**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»**

**Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики**

Вихляев Егор Сергеевич

«СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ»
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

Выполнил:
студент 3 курса очной формы обучения направления
подготовки 01.03.01 – Механико-математический, направление
– «Математика»

Научный руководитель:
доцент кафедры фундаментальной математики
_____________ Волочков Александр Андреевич

Пермь
2024 г.

Оглавление

Введение

Идея построения групп гомологий принадлежит А. Пуанкаре [7]. Алгебраизация топологических задач в историческом разрезе впервые была реализована построением групп гомологий и фундаментальной группы. В основном все топологические инварианты в конечном итоге выражают через гомологические инварианты. Это обстоятельство связано с лучшей вычислимостью групп гомологий и их геометрической наглядностью. Тем не менее, по сравнению с группами гомотопий, они обладают важным недостатком – их аккуратное определение связано со значительными формальными трудностями.

Для Пуанкаре топология была мошным инструментом для решения проблем, которые возникали в классических разделах математики. Ими были: теория функций комплексного переменного, теория дифференциальных уравнений, которая для пуанкаре неотделима от небесной механики, и, конечно, сама геометрия.

Пункаре открыл для математики целый мир новых проблем — проблем «качественного» характера, т.е. именно топологического. Это мир недоступный не только методам, но и мировоззрению «классической» математики, в центре которой находились формула и вычисление (иными словами, техника оперирования формулами).

Информация о топологическом пространстве X, которую несут его гомологии, в односвязном случае примерно равноценна информации, содержащейся в гомотопических группах. Заметим, что при построении гомологических и когомологических групп пространств X, нет необходимости отмечать в X точку. В этом заключается одно из важных отличий гомологических групп от гомотопических.

В данной работе мы изучаем сингулярные гомологии и методы их вычисления. В качестве небольшого дополнения, показываем приложения гомологий сфер к доказательству основной теоремы алгебры.

Темы, затрагиваемые в работе, включают в себя базовое определение сингулярных гомологий, методы их вычисления и примеры их применения, клеточные комплексы, базовые аспекты симплициальной теории и последовательность Майера-Вьеториса.

В главе 1 мы разбираемся в группах гомологий сфер всех размерностей, а также в гомологиях букетов сфер и букетов вообще.

В главе 2 исследуем приложение групп гомологий сфер к доказательству основной теоремы алгебры.

В главе 3 вычисляем гомологии различных клеточных комплексов, а именно: связного графа, двумерного тора и проективного пространства.

Данная тема представлет интерес для тех, кто занимается топологией и алгебраической геометрией. В наши дни, она применяется в различных сферах, где алгебраические методы играют важную роль. Начиная с физики элементарных частиц или астрофизики, заканчивая современным машинным обучением.

Цель работы: Изучение важных понятий теории гомологий — сингулярные гомологии, их вычисление для некоторых клеточных комплексов.

Задачи работы:

1. Вычислить группу гомологий окружности.

2. Вычислить группы гомологий сфер.

3. Вычислить группы гомологий букетов сфер.

4. Вычислить гомологии связного графа.

5. Вычислить гомологии двумерного тора.

6. Вычислить гомологии проективного пространства.

Объект исследования: Теория гомологий и их приложения в топологии и алгебраической геометрии.

Предмет исследования: Сингулярные гомологии и их вычисление для различных топологических пространств и клеточных комплексов, а также их применения, включая доказательство основной теоремы алгебры.

Место прохождения практики: ПГНИУ

Сроки прохождения практики: 01.09.2023-25.12.2023

Глава 1

Вычисление групп гомологий сфер

1.1 Группа гомологий окружности

Теорема 1.1.1. $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$

Доказательство. Допустим, что $X = S^1$. Обозначим северный и южный полюсы этой окружности соответственно как z и z'. Пусть точки x и y лежат на экваторе окружности (рис. 1.1). Так же, пусть $U = S^1 \setminus \{z'\}$ и $V = S^1 \setminus \{z\}$. Рассмотрим отрезок последовательности Майера-Вьеториса, ассоциированной с этим покрытием:

