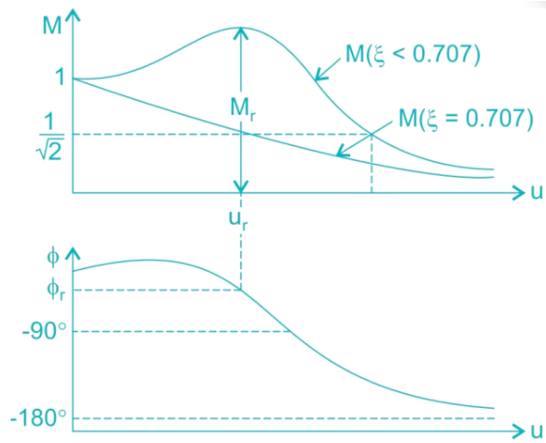
Frequency Analysis

Motivation, peak resonance, resonant frequency, bandwidth, gain and phase cross-over frequencies, roll-off rate, the frequency response of second-order systems.

چرا پاسخ فرکانسی؟

انگیزه برای انجام تحلیل فرکانسی این است که بفهمیم چگونه سیستم‌ها به اجزای فرکانسی مختلف یک سیگنال ورودی پاسخ می‌دهند، مانند فیلترها، سیستم‌های کنترلی یا سیستم‌های ارتباطی. این تحلیل به طراحی سیستم‌هایی کمک می‌کند که فرکانس‌های خاصی را تقویت یا تضعیف کنند.



پیک رزونانس (Peak Resonance)

پیک رزونانس به بیشترین دامنه پاسخ سیستم در یک فرکانس خاص اشاره دارد. در سیستم‌هایی مانند نوسانگرهای مکانیکی یا الکتریکی، رزونانس زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس ورودی با فرکانس طبیعی سیستم همخوانی داشته باشد و منجر به نوسانات بزرگ شود.

از نظر ریاضی، پیک رزونانس جایی است که تابع انتقال سیستم حداکثر بهره را نشان می‌دهد.

فرکانس رزونانس (Resonant Frequency)

فرکانس رزونانس فرکانسی است که در آن سیستم بیشترین رزونانس را نشان می‌دهد. این فرکانس معمولاً جایی است که دامنه خروجی سیستم برای یک ورودی خاص بیشترین مقدار را دارد. در یک سیستم مرتبه دوم، فرکانس رزونانس به فرکانس طبیعی و ضریب میرایی سیستم بستگی دارد.

$$f_r = \frac{w_n}{2\pi}\sqrt{1-2\zeta}$$

پهنای باند (Bandwidth)

پهنای باند محدوده فرکانس‌هایی است که در آن سیستم به طور مؤثری پاسخ می‌دهد، که معمولاً بین فرکانس‌هایی اندازه‌گیری می‌شود که در آن‌ها پاسخ سیستم به مقدار خاصی کاهش می‌یابد (معمولاً 3 دسی‌بل زیر پیک رزونانس).

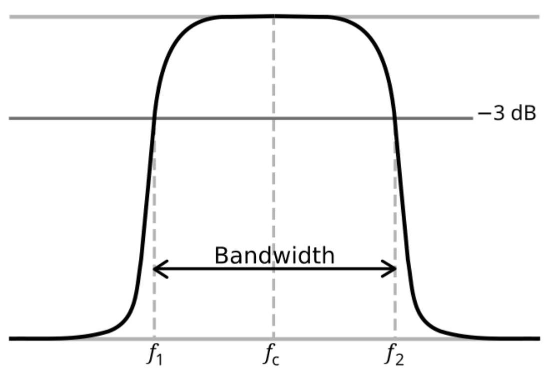
بنا به تعریف، فرکانسی است که در آن مقدار $|M(j\omega)|$ به 70.7 درصد مقدارش در فرکانس صفر برسد. یا به عبارت دیگر به 3db زیر مقدارش در فرکانس صفر برسد. به طور کلی پهنای باند یک سیستم کنترلی معیاری برای مشخصه های پاسخ گذرای آن است، به طوری که:

- پهنای باند بزرگ متناظر با زمان خیز کمتر می باشد.
- پهنای باند بزرگ متناظر با حضور بیشتر نویز می باشد.

