Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 08

Temas abordados: Taxas relacionadas; Extremos de funções

Seções do livro: 3.10; 4.1

1) Um funil cônico têm um diâmetro de 30 centímetros na parte superior e altura de 40 centímetros. Se o funil for alimentado à taxa de 1,5 l/seg e tem uma vazão de 800 cm^3/seg, determine quão rapidamente está subindo o nível de água quando esse nível for de 25 centímetros.

2) Um ponto move-se sobre o gráfico de $y = 1/(x^2+1)$, de tal modo que sua abcissa x varia a uma velocidade de 5 m/s. Qual a velocidade de y no instante em que x é igual a 10 metros ?

3) Um carro, vindo do norte, aproxima-se de um cruzamento em ângulo reto a uma velocidade de 60 km/h. Ao mesmo tempo, um outro carro, que se situa à leste do cruzamento, afasta-se a uma velocidade de 50 km/h. Determine a taxa de variação da distância entre os dois carros no instante em que o primeiro está a 20 km do cruzamento e o segundo está a 15 km do cruzamento. Qual a interpretação física do sinal do resultado encontrado? (veja Vídeo 1)

4) Um objeto circular aumenta de tamanho de alguma forma desconhecida. Entretanto, é sabido que quando o raio é igual a 6 metros, a taxa de variação do raio é igual a 4 m/min. Encontre a taxa de variação da área quando o raio é igual a 6 metros.

5) Um dos catetos de um triângulo retângulo diminui à uma taxa de 2,5 cm/min, enquanto outro cresce 5 cm/min. Em certo instante, o comprimento do primeiro lado é 20 centímetros e o do segundo é 15 centímetros. Passados 2 minutos, a que taxa está variando a área? Ela está aumentando ou diminuindo?

6) Uma escada de 8 metros está encostada numa parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/seg, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 metros da parede? (veja Vídeo 2)

7) Explique por que o ponto $x = 0$ é um ponto de mínimo da função $f(x) = |x|$. O que acontece com a derivada neste ponto?

8) Um ponto $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ é chamado *máximo local de f* se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Naturalmente, todo ponto de máximo de f é um ponto de máximo local de f.

Supondo que $x = x_0$ é um ponto de máximo local de f onde a derivada $f'(x_0)$ existe, resolva os itens abaixo.

(a) Usando a desigualdade acima, verifique que a derivada lateral à direita satisfaz

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

(b) Repetindo o argumento, verifique que a derivada lateral à esquerda satisfaz

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

(c) Lembrando que as derivadas laterais coincidem, conclua que $f'(x_0) = 0$.

9) Proceda de maneira análoga ao exercício acima para definir o conceito de *mínimo local de* f. O que se pode dizer sobre a derivada de f em um ponto de mínimo local?

10) O que significa dizer que x_0 é um ponto crítico de f?

11) Toda função contínua definida em $[a, b]$ tem ponto de máximo e de mínimo. Use os 3 exercícios anteiores para descrever uma estratégia para encontrar os pontos de máximo e mínimo desta função.

12) Em cada um dos itens abaixo, é dada uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Depois de encontrar os pontos críticos da função no intervalo (a, b), determine os pontos de máximo e mínimo (global) de cada uma delas. (veja Vídeo 4)

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in [-1, 4]$ (b) $g(x) = 3x^5 - 5x^3 + 12$, $x \in [0, 2]$

(c) $f(y) = 1 - |y - 1|$, $y \in [0, 2]$ (d) $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1, 8]$

(e) $g(y) = \sqrt{4 - y^2}$, $y \in [-2, 1]$ (f) $s(t) = te^{-t}$, $t \in [0, 2]$

(g) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in [0, 3]$ (h) $v(t) = e^{-t^2}$, $t \in [-4, 3]$

13) Prove que entre todos os retângulos com um dado perímetro P, o quadrado é o que possui maior área.

