Численные методы.
Билеты к экзамену

11 ноября 2024 г.

1 Билет №1: Предмет и метод вычислительной математики. Вычислительный эксперимент. Погрешность. Корректность.

1.1 Предмет и метод вычислительной математики

Предмет вычислительной математики — это область математики, занимающаяся разработкой, анализом и применением численных методов для решения задач математического анализа, алгебры и геометрии и путями использования для этой цели современных вычислительных средств.

Метод вычислительной математики Большинство задач вычислительной математики могут быть записаны в виде

$$y = A(x),$$

где x и y принадлежат заданынм пространствам R_1 и R_2, при этом $A(x)$ — некоторая заданная функция. Задача состоит либо в отыскании y по заданному x, либо в отыскании x по заданному y.

Для этого пространства R_1 и R_2 и функции A заменяются некоторыми другими пространствами $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$ и функцией $\overline{A}$, которые более удобны для вычислительных целей.

1.2 Вычислительный эксперимент

Это метод исследования сложных математических моделей и процессов с использованием компьютера, кторый применяет, когда проведение реальных физических или лабораторных экспериментов либо невозможно, либо нецелесообразно.

1.3 Погрешность

Это отклонение численного результата от точного значения, котроое возникает в процессе вычислений. Она может быть разного типа и источника, а ее минимизация является одной из ключевых задач.

1.4 Корректность

Это свойство задачи или численного метода, которое означает, что задача имеет единственное решение и это решение устойчиво по отношению к малым изменениям исходных данных.

2 Билет №2: Решение систем алгебраических уравнений. Метод исключения Гаусса

2.1 Решение систем алгебраических уравнений

Линейная система уравнений имеет вид:

$$Ax = b,$$

где A — матрица коэффициентов размеров $n \times n$, x — вектор неизвестных, а b — вектор свободных членов.

Существует несколько прямых методов решения таких систем:

- **Метод Гаусса:** наиболее распространенный метод, основанных на последовательном исключении неизвестных.
- **LU-разложение:** метод, в котором матрица A представляет как произведение матриц — нижнетреугольно L и верхнетреугольной U. Сначала решается система $Ly = b$, затем $Ux = y$.
- **Метод Крамера:** использует определители, но примением только для систем с небольшим числом уравнений.

2.2 Метод исключения Гаусса

Это один из основных методов решения систем линейных уравнений. Он позволяет преобразовать матрица системы к треугольному или ступечатому виду, а затем выполнить обратный ход для нахождения значений переменных.

Прямой ход заключается в преобразовании системы к ступенчатому виду, где все элементы ниже главной диагонали становятся нулями.

1. Выбор ведущего элемента, по которому будет производиться исключение. Выбирается как наибольший по модулю элемент в столбце.
2. Нормализация строки, то есть строка делится на ведущий элемент, чтобы он стал равен 1.
3. Обнуление элементов ниже ведущего элемента через вычитание строк, умноженных на коэффициенты.

Обратный ход заключается в том, чтобы после приведения матрицы к верхнетреугольному виду, можно было найти значения неизвестных методов подстановки"

1. Вычисление последнего неизвестного.
2. Подстановка вверх.

3 Билет №3: Схема Гаусса с выбором главного элемента

Все ровно так же, как и в прошлом билете. Главный элемент берется максимальным по модулю на каждой итерации, то есть при приведении каждой строки.

4 Билет №4: Метод прогонки решения трехдиагональных систем алгебраических уравнений

Метод прогонки — это алгоритм решения систем лнейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов, у котрой ненулевые элементы находятся только на главной диагонали, а также на диагоналях, прилегающих к ней сверху и снизу. Он представляет собой модификацию метода Гаусса.

- Прямой ход
    1. Преобразуем систему уравнений к виду:
    $$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i,$$
    где α_i и β_i рассчитываются на каждом шаге.
    2. Вычисляем последовательности α_i и β_i по формулам:
    $$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i\alpha_{i-1}},$$
    $$\beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}.$$
    Начальные условия: $\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1}$ и $\beta_1 = \frac{d_1}{b_1}$.
- Обратный ход
    1. Вычисляем x_n по формуле:
    $$x_n = \beta_n.$$

2. Для остальных x_i, $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, вычисляем:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i.$$