برای یک سیستم رزونانس، پهنای باند می‌تواند به عنوان تفاوت بین فرکانس‌های قطع بالا و پایین در نقاط 3- دسی‌بل از فرکانس رزونانس تعریف شود:

$$\text{پهنای باند} = f_1 - f_2$$

f_1 فرکانس قطع پایین و f_2 فرکانس قطع بالا هستند.



فرکانس عبور بهره(Gain Crossover Frequency)

فرکانس عبور بهره فرکانسی است که در آن قدر مطلق تابع انتقال حلقه باز برابر با 1 (یا 0 دسی‌بل) می‌شود. این فرکانس در سیستم‌های کنترلی مهم است، زیرا جایی است که سیستم از تقویت کردن به تضعیف کردن سیگنال‌ها تغییر می‌کند.

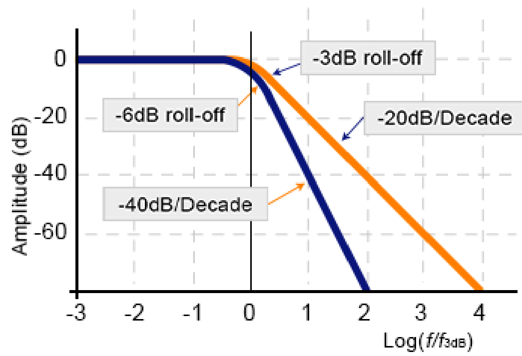
فرکانس عبور فاز (Phase Crossover Frequency)

فرکانس عبور فاز، فرکانسی است که در آن فاز تابع انتقال سیستم برابر با 180- درجه می‌شود. این فرکانس در تعیین پایداری سیستم‌های کنترلی فیدبک بسیار مهم است.

نرخ افت (Roll-off Rate)

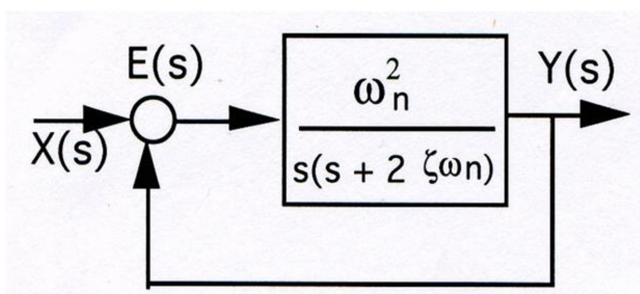
نرخ افت توصیف می‌کند که پاسخ سیستم با افزایش فرکانس چقدر سریع کاهش می‌یابد. برای یک سیستم مرتبه دوم، نرخ افت معمولاً -40 دسی‌بل/دهه یا 12- دسی‌بل/اکتاو است، یعنی بهره به ازای هر افزایش ده برابری (دهه) یا دو برابری (اکتاو) در فرکانس به این میزان کاهش می‌یابد.

- در سیستم‌های مرتبه بالاتر، نرخ افت تندتر است.



پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه دوم

فرم سیستم های مرتبه دوم به صورت زیر است:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

w_n فرکانس طبیعی و ζ ضریب میرایی هستند.

