نمونه سوالات حل شده شمارهٔ یک

۱ مثال اول

تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f_1(t) = e^{-2t}\cos^2(3t) - 3t^2e^{3t}$$

پاسخ

First, we need to get rid of $\cos^2 3t$. Rewrite it as:

$$\cos^2 3t = \frac{1+\cos 6t}{2}$$

Now solve the problem easily:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(e^{-2t}\cos^2 3t - 3t^2e^{3t}\right) &= \mathcal{L}\left(e^{-2t}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 6t}{2}\right) - 3t^2e^{3t}\right)\\ &= \frac{1}{2(s+2)} + \frac{s+2}{2((s+2)^2+36)} - \frac{6}{(s-3)^3}\end{aligned}$$

۲ مثال دوم

لاپلاس معکوس تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$G(s) = \frac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$$

پاسخ

$$G(s) = \frac{2(s+2)(s+5)^2}{(s+1)(s^2+4)^2}$$

$$G(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s-2j} + \frac{C_3}{s+2j} + \frac{C_4}{(s-2j)^2} + \frac{C_5}{(s+2j)^2}$$

$$C_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = 1.28$$

$$C_4 = (s-2j)^2 F(s)|_{s=2j} = -4.15 - j1.95$$
$$C_5 = C_4^* = -4.15 + j1.95$$
$$C_2 = \frac{d}{ds}\left((s-2j)^2 F(s)\right)|_{s=2j} = -0.64 - j2.895$$
$$C_3 = C_2^* = -0.64 + j2.895$$

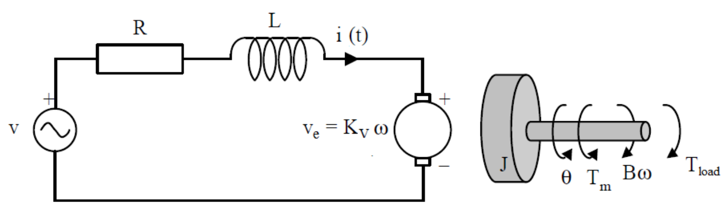
$$f(t) = 1.28e^{-t} + 2|C_2|\cos(2t + \arg(C_2)) + 2|C_4|t\cos(2t + \arg(C_4))$$

$$|C_2| = 2.96489, \quad |C_4| = 4.585$$

$$\arg(C_2) = \tan^{-1}\left(\frac{-2.895}{-0.64}\right) = -1.788$$
$$\arg(C_4) = \tan^{-1}\left(\frac{-1.95}{-4.15}\right) = -2.702$$

۳ مثال سوم

موتور DC که در تصویر زیر داده شده است را مدل‌سازی کنید.



پاسخ

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_{emf} \tag{۱}$$

$$\tau_m(t) = b\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} + T_d \tag{۲}$$

$$\tau_m(t) = K_m i(t) \tag{۳}$$

$$v_{emf} = K_v\omega(t) \tag{۴}$$

پاسخ نهایی

$$\xRightarrow{(\text{۱-۱، ۱-۴})} e = Ri + L\frac{di}{dt} + K_v\omega \tag{۵}$$

$$\xrightarrow{(۱-۱)\text{، }(۱-۲)\text{، }(۱-۳)} K_m i = b\omega + J\frac{d\omega}{dt} + T_d \qquad (۶)$$

۴ مثال چهارم

تابع تبدیل موتور DC را بدست آورید.(از گشتاور اغتشاشی صرفنظر کنید)

پاسخ

از معادلات بدست آمده از سوال قبل داریم:

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} + K_v\omega \xrightarrow{L} E(s) = RI(s) + LsI(s) + K_v\omega(s) \qquad (۷)$$

$$K_m i = b\omega + J\frac{d\omega}{dt} \xrightarrow{L} K_m I(s) = b\omega(s) + Js\omega(s) \qquad (۸)$$

