**به نام خدا**

**تمرین کامپیوتری (متلب 2) درس سیستم های مخابراتی**

**دکتر بهروزی**

**مهرسا پوریا**

**95101247**

**پاییز 1397**

**سوال اول – پهنای باند برای مدولاسیون FM و قانون کارسون (Carson's rule)**

در نظر می گیریم :

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)$$

$$x(t) = A_m cos(2\pi f_m t)$$

$$\Delta f = A_m f_\Delta \qquad\qquad \beta = \frac{\Delta f}{fm}$$

$$f_c = 100kHz \qquad\qquad f_m = 1kHz$$

حال می خواهیم تقریب کارسون را برای پهنای بند ،با شبیه سازی و ضرایب بسل مقایسه کنیم.

1-می خواهیم در این قسمت تابعی (BesselBW) بنویسیم که با گرفتن $\beta$ و $f_m$ پهنای باند سیگنال مدوله شده را تا جایی که ضرایب بسل آن کمتر از 0.01 شود بدهد.

سیگنال مدوله شده را بازنویسی می کنیم :

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \frac{1}{2\pi_{fm}} A_m sin(2\pi f_m t))$$

$$x_c(t) = \cos\left(2\pi f_c t + {}_\beta sin(2\pi f_m t)\right) = Re\{e^{j2\pi f_c t} e^{\beta sin(2\pi f_m t)}\}$$

حال می دانیم $e^{\beta sin(2\pi f_m t)}$ با دوره ی تناوب $\frac{1}{fm}$ است ، بنابراین سری فوریه متناظر دارد که ضرایب آن تابع بسل نوع اول هستند ؛ بنابر این :

$$e^{\beta sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, e^{jn2\pi f_m t}$$

بنابراین سیگنال مدوله شده را می توان به صورت زیر نوشت :

$$x_c(t) = Re\left\{e^{j2\pi f_c t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, e^{jn2\pi f_m t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + nf_m))$$

بنابراین تبدیل فوریه آن به صورت زیر می باشد :

$$X_c(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, [\delta\left(\mathrm{f} - (f_c + nf_m)\right) + \delta\left(\mathrm{f} + (f_c + nf_m)\right)]$$

بنابراین برای به دست آوردن پهنای باند معادل به صورت گفته شده در صورت سوال باید n مناسب را به گونه ای بیابیم که $J_n(\beta)$ از آن به بعد کمتر از 0.01 باشد و سپس چون در مدولاسیون ها فرض می کنیم

فرکانس حامل از محتوای فرکانسی حامل بیشتر است و فرض تقارن طیف نسبت به فرکانس حامل را هم داریم پهنای باند معادل برابر $2nfm$ خواهد بود.

n مناسب ؛ n ای است که همه ی ضرایب بسل با n بزرگتر از آن کمتر از 0.01 شوند. برای منطق کد بررسی کردن یک نقطه برای کوچکتر شدن از 0.01 کافی نیست چون ضرایب بسل نوسانی هستند و ممکن است در جایی از 0.01 کمتر و سپس دوباره از آن بیشتر شوند بنابراین n مناسب ، را به گونه ای میگیریم که به ازای تعداد n های کافی بزگتر از آن همه ی ضرایب بسل متناظر کمتر از 0.01 شوند. (این مقدار کافی در کد 1000 در نظر گرفته شده است یعنی nchosen برای محاسبه ی پهنای باند جایی است که 1000 ضریب بسل بعد از آن کمتر از 0.01 باشند.)

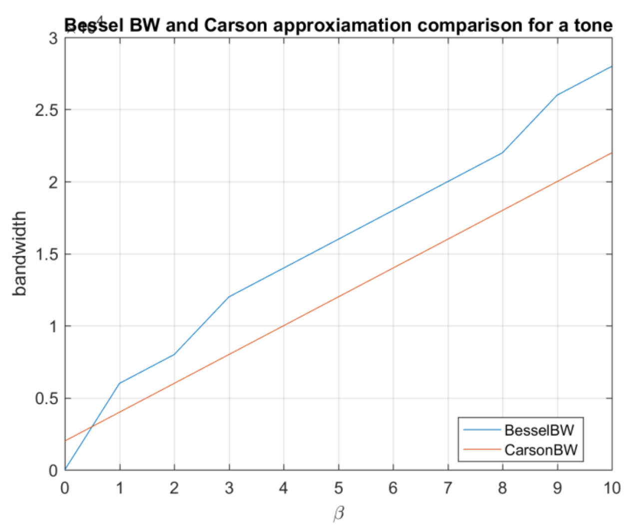
تابع با منطق و اسم گفته شده نوشته شده و در فایل تمرین پیوست شده است.