برای به دست آوردن گین سیستم باید به جای s در تابع تبدیل jw قرار دهیم.

$$|H(jw)| = \frac{w_n^2}{\sqrt{(w_n^2 - w^2)^2 + (2\zeta w_n w)^2}}$$

و همچنین برای بدست آوردن فاز سیستم باید به صورت زیر عمل کنیم:

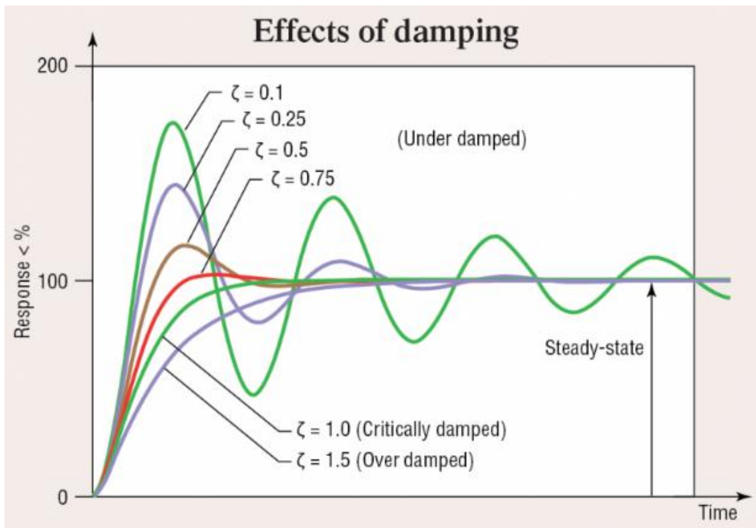
$$\varphi = \tan\left(\frac{2\zeta w_n w}{w_n^2 - w^2}\right)$$

رفتار سیستم به سه نوع تقسیم می‌شود:

میرای ضعیف(ζ<1): سیستم نوسان می‌کند و پاسخ فرکانسی آن دارای یک پیک رزونانس است.

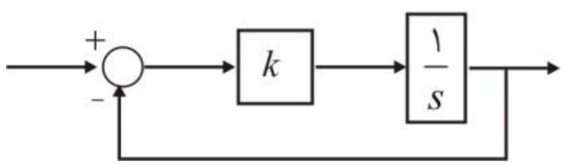
میرای بحرانی (ζ=1): سیستم نوسان ندارد و سریع‌ترین زمان نشست را دارد.

میرای شدید (ζ>1): سیستم به آهستگی پاسخ می‌دهد و نوسان ندارد.



مثال:

در سیستم مدار بسته زیر پهنای باند سیستم حلقه بسته کدام است؟



$$T(s) = \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s}} = \frac{k}{s+k} \rightarrow |T(0)| = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{k^2}{\omega^2 + k^2} \rightarrow \omega^2 = k^2 \rightarrow \beta\omega = k$$

مثال:

تابع تبدیل زیر را درنظر بگیرید.

$$\frac{16}{s^2+1.6s+16}$$

حالت کلی سیستم های مرتبه دوم به صورت زیر بود:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$

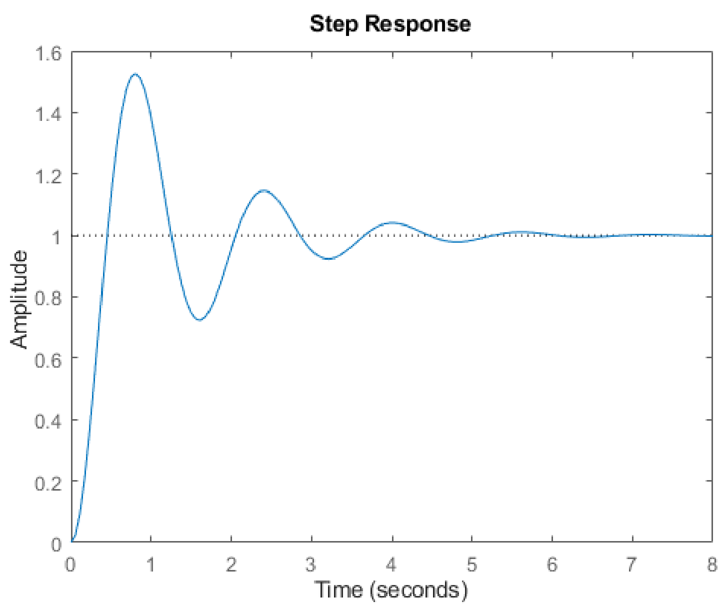
پس می توانیم w_n و ζ را بیابیم.

$$w_n = \sqrt{16} = 4$$

$$\zeta = \frac{1.6}{2\times 4} = 0.2 < 1$$

پس سیستم میرای ضعیف است.