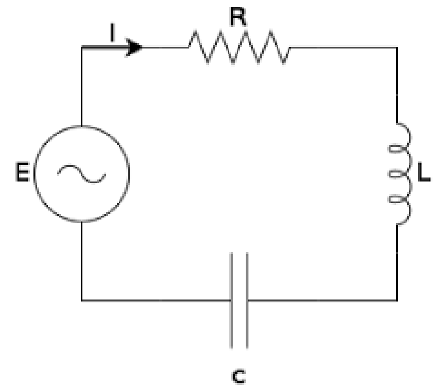
$$\xrightarrow{(۲-۲)} I(s) = (b + Js)\frac{1}{K_m}\omega(s) \qquad (۹)$$

$$\xrightarrow{(۲-۱)\text{، }(۲-۳)} E = \left[(R + Ls)(b + Js)\frac{1}{K_m} + K_v\right]\omega \qquad (۱۰)$$

$$\xrightarrow{(۴-۱)} \frac{\omega}{E} = \frac{K_m}{(R + Ls)(b + Js) + K_v K_m} \qquad (۱۱)$$

۵ مثال پنجم

تابع تبدیل مدار زیر را رسم کنید.



پاسخ

$$v_R = Ri \xrightarrow{L} V_R = RI$$
$$v_L = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{L} V_L = LsI \qquad (۱۲)$$
$$v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \xrightarrow{L} V_C = \frac{1}{Cs}I$$

از معادلات ۱–۳ استفاده می‌کنیم و حلقه را به صورت مستقسم با استفاده از امپدانس‌ها تحلیل می‌نماییم:

$$V = V_R + V_L + V_C = RT + LsI + \frac{1}{Cs}I$$
$$\Rightarrow V = \left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) I \qquad (۱۳)$$
$$\Rightarrow \frac{I}{V} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} = G(s)$$

تابع تبدیل بدست‌آمده را به فرم دیگری مینویسیم. صورت و مخرج کسر را بر ضریب s^2 تقسیم می‌کنیم:

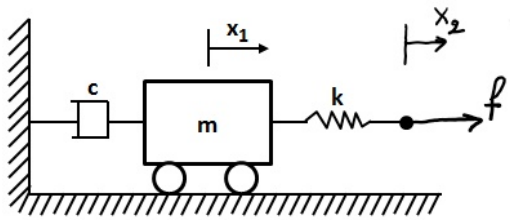
$$G(s) = \frac{Cs\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{RC}{LC}s + \frac{1}{LC}} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (۱۴)$$

با توجه به عبارت (۳–۳) داریم:

$$\omega_n \text{ (natural frequency)} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\tau_n \text{ (time constant)} = \frac{1}{\omega_n}$$
$$\zeta \text{ (damping coefficient)} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

۶ مثال ششم

در سیستم مکانیکی زیر، تابع تبدیل را بیابید. ($G(s) = \frac{X_1}{F}$)



پاسخ

$$
\begin{aligned}
f_k = kx &\xrightarrow{L} F_k = fX \\
f_b = bv = b\dot{x} &\xrightarrow{L} F_b = bsX \\
f_m = ma = m\ddot{x} &\xrightarrow{L} F_m = ms^2X
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

با استفاده از معادلات(۴-۱)، سیستم را تحلیل می‌کنیم:

۱. تحلیل نیروها در محل x_1

$$\sum F = ma \Rightarrow F_k - F_b = ma \Rightarrow F_k - bsX_1 = ms^2X_1 \tag{۱۶}$$

۲. تحلیل نیروها در محل x_2

$$\sum F = ma \Rightarrow F - F_k = 0a \Rightarrow F = F_k \tag{۱۷}$$

حال معادله (۴-۳) را در (۴-۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&F - bsX_1 = ms^2X_1 \\
&\qquad \Rightarrow F = \left(ms^2 + bs\right) X_1 \\
&\qquad \Rightarrow \frac{X_1}{F} = \frac{1}{ms^2 + bs} = G(s)
\end{aligned}
$$

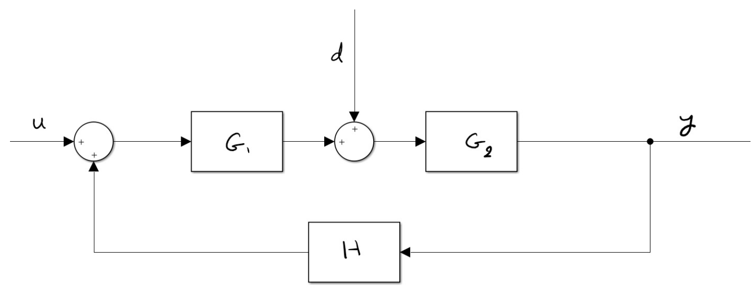
۷ مثال هفتم

تابع تبدیل سیستم زیر را بدست‌آورید.

