Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 10

Temas abordados: Concavidade; Esboço de gráficos

Seções do livro: 4.4

1) Para as funções f abaixo determine: pontos críticos, máximos e mínimos locais, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, intervalos onde f é côncava para cima e para baixo, assíntotas verticais. Note que as derivadas já estão dadas.

(a) $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4(x-2)^2}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x-8}{(x-2)^3}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2(11-x)}{(x-2)^4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x-1}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}(x-4)$, $\quad f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad f''(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(x+2)}{\sqrt[3]{x^5}}$

2) Para cada uma das funções abaixo determine: pontos críticos, máximos e mínimos locais, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, intervalos onde f é côncava para cima e para baixo. Determine ainda as (possíveis) assíntotas e, finalmente, faça um esboço do gráfico da função.

(a) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 4$

(b) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

(c) $f(x) = \ln(x)$

(d) $f(x) = e^x$

(e) $f(x) = \tan(x^2)$, $x \in (-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$

(f) $f(x) = \arctan(x)$

(g) $f(x) = \arccos(x)$, $x \in (-1, 1)$

(h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x}$

(i) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$

(j) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

(k) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $\quad x \in (0, 2\pi)$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

3) Repita o que foi feita no exercício acima para as funções seguintes.

(a) $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(d) $f(x) = e^{-x^2/2}$

(e) $f(x) = \ln(1+x^2)$

RESPOSTAS

1) (a) pontos críticos: $x = 8$ (mínimo local)
crescente em: $(-\infty, 2)$; $(8, +\infty)$
decrescente em: $(2, 8)$
concavidade volta para cima em: $(-\infty, 2)$; $(2, 11)$
Observe que estaria incorreto dizer que f é côncava para cima em $(-\infty, 11)$ porque $2 \notin dom(f)$
concavidade volta para baixo em: $(11, +\infty)$
ponto de inflexão: $x = 11$
assíntota vertical: $x = 2$
assíntota horizontal: $y = -1/4$

(b) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local); $x = 2$ (mínimo local)
crescente em: $(-\infty, 0)$; $(2, +\infty)$
decrescente em: $(0, 1)$; $(1, 2)$
Observe que estaria incorreto dizer que f é decrescente em $(0, 2)$ porque $1 \notin dom(f)$ concavidade volta para cima em: $(1, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-\infty, 1)$
assíntota vertical: $x = 1$

(c) pontos críticos: $x = 0$ (não é extremo local); $x = 1$ (mínimo local)
crescente em: $(1, +\infty)$
decrescente em: $(-\infty, 1)$
concavidade volta para cima em: $(-\infty, -2)$; $(0, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-2, 0)$
pontos de inflexão: $x = -2$; $x = 0$

2) (a) pontos críticos: $x = -2$ (mínimo local); $x = 1$ (máximo local)
crescente em $(-2, 1)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -2)$; $(1, +\infty)$
concavidade voltada para cima em: $(-\infty, -1/2)$
concavidade voltada para baixo em: $(-1/2, +\infty)$
ponto de inflexão: $x = -1/2$

(b) pontos críticos: $x = 0$ (mínimo local); $x = 1$ (não é extremo local)
crescente em $(0, +\infty)$
decrescente em $(-\infty, 0)$
concavidade voltada para cima em: $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(1/3, 1)$
pontos de inflexão: $x = 1/3$ e $x = 1$

(c) pontos críticos: não existem
sempre crescente
concavidade sempre voltada para baixo
pontos de inflexão: não existem
assíntota vertical: $x = 0$

(d) pontos críticos: não existem
sempre crescente

concavidade sempre voltada para cima
pontos de inflexão: não existem
assíntota horizontal: $y = 0$

(e) pontos críticos: $x = 0$ (mínimo local)
crescente em : $(0, \sqrt{\pi/2})$
decrescente em: $(-\sqrt{\pi/2}, 0)$
concavidade sempre voltada para cima
pontos de inflexão: não existem assíntotas verticais: $x = -\sqrt{\pi/2}$; $x = +\sqrt{\pi/2}$

(f) sempre crescente
concavidade voltada para cima em: $(-\infty, 0)$
concavidade voltada para baixo em: $(0, +\infty)$
ponto de inflexão: $x = 0$
assíntotas horizontais: $y = -\pi/2$; $y = \pi/2$

(g) sempre decrescente
concavidade voltada para cima em: $(-1, 0)$
concavidade voltada para baixo em: $(0, 1)$
ponto de inflexão: $x = 0$

(h) pontos críticos: $x = -1$ (mínimo local)
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-1, 0$; $(0, +\infty)$
decrescente em: $(-\infty, -1)$
concavidade volta para cima em: $(-\infty, 0) \cup (2^{1/3}, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(0, 2^{1/3})$
pontos de inflexão: $x = 2^{1/3}$
assíntotas verticais: $x = 0$

(i) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local)
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -4)$; $(-4, 0)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes:: $(0, 4)$; $(4, +\infty)$
concavidade volta para cima em: $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-4, 4)$
pontos de inflexão: nenhum
Observe que estaria incorreto dizer que $x = -4$ ou $x = 4$ são pontos de inflecão porque, ainda que a concavidade troque, a função não é contínua nestes pontos
assíntotas verticais: $x = -4$; $x = 4$
assíntotas horizontais: $y = 2$

