Температурная стационарная двумерная задача

Вихляев Е.С.

July 1, 2024

Abstract

В данной работе рассматривается задача стационарного распределения температуры в прямоугольной пластине размером 2 метра на 1 метр. Проблема формулируется как двумерное уравнение Лапласа с граничными условиями Дирихле. Распределение температуры определяется с использованием численных методов, в частности, метода конечных разностей. Полученные результаты дают представление о поведении температуры по всей пластине, что имеет практическое значение для управления тепловыми процессами в инженерных приложениях.

1 Постановка задачи

У прямоугольной пластины размером 2x1 м. левая и правая грани поддерживаются при температуре $50°$C, верхняя грань при температуре $100°$C, а нижняя грань при температуре $0°$C. Найти распределение температуры в пластине.

Запишем данную задачу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & \text{внутри пластины } (0 < x < 2, 0 < y < 1) \\ T(0, y) = 50 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ T(2, y) = 50 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ T(x, 0) = 0 & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ T(x, 1) = 100 & \text{при } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

2 Аналитическое решение задачи

Воспользуемся методом Фурье для решения данной системы.

Поскольку по x и y у нас отсутствуют два нулевых условия, то мы не сможем решить задачу Штурма-Лиувилля. Значит, разложим решение $T(x, y)$ на сумму двух линейных функций:

$$T(x, y) = V(x, y) + W(x, y).$$

Получим две подзадачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 & \text{внутри пластины } (0 < x < 2, 0 < y < 1)(1) \\ V(0, y) = 50 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ V(2, y) = 50 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ V(x, 0) = 0 & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ V(x, 1) = 0 & \text{при } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 & \text{внутри пластины } (0 < x < 2, 0 < y < 1) \\ W(0, y) = 0 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ W(2, y) = 0 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ W(x, 0) = 0 & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ W(x, 1) = 100 & \text{при } 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Так как функция $U(x, y)$ — линейна, то если функции $V(x, y)$ и $W(x, y)$ являются решениями уравнения Лапласа, то и $U(x, y)$ будет им являться.

2.1 Решим вспомогательную задачу для функции $V(x, y)$

Решим уравнение (1) методом разделения переменных

$$V(x, y) = X(x)Y(y).$$

Уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}X = 0$$
$$-\frac{Y''}{Y}\frac{X''}{X} = \lambda = const.$$

Отсюда получим два ОДУ:

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y (5) \\ X'' = \lambda X. (6) \end{cases}$$

Необходимо определить знак λ.

2.1.1 Случай 1

Пусть $\lambda < 0$, например $\lambda = -p^2$. Рассмотрим уравнение (5):

$$Y'' + \lambda Y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\xi^2 - p^2 = 0,$$
$$\xi = \pm p,$$
$$Y(y) = Ce^{py} + De^{-py}.$$

Рассмотрим уравнение (6):

$$X'' - \lambda X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 + p^2 = 0,$$
$$\omega^2 = -p^2,$$
$$\omega = \pm ip,$$

$$X(x) = Acos(px) + Bsin(px).$$

Таким образом,

$$U(x, y) = X(x)Y(y) = (Acos(px) + Bsin(px))(Ce^{py} + De^{-py}.$$

Удовлетворим краевым условиям:

$$V(x, 0) = (Acos(px) + Bsin(px))(C + D) = 0$$
$$V(x, 0) = X(x)(C + D) = 0$$

Но $X(x) \neq 0$, следовательно $C = -D$.

$$V(x, 1) = X(x)(Ce^p + De^{-p}).$$

Учитывая, что $C = -D$ имеем:

$$-De^p + De^{-p} = 0,$$
$$D(e^{-p} - e^p) = 0.$$

$D \neq 0$, следовательно $e^{-p} = e^p$ — это возможно только при $p = 0$, но тогда мы получим решение уравнения равное постоянной, а это не удовл. условиям.