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V).$$

Первый член последовательность равен нулю, так как множества U и V стягиваются в точку. Таким образом, гомоморфизм Δ является мономорфизмом, и группа $H_1(S^1)$ изоморфна образу этого гомоморфизма, который равен ядру гомоморфизма g_*. Произвольный элемент группы $H_0(U \cap V) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ можно записать в виде $ax + by$, где a и b — некоторые целые числа. Тогда

$$g_*(ax + by) = (i_*(ax + by), -i_*(ax + by)).$$

Так как множества U и V линейно связны, $i_*(ax + by) = 0 \Leftrightarrow a = -b$. Аналогичное утверждение верно и для j_*. Таким образом, ядро гомоморфизма g_*

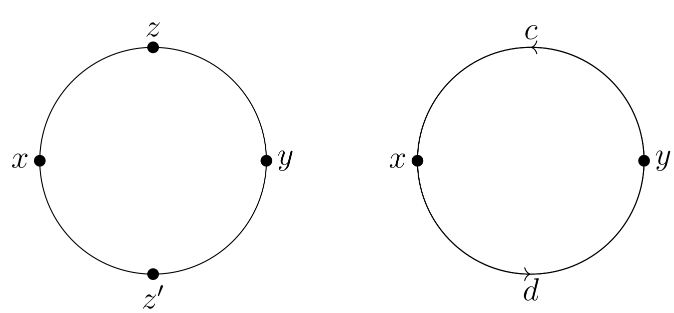

Рис. 1.1

является подгруппой группы $H_0(U \cap V)$, состоящей из элементов вида $ax - ay$. Отсюда мы получаем изоморфизма

$$H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}.$$

□

1.2 Вычисление группы $H_m(S^n)$

Лемма 1.2.1. *$H_m(S^1) \cong 0$ для $m > 1$*

Доказательство. Рассмотрим отрезок последовательности Майера-Вьеториса для любого натурального $m > 1$:

$$H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{h_*} H_m(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(U \cap V).$$

Имеем, что крайние члены последовательности равны нулю, а значит $H_m(S^1) \cong 0$ для $m > 1$, где $m \in \mathbb{N}$. Случай при $m = 1$ рассмотрен в теореме 1.1.1. Таким образом, мы полностью вычислили все группы гомологий окружности S^1. □

Теорема 1.2.2. $H_m(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \textit{при } m = 0, m = n, \\ 0, \textit{при } m \in \mathbb{Z}, m \neq n \end{cases}$

Доказательство. Случай при $m = 1$ рассмотрен в 1.1.1, при $m > 1$ в 1.2.1. Пусть для гомологий сферы S^{n-1} теорема уже доказана. Точная последовательность пары (D^n, S^{n-1}) будет иметь вид

$$... \to H_m(D^n) \to H_m(D^n, S^{n-1}) \to H_{m-1}(S^{n-1}) \to H_{m-1}(D^n) \to ... \,.$$

При $m > 1$ мы получаем точную последовательность вида

$$0 \to H_m(S^n) \to H_{m-1}(S^{n-1}) \to 0,$$

откуда $H_m(S^n) = H_{m-1}(S^{n-1}), m > 1$. При $m = 1$ получаем последовательность

$$H_1(D^n) \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \to H_0(D^n) \to 0,$$

то есть

$$0 \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

В силу точности данной последовательности, гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ является изоморфизмом, поэтому $H_1(D^n, S^{n-1}) = H_1(S^n) = 0$. Отсюда следует, что утверждения и для сферы S^n – справедливы.

Отметим также, что отождествив n-мерный симплекс σ^n с диском D^n, получим, что тождественное отображение $\sigma^n \to \sigma^n$ определяет относительный сингулярный цикл в группе $H_n(D^n, S^{n-1}) = H_n(S^n)$. Этот цикл — образующая в группе сингулярных гомологий $H_n(S^n)$. □

1.3 Гомологии букетов сфер и вообще букетов

Лемма 1.3.1. *$H_m(\sum X) = H_{m-1}(X)$, где $\sum$ – надстройка.*

Доказательство. Гомологическая последовательность пары (CX, X), где CX – конус над пространством X, отождествляемым с основанием конуса. Это утверждение аналогично гомотопической теореме о надстройке и двойственно утверждению $\pi_m(\Omega X) = \pi_m(X)$. Двойственность связывает гомотопические группы, строго говоря, с когомологиями, а не с гомологиями. □

