Wie funktioniert ein Höhenmesser?

Höhenmesser. Ein Höhenmesser, wie er von Bergsteigern eingesetzt wird, mißt den Luftdruck (Barometer). Morgens wird der Höhenmesser auf die Höhe über N.N. und den aktuellen Luftdruck am Ausgangspunkt geeicht. Unter gewissen Annahmen über die Abnahme des Luftdrucks in Abhängigkeit von Temperatur und Höhe kann man aus den Luftdruckdaten zu einem späteren Zeitpunkt die inzwischen erreichte Höhe x zurückrechnen.

Aufgabenstellung. Um das ganze Problem konkret zu machen, gehen wir von folgender Situation aus: Ein Bergsteiger geht am Morgen um 8:00 Uhr in Garmisch-Partenkirchen (rund 700 m ü. N.N) los. Der Luftdruck beträgt zu diesem Zeitpunkt 1000 mbar, die Temperatur beträgt 18° C. Um 12:00 Uhr mißt der Höhenmesser des Bergsteigers einen Druck vom 938 mbar. In welcher Höhe befindet sich der Bergsteiger inzwischen?

Annahmen. So, wie das Problem angegeben worden ist, kann es noch nicht gelöst werden. Wir müssen (vereinfachende) Annahmen über die Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe treffen. Eine wesentliche Grundlage unserer weiteren Untersuchungen stellt die *ideale Gasgleichung* dar. Sie gibt einen Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen *Druck* p, *Temperatur* T (bezogen auf den absoluten Nullpunkt bei -273°C) und *Volumen* V einer bestimmten Masse m_g eines Gases an:

$$V = \frac{m_g RT}{\mu\, p}$$

In dieser Gleichung ist R eine physikalische Konstante, die ideale Gaskonstante (R=8.3145 J/molK). Sie gilt für alle idealen Gase. Hingegen ist μ eine stoffspezifische Konstante, nämlich die *molare Masse* (Masse einer Stoffmenge von $6.022\ 10^{23}$ Atomen der betreffenden Substanz; Luft ist ein Gemisch aus 78% Stickstoff, 21% Sauerstoff und 1% Argon). Die Masse eines mol Luft beträgt etwa 28.9 g/mol. p wird gemessen in Pa=N/m², T in K und V in m³. Die folgenden Betrachtungen gehen von der realistischen Annahme aus, daß der Bergsteiger während seiner Tour ausschließlich den Luftdruck mißt und daß ihm der Luftdruck und die Temperatur am Ausgangspunkt während der Tour nicht bekannt sind (kein permanenter Kontakt zu einer Wetterstation im Tal). Somit muß der Bergsteiger davon ausgehen, daß am Ausgangsort Temperatur und Luftdruck während der Tour unverändert bleiben, daß also sowohl Temperatur- als auch Druckunterschiede nur durch den Aufstieg bedingt sind.

Ein erster Ansatz. In einem ersten Ansatz wollen wir davon ausgehen, daß die Temperatur keinen Einfluß auf unsere Höhenmessung hat, daß also unabhängig von Ort und Zeit die Temperatur T=273+18=291 K beträgt. Unter dieser vereinfachenden Annahme können wir aus dem Druck am Boden den Druck in einer bestimmten Höhe über dem Boden ausrechnen.

Aus der allgemeinen Gasgleichung läßt sich natürlich auch die *Dichte* ρ der Luft (in kg/m³) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur ermitteln, wenn man die Definition der Dichte $\rho = m_g / V$ verwendet. Der Luftdruck entsteht durch die "Auflast" der "Luftsäule". Mit zunehmender Höhe x über dem Boden (wir setzen den Nullpunkt der x-Achse willkürlich, aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit, in Garmisch an) nimmt der Druck $p(x)$ ab, und zwar gemäß dem Gewicht der Luftsäule, die der Höhenzunahme entspricht. Wenn wir die Dichte der Luft kennen, können wir auch das Gewicht der Luftsäule ausrechnen, die Erdbeschleunigung ist g=9.81 m/s².