2- نمودار پهنای باند بر حسب $\beta$ را برای هر دو حالتی که پهنای باند از قانون کارسون به دست می آید و از تابعی که در سوال یک نوشته ایم به دست می آوریم رسم می کنیم.

تقریب کارسون :

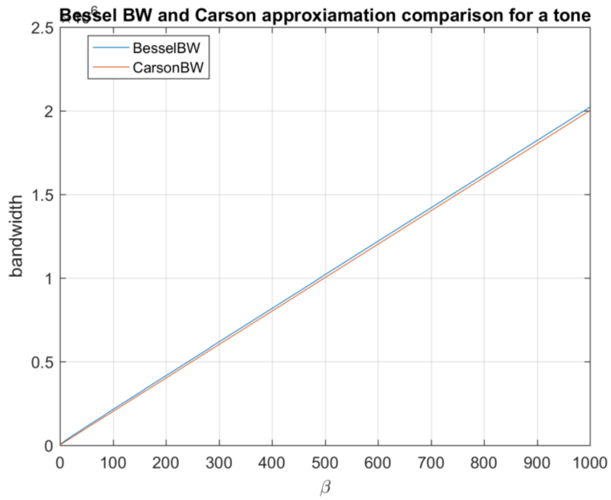
$$BW = 2(\beta + 1)f_m$$

نتیجه به صورت زیر است :




ملاحضه می کنیم تقریب کارسون کاملا بدون خطا نیست و دارای خطایی است که با افزایش بتا بیشتر می شود و پهنای باند کارسون از پهنای باند با توجه به ضرایب بسل کمتر است اما به صورت کلی می توان گفت تقریب خوبی است و با اختلاف اندکی پهنای باند بسل را دنبال می کند.

برای بازه های بزرگتر بتا نیز نمودار خواسته شده به صورت زیر است :

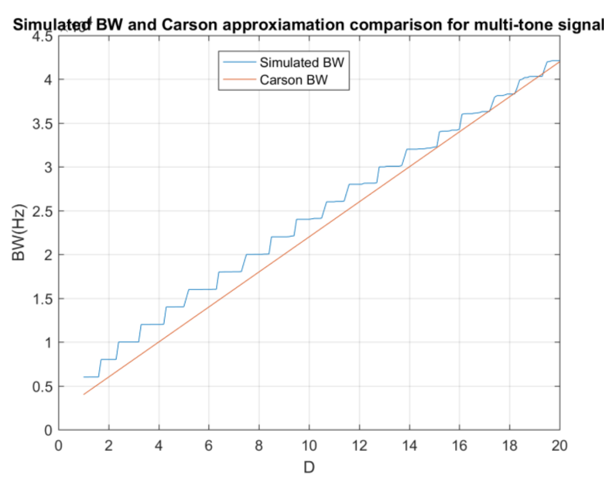



3 – حال در این قسمت می خواهیم تقریب کارسون برای پهنای باند را برای حالت غیر تک تُن بررسی کنیم. بدین منظور سیگنال بخش قبل را با نویز یکنواخت جمع میکنیم. سپس تا فرکانس قطع یک کیلوهرتز سیگنال حاصل را فیلتر می کنیم و دامنه ی آن را با تقسیم بر ماکسیمم نرمالایز می کنیم. حال با توجه به اینکه پهنای باند (W) 1 کیلوهرتز است و ماکسیمم سیگنال یک است مقدار $f\Delta$ بر حسب D به دست می آید. ($f\Delta = 1khzD$) . حال سیگنال مدوله شده را به صورت زیر به دست می آوریم ، برای انتگرال از تابع cumtrapz استفاده می کنیم. (فرکانس حامل 100khz و نرخ نمونه برداری را 2Mhz می گیریم طول سیگنال را نیز 0.2 ثانیه در نظر می گیریم.)

