

به نام خدا

40121123

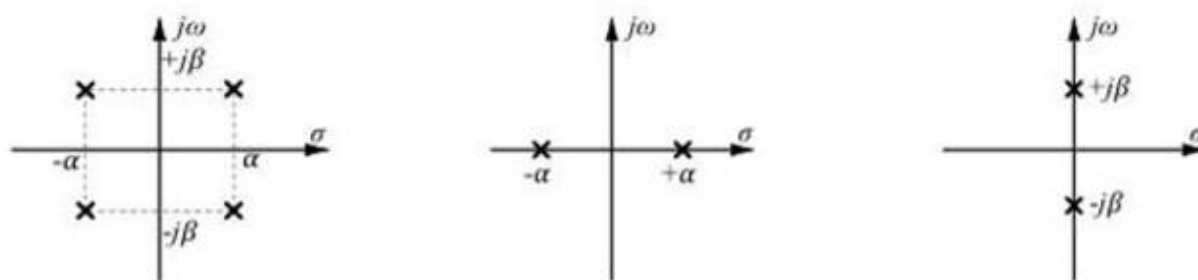
محدثه علیرضایی طهرانی

چرا وقتی سطری کامل صفر می شود در روش راث هرویتز مشتق می گیریم؟

بررسی آرایه راث در حالت ویژه این حالت زمانی رخ می دهد که معادله مشخصه ریشه هایی متقارن نسبت به مبدا داشته باشد بنابراین دست کم یکی از موارد زیر در معادله وجود خواهد داشت:

- معادله یک یا چند جفت ریشه موهومی دارد. ($s = \pm \beta$)
- معادله یک یا چند جفت ریشه حقیقی مساوی و مختلف علامه دارد ($s = \pm \alpha$)
- معادله یک یا چند جفت ریشه مزدوج مختلط متقارن نسبت به مبدا صفحه s دارد ($s = \pm \alpha \pm j\beta$)

موارد بالا به صورت گرافیکی و روی صفحه s در شکل زیر نشان داده شده اند.



بنابراین اگر کل سطر در راث هرویتز صفر شود می توان اطلاعات بیشتری نسبت به محل ریشه های معادله مشخصه به دست آورد توجه کنید که یک قطب در مبدا نیز می تواند این حالت را ایجاد نماید در این وضعیت امکان تکمیل آرایه راث به صورت عادی وجود ندارد و باید الگوریتم زیر را به کار ببریم:

1. با استفاده از ضرایب سطر ماقبل سطر صفر معادله کمکی $A(s) = 0$ را تشکیل می دهیم.
2. از معادله کمکی نسبت به s مشتق گرفته و چند جمله ای $A'(s)$ را بدست می آوریم.
3. به جای سطر صفر ضرایب چند جمله ای $A'(s)$ را قرار داده و آرایه راث را تکمیل می کنیم.
4. اگر باز هم به سطر صفر دیگری رخ دهد سه گام بالا را بر روی آن سطر نیز پیاده می کنیم.
5. عناصر ستون اول آرایه راث را بررسی کرده و مانند حالت نرمال آن را تعبیر می کنیم.

■ تعداد تغییر علامت‌های ستون اول آرایه راث تعداد ریشه‌های معادله مشخصه در RHP را نشان می‌دهند و اگر هیچ تغییر علامتی وجود نداشته باشد آنگاه هیچ ریشه‌ای در RHP نیست اما جفت ریشه‌هایی روی محور موهومی وجود دارد که اگر ریشه‌های روی محور موهومی مکرر نباشند، سیستم پایدار مرزی خواهد بود ولی اگر ریشه‌های محور موهومی مکرر باشند سیستم ناپایدار خواهد بود.