پاسخ پله سیستم به صورت زیر است:



برای یافتن فرکانس رزونانس باید از فرم زیر استفاده کنیم:

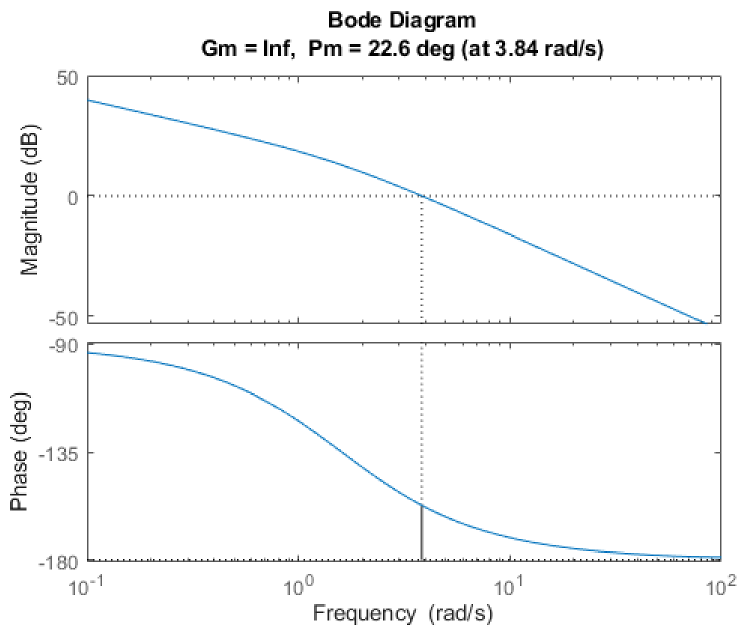
$$f_r = \frac{w_n}{2\pi}\sqrt{1-2\zeta} = \frac{4}{2\pi}\sqrt{1-2\times 0.2} = 0.493$$

حالا باید فرکانس عبور بهره و فرکانس عبور فاز را بدست بیاورم.

$$\angle GH(j\omega_p) = -tan^{-1}\left(\frac{1.6w}{16 - w^2}\right) = -180$$

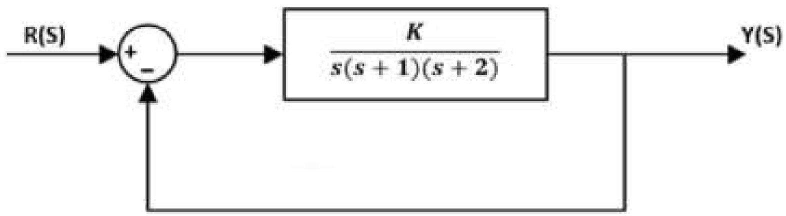
$$|G(j\omega)| = 1 \rightarrow \frac{16}{\sqrt{(w^2)^2 + (1.6w)^2}} = 1 \rightarrow \; w_c = 3.84$$

$$\rightarrow PM = 22.6$$



مثال:

سیستم زیر را در نظر بگیرید.



الف) به کمک نمودار نایکوئیست حدودk را برای پایداری سیستم حلقه بسته محاسبه کنید. (مسیر نایکوئیست را یکبار طوری در نظر بگیرید که قطب در مبدا را شامل شود و بار دیگر طوری در نظر بگیرید که آن را شامل نشود). نتیجه بدست آمده را تحلیل کنید.

ب) حد بهره و حد فاز سیستم را بدست آورید.

ج) به کمک دستور **Nyquist** در **MATLAB** نمودار نایکوئیست آن را بدست آورید و نتیجه آن را با قسمت "الف" مقایسه کنید.