$$x_C(t) = \cos(2\pi f_C t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)$$

حال پهنای باند را با توجه به ناحیه ای که اندازه تبدیل فوریه از 0.01 ماکسیمم تبدیل فوریه ی سیگنال اولیه (0.5) یعنی 0.005 بیشتر است محاسبه می کنیم. (برای اینکار فرکانس متناظر جایی که برای اولین بار مقدار تبدیل فوریه از مقدار گفته شده بیشتر می شود را فرکانس پایینی و جایی که از آنجا به بعد از آن مقدار کمتر می شود را فرکانس بالایی می گیریم و پهنای باند را از تفاضل این دو به دست می آوریم.)

نتیجه به صورت زیر است : مشاهده می کنیم تقریب کارسون نزدیک به پهنای باند شبیه سازی شده است.

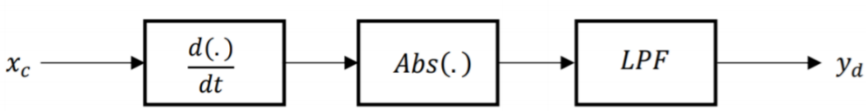


## سوال دوم – آشکارساز فرکانس

در نظر داریم که :

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)$$

1- سیستم زیر یک آشکار ساز فرکانس است که آن را شرح می دهیم.




خروجی مشتق گیر :

$$y1(t) = -(2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t)) sin(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)$$

خروجی قدر مطلق گیر : (پوش با فرض هایی روی $f_\Delta$ و نرمالایز بودن پیغام همواره مثبت است.)

$$y2(t) = |2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t)||sin(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)| = (2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t))|sin(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)|$$

قدرمطلق سینوس یک متوسط غیر صفر $\frac{2}{\pi}$ و مولفه های فرکانس بالاتر دارد ، که ترم متوسط غیر صفر آن برای استخراج پیغام مفید است (در حول فرکانس صفر طیف پیغام ظاهر میشود.)، فرکانس قطع فیلتر باید کمی بیشتر از پهنای باند سیگنال پیغام x(t) باشد. در این صورت : ( g بهره ی فیلتر است.)

$$yd(t) = \left(2\pi f_c + 2\pi f_\Delta x(t)\right) * g * \frac{2}{\pi}$$

مقدار بهره ی فیلتر برای آنکه در خروجی سیگنال پیغام ظاهر شود باید $\frac{\pi}{2\times 2\pi f_\Delta}$ باشد.

$$g = \frac{1}{4f_\Delta}$$

بنابراین در خروجی سیگنال پیغام ظاهر می شود البته با یک تفاوت dc که می توان با کم کردن میانگین حوزه ی زمان آن مولفه ی اختلاف dc را حذف کرد. (dc block گفته شده در درس) و بعد دامنه را نرمالایز می کنیم.

2- در این قسمت با توجه به β داده شده $f_\Delta$ متناظر را تعیین می کنیم.

$$x(t) = A_m cos(2\pi f_m t)$$

فرض می کنیم سیگنال پیغام نرمال شده و $A_m$ را برابر 1 فرض می کنیم.

$$f_\Delta = \frac{f_m \beta}{A_m} = \frac{10 f_m}{1} = 10 f_m$$

و سپس با توجه به آن سیگنال مدوله شده FM را می سازیم. (نرخ نمونه برداری را به اندازه بزرگ و برابر 1.2MHz (با توجه به اینکه ماکسیمم فرکانس سیگنال مورد بررسی 9 کیلوهرتز و بتا برابر 10 است طبق قاعده کارسون سیگنال پیام حداکثر 99 کیلو هرتز پهنای باند و فرکانس حامل 100 کیلوهرتز ماکسیمم محتوای فرکانسی در حدود 200 کیلوهرتز می شود که بنابر نایکویست محدودیت نرخ نمونه برداری 400 کیلو هرتز را ایجاد می کند و ما در اینجا نرخ نمونه برداری را برابر 500khz در نظر می گیریم. طول زمانی سیگنال را برابر 1 ثانیه در نظر می گیریم.)

