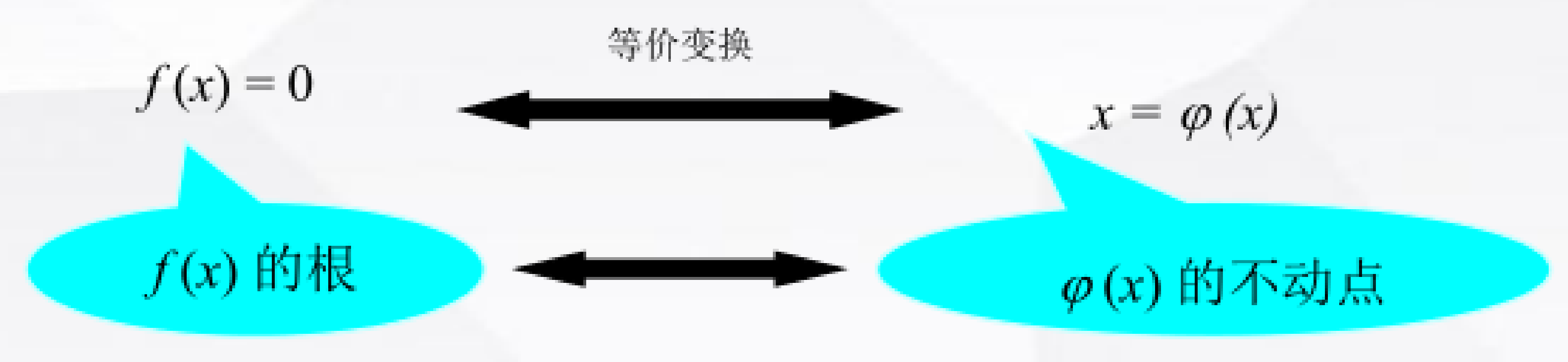
- 迭代法的基本概念
- 迭代法的构造
- 迭代法的几何意义

5.2.2 迭代法的收敛性

- 收敛性分析
- 收敛定理（定理5.3）
- 迭代过程的误差估计（定理5.4）
- 局部收敛性（定理5.5）

5.2.1 迭代法的基本概念

迭代法是指用某种收敛于所给问题精确解的极限过程来逐步逼近的一种计算方法，可以用有限步计算出具有指定精度的近似解。其基本思想是构造不动点方程，以求得近似根。



（如果 x^* 满足 $x^*=\varphi(x^*)$，则称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点）

思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_k)$

可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即 x^* 是 φ 的不动点，也就是 f 的根。

迭代法的构造

- 方程 $f(x)=0$ 等价变换为 迭代方程 $x=\varphi(x)$ （ $\varphi(x)$称为迭代函数）.
- 建立如下迭代公式： $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $\qquad n=0,1,2,\cdots$

举例：针对某个方程 $f(x)=0$，可以构造出不同的迭代方程。

$$x^3+4x^2-10=0 \quad x\in[1,2] \Rightarrow$$

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{10-x^3} \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_n^{\ 3}}$$

$$x=\sqrt{\frac{10}{x}-4x} \qquad x_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{x_n}-4x_n}$$

$$x=x-x^3-4x^2+10 \qquad x_{n+1}=x_n-x_n^{\ 3}-4x_n^{\ 2}+10$$

迭代法的构造

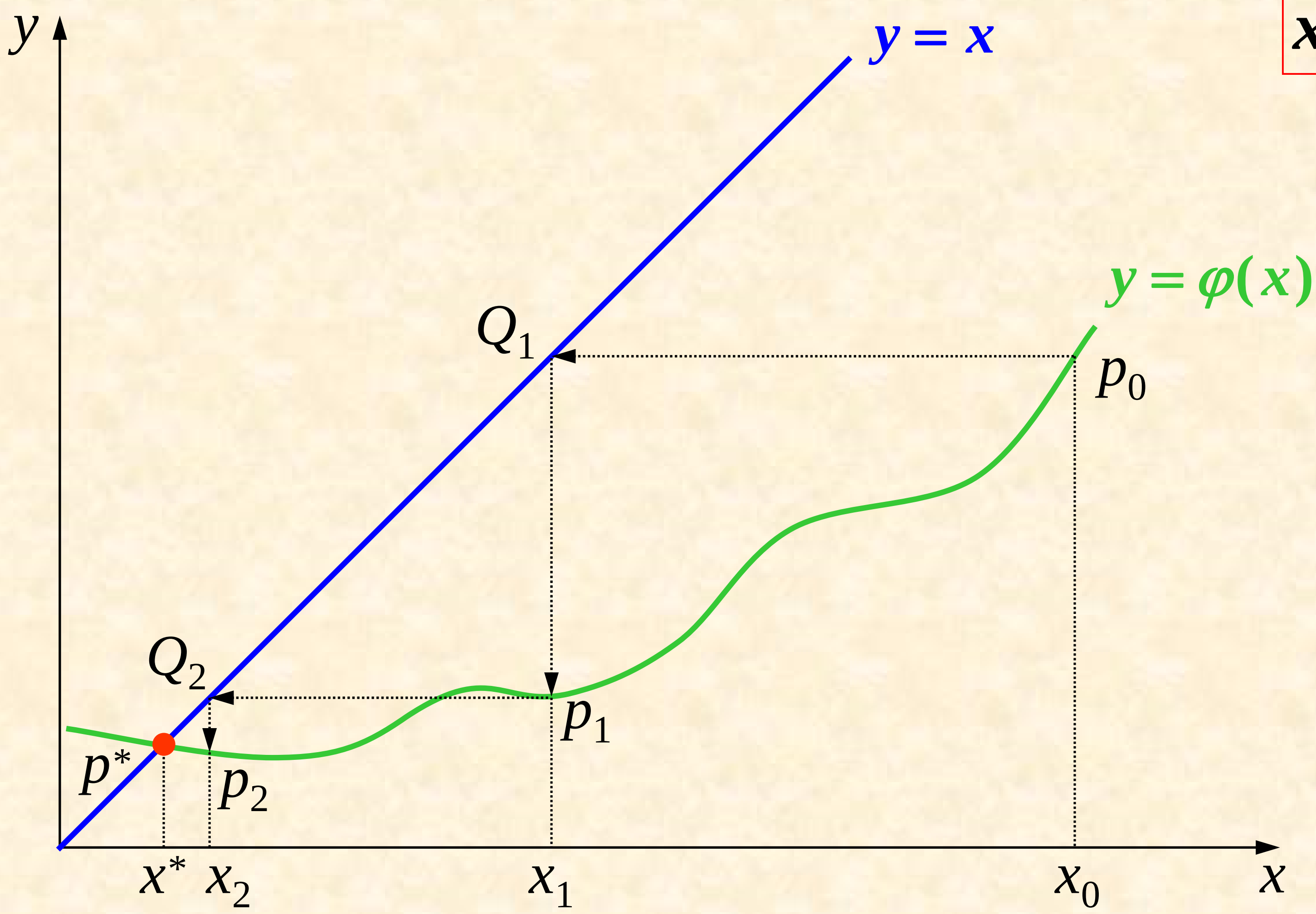
- 方程 $f(x)=0$ 等价变换为 迭代方程 $x=\varphi(x)$ （ $\varphi(x)$称为迭代函数）.
- 建立如下迭代公式： $x_{n+1}=\varphi(x_n)\qquad n=0,1,2,\cdots$
- 当给定初值 x_0 后，由迭代公式可求得一系列准确根的近似值，组成迭代序列 $\{x_n\}$。
- 迭代法不一定都是收敛的，发散的迭代法没有价值。

