# *Logik*

## Aussagenlogik

**Aussage** Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

**Theoreme** sind wahre Aussagen.

## Junktoren

**Negation** $\neg\mathcal{A}$ „Nicht“ (`!`, `~`, )

**Konjunkt.** $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ „und“ (`&&`, )

**Disjunkt.** $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ „oder“ (`||`, )

**Implikat.** $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „Wenn, dann“ / „zwingt“ ($\rightarrow$, `if`)

**Äquiv.** $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ „Genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$, $\equiv$, `==`, )

**Wahrheitswertetabelle** mit $2^n$ Zeilen für $n$ Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\neg\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

❧ ❧ ❧

| Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$ | | Bezeichnung |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | $B \wedge A$ | Kommutativ |
| $A \vee B$ | $B \vee A$ | |
| $A \wedge (B \wedge C)$ | $(A \wedge B) \wedge C$ | Assoziativ |
| $A \vee (B \vee C)$ | $(A \vee B) \vee C$ | |
| $A \wedge (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributiv |
| $A \vee (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | |
| $A \wedge A$ | $A$ | Idempotenz |
| $A \vee A$ | $A$ | |
| $\neg\neg A$ | $A$ | Involution |
| $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | DE-MORGAN |
| $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | |
| $A \wedge (\mathbf{A} \vee B)$ | $A$ | Absorption |
| $A \vee (\mathbf{A} \wedge B)$ | $A$ | |
| $A \Rightarrow B$ | $\neg\mathbf{A} \vee B$ | Elimination |
| $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ | |
| $A \Leftrightarrow B$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ | |

## Axiomatik

**Axiome** als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen.

Anspruch, aber nach GÖDELS Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

## Prädikatenlogik

**Quantoren** Innerhalb eines Universums:

**Existenzq.** $\exists$ „Mind. eines“

**Individuum** $\exists!$ „Genau eines“

**Allq.** $\forall$ „Für alle“

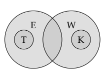
**Quantitative Aussagen**

**Erfüllbar** $\exists x F(x)$

**Widerlegbar** $\exists x \neg F(x)$

**Tautologie** $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

**Kontradiktion** $\perp = \forall x \neg F(x)$




| Klassische Tautologien | Bezeichnung |
|---|---|
| $A \vee \neg A$ | Ausgeschlossenes Drittes |
| $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ | Modus ponens |
| $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | Abschwächung |
| $A \Rightarrow (A \vee B)$ | |

**Negation** (DE-MORGAN)

$$\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$
$$\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

## Häufige Fehler

- $U = \emptyset^{\complement}$ nicht notwendig
- $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x P(x)$
- $\neg\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg\exists y P(x,y)$

## Beweistechniken □

**Achtung:** Aus falschen Aussagen können wahre *und* falsche Aussagen folgen.

**Direkt** $A \Rightarrow B$ Angenommen $A$, zeige $B$. Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (*Kontraposition*).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

**Fallunters.** Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

**Widerspruch** $(\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg\mathbf{B}$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

**Ring** (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{A}$$

**Induktion** $F(n)$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. **Anfang:** Zeige $F(n_0)$.
2. **Schritt:** Angenommen $F(n)$ (Hypothese ), zeige $F(n+1)$ (Behauptung ).

**Starke Induktion:** Angenommen $F(k)$ $\forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

## Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquival. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

# *Naive Mengenlehre*

**Mengen** Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

**Element** $x \in M$ „enthält“

**Leere M.** $\emptyset = \{\}$

**Universum** $U$

**Einschränkung** $\{x \mid F(x)\}$

## Relationen

**Teilmenge** $N \subseteq M$ $\Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$

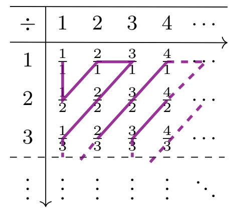
**Gleichheit** $M = N$ $\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

## Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$
$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

**Abzählbar** $\exists f_{\text{surj.}} : \mathbb{N} \to M$

- Endliche Mengen, $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ $(= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \dots\})$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$



$$f(1) = 0, \mathbf{r_{11}} r_{12} r_{13} r_{14} \dots$$
$$f(2) = 0, r_{21}\, \mathbf{r_{22}}\, r_{23} r_{24} \dots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32}\, \mathbf{r_{33}}\, r_{34} \dots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43}\, \mathbf{r_{44}} \dots$$
$$\vdots$$

(CANTORS Diagonalargumente )

## Operationen

**Vereinig.** $M \cup N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

**Schnitt** $M \cap N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ ($= \emptyset$ „disjunkt“)

**Diff.** $M \setminus N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

**Komplement** $M^{\complement}$ $\{x \mid x \notin M\}$

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

## Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$ , nicht $\forall M : \emptyset \in M$

## Quantitative Relationen

Sei Indexmenge $I$ und Mengen $M_i$ $\forall i \in I$.