2.1.2 Случай 2

Пусть $\lambda > 0$, например $\lambda = p^2$. Рассмотрим уравнение (6):

$$X'' - \lambda X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - p^2 = 0,$$
$$\omega^2 = p^2,$$
$$\omega = \pm p,$$

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Рассмотрим уравнение (5):

$$Y'' + \lambda Y = 0.$$

$$\xi^2 + p^2 = 0,$$
$$\xi = \pm ip,$$
$$Y(y) = Ccos(py) + Dsin(py).$$

Удовлетворим начальному условию.

$$V(x, y) = X(x)Y(y) = (Ae^{px} + Be^{-px})(Ccos(py) + Dsin(py)).$$

$$V(x, 0) = X(x)C = 0,$$

$X(x) \neq 0$, следовательно $C = 0$

$$V(x, 1) = X(x)(Ccos(p) + Dsin(p)) = 0,$$
$$Dsin(p) = 0.$$

Если $D = 0$, то решение тождественно раво нулю, а нам это не подходит, значит

$$sinp = 0,$$
$$p = \pi n, \text{ где} n \in Z.$$

Запишем решение задачи в виде ряда Фурье:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\pi nx} + B_n e^{-\pi nx})sin(\pi ny).$$

Удовлетворим начальным условиям:

$$V(0, y) = 50,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)sin(\pi ny) = 50,$$
$$A_n + B_n = 100\int_0^1 sin(\pi ny)dy.$$

Второе условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{2\pi n} + B_n e^{-2\pi n})sin(\pi ny) = 50,$$
$$A_n e^{2\pi n} + B_n e^{-2\pi n} = 100\int_0^1 sin(\pi ny)dy.$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_n + B_n = 100\int_0^1 sin(\pi n y)dy, \\ A_n e^{2\pi n} + B_n e^{-2\pi n} = 100\int_0^1 sin(\pi n y)dy. \end{cases}$$

Для решения системы и нахождения коэффициентов A_n и B_n, давайте разложим задачу на несколько шагов:

1. Вычисление интеграла

$$\int_0^1 \sin(\pi n y)\, dy$$

Этот интеграл можно решить аналитически:

$$\int_0^1 \sin(\pi n y)\, dy = \left[-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n y)\right]_0^1$$

2. Подстановка значения интеграла в уравнения

$$\begin{cases} A_n + B_n = 100 \cdot \left(-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n y)\right)_0^1 \\ A_n e^{2\pi n} + B_n e^{-2\pi n} = 100 \cdot \left(-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n y)\right)_0^1 \end{cases}$$

Вычислим значение интеграла:

$$\left[-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n y)\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - \cos(0)) = -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)$$

Для упрощения обозначим:

$$I = -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)$$

Таким образом, система примет вид:

$$\begin{cases} A_n + B_n = 100I \\ A_n e^{2\pi n} + B_n e^{-2\pi n} = 100I \end{cases}$$

3. Решение системы уравнений Решим систему уравнений для A_n и B_n:

$$\begin{cases} A_n + B_n = 100I \\ A_n e^{2\pi n} + B_n e^{-2\pi n} = 100I \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n = \dots \\ B_n = \dots \end{cases}$$

$$A_n = \frac{100I}{1 + e^{2\pi n}}, B_n = \frac{100I e^{2\pi n}}{1 + e^{2\pi n}}$$

где I - это значение интеграла:

$$I = -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)$$

Подставим I в выражения для A_n и B_n:

$$A_n = \frac{100 \cdot -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)}{1 + e^{2\pi n}},\ B_n = \frac{100 \cdot -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)e^{2\pi n}}{1 + e^{2\pi n}}$$

Таким образом, окончательные выражения для коэффициентов A_n и B_n будут:

$$A_n = \frac{-100(\cos(\pi n) - 1)}{\pi n(1 + e^{2\pi n})},\ B_n = \frac{-100(\cos(\pi n) - 1)e^{2\pi n}}{\pi n(1 + e^{2\pi n})}$$