Лемма 1.3.2. *Если $(X_\alpha, x_\alpha), \alpha \in A$, – пространства с отмеченными точками, являющиеся парами Борсука, то при любом i*

$$H_m(\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in A} H_m(X_\alpha).$$

Доказательство. Букет есть факторпространство суммы по объединению отмеченных точек. □

Теорема 1.3.3. $H_m(\bigvee\limits_{\alpha\in A} S^n_\alpha) \cong \begin{cases} \oplus\ \mathbb{Z}\alpha, \textit{при } i = n, \\ \alpha \in A, \\ 0, \textit{при} i \neq n \end{cases}$

Доказательство. Эта теорема вытекает из лемм 1.3.1 и 1.3.2. Букет $\bigvee_{\alpha\in A} S^n_\alpha$ гомотопически эквивалентен надстройке $\sum(\bigvee_{\alpha\in A} S^{n-1}_\alpha)$. Если понимать надстройку в модифицированном смысле, то есть учитывающем отмеченную точку, то букет будет гомеоморфен надстройке. □

Глава 2

Приложение групп гомологий сфер

Лемма 2.0.1. *Пусть для отображений* $f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *существует такая связывающая их гомотопия* $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$*, что для любого действительного числа* A *можно найти такое действительное число* B*, где* $A > 0$*,* $B > 0$*, что*

$$\|x\| > B,\ t \in I, \text{где } I = [0,1] \Rightarrow \|F(x,t)\| > A$$

Тогда отображения f_0 *и* f_1 *допустимы и имеют одну и ту же степень.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что, предположив $F(\omega, t) = \omega$, мы получим непрерывное продолжение $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ отображения F. Следовательно, отображения f_0 и f_1 допустимы и отображение F является гомотопией, связывающей отображения f_0 и f_1. Поэтому отображения f_0 и f_1 имеют одну и ту же степень. □

Лемма 2.0.2. *Многочлен степени* $k > 0$

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ \dots\ + a_1 z + a_0,\ a_k \neq 0$$

с комплексными коэффициентами является отображением $f : R^2 \to R^2$ *топологической степени* k*.*

Теорема 2.0.3. *(Алгебраическая замкнутость алгебр* $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$*) Уравнение f(z)=0 имеет по крайней мере один корень.*

Доказательство. Пусть $g(z) = a_{k-1} z^{k-1} + \ \dots\ + a_1 z + a_0$ и $a = |a_{k-1}| + \ \dots\ + |a_0|$. Определим отображение $F : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$, полагая

$$F(z,t) = a_k z^k + (1-t) g(z),\ z \in \mathbb{R}^2, t \in I.$$

Пусть A – любое целое число и пусть

$$|z| > \frac{1}{|a_k|}(A + a),\ |z| > 1.$$

Так как $k > 0$, то

$$|F(z,t)| \geq |a_k z^k| - |g(z)| \geq |a_k z^k| - a|z^{k-1}| > |a_k||z| - a > A.$$

Таким образом, гомотопия F удовлетворяет условиям леммы 2.0.1. Следовательно, отображение f допустимо и имеет ту же степень, что и отобюражение $f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где $f'(z) = F(z,1) = a_k z^k$.

Пусть $\theta : I \to \mathbb{R}^2 \backslash (0)$ – такое отображение, что $\theta(0) = a_k, \theta(1) = 1$. Гомотопия $G : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$, определенная формулой $G(z,t) = \theta(t) z^k$, также удовлетворяет условиям леммы 2.0.1. Следовательно, отображение f' имеет ту же степень, что и отображение $f''(z) = G(z,1) = z^k$. Так как $|f''(z)| = |z|^k$, то отображение f'" имеет ту же степень, что и определенное им отображение $f_k : S^1 \to S^1$. Остается заметить, что отображение f_k имеет степень k.

Докажем теперь некоторые аналогии основной теоремы алгебры в более общих условиях.