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

### Neutrale Elemente

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen")
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ („wegnehmen")

### Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

## Abbildungen

**Abbildung $\mathbf{f}$** von $X$ (Definitionsb.) nach $Y$ (Werteb.) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

$$\mathbf{f} : X \to Y$$

**Graph** $\mathrm{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

**Identität**

$$\mathrm{id}_A : A \to A$$
$$\mathrm{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

**Umkehrfunktion** $f^{-1} : Y \to X$ wenn $f$ bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$

### Eigenschaften

**Injektiv** $\forall x_1, x_2 \in X$ : $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Surjektiv** $\forall y \in Y \exists x \in X : \mathbf{y} = \mathbf{f(x)}$

**Bijektiv** wenn injektiv und surjektiv

**Verkettung** $f \circ g : A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & C \end{tikzcd}$$

## Relationen

### Kartesisches Produkt

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

**Relation $\sim$** von/auf $M$ nach $N$ ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m,n) \in R$$

**$\equiv$ Reflexiv** $\forall x \in M : (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

**Irreflexiv** $\forall x \in M : (x,x) \notin R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

**$\equiv$ Sym.** $\forall (x, \mathbf{y}) \in R : (\mathbf{y}, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

**Antis.** $\forall x,y : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
$\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

**$\equiv$ Transitiv** $\forall \mathbf{x}, y, \mathbf{z} : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in R$
$\Leftrightarrow R;R \subseteq R$

**Vollst.** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$
$\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

## Spezielle Relationen

**Inverse Relation** $R^{-1}$ mit $R \in M \times N := \{(n,m) \in N \times M \mid (m,n) \in R\}$

**Komposition** $R;R$ mit $R' \in N \times P := \{(m,p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m,n) \in R \wedge (n,p) \in R'\}$

**Leere Relation** $\emptyset$

**Identität $\mathrm{id}_M$** $:= \{(m,m) \mid m \in M\}$ $(=)$

**Allrelation** $M \times M$

**Äquivalenzrelation $\equiv$** reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

**Äquivalenzklasse $[\mathbf{m}]_\equiv$** auf $M$, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

**Zerlegung $\mathcal{N}$** $\subseteq \mathcal{P}(M)$ von $M$.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$ $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

**Quotient $(\mathbf{M}/\equiv)$** Sei $\equiv$ ÄR. auf $M$. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

# *Analysis*

## Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

### Angeordnete Körper

(Gilt auch für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)

**Körperaxiome** $(\mathbb{R}, +, *)$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

**Addition** $(\mathbb{R}, +)$

**Assoziativität**
$a + (b + c) = (a + b) + c$

**Kommutativität**
$a + b = b + a$

**Neutrales Element Null**
$a + 0 = a \quad 0 \in \mathbb{R}$

**Inverses „Negativ"**
$a + (-a) = 0 \quad (-a) \in \mathbb{R}$

**Multiplikation** $(\mathbb{R}, *)$

**Assoziativität** $a * (b * c) = (a * b) * c$

**Kommutativität** $a * b = b * a$

**Neutrales Element Eins**
$a * 1 = a \quad 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Inverses „Kehrwert"**
$a * (a^{-1}) = 1$
$a \mathbf{\neq 0}, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$

**Distributivität**
$\mathbf{a} * (b + c) = \mathbf{a} * b + \mathbf{a} * c$

### Totale Ordnung

**Transitivität**
$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

**Trichotomie** Entweder
$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
$\Rightarrow$ *Irreflexivität* $(a < b \Rightarrow a \neq b)$

**Addition**
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

**Multiplikation**
$a < b \Rightarrow a * c < b * c \quad 0 < c$

Bei Additiver oder Multiplikativer Inversion dreht sich die Ungleichung.

## Archimedes Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$
$$n > \frac{1}{x}$$

## Teilbarkeit

$$a | b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : b = a * n$$

($\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

## Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x < 0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

## Operationen

### Brüche

- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$
- $\frac{a}{b} \overset{*\mathbf{d}}{=} \frac{a*\mathbf{d}}{b*\mathbf{d}}$
- $\frac{a}{\mathbf{c}} + \frac{b}{\mathbf{c}} = \frac{a+b}{\mathbf{c}}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$

**Wurzeln** $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{\mathbf{a} * \mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}} * \sqrt[n]{\mathbf{b}}$
- $\sqrt[\mathbf{n}]{\sqrt[\mathbf{m}]{a}} = \sqrt[\mathbf{n*m}]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

**Potenzen** $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

- $a^{\mathbf{x}} * b^{\mathbf{x}} = (a * b)^{\mathbf{x}}$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

## Intervalle

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a_0 \in A$.