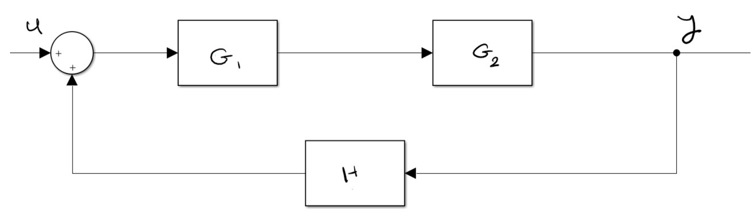
پاسخ

سیستم‌های خاصیت جمع‌پذیری دارند، پس می‌توان خروجی سیستم را به ازای هر ورودی به صورت جداگانه بررسی کرد و در نهایت اثرات هر دو را با هم جمع کرد.

$$Y = Y_u + Y_d$$

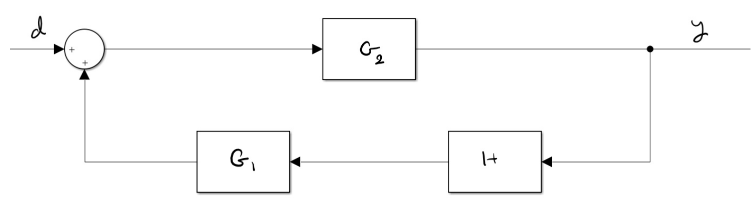


برای بدست آوردن خروجی سیستم به ازای ورودی u (Y_u)، فرض می‌کنیم ورودی d وجود ندارد. در این حالت خروجی سیستم را محاسبه می‌کنیم:



$$Y_u = \frac{G_1G_2}{1 - HG_1G_2}U \tag{۱۸}$$

برای بدست آوردن خروجی سیستم به ازای اغتشاش هم به صورت مرحله قبل عمل می‌کنیم ولی این بار ورودی u را حذف می‌کنیم:



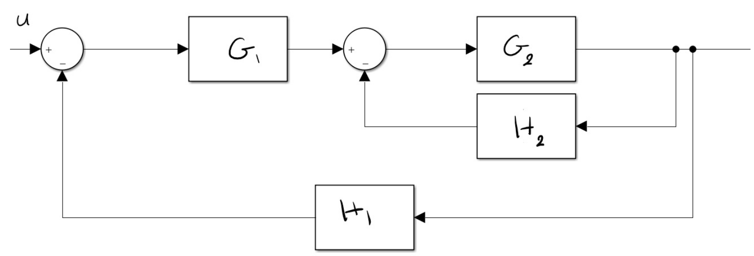
$$Y_d = \frac{G_2}{1 - HG_1G_2}D \tag{۱۹}$$

حال اثر هر دو ورودی را با هم جمع کرده و خروجی نهایی سیستم را بدست می‌آوریم:

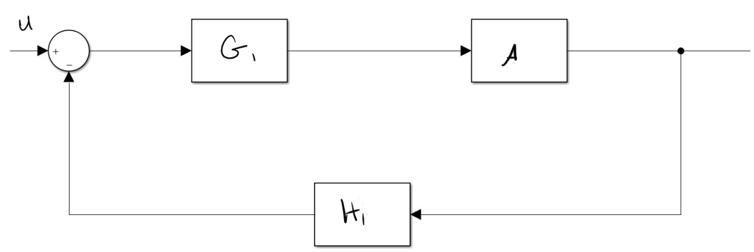
$$\begin{aligned} Y &= Y_u + Y_d \\ &= \frac{G_2}{1 - HG_1G_2}\left(G_1U + D\right) \end{aligned} \tag{۲۰}$$

۸ مثال هشتم

نمودار بلوکی زیر را ساده کنید.

