

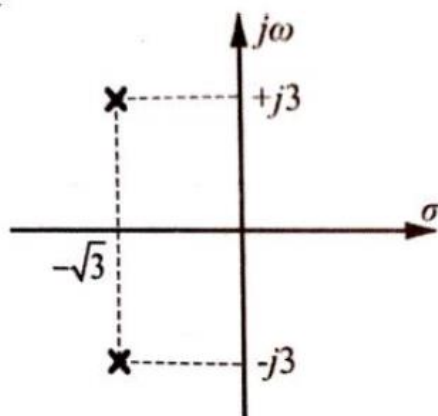


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی تهران

کنترل خطی (پاییز ۱۴۰۳)، حمیدرضا تقی راد

مسائل حل شده ۲

(۱) محل قطبهای حلقه بسته یک سیستم مرتبه دوم در شکل زیر نشان داده شده اند. زمان فراجهبش و زمان استقرار سیستم به ترتیب کدام است؟



حل:

با توجه به محل قطبهای حلقه بسته، $\xi\omega_n = \sqrt{3}$ و $\omega_d = 3$ میباشد و برابر خواهد بود با:

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + \omega_d^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

حال زمان نشست و زمان اوج به صورت زیر به دست میآیند:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.3, t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3}$$

۲) تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی با پسخور واحد به صورت زیر است:

$$M(s) = \frac{4(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4}$$

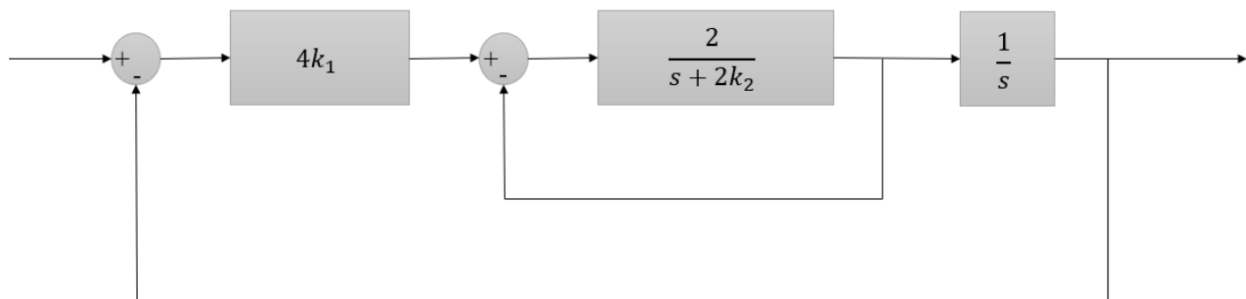
خطای حالت دائمی (ماندگار) این سیستم به ورودی $r(t) = \left(3 - t + \frac{t^2}{4}\right)u(t)$ برابر چند است؟

(حل)

$$E(s) = (1 - M(s))R(s) = \frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4} \times \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4} \times \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3}\right) = \frac{1}{4}$$

۳) ضرایب سیستم زیر را طوری بیابید تا حداکثر میزان فراجش ۲۵٪ و زمان نشست با معیار ۲٪ برابر ۱ ثانیه باشد. پاسخ پله آن را رسم کنید.



(حل)

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را مینویسیم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8k_1}{s^2 + (2k_2 + 2)s + 8k_1}$$

حال با توجه به قیدهای داده شده: ζ و ω_n را به دست میآوریم

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.25 \rightarrow \xi = 0.4$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow 4 = 0.4 \times \omega_n \rightarrow \omega_n = 10$$

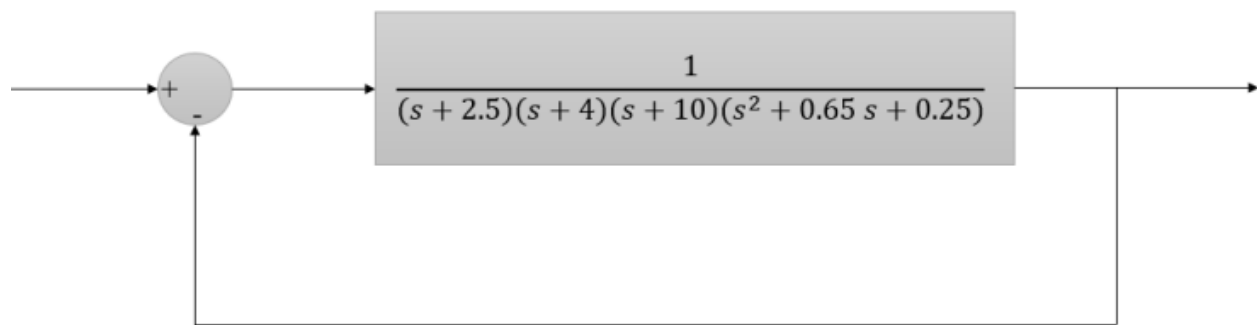
باتوجه به ζ و ω_n می توان ضرایب مجهول را محاسبه کرد.

$$10^2 = 8k_1 \rightarrow k_1 = 12.5$$

$$2 \times 0.4 \times 10 = 2k_2 + 2 \rightarrow k_2 = 3$$

۴) برای محاسبه پاسخ پله سیستم حلقه بسته، میتوان تابع تبدیل $G(s)$ را توسط قطب های غالب آن تقریب زد. (توجه داشته باشید که مقدار حالت ماندگار سیستم اصلی و سیستم تقریب زده شده باید برابر هم باشد) الف) سیستم زیر را با روش ذکر شده به تابع درجه ۲ تبدیل کنید.

