تمرین عملی سری اول ساختمان داده ـ سوال چهارم
اثبات درستی و تحلیل زمانی حل روابط بازگشتی

مهرسا پوریا ۹۵۱۰۱۲۴۷

۲۹ مهر ۱۳۹۸

رابطه بازگشتی داده شده (۱) را به صورت ماتریسی (۲) می نویسیم.

$$f_k = a_0 + a_1 \times f_{k-1} + ... + a_t \times f_{k-t} \tag{۱}$$

$$\begin{bmatrix} f_{k-t+1} \\ f_{k-t+2} \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ f_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_t & a_{t-1} & a_{t-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k-t} \\ f_{k-t+1} \\ \vdots \\ f_{k-2} \\ f_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۲}$$

ماتریس A را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_t & a_{t-1} & a_{t-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(t+1)\times(t+1)} \tag{۳}$$

بنابراین می توانیم معادله بازگشتی را بر حسب مقادیر اولیه f به صورت زیر بنویسیم :

$$\begin{bmatrix} f_{k-t+1} \\ f_{k-t+2} \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ f_k \\ 1 \end{bmatrix} = A^{k-t+1} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{t-2} \\ f_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۴}$$

با جایگذاری مقدار n به جای k داریم :

$$\begin{bmatrix} f_{n-t+1} \\ f_{n-t+2} \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \\ 1 \end{bmatrix} = A^{n-t+1} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{t-2} \\ f_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۵}$$

بنابراین f(n) را میتوان از محاسبه سطر t ام بردار f ها به دست آورد؛ با اینکار ما مسله را به مسله حساب کردن توان n-t+۱ از ماتریس A تبدیل کرده ایم که در ادامه به الگوریتم محاسبه آن می پردازیم؛ عدد n-t+۱ را n0 می نامیم. کوچکترین عدد توان دو کمتر از n0 را u می نامیم بدیهی است که این مقدار دو به توان کف lg(n) است بنابراین تعداد ضرب های ماتریسی مورد نیاز برای محاسبه آن به شیوه زیر از مرتبه O(lgn) است. شیوه محاسبه هم اینگونه است که ابتدا u را برابر A قرار میدهیم و سپس در lg(u) مرحله و ضرب u در خودش به u نهایی مورد نظر خواهیم رسید در خطوط ۶۸ تا ۸۳ کد اپلود شده اینکار را انجام داده ایم و در اجرای حلقه ی اصلی u ها را در آرایه A (در کد) دخیره می کنیم بنابراین در نهایت در آن آرایه به ترتیب مشهود در کد همه ی A به توان های توان هایی از دو را داریم یعنی $A, A^2, A^4, A^8, ..., A^lg(u)$ را داریم.
سپس با توجه به اینکه عدد n0 را میتوان در مبنای دو نوشت بنابراین A به توان n0 را می توان از ضرب ماتریسی حداکثر lg(n) مرحله ای محاسبه کرد بدین صورت که مقدار اولیه را برابر A به توان دو به توان اولین جایی که در عدد مبنای دوی n0 ، ۱ مشاهده می کنیم قرار داده و سپس هرجا ۱ دیدیم در A به توان ارزش مکانی آن ضرب میکنیم که این مقادیر را از قبل دخیره کرده ایم، این عمل در خطوط ۸۵ تا ۱۱۳ کد انجام شده است. بنابراین در مجموع در حداکثر ۲lg(n) ضرب ماتریسی نیاز خواهیم داشت که هر ضرب ماتریسی خود t^2 هزینه دارد بنابرین زمان اجرایی نهایی به صورت زیر است: $\theta(\mathrm{t}^2 lg(n))$
البته چون مقدار t محدود است می توان نتیجه را O(lg(n) نیز گفت.