数值分析 总复习

计算机学院 孙伟平

第1章 误差的基本概念

1.2.1 误差的来源

1.2.2 误差和误差限

- 绝对误差、绝对误差限
- 相对误差、相对误差限

1.2.3 有效数字

- 有效数字的定义
- 有效数字与误差限的关系

1.2.4 算术运算的误差与误差限

- 基本概念：
  - 误差，误差限
  - 有效数字
- 有效数字位数的多种判定方法
- 算术运算中误差限的估计公式
- 近似计算中应注意的一些原则

准确值 x　近似值 x^*

- 绝对误差 ε

$$\varepsilon(x^*) = x^* - x$$

- 相对误差 ε_r

$$\varepsilon_r(x^*) = \frac{\varepsilon(x^*)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

$$\varepsilon_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x^*}$$

- 绝对误差限 η

$$|\varepsilon(x^*)| = |x^* - x| \le \eta$$

- 相对误差限 η_r

$$|\varepsilon_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \le \eta_r$$

有效数字的定义

定义：如果近似数 x^* 的绝对误差限不大于0.5×10^{-j} 则称近似数 x^* 准确到小数点后第 j 位，从这个小数点后第 j 位数字直到最左边非 0 数字之间的所有数字都称为 x^* 的有效数字。

x^* 的绝对误差限不超过 x_{k+j} 这一位的半个单位

$$x^* = \pm \underset{\uparrow \atop \neq 0}{x_1} x_2 \cdots x_k . x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_{k+j} \cdots x_{k+n}$$

$$\eta \le 0.\underbrace{0000000\cdots05}_{j\text{个}}$$

x^* 的有效数字位数为 $k+j$ 位

有效数字的等效定义

一般地，将 x^* 转化成为计算机浮点数的形式：

$$x^* = \pm 0.x_1 x_2 \cdots x_n \times 10^m$$

规格化
指　数

如果

$$|\varepsilon(x^*)| = |x^* - x| \le 0.5 \times 10^{m-l}$$

（其中$1 \le l \le n$ ）

则 x^* 具有 l 位有效数字。

（3）相对误差限与有效数字的关系

定理1.1 假设近似数 $x^* = \pm 0.x_1 x_2 \cdots x_n \times 10^m$，其中 $x_1 \neq 0$，x^* 的有效数字的位数为 n，则 x^* 的相对误差限为：

$$\eta_r = \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$$

定理1.2 假设近似数 $x^* = \pm 0.x_1 x_2 \cdots x_n \times 10^m$，其中 $x_1 \neq 0$，x^* 的相对误差限为：

$$\eta_r = \frac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{1-n}$$

则 x^* 具有 n 位有效数字。

算术运算中误差限的估计公式

$$\varepsilon(x^* \pm y^*) = \varepsilon(x^*) \pm \varepsilon(y^*)$$

$$\eta(x^* \pm y^*) = \eta(x^*) + \eta(y^*)$$

$$\eta(x^* y^*) = |x^*|\eta(y^*) + |y^*|\eta(x^*)$$

$$\eta_r(x^* y^*) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*)$$

$$\eta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \frac{|x^*|\eta(y^*) + |y^*|\eta(x^*)}{|y^*|^2}$$

$$\eta_r\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*) \qquad y, y^* \neq 0$$