Подставим найденные коэффициенты в решение:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100 \cdot -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)}{1 + e^{2\pi n}}e^{\pi n x} + \frac{100 \cdot -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)e^{2\pi n}}{1 + e^{2\pi n}}e^{-\pi n x}\right).$$

Так как $cos\pi n = (-1)^n$, то

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100 \cdot \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n)}{1 + e^{2\pi n}}e^{\pi n x} + \frac{100 \cdot \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n)e^{2\pi n}}{1 + e^{2\pi n}}e^{-\pi n x}\right)sin(\pi n y).$$

2.2 Решим задачу для $W(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 & \text{внутри пластины } (0 < x < 2, 0 < y < 1) \\ W(0,y) = 0 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ W(2,y) = 0 & \text{при } 0 \le y \le 1 \\ W(x,0) = 0 & \text{при } 0 \le x \le 2 \\ W(x,1) = 100 & \text{при } 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Аналогично:

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{\pi n y}{2}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{2}}) sin(\frac{\pi n x}{2}).$$

Проверим условия:

$$W(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n) sin(\frac{\pi n x}{2}) = 0.$$

$$A_n + B_n = 0 \; \forall n.$$

$$W(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{\pi n}{2}} + B_n e^{-\frac{\pi n}{2}}) sin(\frac{\pi n x}{2}) = 100,$$

$$A_n e^{\frac{\pi n}{2}} + B_n e^{-\frac{\pi n}{2}} = 100 \int_0^2 sin(\frac{\pi n x}{2}) dx.$$

Для нахождения коэффициентов необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \; \forall n, \\ A_n e^{\frac{\pi n}{2}} + B_n e^{-\frac{\pi n}{2}} = 100 \int_0^2 sin(\frac{\pi n x}{2}) dx. \end{cases}$$

$$A_n = -B_n,$$

$$-B_n e^{\frac{\pi n}{2}} + B_n e^{-\frac{\pi n}{2}} = 100 \int_0^2 sin(\frac{\pi n x}{2}) dx,$$

$$B_n = \frac{100}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \int_0^2 sin(\frac{\pi n x}{2}) dx = \frac{100}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n} = \frac{200}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}.$$

Следовательно

$$A_n = -\frac{200}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}.$$

Тогда

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{200}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} e^{\frac{\pi n y}{2}} + \frac{200}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} e^{-\frac{\pi n y}{2}}) sin(\frac{\pi n x}{2}).$$

Таким образом, решение исходного уравнения Лапласа с условиями выглядит следующим образом:

$$T(x,y) = V(x,y) + W(x,y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{100 \cdot \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n)}{1 + e^{2\pi n}} e^{\pi n x} + \frac{100 \cdot \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n) e^{2\pi n}}{1 + e^{2\pi n}} e^{-\pi n x}) sin(\pi n y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{200}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} e^{\frac{\pi n y}{2}} + \frac{200}{e^{-\frac{\pi n}{2}} - e^{\frac{\pi n}{2}}} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} e^{-\frac{\pi n y}{2}}) sin(\frac{\pi n x}{2}) =$$

$$= \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n(1 + e^{2\pi n})} \left(e^{\pi n x} + e^{\pi n(2 - nx)}\right) \sin(\pi n y) +$$

$$+\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n(e^{-\frac{\pi n}{2}}-e^{\frac{\pi n}{2}})}\left(-e^{\frac{\pi n y}{2}}+e^{-\frac{\pi n y}{2}}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)=$$

$$=\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{(e^{\pi n x}+e^{\pi n(2-nx)})sin(\pi n y)}{1+e^{2\pi n}}+2\frac{(-e^{\frac{\pi n y}{2}}+e^{\frac{\pi n y}{2}})sin(\frac{\pi n x}{2})}{e^{-\frac{\pi n}{2}}-e^{\frac{\pi n}{2}}}\right).$$

В итоге решние задачи:

$$T(x,y)=\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{(e^{\pi n x}+e^{\pi n(2-nx)})sin(\pi n y)}{1+e^{2\pi n}}+2\frac{(-e^{\frac{\pi n y}{2}}+e^{\frac{\pi n y}{2}})sin(\frac{\pi n x}{2})}{e^{-\frac{\pi n}{2}}-e^{\frac{\pi n}{2}}}\right).$$

3 Визуализация

Построим тепловую карту с помощью трех инструментов: Python и его библиотека Matplotlib; Wolfram; ANSYS.