定理5.2 设迭代函数$\varphi(x)$ 连续，那么当选取x_0 后若产生的迭代序列$\{x_n\}$ 收敛，则一定收敛到根x^*上。

$$A=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(\lim_{n\to\infty}x_n)=\varphi(A)$$

迭代法的几何意义

$$\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$$



5.2.2 迭代法的收敛性

- 如何构造不动点方程，由 $f(x)=0$ 变换为 $x=\varphi(x)$？
- 如何选择合适的初值 x_0？
- $n\to\infty$ 时，迭代产生的序列 $\{x_n\}$ 是否收敛？
- 如果迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛，则有限次迭代得到的近似根的误差如何估计？
- 针对某个方程 $f(x)=0$，可以构造出不同的迭代公式，只有满足一定条件的迭代公式才收敛。

举 例

- 求解如下方程在[1,2]内的一个实根，取 x_0 =1.5

$$x^3+4x^2-10=0$$

解: (1)
$$x=\frac{1}{2}\sqrt{10-x^3} \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_n^{\,3}}$$

(2)
$$x=\sqrt{\frac{10}{x}-4x} \qquad x_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{x_n}-4x_n}$$

(3)
$$x=x-x^3-4x^2+10 \qquad x_{n+1}=x_n-x_n^{\,3}-4x_n^{\,2}+10$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_n^{\ 3}} \qquad x_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{x_n}-4x_n} \qquad x_{n+1}=x_n-x_n^{\ 3}-4x_n^{\ 2}+10$$

[1,2]内的一个实根

x_0 **=1.5**

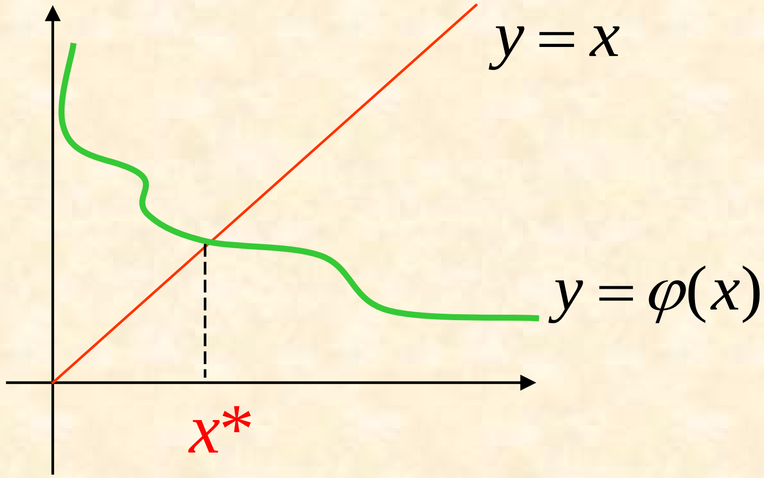
K	x_k(第1种形式）	x_k(第2种形式）	x_k(第3种形式）
1	1.2869538	0.8165	-0.875
2	1.4025408	2.9969	6.732
3	1.3454584		-469.7
4	1.3251703		$1.03*10^8$
5	1.3600942		
…	…		
23	1.3652300		
24	1.3652300		
25	1.3652300		

可见迭代公式不同, 收敛情况也不同. 第1种形式收敛，第2种形式计算过程出现负数开平方，第3种形式也不收敛.

只有收敛的的迭代过程才有意义，为此我们首先要研究$\varphi(x)$的不动点的存在性及迭代法的收敛性.