(j) pontos críticos: $x = \ln 2$ (máximo local)
crescente em: $(-\infty, \ln 2)$
decrescente em: $(\ln 2, +\infty)$
concavidade volta para cima em: $(\ln 4, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-\infty, \ln 4)$
pontos de inflexão: $x = 2\ln 2 = \ln 4$
assíntotas verticais: não existem
assíntotas horizontais: $y = 0$

(k) pontos críticos: $x = \pi$ (não é extremo local)

crescente em: $(0, 2\pi)$
decrescente em: nunca
concavidade volta para cima em: $(\pi, 2\pi)$
concavidade volta para baixo em: $(0, \pi)$
pontos de inflexão: $x = \pi$
assíntotas verticais: não existem
assíntotas horizontais: não existem

(l) pontos críticos: $x = -\sqrt{3}$ (mínimo local); $x = \sqrt{3}$ (máximo local)
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\sqrt{3}, 0)$; $(0, \sqrt{3})$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes:: $(-\infty, -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}, +\infty)$
concavidade volta para cima em: $(-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$
concavidade volta para baixo em: $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$
pontos de inflexão: $x = -\sqrt{6}$; $x = \sqrt{6}$
assíntotas verticais: $x = 0$
assíntotas horizontais: $y = 0$

3) (a) pontos críticos: $x = -10$ (máximo local); $x = 10$ (mínimo local)
crescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -10)$; $(10, +\infty)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-10, 0)$; $(0, 10)$
concavidade voltada para cima em: $(0, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, 0)$
pontos de inflexão: não existem
assíntotas verticais: $x = 0$

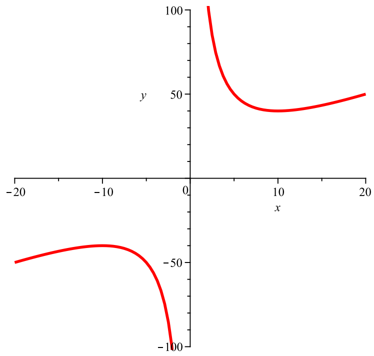
(b) pontos críticos: $x = -1$ (mínimo local); $x = 1$ (máximo local)
crescente em: $(-1, 1)$
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$
concavidade voltada para cima em: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
pontos de inflexão: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$
assíntotas verticais: não existem
assíntotas horizontais: $y = 1$

(c) pontos críticos: não existem
decrescente em cada um dos intervalos seguintes: $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$
concavidade voltada para cima em: $(1, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, 1)$
pontos de inflexão: não existem
assíntotas verticais: $x = 1$
assíntotas horizontais: $y = 1$

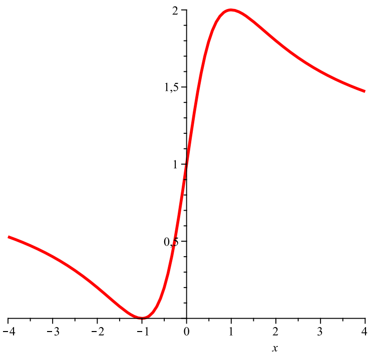
(d) pontos críticos: $x = 0$ (máximo local)
crescente em: $(-\infty, 0)$
decrescente em: $(0, +\infty)$
concavidade voltada para cima em: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
concavidade voltada para baixo em: $(-1, 1)$
ponto de inflexão: $x = -1$ e $x = 1$
assíntotas verticais: não existem
assíntotas horizontais: $y = 0$

(e) pontos críticos: $x = 0$ (mínimo local)
crescente em: $(0, +\infty)$
decrescente em: $(-\infty, 0)$
concavidade voltada para cima em: $(-1, 1)$
concavidade voltada para baixo em: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
ponto de inflexão: $x = -1$ e $x = 1$

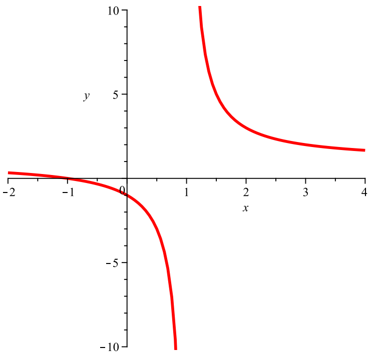
Apresentamos abaixo o gráfico de cada uma das funções do exercício.



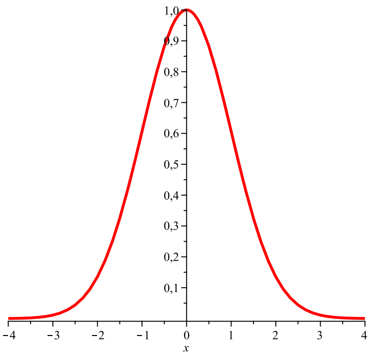
(a) $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$



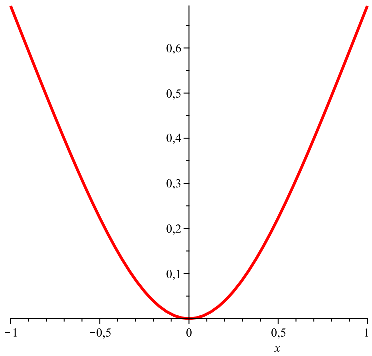
(b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$



(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$



(d) $f(x) = e^{-x^2/2}$



(e) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Figura 1: Gráficos do exercício 4