第2章 插值方法与曲线拟合

2.1 插值多项式的存在性与唯一性

2.2 拉格朗日（Lagrange）插值

- 插值基函数
- Lagrange插值公式 $L_n(x)$
- 插值余项公式、推导及应用

2.3 牛顿（Newton）插值

- 差商-差商表
- Newton插值公式 $N_n(x)$
- 承袭性

2.4 赫密特（Hermite）插值

- 要满足函数值及导数值 $H_{2n+1}(x)$
- 基函数
- 基函数方法，待定系数法等
- 插值余项及推导

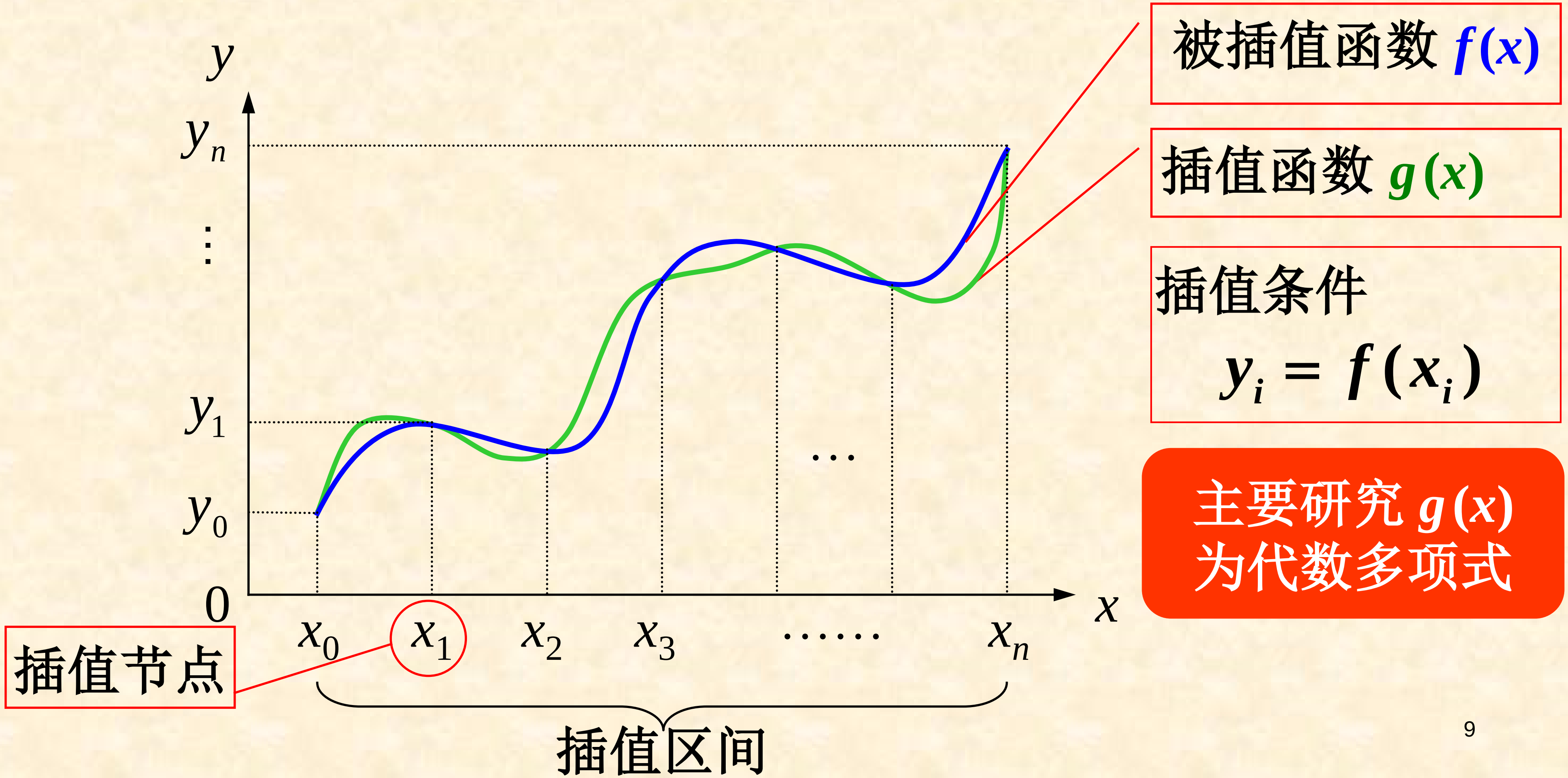
2.5 分段插值

- 思想
- 分段线性插值，分段三次H插值
- 误差分析

2.7 曲线拟合的最小二乘法

- 最小二乘条件

- 建立一个简单的而便于计算的函数 $g(x)$ 使其近似的代替 $f(x)$。



主要研究 $g(x)$ 为代数多项式

Lagrange 插值

- 已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值 $y_i = f(x_i)$, $i=0,1,\cdots,n$；求作一个次数不高于 n 的代数多项式：

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

满足：

$$L_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = y_i$$

$$i = 0,1,\cdots,n$$

Lagrange 插值基函数

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $l_i(x)$ 的最高次数与 $L_n(x)$ 相同
- $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ 是 $l_i(x)$ 的零点（共有 n 个）
- $l_i(x)$ 在 x_i 处取值为 1

Lagrange 插值误差分析
插值余项

- 插值余项（截断误差）：

$\xi \in (a,b)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \boxed{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

$\omega_{n+1}(x)$

如果我们可以估算出：

$$\max_{a<x<b} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = M_{n+1}$$

则用 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差的绝对值：

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right|$$

n次牛顿插值多项式

◆ 求作 n 次代数多项式：

$$
\begin{array}{lll}
N_n(x) = c_0 \times \boxed{1} & \longrightarrow & \varphi_0(x) \\
\quad + c_1 \boxed{(x-x_0)} & \longrightarrow & \varphi_1(x) \\
\quad + c_2 \boxed{(x-x_0)(x-x_1)} & \longrightarrow & \varphi_2(x) \\
\quad + c_3 \boxed{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} & \longrightarrow & \varphi_3(x) \\
\quad \vdots & & \\
\quad + c_n \boxed{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})} & \longrightarrow & \varphi_n(x)
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{牛顿插值基函数}
$$

满足：$N_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x) = 1 \\
\varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) \qquad i = 1, 2, \cdots, n
\end{cases}
$$

牛顿插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & \underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{c_0} \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1]}}_{c_1}(x - x_0) \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1, x_2]}}_{c_2}(x - x_0)(x - x_1) \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}}_{c_3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
& \vdots \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1, \cdots, x_n]}}_{c_n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \quad N_n(x) \\
& + \boxed{f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)} \quad R_n(x)
\end{aligned}
$$

$$c_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad i = 0,1,\cdots,n$$

由插值多项式的唯一性可知：$N_n(x) = L_n(x)$
二者的余项也相等。

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n阶差商
x_0	$f(x_0)$				…	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			…	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		…	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	…	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	…	$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