ب) سپس گین کنترلی K را به عنوان کنترلر سیستم در نظر بگیرید و آن را طوری تعیین کنید که میزان اورشوت کمتر از ۱۰ درصد و زمان نشست تقریباً برابر ۴ ثانیه شود. آیا با یک K میتوان به هر دو هدف دست یافت؟



حل:

الف) چون ریشه های معادله $s^2 + 0.65s + 0.25$ برابر $-0.325 \pm 0.38i$ است، قطب هایی که در -10 ، -2.5 ، -4 قرار دارند قطب های دور محسوب میشوند. فقط باید در نظر داشت طبق نکته اشاره شده در صورت سوال، مقدار نهایی سیستم حلقه بسته نباید تغییر کند. پس سیستم ساده شده به صورت زیر خواهد شد:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2.5)(s + 4)(s + 10)(s^2 + 0.65s + 0.25)}$$

$$G(s) \approx \frac{1}{s^2 + 0.65s + 0.25}$$

ب) با اضافه کردن گین کنترلی خواهیم داشت:

$$H = \frac{Gk}{1 + Gk} = \frac{0.01k}{s^2 + 0.65s + 0.25 + 0.01k}$$

برای محاسبه ξ خواهیم داشت:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.1 \rightarrow \xi = 0.591$$

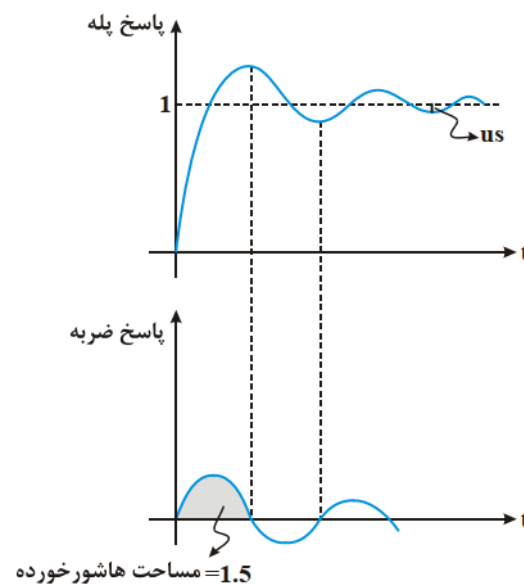
در نهایت K را با استفاده از ω_n محاسبه میکنیم:

$$\omega_n = \frac{0.65}{2\xi} = 0.55$$

$$\omega_n^2 = 0.25 + 0.01K \rightarrow K = 5.224$$

چون ضریب $2\xi\omega_n$ همواره ثابت و برابر ۰.۶۵ است، زمان نشست قابل تغییر نیست. پس با یک گین کنترلی امکان زمان خیز وجود ندارد.

۵) پاسخ پله و ضربه یک سیستم مرتبه دوم استاندارد با $0 < \zeta < 1$ داده شده است. مقدار us را به دست آورید؟



(حل)

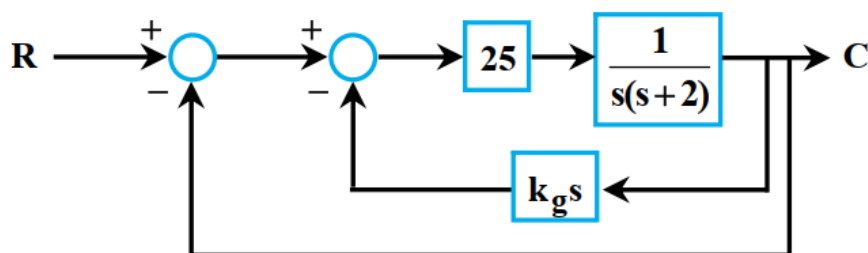
همانطور که میدانیم مساحت ناحیه هاشورخورده برابر است با: $1 + Mp = 1.5 \Rightarrow Mp = 0.5$

در واقع اولین فراجهش پاسخ پله برابر است با $e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ ، که مساوی است با 0.5، مقدار فراجهش دوم و سوم و چهارم به ترتیب برابر است با: $e^{\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ و $e^{\frac{-3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ و $e^{\frac{-4\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$.

پس میتوان نتیجه گرفت مقدار US خواسته شده به صورت مقابل قابل محاسبه است:

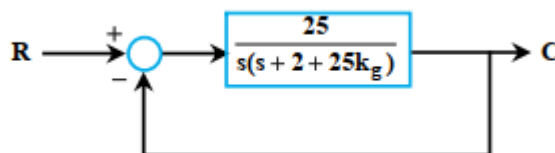
$$US = (Mp)^4 \Rightarrow US = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

۶ در سیستم نشان داده شده در شکل زیر بهره k_g را چنان بیابید که نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته $\xi = 0.7$ باشد.



(حل)

با ساده سازی حلقه داخلی داریم:



از مقایسه با شکل حلقه باز سیستم الگوی مرتبه دوم با فیدبک واحد داریم: $\frac{25}{s(s+2+25k_g)} = \frac{w_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$

لذا: $\omega_n = 5$ و $2\xi\omega_n = 2 + 25K_g$ و بنابراین میتوان نوشت:

$$25K_g = 2(0.7)(5) - 2 \rightarrow k_g = 0.2$$