از تابع cumtrapz برای انتگرال گیری از سیگنال پیغام استفاده می کنیم.

$f_c$=100kHz

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt) = \cos(2\pi f_c t + 2\pi 10 f_m \int x(t)dt) = \cos(2\pi f_c t + 10\sin(2\pi\, f_m t))$$

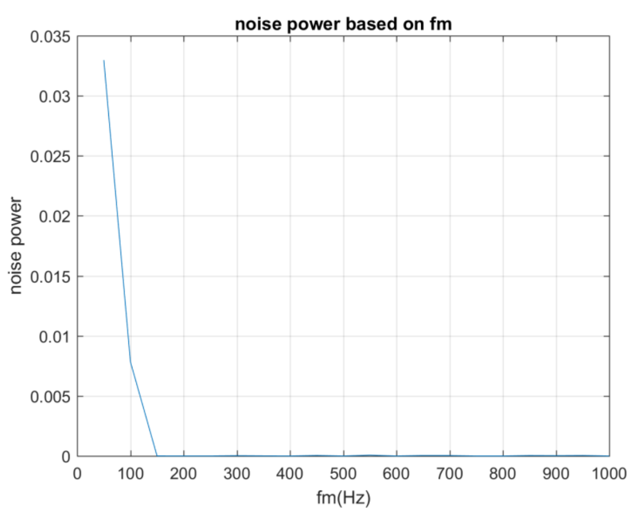
سپس به وسیله ی آشکار ساز قسمت قبل سیگنال  مدوله شده را آشکار می کنیم.

یعنی ابتدا از آن مشتق می گیریم سپس قدر مطلق و بعد از فیلتر پایین گذر با مشخصات گفته شده در بخش قبل عبور می دهیم و در خروجی مقدار dc آن را حذف می کنیم.

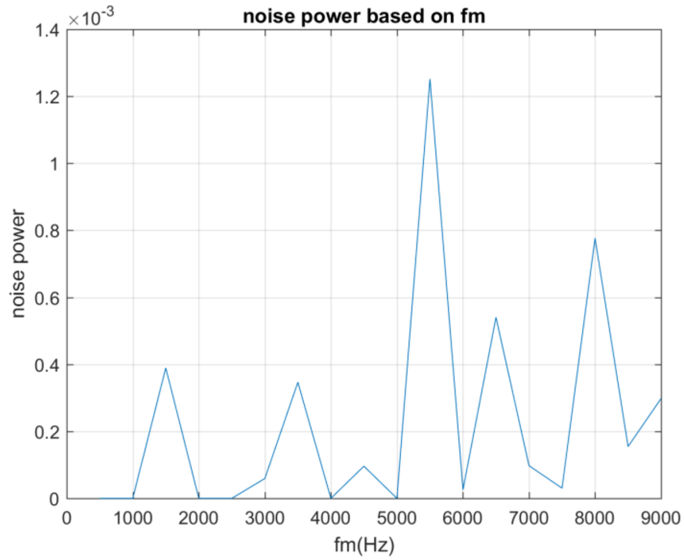
برای مشتق گرفتن از تقریب زیر استفاده می کنیم : ($T_s$ برابر عکس نرخ نمونه برداری است.)

$$\frac{dx}{dt}(t = nT_s) \approx \frac{x\big((n+1)T_s\big) - x\big((n-1)T_s\big)}{2T_s}$$

توان نویز یعنی اختلاف سیگنال اصلی و آشکار شده را نیز با توجه به قضیه پارسوال از جمع توان دو های fft نرمال شده (تقسیم بر طول سیگنال) سیگنال تفاضل به دست می آوریم. نتیجه به صورت زیر است : ( اگر از 9 کیلوهرتز بیشتر بررسی کنیم پهنای باند سیگنال پیغام از فرکانس حامل بیشتر می شود و مشکل ایجاد می کند.)