الف)

اینکه قطب در مرکز را جز کانتور بگیریم یا نه در جهت دور زدن نمودار تاثیر دارد ولی در شکل کلی آن تاثیری ندارد. اما چون سوال گفته است که دو حالت را بررسی کنیم ما دو حالت را در رنگ های مختلف نشان میدهیم.

فقط باید دقت کرد قطبی که جز کانتور نیست قطب پایدار به حساب میآید ولی قطبی که جز کانتور هست قطب ناپایدار به حساب خواهد آمد. باید دقت داشت ما برای بهره یک نمودار نایکوییست را رسم میکنیم سپس برای پایداری نقطه-k/1روی محور حقیقی را باید چک کنیم.

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} \qquad G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega(\sqrt{\omega^2+1})(\sqrt{\omega^2+4})} \qquad p = 0$$

$$\omega = 0 \longrightarrow \begin{cases} |G| = \infty \\ \angle G = -90 \end{cases} \qquad Re = \frac{-3\omega^2}{9\omega^4 + (2\omega+\omega^3)^2} \qquad Im = \frac{\omega^3 - 2\omega}{9\omega^4 + (2\omega+\omega^3)^2}$$

$$\omega = \infty \longrightarrow \begin{cases} |G| = 0 \\ \angle G = -270 \end{cases} \qquad Im = 0 \longrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \longrightarrow Re = 0 \\ \omega = \sqrt{2} \longrightarrow Re = \frac{-1}{6} \end{cases}$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0 \quad \rightarrow \qquad k > 0 \qquad 6 < k \longrightarrow 0 < k < 6$$ ناحیه پایداری

سیستم پایدار است $\quad z = n + p = 0$

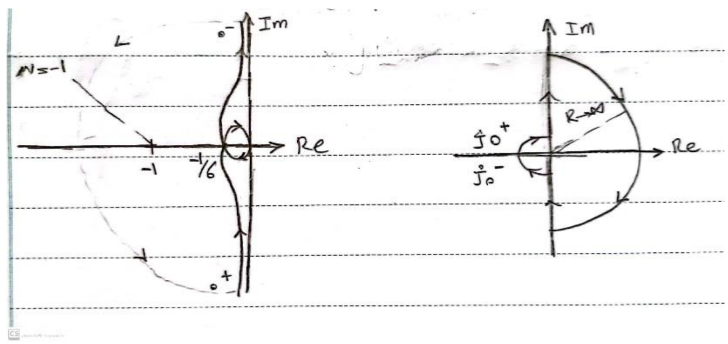
صفر را شامل نشود:

$$if \qquad k = 1 \longrightarrow n = -1 \qquad p = 1 \quad \rightarrow \quad z = -1 + 1 = 0 \longrightarrow$$

پایدار است $\quad -\infty < \frac{-1}{k} < \frac{-1}{6} \longrightarrow n = -1 \quad z = -1 + 1 = 0 \longrightarrow$

ناپایدار است $\quad \frac{-1}{6} < \frac{-1}{k} < 0 \longrightarrow n = 1 \quad z = 1 + 1 = 2 \longrightarrow$

ناپایدار است $\quad 0 < \frac{-1}{k} < \infty \longrightarrow n = 0 \quad z = 0 + 1 = 1 \longrightarrow$

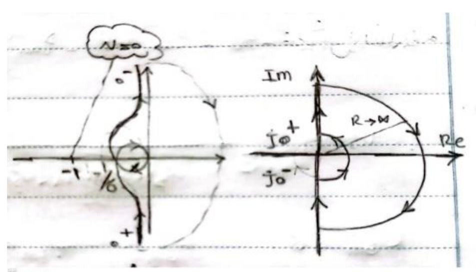


صفر را شامل شود:

پایدار است $\quad -\infty < \frac{-1}{k} < \frac{-1}{6} \longrightarrow n = 0 \quad z = 0 + 0 = 0 \longrightarrow$

ناپایدار است $\quad \frac{-1}{6} < \frac{-1}{k} < 0 \longrightarrow n = 2 \quad z = 2 + 0 = 2 \longrightarrow$

ناپایدار است $\quad 0 < \frac{-1}{k} < \infty \longrightarrow n = 1 \quad z = 1 + 0 = 1 \longrightarrow$



در حالتی که N>0 است فقط حالت 0<k<6 سیستم پایدار است.