差商表

差商的性质

赫密特（Hermite）插值

- 已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $a \le x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$ 上的函数值及一阶导数值：

$$f(x_i) = y_i \quad f'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

求作一个次数不高于 $2n+1$ 次的插值多项式 $H(x)$，满足以下 $2n+2$ 条件：

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

- 称 $H(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式，因其最高次数不超过 $2n+1$，常记为 $H_{2n+1}(x)$
- $H_{2n+1}(x)$ 不仅在节点处与 $f(x)$ 有相同的函数值，且在这些节点处与 $f(x)$ 相切

赫密特插值基函数

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i\alpha_i(x)+y_i'\beta_i(x)\right]$$

$$\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

$$\alpha_i'(x_j)=0$$

$$\beta_i(x_j)=0$$

$$\beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次代数多项式

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 均含因子 $(x-x_j)^2$

$$j=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$$

赫密特插值余项

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]^2$$

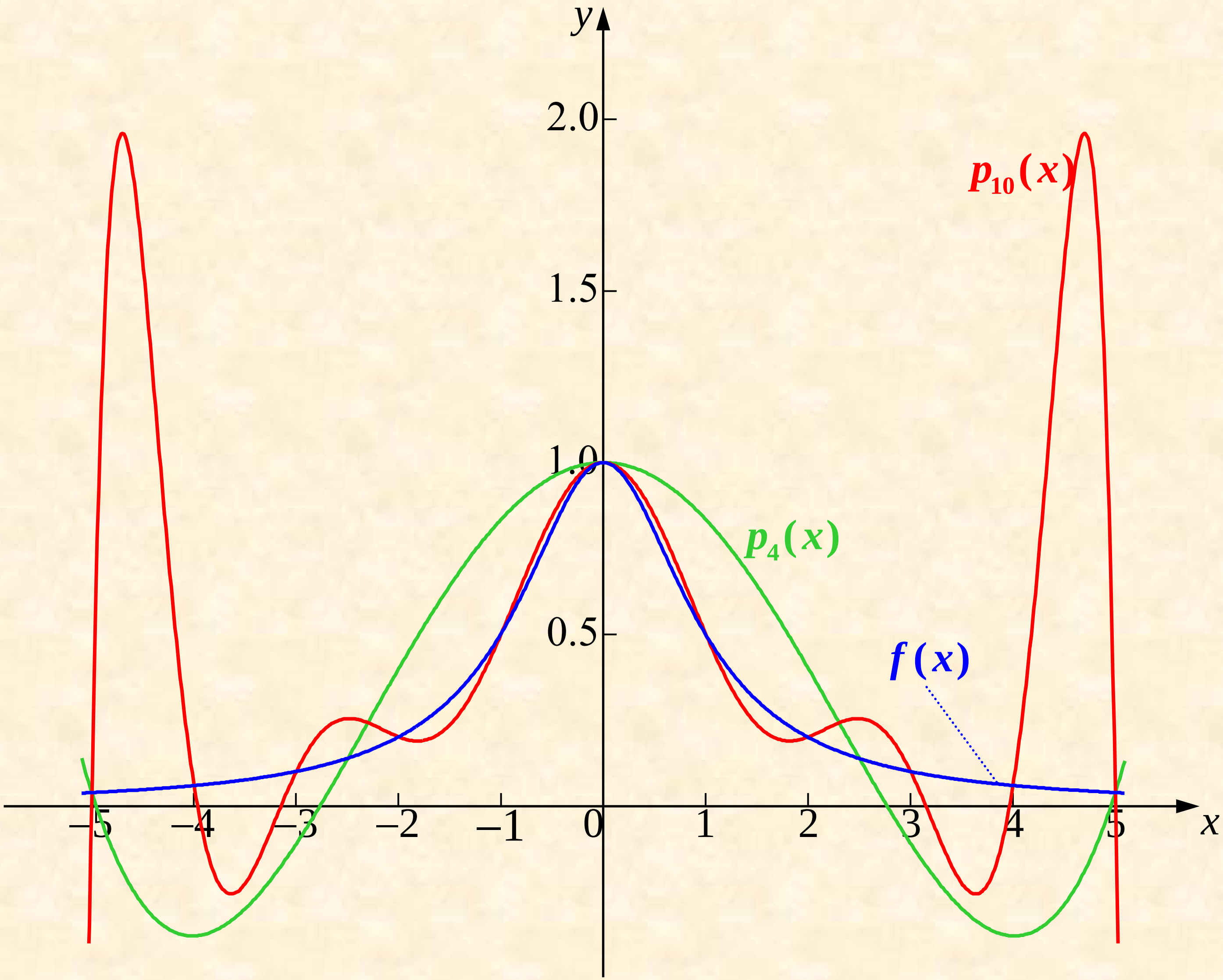
$$=\boxed{\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}}\boxed{\omega_{n+1}^2(x)} \qquad \xi\in(a,b)$$

