Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 09

Temas abordados: Teorema do Valor Médio; Crescimento de funções; Otimização
Seções do livro: 4.2; 4.3; 4.6

1) O Teorema do Valor Médio afirma que, se uma função f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Os passos seguintes fornecem a prova deste importante teorema. (veja Teorema 1 do Texto 2)

(a) Verifique que, se $r(x)$ é a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

(b) Para $g(x) = f(x) - r(x)$, verifique que $g(a) = g(b) = 0$.

(c) Lembrando que g tem máximo e mínimo em $[a, b]$, conclua que $g'(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$.

(d) Verifique que o ponto x_0 obtido no item acima satisfaz a equação (1).

2) Suponha que a função f do exercício acima mede a posição de um móvel em um instante $t > 0$. Qual é a interpretação física da conclusão do Teorema do Valor Médio?

3) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se $f' > 0$ em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, então a função f é crescente em I. O que podemos afirmar se $f' < 0$ em I ? (veja Corolário 1 do Texto 2)

4) Usando o item acima, descreva um método que nos permita classificar um ponto crítico como máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois, a partir do sinal da derivada antes e depois deste ponto crítico. (veja Corolário 2 do Texto 2)

5) Para as funções f abaixo determine: pontos críticos, máximos e mínimos locais, intervalos de crescimento e decrescimento e assíntotas. Note que as derivadas já estão dadas.

(a) $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4(x-2)^2}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{x - 8}{(x-2)^3}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, $\qquad f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$;

(c) $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}(x - 4)$, $\qquad f'(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

6) Para cada uma das funções abaixo, determine os pontos críticos, classifique-os como máximos ou mínimos locais, quando for o caso, e determine os intervalos onde f é crescente e decrescente. (veja Exemplo 1 do Texto 1)

(a) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2(x-1)}$

(d) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

(e) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

(f) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

(g) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

(h) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

(i) $f(x) = x - \ln x$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(k) $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$

(l) $f(x) = x + \mathrm{sen}(x), \quad x \in (0, 2\pi)$

7) Mostre que a função $f(x) = (\ln x)/x$ tem um máximo absoluto em $x = e$. Usando agora o fato de que $f(e) > f(\pi)$ e que a função $x \mapsto e^x$ é crescente, conclua que $\pi^e < e^\pi$. (veja Vídeo 2)

8) Mostre que $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ tem exatamente uma raiz real. (veja Exemplo 2 do Texto 3)

9) Analise os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, definida em $(0, +\infty)$, para concluir que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \qquad \forall\, x > 0.$$

10) Supondo que o lucro, em milhões de reais, obtido na venda de x mil unidades de um produto é dado por

$$L(x) = \frac{3x}{54 + x^3}, \qquad x \geq 0,$$

determine a quantidade de itens que devem ser vendidos de modo a maximizar o lucro. (veja Exemplo 2 do Texto 1)

11) Entre todas as latas cilíndricas de volume 1 litro, raio da base r e altura h, qual a que tem menor área superficial. (veja Vídeo 3)

12) Suponha que ao completar t anos, $0 \leq t \leq 5$, a massa aproximada de um animal seja dada em quilos pela expressão

$$m(t) = -2t^3 + 9t^2 + 400.$$

Sabendo que pretende-se sacrificar o animal no momento em que este possuir a maior massa, determine com qual idade o animal deve ser abatido.

13) Um retângulo deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio 5 metros. Qual é a maior área que o retângulo pode ter e quais as suas dimensões?

14) Supondo que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, use o Teorema do Valor Médio para provar as afirmações seguintes (veja os Corolário 3 e 4 do Texto 2)

(a) se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C$ para todo $x \in I$.

(b) se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + C$ para todo $x \in I$.

15) Dado $b > 0$, considere a função $f(x) = \ln(\frac{x}{b})$, definida para $x > 0$.

(a) Verifique que a derivada de f coincide com a derivada de $g(x) = \ln(x)$, no intervalo $I = (0, +\infty)$.

(b) Usando o item acima e o exercício anterior, conclua que $f(x) = g(x) + C$, para algum $C \in \mathbb{R}$. Em seguida, faça $x = b$ nesta igualdade para calcular o valor da constante C.