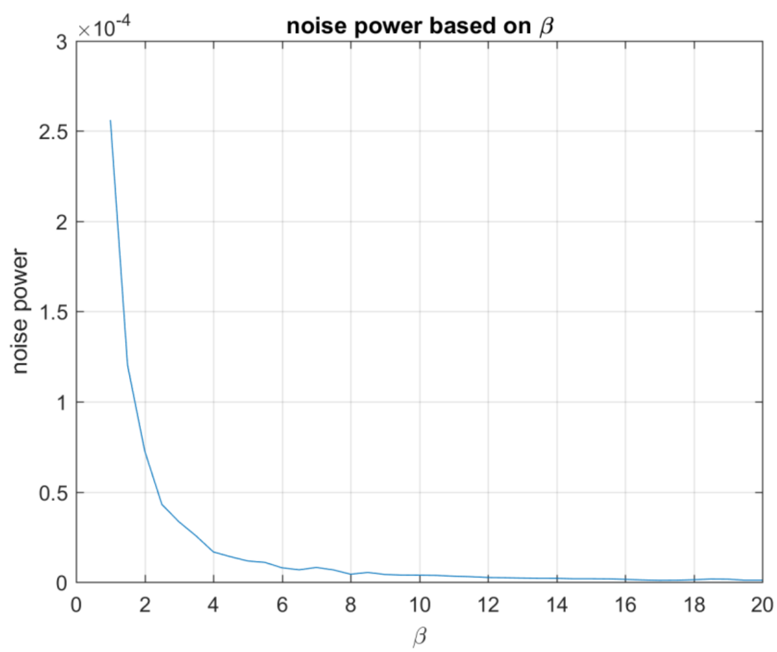


برای مقادیر بزرگتر fm :




ملاحضه می کنیم توان نویز (اختلاف آشکار سازی و پیغام اصلی) بسیار کم است و به فرکانس پیغام نیز وابستگی چندانی ندارد.

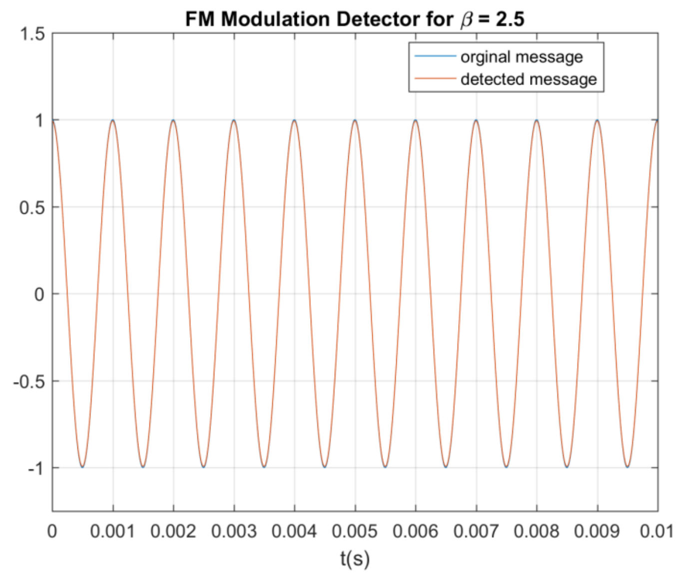
3 – حال در قسمت قبل فرکانس محتوا را برابر یک کیلو هرتز می گیریم و اینبار توان نویز را بر حسب بتا رسم می کنیم. نتیجه به صورت زیر است :




ملاحضه می کنیم توان نویز بر خلاف fm به بتا وابسته است و با افزایش بتا کاهش می یابد و بعد تقریبا ثابت می شود. اینبار هم مقدار آن بسیار کم است. این امر با شهود سازگار است چون فرکانس پیغام