插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 满足以下 $2n+2$ 条件：

$$H(x_i)=y_i \quad H'(x_i)=y_i' \quad i=0,1,2,\cdots,n$$

- Hermite插值余项的表达式会因实际插值条件不同而不同。

高次插值的 Runge 现象



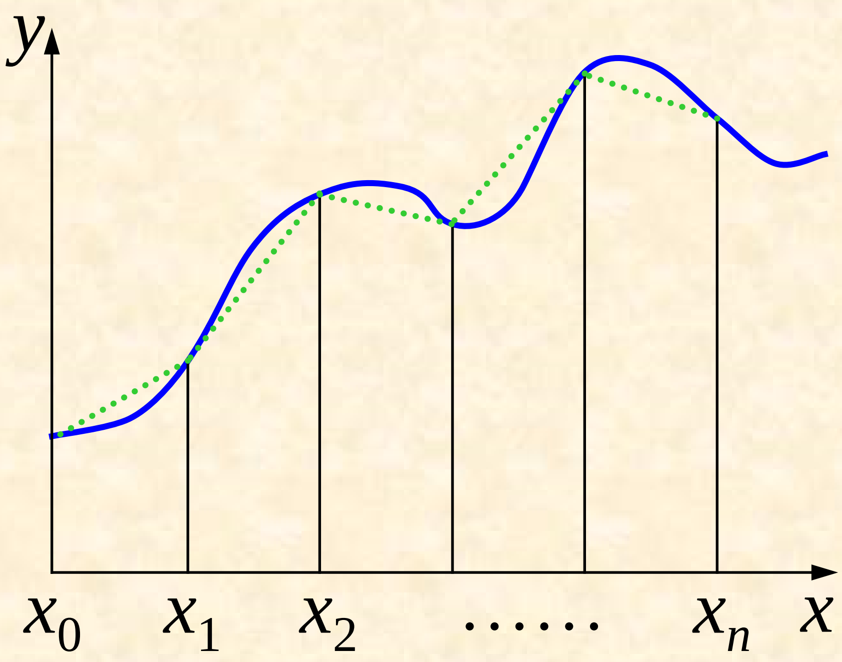
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$-5\le x\le 5$$

当插值节点数达到一定程度后，随着节点个数的增加，逼近精度越来越差

分段插值

- 将插值区间 $[a, b]$ 作一划分 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
- 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造次数较低的插值多项式 $p_i(x)$
- 将每个小区间上的插值多项式拼接在一起作为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的插值函数 $g(x) = p_i(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}]$



分段线性插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i，求作具有划分 Δ 的分段一次代数多项式 $S_1(x)$，满足：

$$S_1(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$S_1(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个一次插值多项式，则插值基函数 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ 均为一次式，且：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i \\ 1 & x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$S_1^{[i]}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad \begin{array}{l} x \in [x_i, x_{i+1}] \\ i = 0,1,\cdots,n-1 \end{array}$$

分段线性插值的插值余项：

$$\left| f(x) - S_1(x) \right| \le \frac{1}{8} h^2 \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right| \qquad h = \max h_i$$

- 上式表明插值余项与 ***h*** 相关
- ***h*** 越小，则分段线性插值的插值余项越小，因此用分段线性插值法是一个较好的提高逼近精度的方法

分段三次（Hermite）插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和 y_i'，求作具有划分 Δ 的分段三次代数多项式 $S_3(x)$，满足：

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S_3'(x_i) = y_i' \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式，且：

$$\begin{cases} S_3^{[i]}(x_i) = y_i \\ S_3'^{[i]}(x_i) = y_i' \end{cases} \qquad \begin{cases} S_3^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ S_3'^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1}' \end{cases}$$

分段三次 Hermite 插值的插值余项：

$$\left|f(x)-S_3(x)\right| \le \frac{1}{384} h^4 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$h=\max h_i$$

第3章 数值积分与数值微分

3.1 数值积分

3.1.1 机械求积公式和代数精度

3.1.2 求积公式的构造方法

3.1.3 Newton-Cotes 求积公式

3.1.4 复化求积法

3.1.5 Romberg 求积公式

3.2 数值微分

3.2.1 差商型数值微分

3.2.2 插值型数值微分

- 代数精度的概念、分析
- 插值型求积公式
- 求积公式的两种构造方法
- Cotes系数
- T，S，C 公式，余项
- N-C公式的数值稳定性
- 复化T，复化S，复化C，余项
- 变步长梯形公式
- Romberg算法

机械求积

- 可以在积分区间 [a, b] 中选择若干个节点 x_i，用这些节点处的高度（函数值 $f(x_i)$）的加权平均值近似替代 $f(\xi)$，从而构造出如下所示的求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\left[k_0 f(x_0)+k_1 f(x_1)+\cdots+k_n f(x_n)\right]$$

其中加权系数： $k_0+k_1+\cdots+k_n=1$

- 更一般的形式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

求积系数　　求积节点

代数精度

定义 3.1　如果求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

对于一切次数 $\leq m$ 的多项式均准确成立，而对于次数 $> m$ 的某个多项式不能准确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度。

代数精度的求法

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

考查 $f(x) = 1, x, x^2, x^3\ldots$，依次验证求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