Мы будем полагать, что задано некоторое отображение $: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Точку (x, y) будем обозначать через xy. Потребуем, чтобы это прозведение удовлетворяло следующим условиям:

(1) Из $x \neq 0, y \neq 0$ следует, что $xy \neq 0$.

(2) Существует такая точка $e \in \mathbb{R}^n$, что $ex = x = xe$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $\forall t \in \mathbb{R}^+$ имеет место равенство $(tx)y = t(xy) = x(ty)$. Из данного условия вытекает, что $0x = 0, x0 = 0$.

Перечисленные свойства выполняются, если пространство $\mathbb{R}^n$ является пространством действительной алгебры с делением. Например: поле действительных чисел $\mathbb{R}$ $(n = 1)$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ $(n = 2)$, тело кватернионов $\mathbb{H}$ $(n = 4)$ и алгебра октав $\mathbb{O}$ $(n = 8)$.

Теперь определим по индукции одночлен (от одного переменного) степени k. Отличные от нуля точки пространства $\mathbb{R}^n$ являются по определению одночленами степени нуль. ТОждественная функция x является одночленом степени 1. Если m_1 и m_2 – одночлены степеней k_1 и k_2 соответственно, то $m_1 m_2$ является многочленом степени $k_1 + k_2$.

Таким образом, если m – одночлен, то $\forall x \in \mathbb{R}^n$ определена точка $m(x) \in R^n$. Получающееся отображение $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно. $\square$

Глава 3

Гомологии клеточных комплексов

3.1 Гомологии связного графа

Лемма 3.1.1. *Для любого симплициального полиэдра группа H_0 свободная абелева, а ее размерность равна числу связных компонент полиэдра.*

Доказательство. Каждую связную компоненту полиэдра можно рассматривать по отдельности, поэтому достаточно доказать, что для связного полиэдра $H_0 \cong \mathbb{Z}$. Группа C_0 порождена вершинами данной компоненты связности. При отображении ∂_1 образ отрезка $\alpha\beta$ равен $\pm(\alpha - \beta)$, поэтому соотношенгия имеют вид $\alpha = \beta$. В группе $C_0 \cong \mathbb{Z}^{a_0}$, где a_0 – число вершин, рассмотрим «плоскость» L, выделенную условием $x_1 + \ \dots \ + x_{a_0} = 0$. Все соотношения (т.е. элементы группы $\partial_1(C_1)$) лежат в этой плоскости и порождают ее как подгруппу, так как любые две вершины связного графа можно соединить цепочкой одномерныхз симплексов. Итак, $H_0 = \mathbb{Z}^{a_0}/L \cong \mathbb{Z}$. □

Теорема 3.1.2. *$H_1(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^{1+a_1-a_0}$, где Γ_1 – одномерный полиэдр, то есть связный граф.*

Доказательство. Рассмотрим связный одномерный полиэдр, иными словами, связный граф с a_0 вершинами и a_1 ребрами. Его эйлерова характеристика равна $a_0 - a_1$. С другой стороны, эйлерова характеристика равна $b_0 - b_1$, где b_0, b_1 – числа Бетти. Согласно доказанной теореме 3.1.1 $b_0 = 1$, поэтому $b_1 = 1 + a_1 - a_0$. В нашем случае группа H_1 – это ядро отображения ∂_1, поэтому у нее нет кручения, а значит, она изоморфна $\mathbb{Z}^{1+a_1-a_0}$. □

3.2 Гомологии двумерного тора

Теорема 3.2.1. *$H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Тор можно построить из квадрата, склеив его противоположные стороны. Разобьем этот квадрат на более мелкие квадратики, а какждый из квадратиков разрежем диагонально на два треугольника. Таким образом, получим триангуляцию тора.

У двумерного полиэдра нетривиальные гомологии могут быть только в размерностях $0, 1$ и 2. При этом, $H_0 = Z$. Одномерный остов любой триангуляции тора — связный граф. Нульмерные гомологии тора и этого графа будут одни и те же, потому что в определении H_0 участвуют только C_0 и C_1.