ب)

$$\angle GH(j\omega_p) = -90 - \tan^{-1}(\omega_p) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = -180 \rightarrow \ \omega_p = \sqrt{2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{6}$$

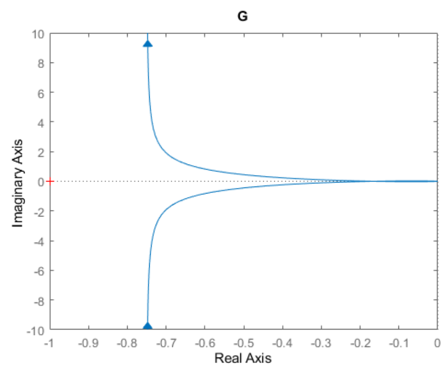
$$GM = 20\log\frac{1}{6} = 15.5\ dB$$

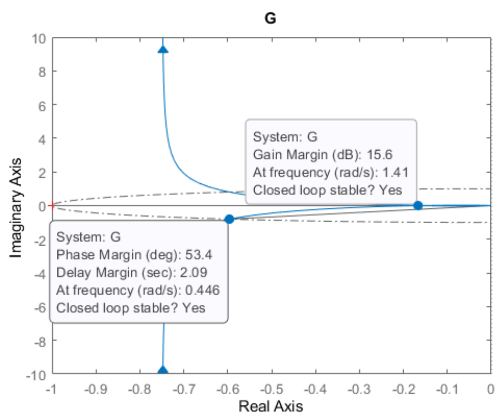
$$|G(j\omega)| = 1 \rightarrow \frac{1}{\omega\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)\left(\sqrt{\omega^2+4}\right)} = 1 \rightarrow \omega_c = 0.445$$

$$\angle GH(j\omega_c) = 90 - \tan^{-1}(\omega_c) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 233.46\ or\ 1.297\pi\ Rad$$

$$PM = 1.297\pi - \pi = 0.297\pi$$

ج)





همانطور که از نمودار های بالا مشخص است همانند حل دستی هستند و حاشیه فاز و بهره آن نیز به صورت بالاست.

مثال:

سیستم حلقه بسته ای با فیدبک واحد در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه باز آن به صورت زیر است:

$$G(s) = \frac{k}{s(s^2+2s+6)}$$

الف) مقدار k را به گونه ای تعیین کنید که PM آن 60 در جه باشد. سپس GM را برحسب db بدست آورید.

ب) اگر یک ترم تاخیر به صورت $e^{-t_d s}$ در تابع تبدیل حلقه باز ضرب شود. محدوده ی t_d که سیستم پایدار می ماند را تعیین کنید.

ج) قسمت الف و ب را با متلب چک کنید.

الف)

$$G(s) = \frac{k}{s(s^2+2s+6)} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(-\omega^2+2j\omega+6)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\left(\sqrt{4\omega^2+(-\omega^2+6)^2}\right)} \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+1+j\sqrt{s})(s+1-j\sqrt{s})}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{pm} = \frac{\pi}{3} = \pi + \boldsymbol{\phi} \longrightarrow \boldsymbol{\phi} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi = \angle GH(j\omega_c)$$

$$\angle GH(j\omega_c) = -90 - \tan^{-1}\left(\omega_c+\sqrt{5}\right) - \tan^{-1}\left(\omega_c-\sqrt{5}\right) = -120$$

$$\tan^{-1}\left(\omega_c+\sqrt{5}\right) + \tan^{-1}\left(\omega_c-\sqrt{5}\right) = 30$$