14) Um retângulo deve ser inscrito em uma semicircunferência de raio $a > 0$. Qual é a maior área que o retângulo pode ter e quais são as suas dimensões? (veja Vídeo 5)

15) Seja $y_m(x) = mx + b$, com $m \neq 0$, a equação de uma reta que passa pelo ponto $(2, 3)$.

(a) Verifique que $y_m(x) = mx + (3 - 2m)$.

(b) Calcule as coordenadas dos pontos em que a reta y_m intercepta os eixos $\mathcal{O}y$ e $\mathcal{O}x$, respectivamente.

(c) Se $A(m)$ é a área do triângulo retângulo situado no 1o quadrante, com cada um dos seus catetos apoiados nos eixos coordenados e cuja hipotenusa contém o ponto $(2, 3)$, mostre que

$$A(m) = -\frac{(2m - 3)^2}{2m}, \qquad m < 0.$$

(d) Explique porque somente a teoria desenvolvida até agora não nos permite concluir que A tem ponto de mínimo.

(e) Verifique que a função $A(m)$ tende para infinito quando $m \to -\infty$ ou $m \to 0^-$.

(f) O item acima mostra que existem $a < -1 < b < 0$ tais que

$$A(m) > A(-1), \qquad \forall\, m \in (-\infty, a) \cup (b, 0).$$

Conclua que, apesar do domínio da função $A(m)$ se aberto e ilimitado, ela possui um ponto de mínimo.

RESPOSTAS

1) $1792/(225\pi)$ cm/s

2) $-100/101^2$ m/s

3) A taxa de variação é -18 km/h, o que significa que os carros estão se aproximando um do outro

4) 48π m^2/min

5) Aumentando à uma taxa de $6,25$ cm^2/min

6) $6/\sqrt{55}$ m/s

7) Como $f(x) = |x| \geq 0 = |0| = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o ponto $x = 0$ é um ponto de mínimo de f. Neste ponto, a derivada não existe.

8) (a) Note que, como $x \to x_0^+$, o denominador $(x - x_0)$ é sempre positivo.
(b)
(c) Lembre que em um ponto onde f é derivável as derivadas laterais coincidem.

9) O ponto $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ é chamado *mínimo local de* f se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Se este é o caso e $f'(x_0)$ existe, o mesmo argumento do exercício anterior mostra que $f'(x_0) = 0$.

10) Um ponto x_0 pertencente ao interior do domínio da função f é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

11) Os passos são: determinar os pontos críticos; calcular a função nos pontos críticos e nos extremos do domínio; comparar os valores encontrados

12) PC=Pontos críticos; PMin=Pontos de mínimo; PMax=Pontos de Máximo.

(a) PC: $\{0, 2\}$ PMin: $\{-1, 2\}$ PMax: $\{4\}$
(b) PC: $\{1\}$ PMin: $\{1\}$ PMax: $\{2\}$
(c) PC: $\{1\}$ PMin: $\{0, 2\}$ PMax: $\{1\}$
(d) PC: $\{0\}$ PMin: $\{-1\}$ PMax: $\{8\}$
(e) PC: $\{0\}$ PMin: $\{-2\}$ PMax: $\{0\}$
(f) PC: $\{1\}$ PMin: $\{0\}$ PMax: $\{1\}$
(g) PC: não existem PMin: $\{0\}$ PMax: $\{3\}$
(h) PC: $\{0\}$ PMin: $\{-2\}$ PMax: $\{2\}$
(i) PC: $\{0\}$ PMin: $\{-4\}$ PMax: $\{0\}$

13) Denote por x e y dois lados não paralelos do retângulo e observe que o seu perímetro é $P = 2x + 2y$

14) A área máxima vale a^2 e é atingida por um retângulo cuja base mede $a\sqrt{2}$ e altura mede $a/\sqrt{2}$

15) (a) basta notar que $y_m(2) = 3$
(b) $(0, 3 - 2m)$ e $((2m - 3)/m, 0)$
(c)
(d) o domínio não é um intervalo fechado
(e)
(f) compare o mínimo de A no intervalo $[a, b]$ com os valores da função fora deste intervalo fechado