

به نام خدا

40121123

محدثه علیرضایی طهرانی

مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های دارای تأخیر

مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus) یکی از روش‌های گرافیکی برای تحلیل پایداری سیستم‌های کنترل خطی است که مسیر حرکت قطب‌های سیستم حلقه‌بسته را با تغییر یک پارامتر کنترلی (معمولاً بهره K) نشان می‌دهد. در سیستم‌های بدون تأخیر، این مسیرها با حل معادله مشخصه به دست می‌آیند و دارای الگوهای مشخصی هستند. اما وقتی یک تأخیر زمانی (e^{-sT}) در سیستم وجود داشته باشد، تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها پیچیده‌تر می‌شود زیرا تأخیر یک تابع غیرجبری است که بر پایداری و پاسخ دینامیکی سیستم تأثیر قابل توجهی دارد.

وقتی یک سیستم دارای تأخیر زمانی باشد، تابع تبدیل آن به شکل زیر است:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-Ts}$$

و برای تحلیل پایداری، معادله مشخصه سیستم حلقه‌بسته به شکل زیر است:

$$1 + G(s)H(s)e^{-Ts} = 0$$

این معادله دیگر معادله مشخصه نام ندارد و معادله غیرگویا (Transcendental) است، چنین معادله‌ای به جای تعداد محدودی ریشه، بی‌نهایت ریشه در صفحه s دارد. زیرا هر بار که s یک مقدار خاص را می‌پذیرد، با توجه به رابطه $s = \sigma \pm j\omega$ یک سری بی‌نهایت مقدار دیگر به فاصله‌های معین در صفحه مختلط وجود دارند که همچنان معادله را برقرار می‌کنند.

این عبارت در فضای لاپلاس یک تابع غیر جبری است که به دلیل ماهیت نمایی خود، محاسبات و تحلیل‌های کلاسیک مکان هندسی ریشه‌ها را پیچیده می‌کند. تأخیر زمانی بر روی سیستم موجب تغییر موارد زیر می‌شود:

- جابجایی قطب‌ها به سمت راست: تأخیر زمانی باعث کاهش میرایی و حرکت قطب‌ها به سمت راست صفحه مختلط می‌شود که ممکن است باعث ناپایداری شود.
- افزایش تعداد نوسانات و پاسخ‌های انوسانی: به دلیل وجود فاز متغیر با فرکانس، سیستم دچار نوسانات پیچیده‌تری می‌شود.

- ایجاد مسیرهای بی‌نهایت برای قطب‌ها: به دلیل وجود تأخیر، مکان هندسی ریشه‌ها دیگر مسیرهای منظمی ندارد و بی‌نهایت شاخه برای قطب‌ها ایجاد می‌شود.

روش‌های تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها در حضور تأخیر

- استفاده از تقریب Pade Approximation

در این روش، تابع تأخیری e^{-sT} با یک تقریب کسرگونه جایگزین می‌شود تا معادله مشخصه به یک معادله جبری تبدیل شود. برای مثال، تقریب مرتبه اول به صورت زیر است:

$$e^{-sT} \approx \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}}$$

این تقریب اجازه می‌دهد که مکان هندسی ریشه‌ها مانند سیستم‌های بدون تأخیر تحلیل شود. هرچه مرتبه تقریب بالاتر باشد، دقت بهتری خواهد داشت، اما پیچیدگی محاسبات نیز افزایش می‌یابد. ایراد این روش این است که برای تأخیرهای بزرگ یا سیستم‌های با پهنای باند بالا دقیق نیست.

- استفاده از نمودار نایکوئیست

به جای استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها، می‌توان از نمودار نایکوئیست استفاده کرد که تأخیر را به صورت یک چرخش در صفحه مختلط مدل می‌کند (یعنی نمودار مانند یک مارپیچ به صورت بی‌نهایت در نقطه مرکز می‌چرخد). این روش برای بررسی پایداری سیستم‌هایی که دارای تأخیر زیاد هستند، مناسب‌تر است.