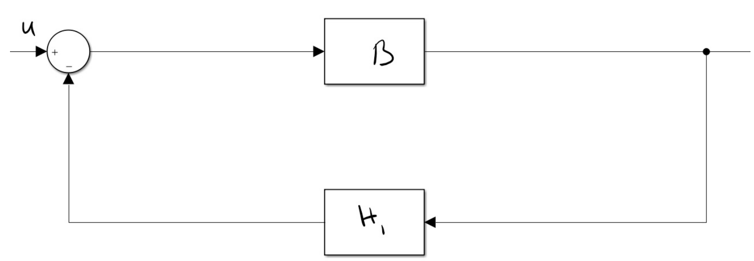


در قدم اول حلقه داخلی سیستم را ساده می‌کنیم:



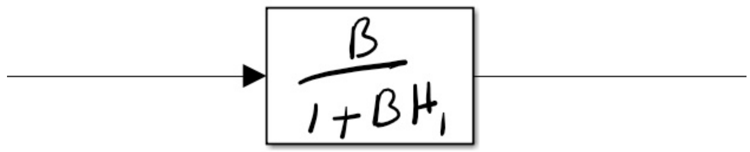
$$A = \frac{G_2}{1 + G_2 H_2} \tag{۲۱}$$

سپس دو بلوک سری را ساده می‌کنیم:



$$B = G_1 A = \frac{G_1 G_2}{1 + H_2 G_2} \tag{۲۲}$$

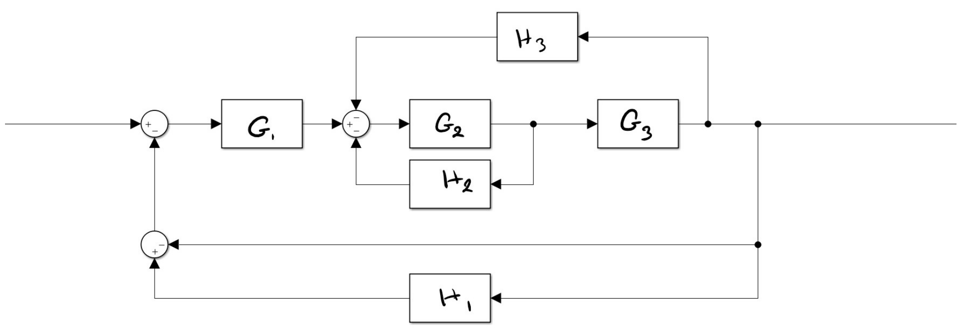
در نهایت سیستم حلقه بسته را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{B}{1+BH_1}=\frac{G_1G_2}{1+H_2G_2+H_1G_1G_2} \tag{۲۳}$$

۹ منال نهم

نمودار بلوکی زیر را ساده کنید.



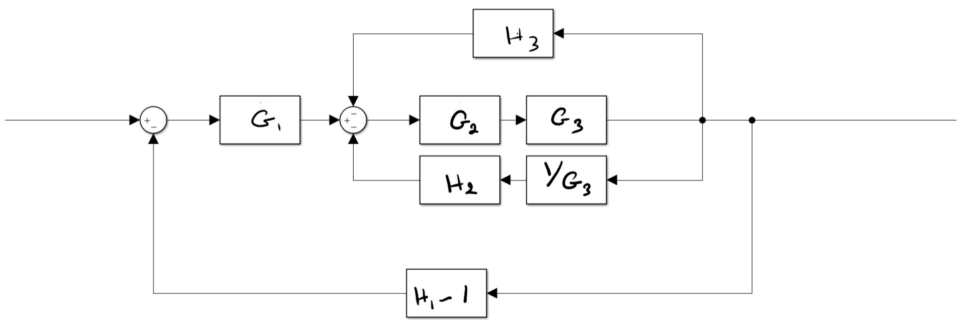
پاسخ

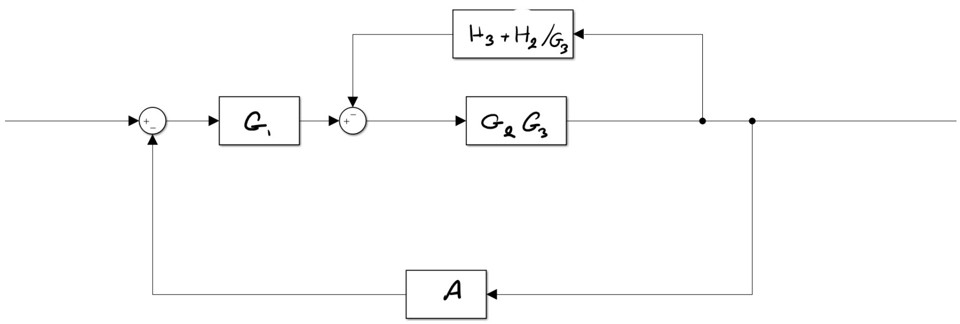
جابجایی نقطه اتصال را برای بلوک G_3 انجام می‌دهیم و دو فیدبک خارجی را با هم جمع می‌کنیم.