是否成立，若第一个不成立的机械求积等式的 $f(x)$ 是 x^m，则求积公式的代数精度为 $m-1$。

插值型求积公式

设 $a \le x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n \le b$，根据 $[x_i, f(x_i)]$ 可以构造

n 次 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

去逼近 $f(x)$。因此

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x$$

插值型求积公式

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \boxed{\left[\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \right]} f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

定理3.2

给定 $n+1$ 个积分节点 x_i 以及相应的函数值 $f(x_i)$，$i=0,1,\cdots,n$。则求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

代数精度至少为 n 次 ⟷ 求积公式为插值型

3.1.3 Newton-Cotes 公式

1. 公式的推导

积分区间等分 ⇨ Cotes系数

2. 数值稳定性（舍入误差）

3. 截断误差

4. 低阶Newton-Cotes公式

- 梯形公式
- Simpson公式
- Cotes公式

公式
截断误差

Newton-Cotes 公式

如果将积分区间 $[a, b]$ 分为 n 等分，其求积节点 x_i 为：

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

（上式中，$h = \dfrac{b-a}{n}$ 表示各等分小区间的宽度，称为**步长**。）

以上述 $n+1$ 个求积节点为插值节点，构建被积函数 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

$$= (b-a) \sum_{i=0}^{n} \left[\boxed{\frac{\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}} \cdot f(x_i) \right]$$

C_i Cotes系数 与 n 有关

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$$

n阶Newton-Cotes公式

Cotes系数

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\boxed{\frac{-928}{28350}}$	$\frac{10496}{28350}$	$\boxed{\frac{-4540}{28350}}$	$\frac{10496}{28350}$	$\boxed{\frac{-928}{28350}}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i = 1$$

（习题3-7）

负数

Newton-Cotes公式的稳定性

在设计计算法时，需要考虑

- 符合精度要求？
- 计算结果可靠？

算法的计算结果可靠，是指在运算过程中，舍入误差的积累不会对计算结果产生较大的影响。

数值稳定性：一个算法，如果在执行它的过程中舍入误差在一定条件下能够得到控制，则称它是数值稳定的；否则，称它是数值不稳定的。

Newton-Cotes公式的稳定性

Newton-Cotes 公式：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$

如考虑计算 $f(x_i)$ 时产生的舍入误差 ε_i

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i[f(x_i)+\varepsilon_i]$$

则由舍入误差引起的积分误差为：

$$\varepsilon = \left\{(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i[f(x_i)+\varepsilon_i]\right\} - \left\{(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)\right\}$$

$$= (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i\varepsilon_i$$

$$\varepsilon = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i \varepsilon_i \qquad \boxed{\sum_{i=0}^{n} C_i = 1}$$

记 $\varepsilon_{\max} = \max|\varepsilon_i|, \quad i = 0,1,\cdots,n$

$$|\varepsilon| = \left|(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i \varepsilon_i\right| \le (b-a)\varepsilon_{\max}\sum_{i=0}^{n}|C_i|$$

$n \le 7$ 时，C_i皆为正，故 $\sum_{i=0}^{n}|C_i| = \sum_{i=0}^{n} C_i = 1$

$|\varepsilon| \le (b-a)\varepsilon_{\max} \longrightarrow$ 由舍入误差引起的积分误差有上界

$n \ge 8$ 时，C_i 出现负数，$\sum_{i=0}^{n}|C_i|$随着 n 的增加而不断增大

$|\varepsilon|$无上界 $\longrightarrow$ 由舍入误差引起的积分误差无上界

高阶Newton-Cotes公式不是数值稳定的，不宜采用。

Newton-Cotes公式误差

把Lagrange余项代入积分式，得

$$R=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\omega_{n+1}(x)=\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\downarrow}$$

$$h^{n+1}(t-0)(t-1)\cdots(t-n)$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$
$$x=a+th$$
$$x_i=a+ih$$
$$x-x_i=(t-i)h$$
$$\mathrm{d}x=h\mathrm{d}t$$

积分区间变为[0, n]

$$R=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x)(t-0)(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{j=0}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t$$

低阶N-C求积公式及其余项

$$I \approx (b-a)\times\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]$$

- 梯形公式　代数精度1

$$R_T = -\frac{h^3}{12}f''(\eta) \quad \left\| -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]\right.$$

$$h=b-a$$

$$I \approx (b-a)\times\left[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{6}f(b)\right]$$

- Simpson公式

代数精度3

$$R_S = -\frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(\eta) \qquad h=\frac{b-a}{2}$$

$$I \approx (b-a)\times\frac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$$

- Cotes公式

代数精度5

$$R_C = -\frac{8h^7}{945}\cdot f^{(6)}(\eta) \qquad h=\frac{b-a}{4}$$

复化求积公式余项

- 复化梯形公式的余项：n

$$R_{T_n}=-\frac{nh^3}{12}f''(\eta)\qquad \eta\in[a,b]\qquad h=\frac{b-a}{n}$$

- 复化辛普森公式的余项： $n=2m$

$$R_{S_n}=-\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(\eta)\qquad \eta\in[a,b]\qquad h=\frac{b-a}{n}$$

- 复化柯特斯公式的余项： $n=4m$

$$R_{C_n}=-\frac{m\cdot 8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)\qquad \eta\in[a,b]\qquad h=\frac{b-a}{n}$$