Теперь вычислим H_2. Ясно, что $H_2 = ker\ \partial_2$, так как $im\ \partial_3 = 0$. Рассмотрим элементы этого ядра. Пусть A — линейная комбинация ориентированных треугольник, принадлежащая $ker\ \partial_2$, и какой-то треугольник входит в A с коэффициентом α. В таком случае, все соседние с ним треугольники должны входить в A с коэффициентами α или $-\alpha$. Действительно, чтобы убить $\alpha\partial\Delta_1$, нужно добавить границы всех соседних треугольников с коэффициентами $\pm\alpha$.

Переходя по цепочке от треугольника к треугольнику, получаем, что коэффициент $\alpha \in \mathbb{Z}$ при первом треугольнике однозначно определяет коэффициенты при всех остальных. Поэтому группа $ker\ \partial_2$ не больше, чем множество всех возможных коэффициентов α, то есть чем $\mathbb{Z}$.

Так же следует определить, почему не может возникнуть противоречие, а именно — несогласованность ориентаций треугольников. Допустим, если бы многообразие было неориентируемо, то мы могли бы взять неориентированную цепочку треугольников и получили бы, что исходный треугольник, взятый с коэффициентом α, должен в то же вермя входить в эжлемент ядра и с коэффициентом $-\alpha$. Но для ориентируемого многообразия можно взять все симплексы старшей размерности с согласованными ориентациями и взять сумму $\sum \alpha\Delta$ по всем симплексам. Эта сумма будте нетривиальным элементом ядра диффернциала. Следовательно, группа H_2 для тора изоморфна $\mathbb{Z}$. □

Теорема 3.2.2. *$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus TorsH_1$.*

Доказательство. Одномерные гомологии двумерного тора вычислить гораздо сложнее. Посмотрим сначала на некоторые примеры одномерных циклов. Например, замкнутая ориентированная ломаная, состоящая из одномерных симплексов. Любой одномерный цикл является линейной комбинацией таких замкнутых ломаных. Примером одноменого цикла, гомологичного нулю, служит граница треугольника; любой цикл, гомологичный нулю, – линейная комбинация границ треугольников.

Итак, рассмотрим одну из сторон квадрата, из которого склеен тор. При склеивании она отождествится с противоположной стороной, а ее концы отождествятся друг с другом. Ориентируя этот отрезок, мы получим цикл на торе, которйы не является линейной комбинацией границ треугольников.

Степень проектирования нашего цикла на себя равна 1. А для границы треугольника степень равна нулю, поэтому равна нулю и степень проекции любой линейной комбинации границ треугольников. Аналогичнчо доказывается, что цикл, полученный при склеивании других двух сторон квадрата, не является линейной комбинацией границ треугольников, и этот цикл линейно независим с построенным выше, так как проекция одного из них на другой имееет степень 0.

Эйлерова характеристика тора равна 0, а потому $H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2 \oplus TorsH_1$. В качестве образующих свободной части $\mathbb{Z}^2 = H_1/TorsH_1$ можно взять классы описанных только что двух циклов. □

3.3 Гомологии проективного пространства $\mathbb{R}P^n$

Теорема 3.3.1. *Клеточные гомологии клеточного пространства канонически изоморфны его сингулярным гомологиям.*

Доказательство. Доказательство осуществляется в 3 шага.
Шаг 1-й: q-я группа гомологий клеточного комплекса совпадает с $H_q(X^{q+1}, X^{q-2})$. При этом остовы с отрицательными номерами считаем нулевыми. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1}(X) \arrow[d, equal] & H_q(X^{q-1}, X^{q-2}) \arrow[d] & = 0 & \\
H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(X^q, X^{q-2}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) \arrow[r] & H_q(X^{q+1}, X^q) \arrow[d, equal] \\
& H_q(X^q, X^{q-1}) \arrow[d, "\partial_q"] & = C_q(X) & 0 \\
& H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) & = C_{q-1}(X), &
\end{tikzcd}$$