Differentialgleichung. Was im vorausgehenden Absatz in Worten geschildert worden ist, läßt sich mathematisch als *Differentialgleichung* ausdrücken: Die Änderung (Abnahme!) des Luftdrucks über ein Höheninkrement dx hinweg entspricht dem Gewicht der dabei durchmessenen infinitesimalen Luftsäule:

$$dp(x) = -dx \cdot \rho(x) \cdot g$$

Mit $\rho = m_g / V$ erhalten wir aus der allgemeinen Gasgleichung:

$$\frac{m_g}{\rho(x)} = \frac{m_g RT}{\mu \; p(x)}$$

bzw.

$$\rho(x) = p(x) \frac{\mu}{RT}$$

Setzen wir dies in die zuvor entwickelte Gleichung für die Druckabnahme ein, so erhalten wir:

$$dp(x) = -dx \cdot p(x) \frac{\mu}{RT} \cdot g$$

Es ergibt sich also folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} p(x) = -C \cdot p(x) \quad \text{mit } C = \frac{\mu g}{RT}$$

Zur Vereinfachung der Notation haben wir die Konstanten (auch die Temperatur T hatten wir ja vorerst als konstant betrachtet) zu einer neuen Konstante $C = \frac{0.0289 \cdot 9.81}{8.3145 \cdot 291} \frac{\frac{kg}{mol} \frac{m}{s^2}}{\frac{J}{mol \cdot K} \cdot K}$ bzw. $C = 1.172 \cdot 10^{-4} \frac{1}{m}$ zusammengefaßt.

Lösung der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dx} = -C \cdot p$$

kann durch Anwendung der *Methode der Trennung der Variablen* gelöst werden. Wir trennen x und p

$$\frac{dp}{p} = -C \cdot dx$$

und integrieren dann auf beiden Seiten formal:

$$\int \frac{dp}{p} = -C \cdot \int dx$$

Die Stammfunktionen sind analytisch bekannt, und wir erhalten:

$$\ln p = -Cx + K_1$$

Hierin ist K_1 eine zunächst noch unbekannte Konstante. Wir können die soeben berechnete Lösung nach p auflösen, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung die Potenz zur Basis e bilden, und finden so:

$$p(x) = \exp(-Cx + K_1) = \exp(-Cx) \cdot \exp(K_1) = K_2 \exp(-Cx)$$

Hierin ist K_2 eine neue Konstante. Ihren Wert können wir zunächst nicht bestimmen. Jedoch muß der Wert von K_2 so festgelegt werden, daß der Druck $p(x)$ für x=0 (Erdoberfläche) mit dem dort gemessenen Druck übereinstimmt:

$$p(x=0) = 1000\,\text{mbar} = 10^5\ \text{Pa} = 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Somit erhalten wir als erste Näherung für den Luftdruck in der Höhe x über dem Ausgangspunkt die Formel

$$p(x) = 10^5 \exp(-1.172 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot \frac{1}{\text{m}}) \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Bestimmung der Höhe. Nun sind wir fast am Ziel unserer ersten Modellierung. Wenn der Bergsteiger um 12:00 Uhr den Druck $p(x)$=0.938 bar mißt, dann brauchen wir diesen Druckwert nur auf der linken Seite in unsere Druckgleichung einzusetzen und können dann die Gleichung nach der unbekannten Höhe x des Bergsteigers über dem Ausgangspunkt auflösen:

$$0.938 \cdot 10^5 = 10^5 \exp(-1.172 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot \frac{1}{\text{m}})$$

Die Auflösung ergibt

$$x = \frac{\ln 0.938}{-1.172 \cdot 10^{-4}} \text{m} = 546\text{m}$$

Der Bergsteiger ist also recht langsam aufgestiegen und befindet sich inzwischen in einer Höhe von 1246m ü. N.N. Das entspricht ziemlich genau der Höhe des Gasthofs "Eckbauer".