变步长复化求积

- 从上述误差分析可以看到，复化积分的截断误差（余项）随着分割因子 n 的增大而减小，可在求积分之前就确定 n 的值，使误差在允许范围之内。
- 尽管可以利用余项公式来估计 n，但由于余项公式中含有被积函数的导数，而估计各阶导数的最大值往往比较困难，且用这种方法估计的误差上界一般偏大，在实际运用上很困难。
- 在实际计算中，一个有效的方法是"变步长法"，在求积过程中根据精度要求，逐步确定 n，并算出近似值。

变步长方法（以复化梯形求积为例）

- 步骤

1、在积分区间 $[a, b]$ 上选用某个固定的 n，用 T_n近似计算 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2、在第 1 步的基础上将每个积分小区间分半处理，用T_{2n} 近似计算$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

3、判断 $\left|T_{2n}-T_n\right|\le\varepsilon$ 是否成立，成立则表示 T_{2n} 满足精度要求，否则在第 2 步的基础上将积分小区间再分半，重复 2、3 步直至获得满足精度要求的结果

二分点/半整数节点

小区间$[x_i, x_{i+1}]$，记小区间中点： $x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

该区间二分前、后的积分值分别记为：T_{i1}，T_{i2}

$$T_{i1} = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

二分前的步长 $\dfrac{b-a}{n}$

$$T_{i2} = \frac{h/2}{2}[f(x_i) + f(x_{i+\frac{1}{2}})] + \frac{h/2}{2}[f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{4}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2} f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_{i1} + \frac{h}{2} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

二分点的被积函数值

$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} T_{i2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} T_{i1} + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \boxed{f(x_{i+\frac{1}{2}})}$$

Romberg求积公式

- 变步长的梯形法算法简单，但是收敛速度慢。
- 如何提高收敛速度，节省计算量?
- 事后误差估计法

用 T_n 和 T_{2n} 得到新的近似式以及新的误差估计式。

◈ 复化梯形求积，积分区间分为 n 等分的截断误差为： $h=\dfrac{b-a}{n}$

$$R_{T_n}=I-T_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)\right]=-\frac{h^2}{12}\sum_{i=0}^{n-1}\left[hf''(\xi_i)\right]$$

$$\approx-\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{h^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]\propto h^2$$

$$R_{T_{2n}}=I-T_{2n}\approx\frac{1}{4}(I-T_n)$$

$$\Longrightarrow\quad I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$ —— 新的误差估计式

叠加上误差，可得到比T_{2n}更精确的积分值：

$$\bar{T}=T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$ —— 新的数值积分式

类似的思想在其它章节也应用过……

微分中值定理： $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$$R_{S_n}=-\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(\eta)=-\frac{h^4}{90}\cdot\frac{1}{2}nh\cdot f^{(4)}(\eta)$$

$$=-\frac{h^4}{180}\cdot(b-a)\cdot f^{(4)}(\eta)\approx-\frac{h^4}{180}\cdot[f'''(b)-f'''(a)]\propto h^4$$

$$R_{C_n}=-\frac{m\cdot 8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)=-\frac{8h^6}{945}\cdot\frac{1}{4}nh\cdot f^{(6)}(\eta)$$

$$=-\frac{2h^6}{945}\cdot(b-a)\cdot f^{(6)}(\eta)$$

$$\approx-\frac{2h^6}{945}\cdot[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]\propto h^6$$

龙贝格求积公式（续）

$$R_{T_n} \propto h^2 \longrightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_{2n}$$

$$R_{S_n} \propto h^4 \longrightarrow \frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16} \longrightarrow \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n = C_{2n}$$

$$R_{C_n} \propto h^6 \longrightarrow \frac{I - C_{2n}}{I - C_n} \approx \frac{1}{64} \longrightarrow \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n = R_{2n}$$

Romberg求积公式

$$S_{2n}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n \qquad C_{2n}=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n \qquad R_{2n}=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

$$\begin{array}{ccccccc}
T_1 & \searrow & & & & & \\
T_2 & \rightarrow & S_2 & \searrow & & & \\
T_4 & \rightarrow & S_4 & \rightarrow & C_4 & \searrow & \\
T_8 & \rightarrow & S_8 & \rightarrow & C_8 & \rightarrow & R_8 \\
T_{16} & \rightarrow & S_{16} & \rightarrow & C_{16} & \rightarrow & R_{16} \\
T_{32} & \rightarrow & S_{32} & \rightarrow & C_{32} & \rightarrow & R_{32}
\end{array}$$

二分前的步长

$$T_{2n}=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

达到精度要求了吗？

逐次减半加速法

Romberg外推公式

第4章 常微分方程数值解法

4.1 欧拉方法

- 显式欧拉法、隐式欧拉法、二步欧拉法、梯形公式欧拉法
- 局部截断误差

4.2 改进的欧拉方法

4.3 龙格-库塔方法（二阶，经典四阶）

4.4 收敛性与稳定性

难点：局部阶段误差，收敛性分析，稳定性条件

- $y(x_n)$：待求函数 $y(x)$ 在 x_n 处的精确函数值
- y_n：待求函数 $y(x)$ 在 x_n 处的近似函数值

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \qquad n = 1, 2, \dots$$

系列欧拉方法

假设初值问题(1)的解$y=y(x)$唯一存在且足够光滑. 对求解区域$[a,b]$做等距剖分

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots<x_N=b$$

$h=(b-a)/N$ 称为剖分步长; 剖分节点

$$x_n=a+nh,\ n=0,1,\ldots,N.$$

数值解法的目标就是求精确解$y(x)$在剖分节点x_n上的值$y(x_n)$的近似值y_n, n=1,2,…,N.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

改写成递推式

$$\begin{cases} y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n, h), \quad n = 0,1,2,\ldots \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. 多种欧拉方法
2. 局部截断误差

将微分方程离散化

（1）差商逼近法

即用适当的差商近似导数值。

（2）数值积分法

基本思想是先将问题转化为积分方程

$$y(x_m)-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_m} f(x,y(x))dx \quad (y(x_0)=y_0)$$

然后将上式右端采用上一章介绍的数值积分离散化，从而获得原初值问题的一个离散差分格式。

（3）Taylor展开法

使精度（局部截断误差）尽可能高。

显式Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & n = 1, 2, \cdots \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

隐式Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) & n = 0, 1, 2, \cdots \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

二步Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n) & n = 1, 2, \cdots \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

梯形公式Euler方法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

改进的Euler方法

预报： $\bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

校正： $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})]$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\{f(x_n,y_n)+f[x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n)]\}$$

局部截断误差

- 为了简化分析某常微分方程数值算法的误差，现假设 $y_n=y(x_n)$，即**在前一步 y_n 准确的前提下**，估计：

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

- 称上述误差 T_{n+1} 为该常微分方程数值算法的**局部截断误差**。
- 如果某个常微分方程数值算法的局部截断误差可表示为 $O(h^{p+1})$，则称该数值算法的**精度是 p 阶**。精度阶数越高，方法的精度越好。
- 利用泰勒展开来分析。

梯形公式欧拉法：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

$y(x_n)$

求证梯形公式欧拉法的精度为2阶。

（1）泰勒公式 $y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+O(h^3)$

（2）$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

（3）令 $y_n=y(x_n)$ ，令隐式欧拉法右边的 $y_{n+1}=y(x_{n+1})$

(4) $y_{n+1}=y(x_n)+(h/2)(y'(x_n)+y'(x_{n+1}))$

$$=y(x_n)+(h/2)[y'(x_n)+(y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2))]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+(h^2/2)y''(x_n)+O(h^3)$$

(5) $T_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$ 2 阶精度

各种欧拉法的精度比较

方法	精度
显式欧拉法	1
隐式欧拉法	1
二步欧拉法	2
梯形公式欧拉法	2
改进的欧拉法	2
变形的欧拉法	2
p阶R-K方法	p

龙格-库塔(Runge-Kutta)方法

- 显式欧拉法（1 阶精度）

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

- 改进的欧拉法（2 阶精度）

$$\begin{cases} y_p = y_n + h\,f(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + h\,f(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = (y_p + y_c)/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_{n+1}, y_n + k_1) \end{cases}$$

- $y(x_{n+1})$ 在点 x_n 处的一阶泰勒展开式为:

k^*

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(\xi)$$

$$= y(x_n) + \boxed{h\,f(\xi, y(\xi))} \qquad \xi \in (x_n,\, x_{n+1})$$

p阶R-K公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \underline{(c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_p k_p)} \\
k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\
k_2 = h\,f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \\
k_3 = h\,f(x_n + a_3 h, y_n + b_{31} k_1 + b_{32} k_2) \\
\quad \cdots \\
k_p = h\,f(x_n + a_p h, y_n + \sum_{i=1}^{p-1} b_{pi} k_i)
\end{cases}
$$

$\{c_i, a_i, b_{ij}\}$ 为待定系数

如果此公式的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称其为（p级）p阶Runge-Kutta公式，简称为（p级）p阶R-K公式。

二阶龙格-库塔方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 \\ k_1 = h f(x_n, y_n) \\ k_2 = h f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \end{cases}$$

c_1, c_2, a_2, b_{21}为待定系数

求待定系数，以使得该公式的精度尽可能高。

- 为分析局部截断误差，令 $y_n = y(x_n)$，由泰勒公式得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + O(h^3)$$

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) = \boxed{f(x_n, y_n)}$$

$$y''(x_n) = f'(x_n, y_n) = \boxed{f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \underbrace{f(x_n, y_n)}_{y'_n}}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

二阶龙格–库塔方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \end{cases}$$

c_1, c_2, a_2, b_{21} 为待定系数

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$$

$$= y_n + c_1 h\,f(x_n, y_n) + c_2[h\,f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1)]$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

- 用二元泰勒公式展开 $k_2 = h f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1)$

$$k_2 = h[f(x_n, y_n) + a_2 h f_x(x_n, y_n) + b_{21} k_1 f_y(x_n, y_n) + \boxed{O(h^2)}]$$