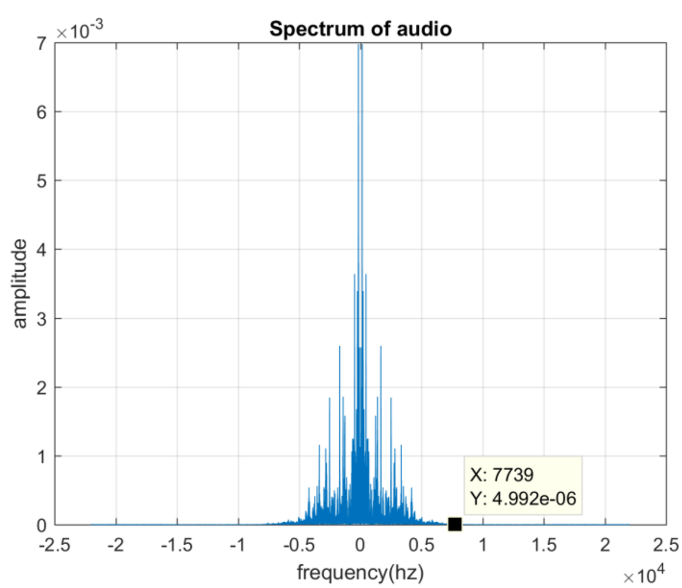
ویژگی ذاتی آن است اما بتا بسته به مدولاسیون است و با هزینه بیشتر و افزایش آن می توان کیفیت آشکار سازی را بهبود داد.

سیگنال اصلی و سیگنال آشکار شده برای مدولاسیون FM با بتای برابر ۲٫۵ به صورت زیر است :




**سوال سوم - اثر نویز بر روی مدولاسیون FM**

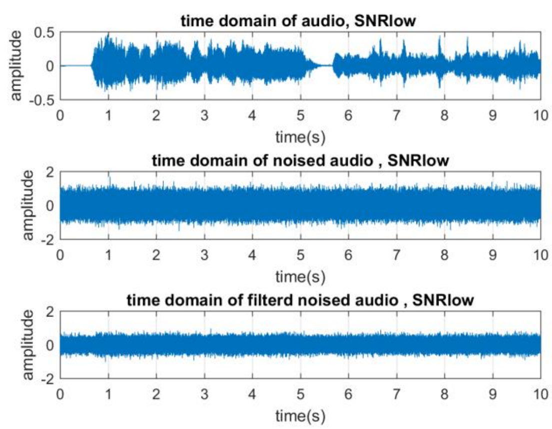
1 – با استفاده از تابع audioread سیگنال audio و نرخ نمونه برداری آن را می خوانیم. ( نرخ نمونه برداری آن 44100 است.) حال طیف آن را رسم می کنیم. مطابق زیر است :

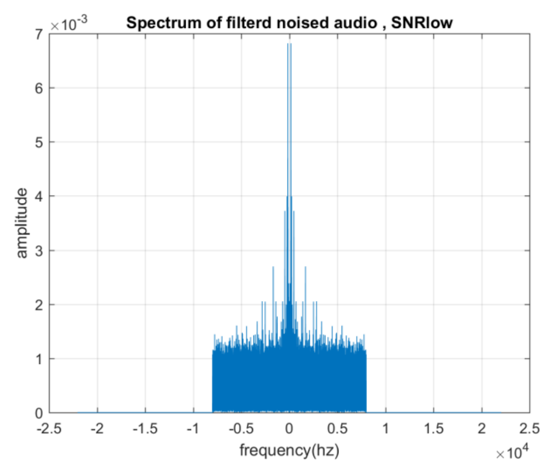


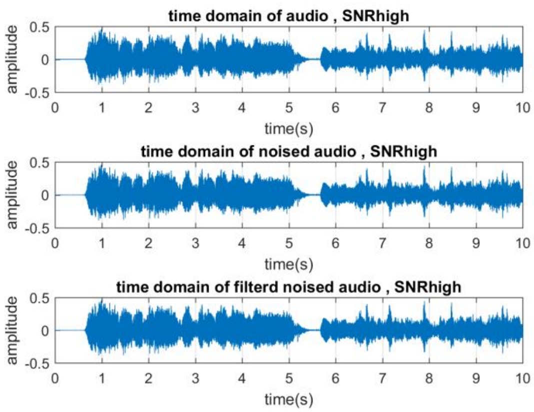

پهنای باند حدودی سیگنال برابر 8kHz است.