3.1 Matplotlib

Приведем код построения графика на Python с помощью Matplotlib.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

width = 2.0
height = 1.0

nx, ny = 50, 50

dx = width / (nx - 1)
dy = height / (ny - 1)

T_top = 100.0
T_bottom = 0.0
T_left = T_right = 50.0

T = np.zeros((ny, nx))

T[:, 0] = T_left
T[:, -1] = T_right
T[-1, :] = T_top
T[0, :] = T_bottom

tolerance = 1e-6
max_iter = 10000

for _ in range(max_iter):
    T_old = T.copy()

    T[1:-1, 1:-1] = 0.25 * (T_old[1:-1, :-2] + T_old[1:-1, 2:] + T_old
        [:-2, 1:-1] + T_old[2:, 1:-1])

    if np.max(np.abs(T - T_old)) < tolerance:
        break

x = np.linspace(0, width, nx)
y = np.linspace(0, height, ny)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

plt.figure(figsize=(8, 4))
cp = plt.contourf(X, Y, T, levels=50, cmap='jet')
plt.colorbar(cp)
plt.title('Temperature distribution')
plt.xlabel('x (M)')
```

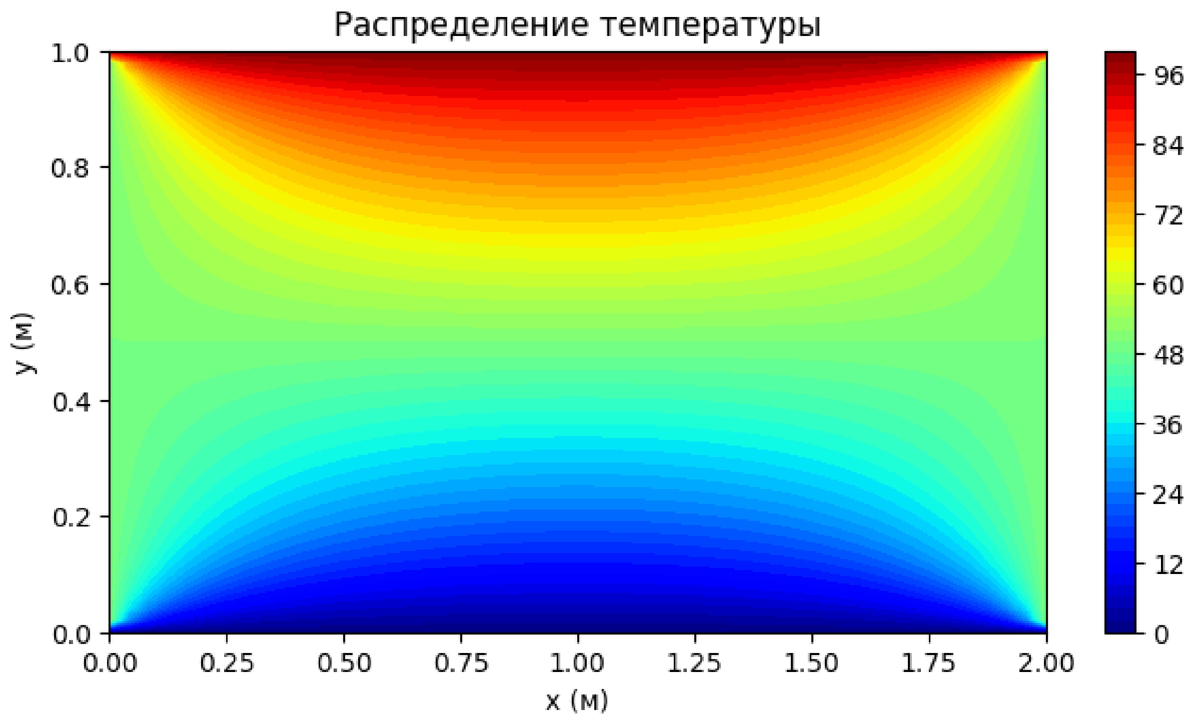

Figure 1: График в Matplotlib

```
plt.ylabel('y (M)')
plt.show()
```

Listing 1: Код в Matplotlib

3.2 Wolfram Alpha

Приведем код построения графика с помощью Wolfram Alpha.