- 将 k_1, k_2 代入 $y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ 中可得:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + c_1 h f(x_n, y_n) + c_2 h[f(x_n, y_n) + a_2 h f_x(x_n, y_n) \\ &\quad + b_{21} k_1 f_y(x_n, y_n)] + O(h^3) \\ &= y_n + (c_1 + c_2) h f(x_n, y_n) + c_2 a_2 h^2 f_x(x_n, y_n) \\ &\quad + c_2 b_{21} h^2 f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + O(h^3) \\ &= y_n + (c_1 + c_2) h f(x_n, y_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}[2c_2 a_2 f_x(x_n, y_n) + 2c_2 b_{21} f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] \\ &\quad + O(h^3) \end{aligned}$$

二阶龙格-库塔方法（续）

$$y_{n+1} = y_n + \boxed{(c_1 + c_2)} h f(x_n, y_n)$$

$$+ \frac{h^2}{2}[\boxed{2c_2 a_2} f_x(x_n, y_n) + \boxed{2c_2 b_{21}} f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n)$$

$$+ \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 a_2 = 1 \\ 2c_2 b_{21} = 1 \end{cases} \Longrightarrow y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

2 阶精度

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad 2c_2 a_2 = 1 \qquad 2c_2 b_{21} = 1$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \end{cases}$$

- 四个未知变量，只有三个方程，有无穷多组解
- 每组解的构成的龙格–库塔方法均为二阶

取 $\begin{cases} c_1 = c_2 = 1/2 \\ a_2 = b_{21} = 1 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$

改进的欧拉法

取 $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ a_2 = b_{21} = 1/2 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_2 \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}\right) \end{cases}$

变形的欧拉法
中 点 方 法

4.4 收敛性与稳定性

- 收敛性和稳定性是从不同的角度来考量算法的可靠性。
- 本节只考虑单步显式方法的收敛性和单步方法的稳定性。

  而且稳定性的分析只针对特定模型进行。

- 重点：
  - 定义
  - 判定定理及应用

单步法的收敛性

定义：求解某初值问题的单步数值法，对任意固定的 $x_n = x_0 + nh$ 当 $h \to 0$ 且 $n \to \infty$ 时，它的近似解趋近于精确解 $y(x_n)$，即：

$$\lim_{h\to 0, n\to\infty} y_n = y(x_n)$$

则称该单步法是收敛的。

定义：称 $|y(x_n) - y_n|$ 为单步法的近似解 y_n 的**整体截断误差**。

单步法收敛 ⟷ $h \to 0$ 且 $n \to \infty$ 时，y_n 的整体截断误差 $\to 0$

收敛性定理 （定理4.2）

若单步法 $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$ 满足以下条件：

- 具有 p 阶精度（局部截断误差）；
- 增量函数 $\varphi(x, y, h)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件：

$$\left|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, \bar{y}, h)\right| \le L_\varphi \left|y - \bar{y}\right|$$

- 初值 y_0 是准确的。

则该单步法的整体截断误差为：$\left|y(x_n) - y_n\right| = O(h^p)$

若某单步法满足以上条件，则该方法是收敛的。

单步法的稳定性

定义：设在节点 x_n 处用数值算法得到的理想数值解为 y_n，而实际计算得到的近似解为 $\tilde{y}_n$，称差值：

$$\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$$

为第 n 步的数值解的扰动。

定义：若一种数值方法在节点 x_n 处的数值解 y_n 的扰动 $\delta_n \neq 0$，而在以后各节点 y_m $(m > n)$ 上产生的扰动为 δ_m，如果：

$$|\delta_m| \le |\delta_n| \qquad (m = n+1, n+2, \cdots)$$

则称该数值方法是稳定的。

隐式欧拉法： $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

考察模型方程： $y' = \lambda y \quad (\lambda < 0)$

隐式欧拉法 $y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$

化简为： $y_{n+1} = \dfrac{1}{1-h\lambda} y_n$

假设 y_n 上有扰动 δ_n，则 y_{n+1} 的扰动为：

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda}\delta_n$$

隐式欧拉法稳定 $\longleftrightarrow$ $|\delta_{n+1}| \le |\delta_n|$ $\longleftrightarrow$ $\left|\dfrac{1}{1-h\lambda}\right| \le 1 \quad \lambda < 0$

$\forall h > 0$，上式均成立，所以隐式欧拉法稳定是恒稳定的。

第5章 方程求根

5.1 二分法

5.2 迭代法及其收敛性

- 迭代法的基本概念
- 收敛性判定定理（定理5.3）
- 迭代过程的误差分析（定理5.4 ）
- 局部收敛性（定理5.5）

5.3 迭代法的收敛速度与加速

- P阶收敛定义
- 判定定理（定理5.6, 5.7）

5.4 牛顿法

- 牛顿迭代公式
- 牛顿法的收敛性与收敛速度（定理5.8, 5.9）
- 初始值的选取
- 牛顿下山法

复习与考试

- 复习：理解基本概念，掌握基本方法
  误差（余项）：结论、证明、分析与应用
  收敛性、稳定性
  多做题：例题（课件，教材）、作业
  举一反三

- 考试：
  - 题型：简答，计算，证明
  - 时间、地点：参见学院通知
  - 工具：无记忆功能简单计算器