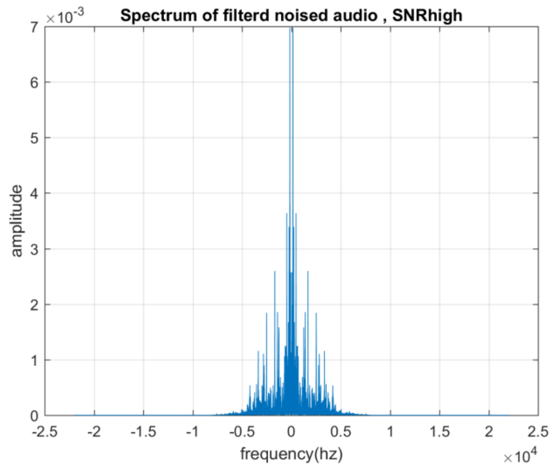
2 – در این قسمت مطابق متن تمرین آزمایش های خواسته شده را انجام می دهیم و نتیجه را به صورت زیر به دست می آوریم : واریانس نویز گاوسی هر حالت و نمودار های سیگنال حوزه ی زمان و فرکانس سیگنال های نویزی شده سپس فیلتر شده نیز در هر دو حالت گزارش شده است.

```
nlowvariace =

    0.1000


SNRlow =

    0.0677


nhighvariance =

   1.0000e-07


SNRhigh =

   6.7588e+04
```






حال سیگنال را به صورت FM مدوله می کنیم.

$$x_C(t) = \cos(2\pi f_C t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt)$$

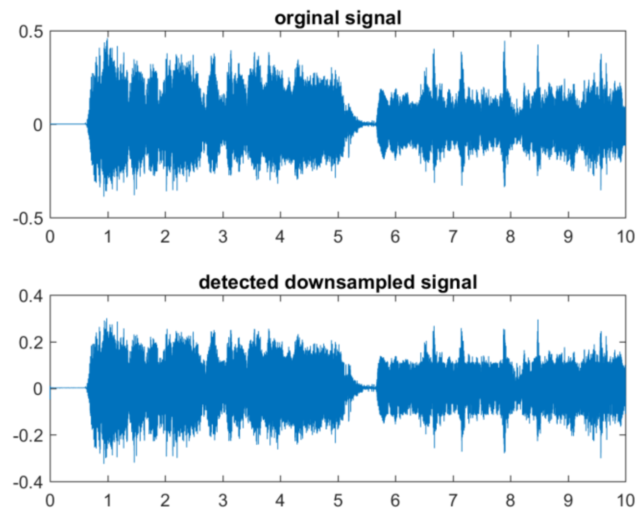
$$f_C = 50Khz$$

$$f_\Delta = \frac{\beta W}{\max\{x(t)\}}$$

3 – حال به ازای بتای 3 مدولاسیون را انجام می دهیم. $f_\Delta$ متناظر از رابطه ی بالا به دست می آید. لازم است نرخ نمونه برداری سیگنال را تا حداقل کمی بیشتر از 2 برابر ماکسیمم فرکانس محتوای سیگنال مدوله شده افزایش دهیم با توجه به پهنای باند پیغام که 8 کیلوهرتز است ، و بتا که برابر 3 است پهنای باند سیگنال مدوله شده برابر 64 کیلوهرتز خواهد بود بنابراین بیشینه محتوای فرکانسی در حدود 50+32=82 کیلوهرتز است پس نرخ نمونه برداری باید حداقل دو برابر این مقدار باشد ما آن را 441 کیلوهرتز در نظر می گیریم. ( با استفاده از تابع Interpol و n=5 نرخ نمونه برداری را به 10 برابر مقدار اولیه ( 44.1 کیلوهرتز ) می رسانیم.

سپس به وسیله آشکار ساز بخش های قبل آن را دمدوله می کنیم و بعد از downsample کردن با n=10 بررسی های بعدی را انجام می دهیم.