в которой строка есть отрезок гомологической последовательности тройки (X^{q+1}, X^q, X^{q-2}), а столбец — отрезок гомологической последовательности тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}).
Из точности последовательностей и тривиальности групп $H_q(X^{q-1}, X^{q-2})$, $H_q(X^{q+1}, X^q)$ следует, что β – мономорфизм, а α – эпиморфизм. Следовательно,

$$H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(X^q, X^{q-2})/Ker\alpha = H_q(X^q, X^{q-2})/Im\partial_* =$$

$$= \beta H_q(X^q, X^{q-2})/\beta(Im\partial_*) = Im\beta/Im(\beta\dot{\partial}_*).$$

В силу коммутативности диаграммы $\beta\dot{\partial}_* = \partial_{q+1}$, а в силу точности вертикальной последовательности $Im\beta = Ker\partial_q$. Таким образом, последняя фактор-группа есть $Ker\partial_q/Im\partial_{q+1}$, что и требуется.
Шаг 2-й: $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(X^{q+1})$. Гомологические последовательности троек $(X^{q+1}, X^i, X^{i-1}), i = q-2, q-3, \dots, 1, 0,$

$$0 = H_q(X^i, X^{i-1}) = H_q(X^{q+1}, X^{i-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^{q+1}, X^i) \to H_{q-1}(X^i, X^{i-1}) = 0$$

дают:

$$H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(X^{q+1}, X^{q-3}) = \dots = H_q(X^{q+1}, X^0) = H_q(X^{q+1}).$$

Шаг 3-й: $H_q(X^{q+1}) = H_q(X)$. Гомологические последовательности пар (X^i, X^{i-1}), $i = q+2, q+3, \ \dots \ ,$

$$0 = H_{q+1}(X^i, Xx^{i-1}) \to H_q(X^{i-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X^i) \to H_q(X^i, X^{i-1}) = 0$$

дают:

$$H_q(X^{q+1}) = H_q(X^{q+2}) = H_q(X^{q+3}) = \ \dots$$

Если $dimX < \infty$, все доказано. Если же X бесконечномерно, то требуется дополнительное замечание, что всякая сигулярная цепь пространства X фактически является цепью остова X^N с достаточно большим N. $\square$

Теорема 3.3.2. *$H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Рассмотрим флаг линейных подпространств

$$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \ \dots \ \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Этот флаг высекает на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ клеточное разбиение, имеющее в каждой размерности $i = 0, 1, \ \dots \ , n$ по две клетки — компоненты множества $S^i \backslash S^{i-1}$, $S^i = S^n \cap \mathbb{R}^{i+1}$. Эти летки центрально симметричны, поэтому они индуцируют клеточное разбиение проективного пространства $\mathbb{R}P^n$, имеющее по одной клетке в каждой размерности.

Выясним, сколько раз с учетом ориентаций каждая клетка входит в границу клетки следующй размерности. Геометрическая кратность вхождения равна 2, так как каждая полусфера сферы S^i примыкает к обеим половинам экваториального сечения S^{i-1}, из которых при факторизации получается $(i-1)$-мерная клетка. При вычислении коэффициента инцидентности эти вхождения могут давать вклад либо одного знака, либо разных знаков. При вычислении гомологий над $\mathbb{Z}_2$ это, впрочем, не так важно. В этом случае все граничные операторы оказываются нулевыми, и мы получаем

$$H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \ i = 0, 1, \ \dots \ , n.$$

$\square$

Теорема 3.3.3. $H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \textit{при } m = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \textit{при нечетном } p, \ 0 < p < n \\ 0, \textit{в остальных случаях} \end{cases}.$

Доказательство. Для вычисления групп $H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$ нужно учитывать ориентации клеток. Рассмотрим для примера двумерную клетку в $\mathbb{R}P^n$. В этом случае характеристическое отображение представляет собой композицию гомеоморфизма двумерного диска на верхнюю полусферу и последующего тождествления диаметрально противоположных точек сферы. Граница двумерной клетки в S^n состоит из пары полуокружностей, ориентации которых совпадают с единой ориентацией содержашей их оркужности. При переходе к $\mathbb{R}P^n$ эти полуокружности склеиваются посредством центральной симметрии. Поскольку эта симметрия сохраняет ориентацию окружности, обе полуокуржности дадут одинаковый вклад в коэффициент инцидентности, который тем самым равен 2. Напротив, для четномерных сфер центральная симметрия не сохраняет ориентацию, поэтому граничные операторы действуют на клетки следующим образом: $\partial(k^{2n+1}) = 0$, $\partial(k^{2n}) = 2k^{2n-1}$.