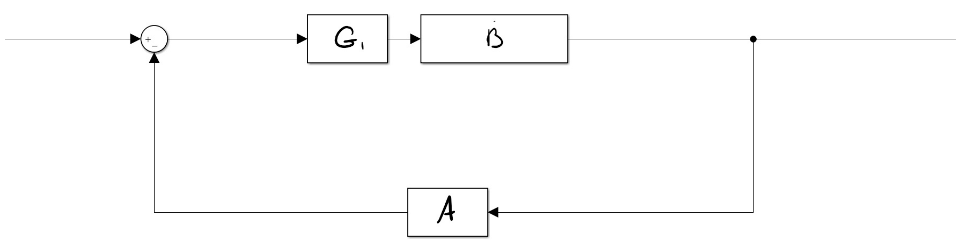
دو فیدبک داخلی که به صورت موازی هستند را با هم جمع می‌کنیم.

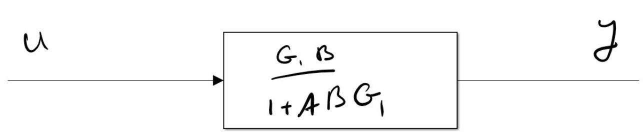
حلقه داخلی را ساده می‌کنیم.

در نهایت دو بلوک موازی را با هم اذغام کرده و سیستم حلقه بسته را ساده می‌کنیم.


H_3
G_1
G_2
G_3
H_2
$1/G_3$
$H_1 - 1$

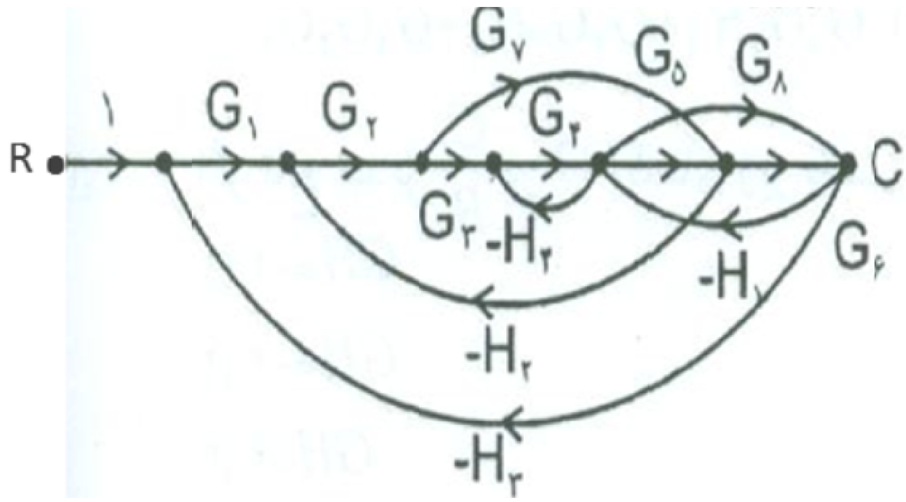

$H_3 + H_2/G_3$
G_1
$G_2 G_3$
A


G_1
B
A


u
$\frac{G_1 B}{1 + A B G_1}$
y

۱۰ مثال دهم

با درنظر گرفتن نمودار جریان سیگنال زیر، بهره $\frac{C}{R}$ را بیابید .



شکل ۱: SFG of a system $f(t)$

Based on Mason's Law we have:

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

where forward paths are:

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6$$

$$P_2 = G_1G_2G_7G_6$$

$$P_3 = G_1G_2G_3G_4G_8$$

and the loops are:

$$L_1 = -G_2G_3G_4G_5H_2$$

$$L_2 = -G_5G_6H_1$$

$$L_3 = -G_8H_1$$

$$L_4 = -G_7H_2G_2$$

$$L_5 = -G_4H_4$$

$$L_6 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3$$

$$L_7 = -G_1G_2G_7G_6H_3$$

$$L_8 = -G_1G_2G_3G_4G_8H_3$$

with the values of

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - L_5$$

$$P_k\Delta_k = P_1 \quad and \quad P_3 \quad and \quad P_2(1 - L_5)$$

and

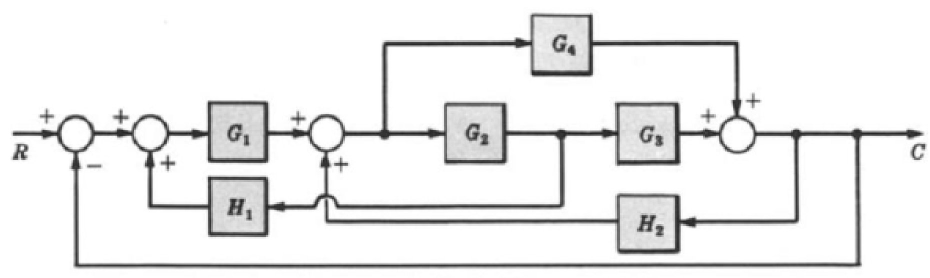
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_5L_7 + L_5L_4 + L_3L_4)$$

Given that

$$|G_i| = |H_i| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{R} = \frac{P_1 + P_3 + P_2(1 - L_5)}{\Delta} = \frac{1}{3}$$

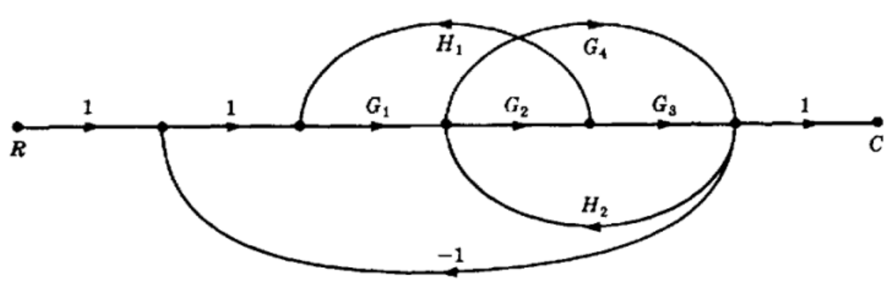
۱۱ مثال یازدهم

نمودار جریان سیگنال نمودار بلوکی زیر را بکشید.



پاسخ

Find nodes and pay attention to the gains:



۱۲ مثال دوازدهم

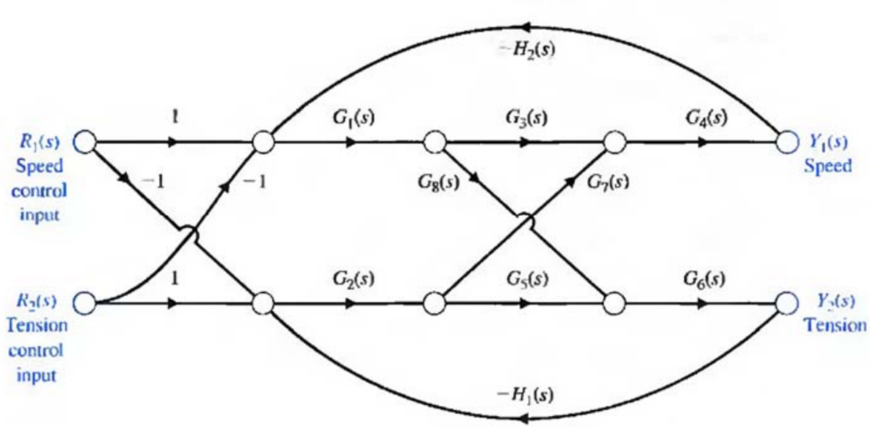
۱۱ سیستم زیر را به گونه‌ای تعیین کنید که Y_2 از R_1 مستقل باشد .

پاسخ

The signal flow graph shows three loops:

$$L_1 = -G_1G_3G_4H_2$$

$$L_2 = -G_2G_5G_6H_1$$



شکل ۲: SFG of a system $f(t)$

$$L_3 = -H_1 G_8 G_6 G_2 G_7 G_4 H_2 G_1$$

The transfer function $\frac{Y_2}{R_1}$ is:

$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1 G_8 G_6 \Delta_1 - G_2 G_5 G_6 \Delta_2}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_2)}$$

Where for path ۱:؟

$$\Delta_1 = 1$$

å

$$\Delta_2 = 1 - L_1$$

Since we want Y_2 to be independent of R_1, we need $\frac{Y_2}{R_1} = 0$. Therefore, we require:

$$G_1 G_8 G_6 - G_2 G_5 G_6 (1 + G_1 G_3 G_4 H_2) = 0$$