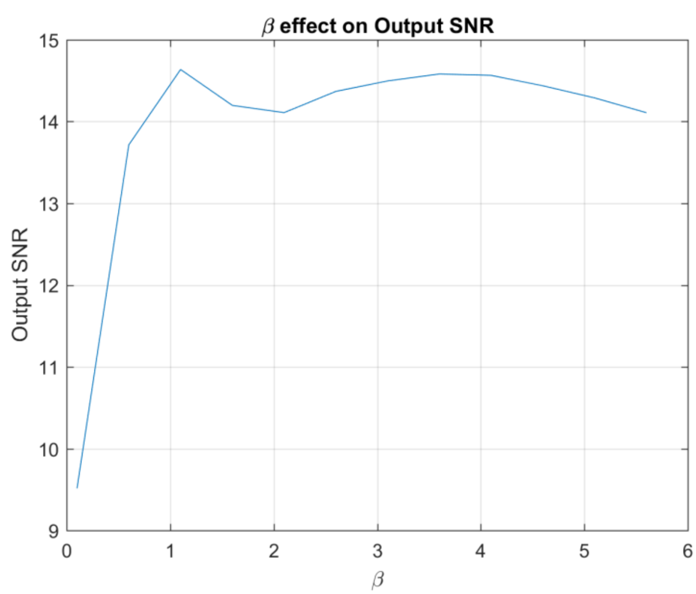
نتیجه آشکار سازی به صورت زیر است :




SNR خواسته شده نیز مطابق زیر است :

```
snr =

   14.4976
```

4 – نمودار خواسته شده به صورت زیر است ، تا یک جایی افزایش بتا باعث بهبود snr می شود و سپس دیگر اثر چندانی روی آن ندارد. بهترین بتا را در حدود 4 در نظر می گیریم.  پهنای باند طبق کارسون 80 کیلو هرتز است.



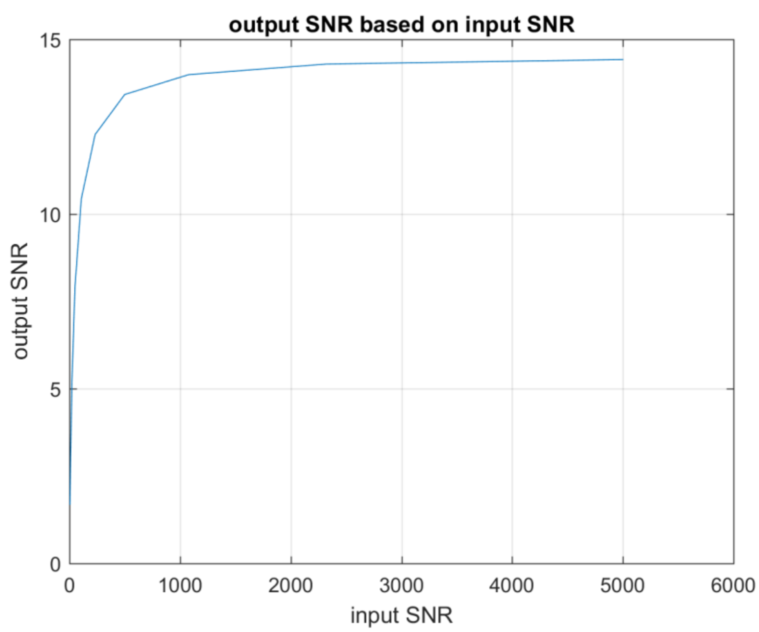

5 – سیستم خواسته شده ( با حذف فیلتر میان گذر ) پیاده سازی می کنیم. (برای بتای 4)

Snr خروجی و وردی در این حالت برابر مقدار زیر است. همچنین واریانس نویز گزارش شده است.

```
noisevariance =

    0.0100


snroutput =

    7.8330


snrinput =

   50.0188
```

6 – نمودار خواسته شده به صورت زیر است :

اثر آستانه ای را مشاهده می کنیم که به ازای SNR های کم در ورودی کاهش SNR در خروجی را شاهد هستیم اما از جایی به بعد به بیشترین SNR ممکن که در حالت بدون نویز نیز داشتیم می رسیم.




با توجه به snr های low و high محاسبه شده در بخش دو مشاهده می کنیم به ازای snr های کم در ورودی snr خروجی در محدوده ی شنیداری قرار می گیرد.