$$\frac{\omega_c+\sqrt{5}+\omega_c-\sqrt{5}}{1-{\omega_c}^2+5} = 0.58 \longrightarrow \omega_c = 1.27\,{}^{Rad}\!/_{Sec}$$

$$|GH(j\omega_c)| = 1 \longrightarrow \frac{k}{1.27\sqrt{4(1.27)^2+(-(1.27)^2+6)^2}} = 1 \longrightarrow k = 3.11$$

$$\angle GH\left(j\omega_p\right) = -90 - \tan^{-1}\left(\omega_p+\sqrt{5}\right) - \tan^{-1}\left(\omega_p-\sqrt{5}\right) = -180 \longrightarrow$$

$$\tan^{-1}\left(\omega_p+\sqrt{5}\right) + \tan^{-1}\left(\omega_p-\sqrt{5}\right) = 90 \longrightarrow \omega_p = \sqrt{6}$$

$$k_{Gm} = \frac{1}{\left|GH\left(j\omega_p\right)\right|} = \sqrt{6}\left(\sqrt{4\times 6}\right) = 12^{dB}$$

ب)

$$G(s) = \frac{ke^{-t_d s}}{s(s+1+j\sqrt{5})(s+1-j\sqrt{5})} \qquad G(j\omega) = \frac{ke^{-jt_d\omega}}{j\omega(j\omega+1+j\sqrt{5})(j\omega+1-j5)}$$

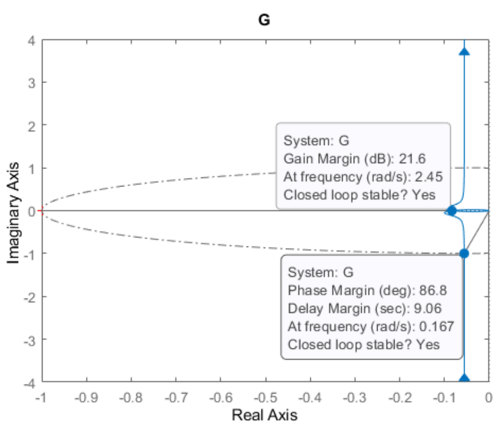
$$\left|GH(j\omega_p)\right| = 1 \longrightarrow \frac{1}{1.27\sqrt{4{\omega_p}^2 + \left(-{\omega_p}^2+6\right)^2}} = 1 \rightarrow \ \omega_p = 0.167$$

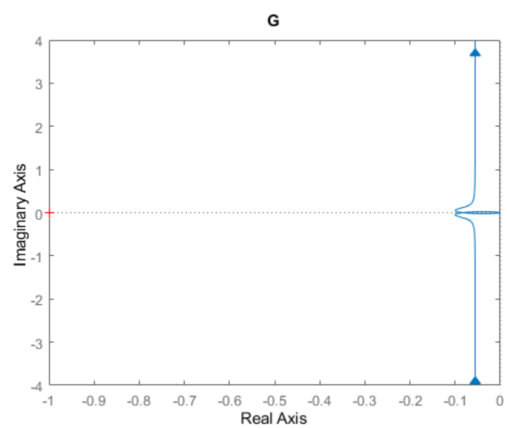
$$\angle GH(j\omega_p) = \pi - \frac{\pi}{2} - 0.167t_d - \tan^{-1}(0.167+\sqrt{5}) - \tan^{-1}(0.167-\sqrt{5}) > 0 \rightarrow$$

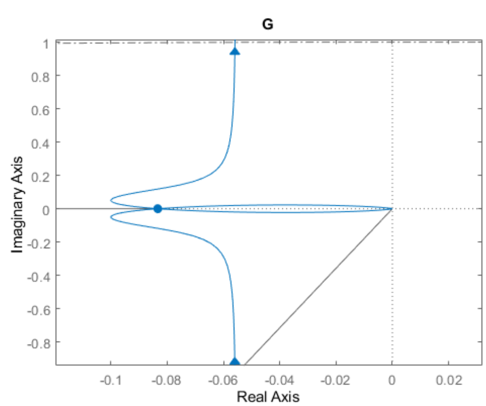
$$t_d < -1.389$$

ج)