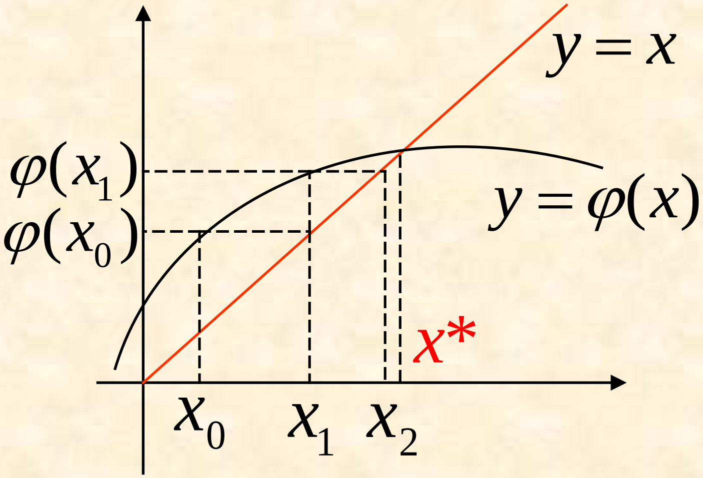
迭代法的收敛性

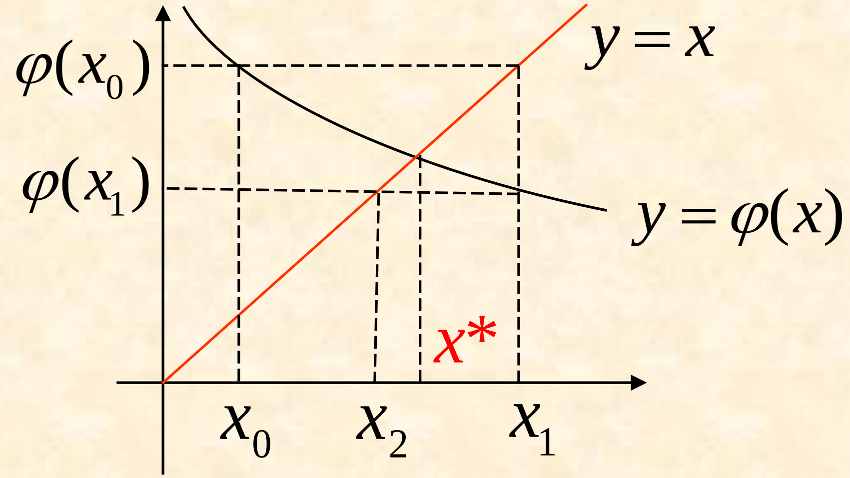
$$x = \varphi(x)$$

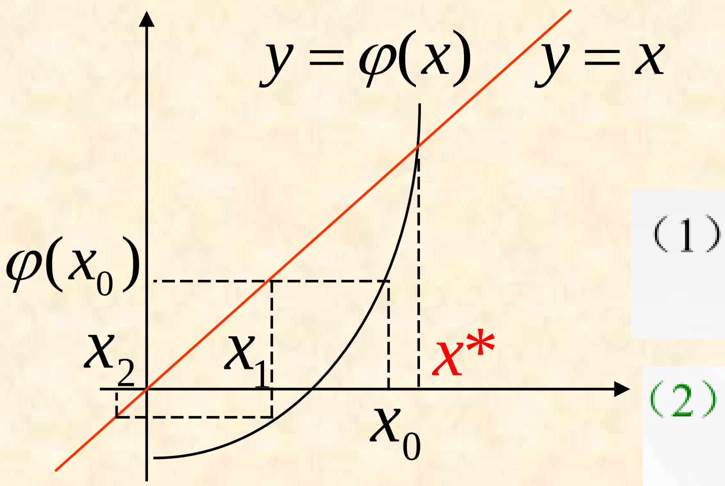


- 求迭代方程的解从几何上来看，就是求直线 $y=x$ 与曲线 $y=\varphi(x)$ 的交点的横坐标。
- 下面从几何的角度来分析迭代方程不动点的存在性和收敛性问题。

迭代法的收敛性







分析：什么样的迭代函数能够使得相应的迭代法收敛呢？

（1）如果迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛，则迭代函数 $y=\varphi(x)$曲线走势平坦，即 $|\varphi'(x)|<1$

（2）如果迭代公式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$发散，则迭代函数$y=\varphi(x)$曲线走势陡峭，即 $|\varphi'(x)|\geq 1$

收敛定理（定理5.3）

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续的一阶导数，并且：

- 若 $x \in [a, b]$ 时， $\varphi(x) \in [a, b]$
- 存在某个小于 1 的正数 L，使得 $\forall x \in [a, b]$，有：

$$\left|\varphi'(x)\right| \le L < 1$$

则迭代方程 $x = \varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有且仅有一个根 x^*，并且对任意选取的初始值 $x_0 \in [a, b]$，迭代过程生成的序列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

$x \in [a,b]$ 且 $\varphi(x) \in [a,b]$

$\varphi'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

证明：存在性

设 $g(x) = x - \varphi(x)$ $\quad \varphi'(x)$ 连续，故 $g(x)$ 连续。

由 $\varphi(x) \in [a,b]$ 可知

$$g(a) = a - \varphi(a) \le 0 \qquad g(b) = b - \varphi(b) \ge 0$$

由零点定理知，必存在零点 $x^* \in [a,b]$ 使得 $g(x^*) = 0$，

即 $\quad x^* - \varphi(x^*) = 0$ ， $\quad x^* = \varphi(x^*)$

$x \in [a,b]$ 且 $\varphi(x) \in [a,b]$

$\varphi'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

唯一性

假设存在另外一点 $\bar{x} \in [a,b]$ 也满足 $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$

$$x^* - \bar{x} = \varphi(x^*) - \varphi(\bar{x}) = \varphi'(\xi)(x^* - \bar{x}) \qquad \xi \in [x^*, \bar{x}]$$