(c) Conclua que

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \qquad \forall\, a,\, b > 0.$$

16) Argumentado como no exercício anterior, mostre que (veja o Vídeo 1)

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln(a^r) = r\ln(a),$$

para quaisquer a, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$.

RESPOSTAS

1)

2) O número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ é a velocidade média entre os instantes a e b. Como a derivada de f fornece a velocidade do móvel, o teorema afirma que em algum instante $x_0 \in (a, b)$ a velocidade instantânea $f'(x_0)$ é igual a velocidade média.

3) Se $f' < 0$ em I então f é decrescente em I

4)

5) (a) pontos críticos: $x = 8$ (mínimo local)
crescente em: $(-\infty, 2)$; $(8, +\infty)$
decrescente em: $(2, 8)$
assíntota vertical: $x = 2$
assíntota horizontal: $y = -1/4$

(b) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em: $(-\infty, 0)$; $(2, +\infty)$
decrescente em: $(0, 1)$; $(1, 2)$
Observe que estaria incorreto dizer que f é decrescente em $(0, 2)$ porque $1 \notin dom(f)$
assíntota vertical: $x = 1$

(c) pontos críticos: $x = 0$ (não é extremo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em: $(1, +\infty)$
decrescente em: $(-\infty, 1)$

6) (a) pontos críticos: $x = \sqrt[3]{6}$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, 0); (\sqrt[3]{6}, +\infty)$
decrescente em $(0, \sqrt[3]{6})$

(b) pontos críticos: $x = -1/2$ (mínimo local); $x = 2$ (máximo local)
crescente em $(-1/2, 2)$
decrescente em $(-\infty, -1/2); (2, +\infty)$

(c) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, 0); (2, +\infty)$
decrescente em $(0, 1); (1, 2)$

(d) pontos críticos: $x = \ln 2$ (máximo local)
crescente em $(-\infty, \ln 2)$
decrescente em $(\ln 2, +\infty)$

(e) pontos críticos: $x = -2$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, -2); (2, +\infty)$
decrescente em $(-2, 2)$

(f) pontos críticos: $x = -3$ (máximo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em $(-\infty, -3); (1, +\infty)$
decrescente em $(-3, 1)$

(g) pontos críticos: $x = -2$ (mínimo local); $x = 2$ (máximo local)
crescente em $(-2, 2)$
decrescente em $(-\sqrt{8}, -2); (2, \sqrt{8})$

(h) pontos críticos: $x = -1$ e $x = 1$ (mínimos locais); $x = 0$ (máximo local)
crescente em $(-1, 0); (1, +\infty)$
decrescente em $(-\infty, -1); (0, 1)$

(i) pontos críticos: $x = 1$ (mínimo local)
crescente em $(1, +\infty)$
decrescente em $(0, 1)$

(j) pontos críticos: $x = e$ (mínimo local)
crescente em $(e, +\infty)$
decrescente em $(0, 1); (1, e)$

(k) pontos críticos: $x = 0$ (não é extremo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em $(1, +\infty)$
decrescente em $(-\infty, 1)$

(l) pontos críticos: $x = \pi$ (não é extremo local)
crescente em $(0, 2\pi)$
decrescente em (nunca)

7)

8) Calcule a função em cada ponto crítico, estude os intervalos de crescimento e decrescimento e os limites no infinito

9) Basta encontrar o ponto de mínimo de f no intervalo

10) O lucro é máximo quando são vendidas 3 mil unidades

11) Aquela que tem raio igual a $(2\pi)^{-1/3}$

12) O animal deve ser abatido quando completar 3 anos

13) A maior área é de 25 metros e é dada por um retângulo de lados $5\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}/2$ metros

14) Para o item (b), considere a função $g(x) - f(x)$, definida no intervalo I

15) (a) Basta usar a Regra da Cadeia.

(b) Use o item (b) do exercício anterior para obter a igualdade $f(x) = g(x)+C$. Fazendo $x = b$, concluímos que $C = -\ln(b)$

(c) Basta agora fazer $x = a$

16) Para a primeira igualdade compare a derivada de $g(x) = \ln(bx)$ com a de $\ln(x)$. Para a segunda, use $g(x) = \ln(x^r)$