Temperaturverlauf. Die Lufttemperatur ist weder vom Ort noch von der Zeit unabhängig. Insofern war unsere erste Berechnung etwas leichtfertig. Nach einer bekannten Faustregel nimmt die Lufttemperatur je 1000m Höhenaufstieg um etwa 6K ab. Man erhält dann folgende Formel:

$$T(x) = T_0 - Dx$$

mit D=0.006 K/m und der aktuellen Bodentemperatur T_0. Diese Formel für die Temperatur kann natürlich nur in unmittelbarer Nähe zur Erdoberfläche gelten, sonst wäre die Lufttemperatur in großer Höhe kleiner als der absolute Nullpunkt.

Erneute Bestimmung des Druckverlaufes und verbesserten Annahmen. Unter den Bedingungen einer mit der Höhe linear abnehmenden Temperatur gilt unsere vorherige Überlegung zum Druckverlauf nicht mehr. Vielmehr ist T jetzt eine Funktion von x, und wir erhalten

$$p'(x) = -\frac{\mu g}{R}\frac{1}{T(x)} p(x) = -G\frac{p(x)}{T(x)} \quad \text{mit } G\text{=0.0341}$$

Setzen wir $T(x) = T_0 - Dx$ ein, so können wir wiederum die Methode der Trennung der Variablen anwenden. Damit erhalten wir immer noch problemlos den verbesserten Druckverlauf

$$p(x) = K_2 (T_0 - Dx)^{G/D}$$

Die Integrationskonstante K_2 muß nun wieder so bestimmt werden, daß die Anfangsbedingung erfüllt ist.

Allerdings ist, wie wir oben schon angemerkt haben, auch die Annahme eines linearen Temperaturverlaufes wenigstens bei großer Höhe nicht mehr haltbar. Mit steigender Höhe x (in m über Boden) wird die Temperaturabnahme langsamer verlaufen. Man nehme an, daß die Temperaturabnahme der Formel

$$\frac{d}{dx}T(x) = -D\frac{b}{b+x}$$

gehorche, mit D=6 K/km und $T(0)$=291 K und b=1000. Das bedeutet, daß die Temperatur nur anfangs um 6K je 1000 Höhenmeter abnimmt. In einer Höhe von x=1000m haben wir hingegen nur noch ein halb so großes Temperaturgefälle. Man kann sich streiten, ob dieses Modell gerechtfertigt ist, aber wir wollen es hier spaßeshalber ebenfalls einmal verwenden.

Die angegebene Gleichung für die Temperatur ist wieder eine Differentialgleichung, die analog zur Druckgleichung durch Trennung der Variablen analytisch gelöst werden kann. Man findet damit die Lösung

$$T(x) = T(0) + bD\ln(b) - bD\ln(b+x) .$$

Dieser Temperaturverlauf geht zwar für große Höhe immer noch gegen $-\infty$, aber langsamer als vorher, ist also in einem größeren Höhenbereich brauchbar. Um den Temperaturverlauf zu erhalten, muß man die Anfangsbedingung für die Temperatur bei x=0 verwenden.

Den hergeleiteten Temperaturverlauf kann man wieder in die Differentialgleichung des Druckes

$$p'(x) = -\frac{\mu g}{R}\frac{1}{T(x)}p(x) = -G\frac{p(x)}{T(x)} \text{ mit } G=0.0341$$

einsetzen. Die analytische Lösung dieses Problems mit nichtkonstanten Koeffizienten mit der Methode der Trennung der Variablen ist wegen des nichtlinearen Ausdrucks für $T(x)$ jetzt nicht mehr so einfach. Bequemer ist es sicher, nunmehr zu einer numerischen Lösung überzugehen.

© 2004 Prof. Dr.-Ing. Stefan M. Holzer, Institut für Mathematik und Bauinformatik, Universität der Bundeswehr München