```
width = 2;
height = 1;

bc = {
  T[0, y] == 50,
  T[width, y] == 50,
  T[x, height] == 100,
  T[x, 0] == 0
};

pde = D[T[x, y], {x, 2}] + D[T[x, y], {y, 2}] == 0;

solution = NDSolve[{pde, bc}, T, {x, 0, width}, {y, 0, height}];

temperaturePlot = Plot3D[Evaluate[T[x, y] /. solution], {x, 0, width}, {y, 0, height},
  PlotLabel -> "Temperature Distribution",
  AxesLabel -> {"x (M)", "y (M)", "T (C)"},
  ColorFunction -> "TemperatureMap"
];

temperaturePlot
```

Listing 2: Код в Wolfram Alpha

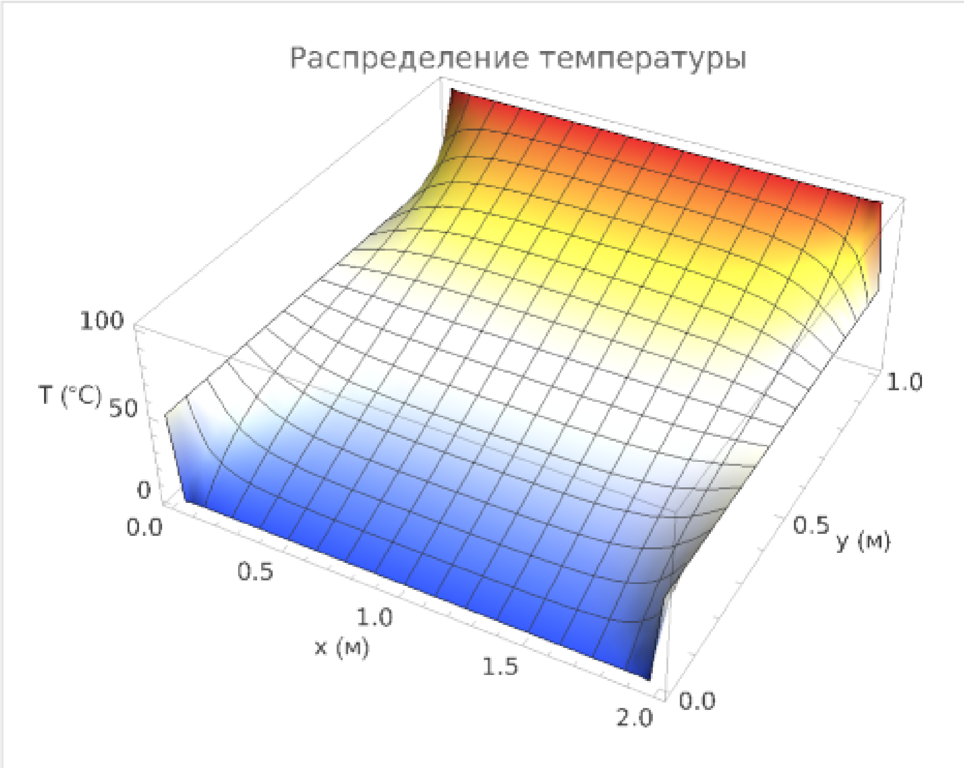

Figure 2: График в Wolfram Alpha

3.3 ANSYS

Приведем тепловую карту нагрузок, построенную в ANSYS.

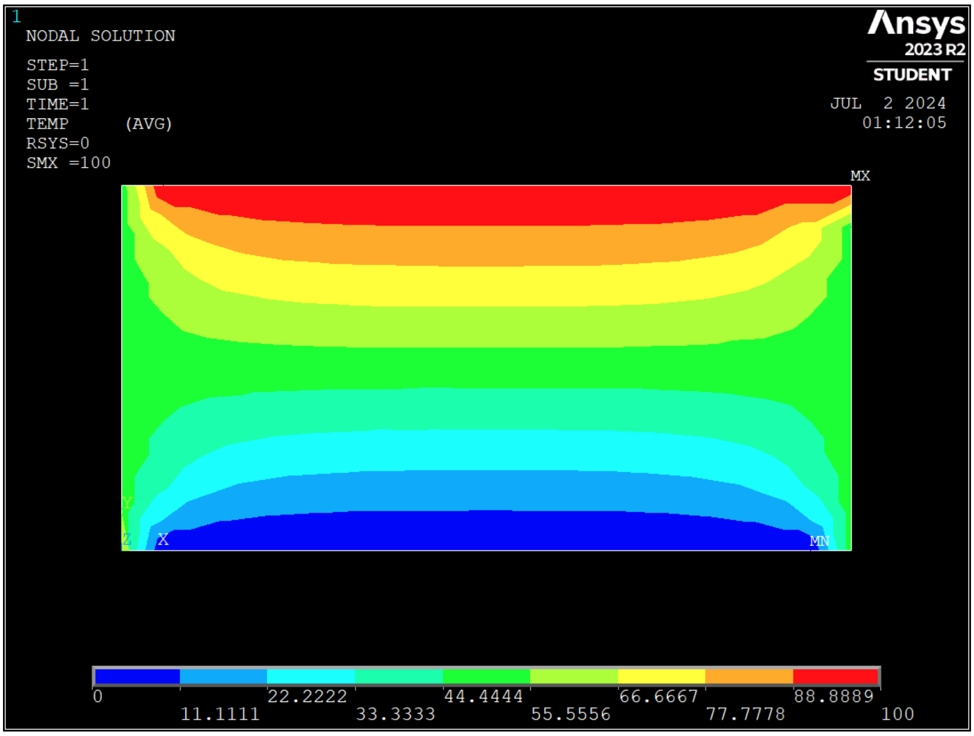