或 $[\bar{x}, x^*]$

$$\underbrace{\boxed{[1-\varphi'(\xi)]}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\boxed{(x^* - \bar{x})}}_{=0} = 0$$

$$\bar{x} = x^*$$

$x \in [a,b]$ 且 $\varphi(x) \in [a,b]$

$\varphi'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

收敛性

由迭代格式和微分中值定理可知：

$$x_n - x^* = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_{n-1} - x^*) \qquad \xi \in [x^*, x_{n-1}]$$

或 $[x_{n-1}, x^*]$

故
$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\varphi'(\xi)| \cdot |x_{n-1} - x^*| \\ &\le L|x_{n-1} - x^*| \\ &\le L^2|x_{n-2} - x^*| \\ &\vdots \\ &\le L^n|x_0 - x^*| \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

例 题

用迭代法求$x^3+2x-5=0$在区间 [1, 2] 内的近似根，结果保留 5 位小数。

解： 方程改写成：$x=\varphi(x)=\frac{1}{2}(5-x^3)$

迭代公式为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(5-x_n^{\ 3})$

因为 $\varphi(2)\notin[1,2]$

故此迭代函数不满足定理**5.3**的条件，需更换迭代函数。

用迭代法求 $x^3+2x-5=0$ 在区间 [1, 2] 内的近似根，结果保留 5 位小数。

$x=\varphi(x)=\sqrt[3]{5-2x}$ ，迭代公式为 $x_{n+1}=\sqrt[3]{5-2x_n}$

因为 $\forall x\in[1,2],\ \varphi(x)\in[1,2]$

且 $\varphi'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{(5-2x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-2}{3}\frac{1}{(5-2x)^{\frac{2}{3}}}$ 在[1,2]上连续

$$\max_{1\le x\le 2}|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{1}{(5-2\times 2)^{\frac{2}{3}}}\right|=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=\frac{2}{3}<1$$

根据定理**5.3**知此迭代过程必收敛。

取 $x_0 = 1$，通过迭代可得：

$$x_1 = 1.44224 \qquad x_8 = 1.32814$$

$$x_2 = 1.28472 \qquad x_9 = 1.32831$$

$$x_3 = 1.34489 \qquad x_{10} = 1.32825$$

$$x_4 = 1.32195 \qquad x_{11} = 1.32827$$

$$x_5 = 1.33064 \qquad x_{12} = 1.32826$$

$$x_6 = 1.32763 \qquad x_{13} = 1.32826$$

$$x_7 = 1.32860$$

迭代过程的误差估计（定理5.4）

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续的一阶导数，并且：

- 若 $x \in [a, b]$ 时， $\varphi(x) \in [a, b]$
- 存在某个小于 1 的正数 L，使得 $\forall x \in [a, b]$，有：

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

则有误差估计式：

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$\boxed{\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right|} \quad \boxed{\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|}$$

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|(x_{n+1} - x^*) - (x_n - x^*)\right| \ge \left|x_n - x^*\right| - \left|x_{n+1} - x^*\right|$$

$$\ge \left|x_n - x^*\right| - L\left|x_n - x^*\right| = (1-L)\left|x_n - x^*\right|$$

$$|a-b| \ge |a| - |b|$$

或 $|b| - |a|$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{n+1} - x_n\right|$$

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\right| = \left|\varphi'(\xi)\cdot(x_n - x_{n-1})\right|$$

$$\le L\cdot\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$\le L^2\cdot\left|x_{n-1} - x_{n-2}\right|$$

$$\vdots$$

$$\le L^n\cdot\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

由第一个式子可知，只要两次相邻的迭代值相差足够小，就可以保证最后一次迭代得到的近似值 x_n 足够精确。

迭代终止条件： $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$

$\left|\varphi'(x)\right| \le L < 1$

如果 $\frac{L}{1-L} \le 1$ 即 $L \le \frac{1}{2}$ 时，有

L 较大时不适用

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$$

第二个式子 $\left|x^* - x_n\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \le \varepsilon$ 用来大致估计需要进行迭代的次数 n.

局部收敛性

回顾定理5.3

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续的一阶导数，并且：

- 若 $x \in [a, b]$ 时， $\varphi(x) \in [a, b]$
- 存在某个小于 1 的正数 L，使得 $\forall x \in [a, b]$，有：

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1$$

则迭代方程 $x = \varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有且仅有一个根 x^*，并且对任意选取的初始值 $x_0 \in [a, b]$，迭代过程生成的序列 $\{x_n\}$ 收敛。

问题：当定理5.3的条件不满足时，是迭代函数取得不好，还是区间[a,b]取得过大？

局部收敛性定义与判定定理

定义： 如果在准确根 x^* 的某个邻域 $\Delta: |x - x^*| \le \delta$内，迭代过程对于任意选定的初值$x_0 \in \Delta$均收敛，称这种在根的邻近所具有的收敛性为**局部收敛性**。

定理： 设迭代函数 $\varphi(x)$ 在准确根 x^* 邻近有连续的一阶导数，且

定理5.5

$$\boxed{\left|\varphi'(x^*)\right| < 1}$$

则迭代过程 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 具有局部收敛性。

说明：

（1）当定理**5.3**的条件不满足，但迭代过程具有局部收敛性时，应考虑缩小**[a,b]**区间。

（2）局部收敛的迭代方法，如果初值 x_0 选择不恰当，也有可能得不到收敛的迭代序列。

（3）定理**5.5**需要知道准确根，不便验证，可以采用如下的不太严格的准则：

只要在一个不大的有根区间上，$|\varphi'(x)|$明显地小于1，那么从该区间内一点x_0出发，$x=\varphi(x)$产生的迭代序列$\{x_k\}$一般是收敛的.

例：构造不同的迭代法求 $x^2-3=0$ 的根 $x^*=\sqrt{3}$

解：(1) $\varphi(x)=\dfrac{3}{x}$，迭代方程为 $x_{n+1}=\dfrac{3}{x_n}$

$$\varphi'(x)=-\frac{3}{x^2},\qquad \varphi'(x^*)=-1$$

(2) $\varphi(x)=x-\dfrac{x^2-3}{4}$，迭代方程为 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-3}{4}$

$$\varphi'(x)=1-\frac{x}{2},\qquad \varphi'(x^*)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1$$

(3) $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$，迭代方程为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{x^2}\right),\qquad \varphi'(x^*)=0<1$$

若取 $x_0 = 2.0$，分别用上述三种迭代方法计算，结果见下表（准确根 $x^* = 1.73205080757\ldots$）

n	x_n	$x_{n+1} = \dfrac{3}{x_n}$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 3}{4}$	$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{3}{x_n}\right)$
0	x_0	2.0	2.0	2.0
1	x_1	1.5	1.75	1.75
2	x_2	2.0	1.734375000	1.732142857
3	x_3	1.5	1.732360840	1.732050810
4	x_4	2.0	1.732092320	1.732050808
5	x_5	1.5	1.732056369	
6	x_6	2.0	1.732051553	
7	x_7	1.5	1.732050907	
8	x_8	2.0	1.732050821	

收敛速度不一样

5.3 收敛速度及收敛过程的加速

定义： 设序列 $\{x_n\}$ 是收敛于 $f(x)=0$ 的准确根 x^* 的迭代序列，记各步的迭代误差为 $\varepsilon_n = x_n - x^*$,

如果存在某个实数 p 和非零常数 C，使得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,p}} = C$$

渐近误差常数

p 越大，收敛越快

则称序列 $\{x_n\}$ 是 p 阶收敛的。

- $p=1$, 序列 $\{x_n\}$ 是线性收敛
- $p>1$时，序列 $\{x_n\}$ 是超线性收敛
- $p=2$时，序列 $\{x_n\}$ 是平方收敛

定理 5.6

定理： 对于迭代过程 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$，如果迭代函数 $\varphi(x)$ 在准确根 x^* 的邻近有连续的二阶导数。

- 当 $\varphi'(x^*)\neq 0$ ，且 $\left|\varphi'(x^*)\right|<1$ 时，迭代过程为线性收敛；
- 当 $\varphi'(x^*)=0$，而 $\varphi''(x^*)\neq 0$ 时，迭代过程为平方收敛。

定理 5.7

定理： 对于迭代过程 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$，如果迭代函数 $\varphi(x)$ 在准确根 x^* 的邻近有连续的 m 阶导数，且：

$$\varphi'(x^*) = 0,\ \varphi''(x^*) = 0, \cdots,\ \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0$$

$$\varphi^{(m)}(x^*) \neq 0$$

则当初始值 x_0 充分接近于x^*时产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 是 m 阶收敛的。

迭代过程的加速

设迭代方程 $x=\varphi(x)$ 的准确根为 x^*，由微分中值定理可知：

$$x^* - x_{n+1} = \varphi(x^*) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi)(x^* - x_n)$$

如果迭代函数 $\varphi(x)$ 收敛，在 x^* 的某个邻域 Δ 内有 $\varphi'(x) < 1$，当有根区间较小或 $\varphi'(x)$ 在 Δ 内变化较平缓时，可近似将 $\varphi'(x)$ 取某个定值 a。

$$x^* - x_{n+1} \approx a(x^* - x_n)$$

$$x^* \approx \frac{1}{1-a}x_{n+1} - \frac{a}{1-a}x_n$$

$$x^* - x_{n+1} \approx \boxed{\frac{a}{1-a}(x_{n+1} - x_n)}$$

x_{n+1} 的大致误差，可以在 x_{n+1} 的基础上叠加上这个误差，从而得到比 x_{n+1} 本身更精确的近似值

$$x^* - x_{n+1} \approx \frac{a}{1-a}(x_{n+1} - x_n)$$

- 经过加速处理后，迭代过程为：

迭代： $\tilde{x}_{n+1} = \varphi(x_n)$

加速： $x_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} + \frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{n+1} - x_n)$

不便之处

- 迭代终止条件仍为： $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$

a 的确定需要求解迭代函数的导函数 $\varphi'(x)$

埃特金（Atiken）加速

$$x_{n+1}^{(1)}=\varphi(x_n) \longrightarrow x^*-x_{n+1}^{(1)}\approx a(x^*-x_n)$$

$$x_{n+1}^{(2)}=\varphi\left(x_{n+1}^{(1)}\right) \longrightarrow x^*-x_{n+1}^{(2)}\approx a\left(x^*-x_{n+1}^{(1)}\right)$$

所以：

$$\frac{x^*-x_{n+1}^{(1)}}{x^*-x_{n+1}^{(2)}}\approx\frac{x^*-x_n}{x^*-x_{n+1}^{(1)}}$$