В результате получаем цепной комплекс

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & C_5 & \longrightarrow & C_4 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\ldots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Гомологии этого комплекса равны

$$\ldots \qquad \mathbb{Z}_2 \qquad 0 \qquad \mathbb{Z}_2 \qquad 0 \qquad \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}$$

Более того, при нечетном n в старшей размерности гомологии равны $\mathbb{Z}$, а при четном n в старшей размерности гомологии равны 0. В частности, многообразие $\mathbb{R}P^n$ при нечетном n ориентируемо, а при четном n неориентируемо. $\square$

Дополнение

3.4 Циклы

Определение 3.4.1. Циклы – это элементы, которые не являются границами. Формально, цикл в n-мерной гомологии гомологического комплекса — это n-мерный цепной комплекс, который является границей $(n+1)$-мерного цепного комплекса. То есть это такие цепи, которые не могут быть представлены как границы каких-либо других цепей.

3.5 Границы

Определение 3.5.1. Границы представляют собой элементы, которые являются граничными поверхностями для других элементов. Формально, в n-мерном гомологическом комплексе, граница n-мерного цикла — это $(n-1)$-мерный цикл. Границы отражаются в свойствах структуры данных, которые позволяют определить, какие части пространства или объекта считаются его краями или границами в данном контексте.

3.6 Граничный оператор

Определение 3.6.1. Определим граничный оператор как гомоморфизм

$$\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X),$$

заданный соотношением

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 + ... + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i.$$

Интуитивно, граничный оператор сопоставляет геометрической фигуре ее границу, край.

3.7 Симплициальное тождество

Лемма 3.7.1. *Пусть X – топологическое пространство, $p > 0, i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq j \leq i \leq p$. Тогда*

$$\partial_j^{p-1}\partial_i^p = \partial_{i-1}^{p-1}\partial_j^p.$$

Доказательство. Пусть s – сингулярный p-симплекс в X.

$$(\partial_j\partial_i)(s) = \partial_j(\partial_i(s)) = \partial_j(s\epsilon_i^{p-1}) = s\epsilon_i^{p-1}\epsilon_j^{p-2} = s\epsilon_j^{p-1}\epsilon_{i-1}^{p-2} = \partial_{i-1}(\partial_j(s)) = (\partial_{i-1})\partial_j)(s).$$

□

3.8 Группы гомологий

Теорема 3.8.1. *Композиция $\partial \circ \partial$ в цепочке отображений*

$$S_n(X) \to_\partial S_{n-1}(X) \to_\partial S_{n-2}(X)$$

является тривиальной.

Доказательство. Воспользуемся определением граничного оператора 3.6.1. Заметим, что утверждение $\partial \circ \partial = 0$ эквивалентно утверждению $\partial^{n-1}\partial^n = 0$. С учётом этого:

$$\partial^{n-1}\partial^n = (\sum_{i\geq 0}(-1)^i\partial_i)(\sum_{j\geq 0}(-1)^j\partial_j) = \sum_{i,j\geq 0}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j =$$

$$= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j} = (3.7.1) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\partial_{j-1}\partial_i + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j =$$

$$= \sum_{j-1\geq i}(-1)^{j+i}\partial_{j-1}\partial_i + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j = \sum_{i\geq j}(-1)^{j+i+1}\partial_i\partial_j + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j =$$

$$= (-1)\sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_j = 0.$$

□

Следует отметить, что геометрически утверждение $\partial \circ \partial = 0$ означает, что граница любой n-мерной цепи является $(n-1)$-мерной цепью без границы. Именно это основное свойство приводит к определению групп гомологий. Элемент $c \in S_n(X)$ называется n-мерным циклом, если $\partial(c) = 0$. Элемент $d \in S_n(X)$ называется n-мерной границей, если $d = \partial(e)$ для некоторого $e \in S_{n+1}(X)$. Так как оператор ∂ является гомоморфизмом, его ядро, т. е. множество всех n-мерных циклов, является подгруппой $Z_n(X)$ группы $S_n(X)$. Аналогично, образ гомоморфизма ∂ в группе $S_n(X)$ является подгруппой $B_n(X)$, состоящей из всех границ.