Figure 3: Тепловая карта в ANSYS

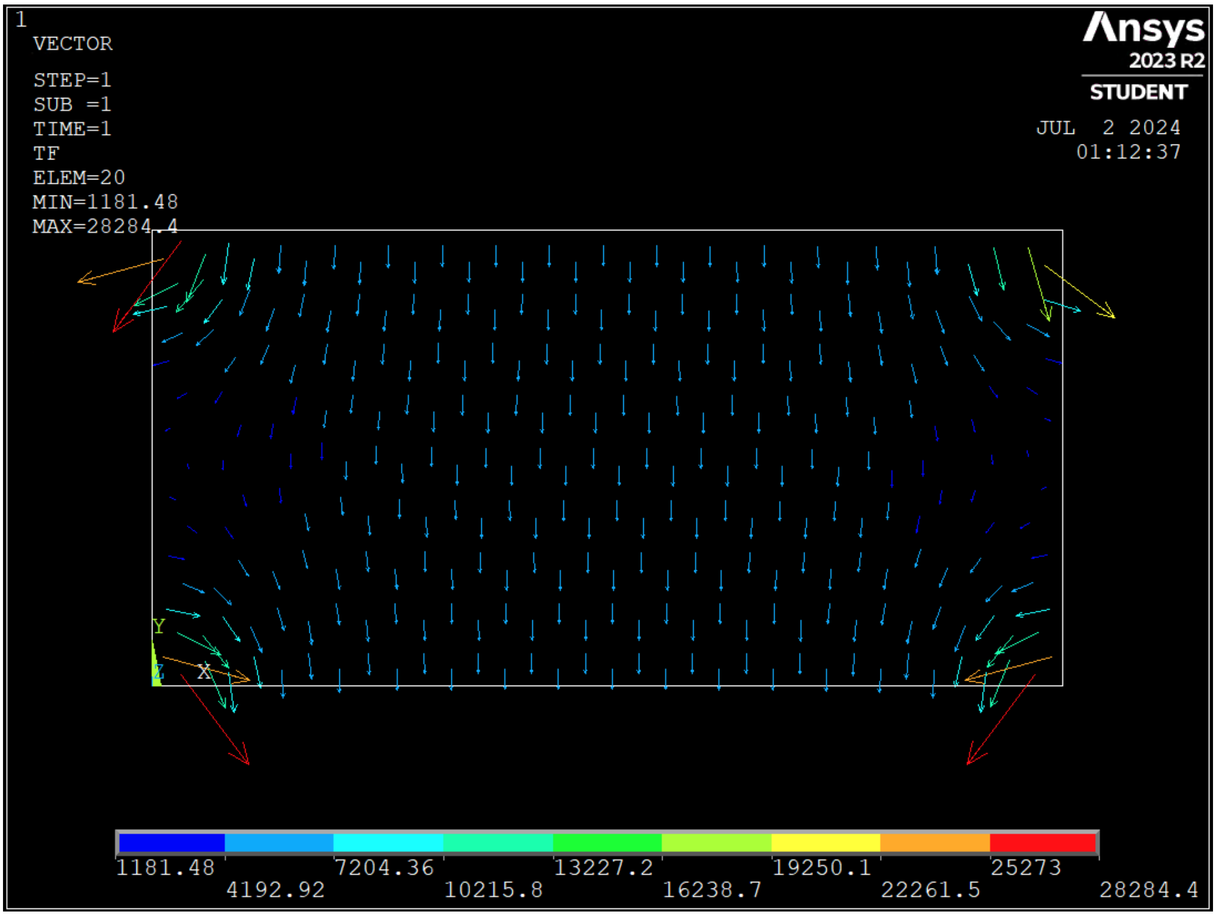

Figure 4: Векторная карта в ANSYS

4 Сравним результаты

Как видим, тепловые карты в различных программных пакетах выглядят одинаково. Это говорит о том, что задача решена верно.

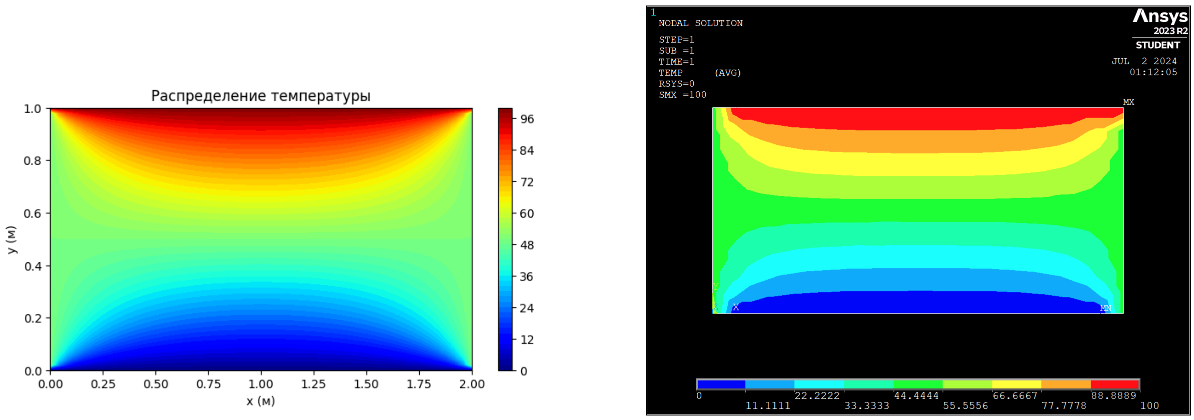

Figure 5: Сравнение графиков в Matplotlib и ANSYS