Тема: **«Полиномиальная интерполяция. Интерполяция кубическими сплайнами»**

Любая непрерывная функция на замкнутом интервале может быть хорошо приближена некоторым полиномом.

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей. Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$степень которого не больше n и выполняются условия: $L_n(x) = y_i, i = 0,1,...,n$. Будем искать $L_n(x)$ в виде:

$$L_n(x) = p_0(x)y_0 + p_1(x)y_1 + \ldots + p_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_i,$$

где $p_i(x)$— многочлен степени, т. е. $p_i(x)$только в одной точке отличен от нуля при $i = j$, а в остальных точках он обращается в нуль. Следовательно, все эти точки являются для него корнями:

$$p_i(x) = c(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n);$$

при $x = x_i$,

$$p_i(x_i) = \mathrm{c}(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n);$$
$$c = [(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)]^{-1};$$

подставим с в формулу $p_i(x)$
получим:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

отсюда

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i\ .$$

Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа. По исходной таблице формула позволяет весьма просто составить внешний вид многочлена.

Задания:

1) Для заданной функции $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ построить на отрезке [−1, 1] ее график вместе с графиком интерполяционного полинома Лагранжа для различных значений n:

а) с равноотстоящими узлами;

б) с чебышевскими узлами.

2) Исследовать (по графикам) отклонение ИП от исходной функции для функций $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке [−1, 1].

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционного многочлена. Этого можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей. При этом в точках стыка будет разрывна первая производная интерполяционных многочленов. В этом случае пользуются особым видом кусочно-полиномиальной интерполяцией - интерполяцией сплайнами.

Определение. Функция $S_m(x)$ называется интерполяционным сплайном порядка m для функции $f(x)$, заданной таблицей

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

если:

1) на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ $(i=0, 1, ..., n-1)$ $S(x)$ является многочленом порядка m;

2) $S(x)$ и ее производные до $(m-1)$-го порядка включительно непрерывны на $[x_0; x_n]$;

3) $S(x_i)=y_i$ $(i=0, 1, ..., n)$ — непосредственно условие интерполяции.

Можно доказать, что эти условия достаточны для существования сплайна порядка m $(m\geq 2)$, но не гарантируют его единственности.

Пример 4.7. Построить кубический сплайн для функции $y=f(x)$, заданной таблицей

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

с дополнительными условиями: $S''(-1)=S(2)=0$. Найти с помощью $S(x)$ значение функции $y=f(x)$ при $x=0{,}3$. (Заметим, что в основу таблицы положена функция $y=2^x$).

Учитывая, что $c_0=c_3=0$, систему (4.52) сведем всего к двум уравнениям:

$$\begin{cases} 4c_1+c_2=\dfrac{3}{2}; \\ c_1+4c_2=3. \end{cases}$$

Ее решение (будем в этом простейшем примере вести решение в простых дробях):

$$c_1=\frac{1}{5};\ c_2=\frac{7}{10}.$$

Далее находим по (4.51) значение коэффициентов d_i:

$$d_1=\frac{1}{15};\ d_2=\frac{1}{6};\ d_3=-\frac{7}{30}.$$

Теперь по формулам (4.48) находим коэффициенты b_i:

$$b_1=\frac{19}{30};\ b_2=\frac{23}{15};\ b_3=\frac{67}{30}.$$

Поскольку значения коэффициентов a_i — значения функции из таблицы (см. (4.42)), то сплайн построен:

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=1+\dfrac{19}{30}x+\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{15}x^3,\ x\in[-1;\ 0]; \\ P_2(x)=2+\dfrac{23}{15}(x-1)+\dfrac{7}{10}(x-1)^2+\dfrac{1}{6}(x-1)^3,\ x\in[0;\ 1]; \\ P_3(x)=4+\dfrac{67}{30}(x-2)-\dfrac{7}{30}(x-2)^3,\ x\in[1;\ 2]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия непрерывности $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ в точках $x=0$ и $x=1$ выполнены.

Для нахождения значения интерполирующей функции в заданной точке $x=0{,}3$ заметим, что $0{,}3\in[0;\ 1]$, и поэтому используем многочлен $P_2(x)$: $P_2(0{,}3)\approx 1{,}2125$. Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера: $2^{0{,}3}=1{,}2311$.

Задания:

1) Для заданной функции $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ построить на отрезке $[-1, 1]$ ее график вместе с графиком кубического сплайна для различных значений n. Исследовать (по графикам) отклонение кубического сплайна от исходной функции.

2) Построить кубический сплайн для функции, заданной таблицей. Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках. Построить график кубического сплайна и отобразить на нем узловые точки:

x	**2**	**3**	**5**	**7**
f(x)	**4**	**-2**	**6**	**-3**