Для определения групп гомологий нам необходимы понятия циклов 3.4.1, границ 3.5.1 и граничного оператора 3.6.1 и только что доказанная теорема 3.8.1.

Определение 3.8.2. Заметим, что из теоремы 3.6.1 следует, что группа $B_n(X)$ является подгруппой группы $Z_n(X)$. Факторгруппа $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ называется n-й группой сингулярных гомологий пространства X.

3.9 Точная последовательность пары

Определение 3.9.1. Пусть дана последовательность абелевых групп (или модулей) и гомоморфизмов между ними:

$$... \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} ....$$

Точная последовательность – это последовательность, в которой образ каждого гомоморфизма является ядром следующего гомоморфизма. Формально, для каждого n в этой последовательности должно быть выполнено:

$$Im(f_n) = ker(f_{n+1}).$$

Это означает, что каждый образ f_n совпадает с ядром f_{n+1}, что гарантирует, что нет «потери информации» между группами и отображениями в последовательности.

Точная последовательность играет важную роль в алгебраической топологии, алгебраической геометрии и других областях математики, позволяя изучать структуру и свойства алгебраических объектов через их гомологии и когомологии.

3.10 Степень отображения

Определение 3.10.1. Пусть у нас есть два цепных комплекса $(C_\bullet, \partial)$ и $(D_\bullet, \delta)$, где $C_\bullet$ и $D_\bullet$ – это последовательности абелевых групп, а ∂ и δ – границы, такие, что $\partial^2 = 0$ и $\delta^2 = 0$.

Гомоморфизм $f : C_\bullet \to D_\bullet$ между этими комплексами называется морфизмом степени n (или гомоморфизмом степени n), если для каждого i группы C_i гомоморфизм $f_i : C_i \to D_{i+n}$, где f_i – это i-й компонент f.

Заключение

В ходе данного исследования мы глубоко погрузились в теорию гомологий, сосредоточившись на сингулярных гомологиях и их вычислении для различных клеточных комплексов. Наше исследование началось с изучения основополагающих понятий, таких как группы гомологий окружности, сфер и их букетов, затем перешло к анализу более сложных пространств, включая связные графы, двумерные торы и проективные пространства.

Основная цель нашей работы была достигнута — мы изучили ключевые аспекты теории гомологий и научились вычислять гомологии для различных пространств. При этом мы продемонстрировали применение полученных знаний к доказательству основной теоремы алгебры, что подчеркивает практическую значимость данной теории.

Важно отметить, что топологические методы и алгебраическая геометрия, связанные с гомологиями, играют существенную роль в различных областях современной науки. От физики элементарных частиц до астрофизики, а также в современном машинном обучении, алгебраические методы, основанные на гомологиях, находят свое применение.

Мы надеемся, что наше исследование будет полезным как для специалистов в области топологии и алгебраической геометрии, так и для всех, кто интересуется математикой и ее приложениями. Разработанные методы и результаты могут служить основой для дальнейших исследований и применений в различных областях науки и технологий.

Литература

[1] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию: Учеб. пособие для вузов. - 1-е изд. - М,: Высш. школа, 1980. - 295 с.

[2] Васильев В.А. Топология для младшекурсников. - 2-е изд. - М.: МЦНМО, 2019. - 160 с.

[3] Вик Дж. У. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. - 1-е изд. - М.: МЦНМО, 2005. - 288 с.

[4] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.3: Теория гомологий. - 1-е изд. - М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 288 с.

[5] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. - 1-е изд. - М,: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 528 с.

[6] Eilenberg S., Steenrod N. Foundations Of Aglebraic Topology. - 1st изд. - Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1952. - 403 с.

[7] Poincare H. Analysis situs. - Ed. 1. - Paris: Journal de l'Ecole Polytechnique, 1895. - 123 с.