**Geschlossen** $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(„Ecken sind mit enthalten")

**Offen** $(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Bei $\infty$ immer offen, da $\infty \notin \mathbb{R}$)

### Kleinstes/Größtes Element

**Minimum** $\min(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a_0} \leq a$

**Maximum** $\max(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a} \leq a_0$

$(\nexists^{\min}/_{\max}(a;b))$

**Beschränktheit** $A$ heißt

**Oben beschränkt** $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s$

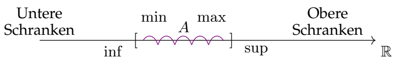
**Unten beschränkt** $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a$

**Vollständigkeit**

**Infimum (klein)** $\inf(A)$
$:= \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a\}$

**Supremum (groß)** $\sup(A)$
$:= \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s\}$

**Vollständigkeitsaxiom** $\exists \sup(A)$.




## Folgen

**Folge** $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ in $A$ ist eine Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ mit $a_n = f(n)$.

**Arithmetische Folge** $a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a + (n-1) * d \quad d, a \in \mathbb{R}$

**Geometrische Folge** $a_{n+1} = a_n * q$
$a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R}$

**Rekursion** $a_n$ ist auf $\mathbf{a_{n-1}}$ definiert.

$$a_{n+1} = F(n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$F : A \times \mathbb{N} \to A$$

**Primfaktorzerlegung** $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\exists p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P} : n = \mathbf{p_1} * \cdots * \mathbf{p_n}$$

## Summen und Produkte

**Summe** $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \cdots + n$

**Produkt** $\prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * 3 * \cdots * n$

**Fakultät** $n! = \prod^n i$ $(\mathbf{0! = 1})$

**Gaussche Summe** $n \in \mathbb{N}$

$$\sum^n i = \frac{n*(n+1)}{2}$$

**Geom. Summe** $q \in \mathbb{R}\ \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Bernoulli Unglei.** $n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + n * x$$

**Binom. Koeff.** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$

- Rechnen: $\frac{n>k}{0<(n-k)}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

**Binomischer Satz** $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$$

## Grenzwerte

**Betrag** $|x| := \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -\ x & x < 0 \end{cases}$

**Lemma** $|x * y| = |x| * |y|$

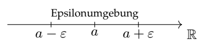
**Dreiecksungleichung** $|x+y| \leq |x| + |y|$

**Umgekehrte Dreiecksungleichung**
$||x| - |y|| \leq |x - y|$

## Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 :$$
$$|\mathbf{a_n} - \mathbf{a}| \leq \varepsilon$$
$$(a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon)$$




- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow \mathbf{lim}_{n\to\infty} a_n = a$

Beschränkt + monoton $\Rightarrow$ konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \mathbf{inf}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{fall.} \\ \mathbf{sup}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{steig.} \end{cases}$$

**Nullfolgen** $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \mathbf{0} \quad k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} n * q^n = \mathbf{0}$

**Folgen gegen 1**

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \mathbf{1} \quad a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \mathbf{1}$

**Bestimmt Divergent**

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\infty} \Leftrightarrow$$
$$\forall R > 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$$
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{-\infty} \Leftrightarrow$$
$$\forall R < 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq R$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = \mathbf{0} & (-1;1) \\ = \mathbf{1} & = 1 \\ \geq \infty & > 1 \\ \text{div.} & \leq -1 \end{cases}$$

**Monotonie**

**Monoton fallend**
$a_n \underset{\text{(streng)}}{\geq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Monoton steigend**
$a_n \underset{\text{(streng)}}{\leq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Beschränktheit**

$$\exists k > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |\mathbf{a_n}| \leq \mathbf{k}$$

- Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
- Unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

## Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$
  $\Rightarrow a = b$ (Max. einen Grenzw.)
- $a = \mathbf{0} \wedge (b_n)_{beschr.}$
  $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n * b_n = \mathbf{0}$
- $a_n \leq b_n \Leftrightarrow a \leq b$ (nicht $<$)
- $\lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_n \pm b_n = a \pm b \\ a_n \divideontimes b_n = a \divideontimes b \\ a_n * c = a * c \\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \\ |a_n| = |a| \end{cases}$

**Einschachtelungssatz**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$
$$\forall n \geq N \in \mathbb{N} : \mathbf{a_n} \leq \mathbf{c_n} \leq \mathbf{b_n}$$
$$(\exists) \lim_{n\to\infty} c_n = \mathbf{a}$$

## Spezielle Folgen

**Teilfolge** *streng mnt.* Folge $(b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $b_k = \mathbf{a_{n_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n\,k} = a$$

(da $n_k$ mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \exists (a_{n\,k})_{k\in\mathbb{N}_{mnt.}}$$

(nicht streng!)

**Häufungspunkt** $h$ mit einer Teilfolge

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\,k} = h$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists! : h = a$

**Bolzano-Weierstrass**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{beschr.}} \Rightarrow \exists h_{Häuf.}$$

(Teilfolge + (beschr.) $\Rightarrow \exists$ Häuf.)

## Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 :$$
$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

**Vollständigkeit von $\mathbb{R}$**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{Cauchy}} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}}$$
$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{beschr.}}}$$
$$\Rightarrow \exists h \quad \text{(BW)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = h)$$