وجود سطر صفر در آرایه راث باعث می‌شود بتوان معادله مشخصه را به صورت $\Delta(s) = A(s)Q(s)$ نوشته و در نتیجه آرایه راث به دو ناحیه $A(s)$ و $Q(s)$ تقسیم می‌شود. از ابتدای آرایه راست تا سطر صفر ناحیه $Q(s)$ نامیده می‌شود. از سطر صفر تا انتهای آرایه راست ناحیه $A(s)$ نامیده می‌شود.

در ناحیه $Q(s)$ پایداری چند جمله‌ای $Q(s)$ و در ناحیه $A(s)$ ، پایداری معادله کمکی $A(s)$ بررسی می‌شود دو ناحیه‌ای شدن آرایه راث و با توجه به نکته اساسی بالا می‌توان نکات مهم زیر را نتیجه گرفت:

- اگر درجه $A(s)$ برابر با m و تعداد تغییر علامت‌ها در ستون اول ناحیه $A(s)$ برابر با k باشد معادله کمکی، k ریشه ناپایدار و k ریشه متقارن نسبت به مبدا ریشه‌های ناپایدار را خواهد داشت و $m-2k$ ریشه دیگر بر روی محور موهومی خواهند بود.
- اگر در ناحیه $A(s)$ در ستون اول هیچ تغییر علامتی وجود نداشته باشد تمام ریشه‌های $A(s) = 0$ روی محور موهومی خواهند بود.
- اگر $\Delta(s)$ ریشه‌های موهومی داشته باشد تمام آنها ریشه‌های $A(s)$ هستند و $Q(s)$ ریشه‌ای روی محور موهومی نخواهد داشت.
- تعداد تغییر علامت‌های ستون اول آرایه راست در ناحیه $Q(s)$ نشان دهنده تعداد ریشه‌های ناپایدار نامتقارن $\Delta(s)$ یا همان تعداد ریشه‌های ناپایدار $Q(s)$ است.
- تعداد سطرهای صفر در آرایه راست مرتبه تکرار ریشه‌های متقارن نسبت به مبدا معادله مشخصه است.
- اگر آرایه راث مربوط به $\Delta(s)$ دارای سه سطر صفر باشد و چند جمله‌ای‌های $A(s)$ و $B(s)$ و $C(s)$ به ترتیب معادله‌های کمکی اولین، دومین و سومین سطر صفر باشند آنگاه:

الف. ریشه $A(s)$ معادله تمام ریشه‌های متقارن نسبت به مبدا $\Delta(s)$ هستند

ب. ریشه‌های معادله $B(s) = 0$ تمام ریشه‌های متقارن نسبت به مبدا با مرتبه تکرار بزرگتر یا مساوی دو معادله مشخصه $\Delta(s)$ هستند ریشه‌های متقارن ساده از معادله به دست نمی‌آیند.

ج. ریشه‌های معادله $C(s) = 0$ تمام ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ با مرتبه تکرار بزرگتر یا مساوی سه معادله مشخصه‌اند ریشه‌های متقارن با مرتبه تکرار یک و دو از معادله $C(s) = 0$ به دست نمی‌آیند.

د. چند جمله‌ای‌های $\Delta(s)$ ، $A(s)$ ، $B(s)$ و $C(s)$ به صورت زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$\Delta(s) = A(s)Q(s) = [B(s)Q_1(s)]Q(s) = [[C(s)Q_2(s)]Q_1(s)]Q(s)$$

• اگر تعداد سطرهای صفر بزرگتر یا مساوی ۲ باشد معادله مشخصه حتماً ناپایدار است حتی اگر تغییر علامتی در ستون اول رخ ندهد زیرا ریشه‌های مکرر روی محور $j\omega$ خواهیم داشت که نشانه ناپایداری است.

■ در واقع هر وقت این حالت رخ دهند فوراً می‌توان نتیجه گرفت که سیستم ناپایدار است و یا حداکثر پایدار مرزی است و نیازی به کامل کردن جدول راست برای تعیین پایداری نیست جدول راست تنها برای وقتی که بخواهیم محل قطب‌ها را تعیین کنیم کامل می‌شود.