展开得：

$$\left(x^*-x_{n+1}^{(1)}\right)^2\approx\left(x^*-x_n\right)\left(x^*-x_{n+1}^{(2)}\right)$$

即：

$$\left(x^*\right)^2-2x_{n+1}^{(1)}x^*+\left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2$$

$$\approx\left(x^*\right)^2-\left(x_n+x_{n+1}^{(2)}\right)x^*+x_nx_{n+1}^{(2)}$$

$$\left(x^*\right)^2 - 2x_{n+1}^{(1)}x^* + \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2 \approx \left(x^*\right)^2 - \left(x_n + x_{n+1}^{(2)}\right)x^* + x_n x_{n+1}^{(2)}$$

$$x^* \approx \frac{x_n x_{n+1}^{(2)} - \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

$$= \frac{\left(x_{n+1}^{(2)}\right)^2 - 2x_{n+1}^{(1)}x_{n+1}^{(2)} + x_n x_{n+1}^{(2)} - \left(x_{n+1}^{(2)}\right)^2 + 2x_{n+1}^{(2)}x_{n+1}^{(1)} - \left(x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

$$= \frac{x_{n+1}^{(2)}\left(x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n\right) - \left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

$$= x_{n+1}^{(2)} - \frac{\left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

埃特金（Atiken）加速（续）

迭代： $x_{n+1}^{(1)} = \varphi(x_n)$

迭代： $x_{n+1}^{(2)} = \varphi\left(x_{n+1}^{(1)}\right)$

两次迭代

加速： $$x_{n+1} = x_{n+1}^{(2)} - \frac{\left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

- 加速公式中不再含有与 $\varphi'(x)$ 相关的系数 a
- 需要两次迭代再能得到下一步的近似值
- 某些发散的迭代公式经埃特金法加速处理后，能够获得较好的收敛性

5.4 牛顿法

牛顿迭代法的原理：利用Taylor展开，将非线性方程线性化，化曲为直。

1. 牛顿迭代公式
2. 牛顿法的收敛性 —— 局部收敛
3. 牛顿法的收敛速度 —— 平方收敛
4. 牛顿法初值的选取
5. 牛顿下山法

1. 牛顿迭代公式

假设已知 $f(x)=0$ 的某个初始近似根为 x_0，且在 x_0 的一个适当小的邻域内 $f(x)$ 可微，将 $f(x)$ 在点 x_0 附近用泰勒公式展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

如果仅取上述泰勒展开式的前两项，忽略 $(x-x_0)^2$ 及其后的各项，则可以得到 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似线性展开式：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x)=0 \Rightarrow f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

将非线性方程线性化

—— Taylor 展开

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

假设 $f'(x_0)\neq 0$，则上式的解为：

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

如果将上面公式求得的 x 作为原方程的一个新的近似根 x_1，将 $f(x)$ 在 x_1 附近作近似线性展开，可求得另一个新的近似根 x_2。如此重复上述过程，可得到一般的迭代公式：

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

牛顿迭代公式

这种迭代方法称为**牛顿法**。显然，牛顿法对应的迭代方程为：

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\quad \text{其中}\quad f'(x)\neq 0$$

2. 牛顿法的收敛性（定理5.8）

定理5.8 在牛顿法中，若x^*是方程 $f(x)=0$的一个单根，并且 $f(x)$ 在 x^* 及附近有连续的二阶导数，则牛顿法具有局部收敛性。

证明： 牛顿法对应的迭代方程：

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad 其中\ f'(x) \neq 0$$

牛顿法的迭代函数为： $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

x^*方程 $f(x)=0$ 的单根，故

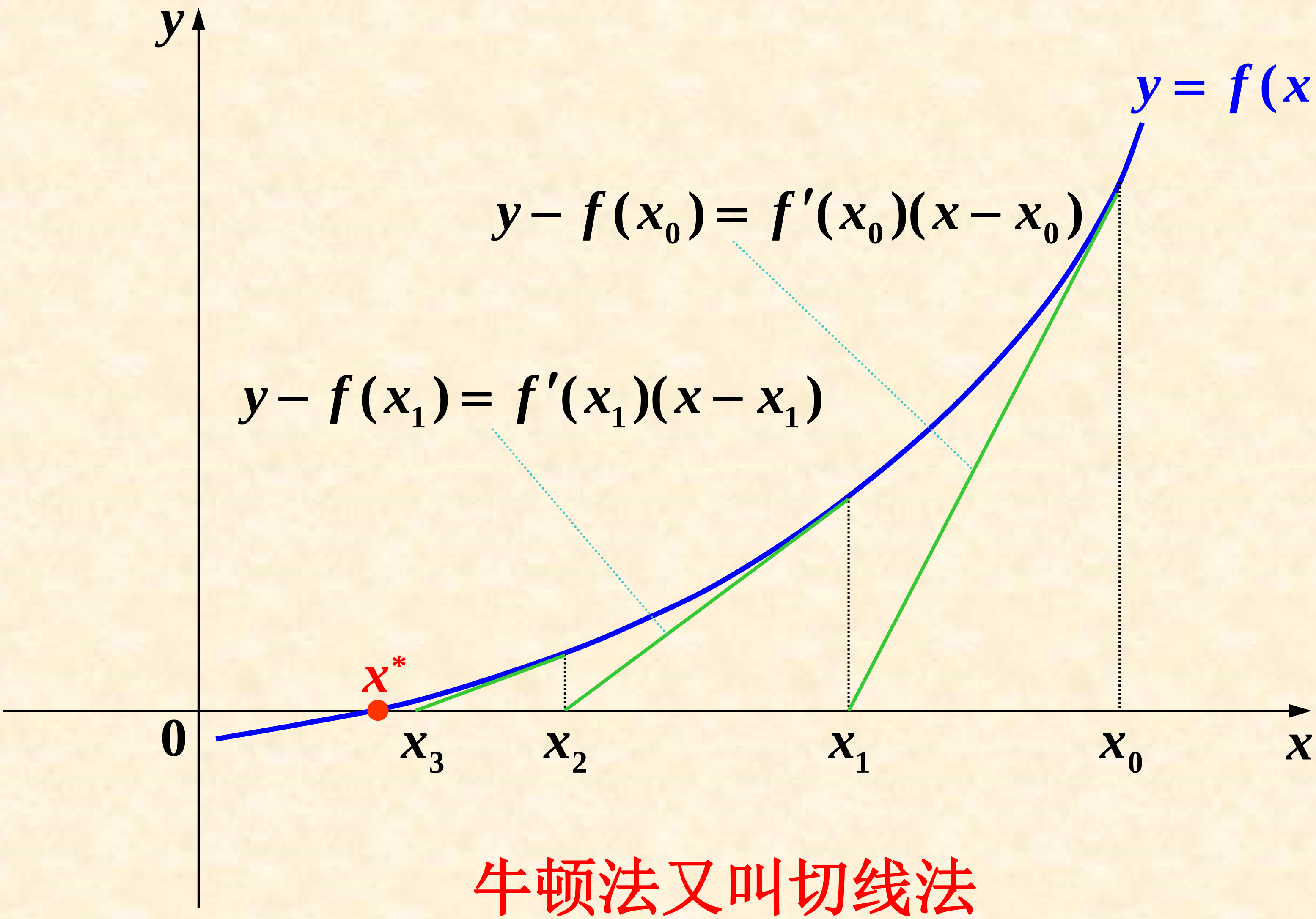
$$f(x^*) = 0 \quad 且 \quad f'(x^*) \neq 0$$

由于 $f(x)$ 在 x^* 及附近有连续的二阶导数，故存在 x^*处的小邻域，使得在此邻域内 $f'(x)\neq 0$，进而可知 $\varphi(x)$ 在 x^* 邻近有连续的一阶导数。而且

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0 \Rightarrow |\varphi'(x^*)| < 1$$

故而由定理5.5可知牛顿法具有局部收敛性。

牛顿法的几何意义



牛顿法又叫切线法

牛顿法的计算步骤

- 选择合适的初始近似根 x_0，计算 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$
- 将 x_0 代入迭代公式：$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

  求得一个新的近似根 x_1，并计算 $f(x_1)$ 和 $f'(x_1)$
- 检查 $|x_1 - x_0| \le \varepsilon$，如成立，则迭代终止，方程的近似根 x_1；如 $|x_1 - x_0| > \varepsilon$ 且 $f'(x_1) \neq 0$，则将 x_1 代入迭代方程，重复前述步骤
  - 求得达到精度要求的近似根
  - 超过预定的迭代次数 N 后仍未达到精度要求，终止
  - 迭代过程中存在 $f'(x_k) = 0$，此时应终止迭代

3.牛顿法的收敛速度（定理5.9）

定理 5.9 设 x^*是 $f(x)=0$ 的一个**单根**， $f(x)$ 在 x^* 附近具有连续的二阶导数，且 $f''(x^*)\neq 0$，则牛顿法具有二阶收敛速度，即**牛顿法是平方收敛**的。

证明：迭代函数：$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $\qquad \varphi'(x)=\boxed{\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}}$

$$\varphi''(x)=\frac{f'(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}+\boxed{\frac{f(x)f'''(x)}{[f'(x)]^2}}-\boxed{\frac{2f(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}f''(x)}$$

$$\boxed{f(x^*)=0,\quad f'(x^*)\neq 0}$$

$\varphi''(x)$ 连续，且

$$\varphi'(x^*)=0,\ \varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0$$

根据定理5.6，得证。

牛顿法举例

- 假设 $a \geq 0$，求平方根 $\sqrt{a}$ 的过程可化为解方程：

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

- 若用牛顿法求解，由牛顿迭代公式可得：

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

则迭代公式为：$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$

- 每步迭代只做一次除法和一次加法再做一次移位即可，计算量少，收敛速度又较快，是计算机求解开方的一个实用有效的方法。

例 题

用牛顿法解方程 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$，要求误差不超过 10^{-6}

解： 由于 $f(1)=-7$， $f(2)=16$， $f(1)\cdot f(2)<0$

又： $f'(x)=3x^2+4x+10=x^2+2x^2+4x+2+8$

$$=x^2+2(x+1)^2+8>0$$

另： $f''(x)=6x+4$

即： $f''(1)=10,\qquad f''(2)=16$

$f''(x)\subset[10,16]$，所以： $f''(x^*)\neq 0$

事实上，$f''(x)$ 在 $[1,2]$ 区间上为单调增函数，且最大值为 16。

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20=x(x+1)^2+9x-20$$
$$f'(x)=3x^2+4x+10=x^2+2(x+1)^2+8>0$$
$$f''(x)=6x+4\in[10,16]$$

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}>0$$ $\varphi(x)$ 单调增，其最值为：

最大值 $\varphi(2)=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\dfrac{2^3+2\times2^2+10\times2-20}{3\times2^2+4\times2+10}\approx1.47$

最小值 $\varphi(1)=1-\dfrac{f(1)}{f'(1)}=1-\dfrac{1^3+2\times1^2+10\times1-20}{3\times1^2+4\times1+10}\approx1.41$

$$\varphi'(1)=\frac{f(1)f''(1)}{[f'(1)]^2}=\frac{-7\times10}{17^2}\approx-0.242$$

$$\varphi'(1.5)=\frac{f(1.5)f''(1.5)}{[f'(1.5)]^2}=\frac{2.875\times13}{22.75^2}\approx0.07$$

满足收敛定理要求的条件

$$\varphi'(2)=\frac{f(2)f''(2)}{[f'(2)]^2}=\frac{16\times16}{30^2}\approx0.284$$

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20$$

$$f'(x)=3x^2+4x+10$$

取初值 $x_0=2.0$，建立牛顿迭代方程:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3+2x_n^2+10x_n-20}{3x_n^2+4x_n+10}$$

$n=0$ $\quad x_1=1.46666667$ $\quad |x_1-x_0|\approx 0.533>10^{-6}$

$n=1$ $\quad x_2=1.37151201$ $\quad |x_2-x_1|\approx 9.515\times10^{-2}>10^{-6}$

$n=2$ $\quad x_3=1.36881022$ $\quad |x_3-x_2|\approx 2.702\times10^{-3}>10^{-6}$

$n=3$ $\quad x_4=1.36880811$ $\quad |x_4-x_3|\approx 2.11\times10^{-6}>10^{-6}$

$n=4$ $\quad x_5=1.36880811$ $\quad |x_5-x_4|\approx 0<10^{-6}$

例 题

如取初值 $x_0 = 1.5$，则由牛顿迭代方程：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$$

可计算得：

$n = 0 \qquad x_1 = 1.37362637 \qquad |x_1 - x_0| \approx 0.126 > 10^{-6}$

$n = 1 \qquad x_2 = 1.36881482 \qquad |x_2 - x_1| \approx 4.812 \times 10^{-3} > 10^{-6}$

$n = 2 \qquad x_3 = 1.36880811 \qquad |x_3 - x_2| \approx 6.71 \times 10^{-6} > 10^{-6}$

$n = 3 \qquad x_4 = 1.36880811 \qquad |x_4 - x_3| \approx 0 < 10^{-6}$

可见选择有根区间的中点，在相同的精度要求下所需的迭代次数较少。

4. 牛顿法初值的选取

- 牛顿法是一种局部收敛的算法，如果初值 x_0 选择的不恰当，就有可能得不到收敛的迭代序列
- 为使牛顿法收敛，必须满足：用迭代公式算出的 x_1 比 x_0 更靠近准确根 x^*
- 如果 $f'(x_0)=0$，则不能运用牛顿迭代公式，可以想象，如果 $f'(x_0)$ 非常小的话，也不能得到很快的收敛序列
- 下面讨论如何选择 x_0以保证迭代序列收敛

牛顿法初值的选取（续）

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow \underbrace{x_1 - x^*}_{\varepsilon_1} = (\underbrace{x_0 - x^*}_{\varepsilon_0}) - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^*)} = 1 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}$$

$$= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}$$

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2 = 0$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) = \boxed{-\frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)^2}{2f'(x_0)(x^* - x_0)} = -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{2f'(x_0)}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{2f'(x_0)}$$

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(\eta)(x^* - x_0) = 0 \longrightarrow x^* - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(\eta)}$$

如果 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 x_0 附近变化不剧烈的话，并且 $f''(x_0) \neq 0$，则可近似的认为：

$$f''(\xi) \approx f''(x_0) \qquad f'(\eta) \approx f'(x_0)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx -\frac{f''(\xi)\left(-\dfrac{f(x_0)}{f'(\eta)}\right)}{2f'(x_0)} = \frac{f''(\xi)\cdot f(x_0)}{2f'(x_0)\cdot f'(\eta)} \approx \frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \approx \frac{f''(x_0) \cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

为了满足 x_1 比 x_0 更靠近准确根 x^*，必须有：

$$|\varepsilon_1| < |\varepsilon_0|$$

即：

$$\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right| < 1 \longrightarrow \left|\frac{f''(x_0) \cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}\right| < 1$$

从而：

$$[f'(x_0)]^2 > \frac{1}{2}|f''(x_0)| \cdot |f(x_0)| \quad \text{条件 1}$$

$$f''(x_0) \neq 0 \quad \text{条件 2}$$

5. 牛顿下山法

- 因为牛顿法是一个局部收敛方法，通常要求 x_0 选择在 x^* 附近，才保证迭代序列收敛。
- 为扩大收敛范围，使对任意迭代序列收敛，通常可引入参数，并将牛顿迭代公式改为：

下山因子

$0 < \lambda_n < 1$

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

下山条件

- 为保证迭代序列收敛，必须有 $|f(x_{n+1})| \le |f(x_n)|$
- 通常取 $\lambda_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \cdots$，一旦满足下山条件，则随后的迭代序列必收敛，但它只是线性收敛。

第5章 小结

5.1 二分法

5.2 迭代法及其收敛性

- 迭代法的基本概念
- 收敛性判定定理（定理5.3,5.4）
- 局部收敛性（定理5.5）

5.3 迭代法的收敛速度及加速处理

- P阶收敛定义
- 判定定理（定理5.6,5.7）
- 埃特金加速（不作要求）

5.4 牛顿法

- 牛顿迭代公式
- 牛顿法的收敛性与收敛速度
- 初始值的选取
- 牛顿下山法