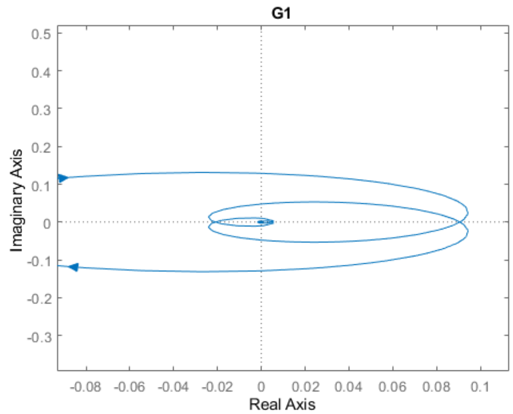
سیستم بدون تاخیر:

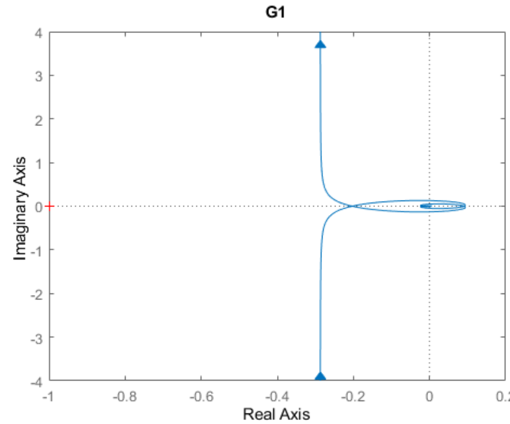


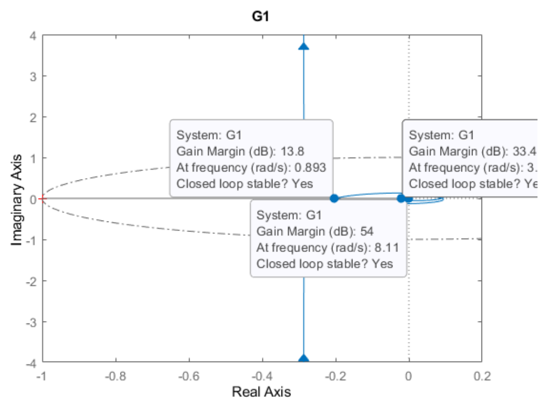




سیستم تاخیر دار:







در نمودار نایکویست سیستم دارای تاخیر یک دایره دیگر نیز اضافه شده است و حاشیه بهره در آن نقاط کاهش پیدا کرده است.

مثال:

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت زیر است:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+1)^3}{s^3}$$

حاشیه بهره سیستم تقریبا چند db است و در مورد پایداری سیستم حلقه بسته چه می توان گفت؟

$$\measuredangle G = -\pi \rightarrow -\frac{3\pi}{2} + 3tan^{-1}\omega = -\pi \rightarrow tan^{-1}\omega = \frac{\pi}{6} \rightarrow \omega_p = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$GM = \frac{1}{|G(\omega_p)|} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{\omega_p{}^2 + 1})^3}{\omega_p{}^3}} \xRightarrow{\omega_p = \frac{\sqrt{3}}{3}} GM = \frac{1}{8}$$

$$20\log\frac{1}{8} = -20\log 8 = -60\log 2 \xRightarrow{\log 2 = 0.3} -18\,db$$

برای بررسی پایداری معادله مشخصه را برای سیستم حلقه بسته چک میکنیم:

$$\Delta = s^3 + (s+3)^3 = 2s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

تمامی ضرایب مثبت است، اگر جدول راث را تشکیل دهیم هیچ تغییر علامتی در ستون اول نخواهیم داشت،

بنابراین سیستم پایدار است .

حاشیه بهره و فاز این سوال در متلب به صورت زیر آمده است: