Logik

Aussagenlogik

Aussage Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

Theoreme sind wahre Aussagen.

Junktoren

NEGATION $\neg\mathcal{A}$ „Nicht“ (!, ~,)

KONJUNKT. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ „und“ (&&,)

DISJUNKT. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ „oder“ (||,)

IMPLIKAT. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „Wenn, dann“ / „$\mathcal{B}$“ ($\rightarrow$, `if`)

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „$\mathcal{A}$ hinreichend“

$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ „$\mathcal{A}$ notwendig“

ÄQUIV. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ „Genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$, $\equiv$, ==,)

Wahrheitswertetabelle mit 2^n Zeilen für n Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

❧ ❧ ❧

Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativ
$A \vee B$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativ
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributiv
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$A \wedge A$	A	Idempotenz
$A \vee A$	A	
$\neg\neg A$	A	Involution
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	DE-MORGAN
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	
$A \wedge (\mathbf{A} \vee B)$	A	Absorption
$A \vee (\mathbf{A} \wedge B)$	A	
$A \Rightarrow B$	$\neg\mathbf{A} \vee B$	Elimination
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	

Axiomatik

Axiome als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen.

Anspruch, aber nach GÖDELS Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

Prädikatenlogik

Quantoren Innerhalb eines Universums:

EXISTENZQ. $\exists$ „Mind. eines“

INDIVIDUUM $\exists!$ „Genau eines“

ALLQ. $\forall$ „Für alle“

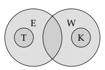
Quantitative Aussagen

ERFÜLLBAR $\exists x F(x)$

WIDERLEGBAR $\exists x \neg F(x)$

TAUTOLOGIE $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

KONTRADIKTION $\bot = \forall x \neg F(x)$



Klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$	Modus ponens
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	Abschwächung
$A \Rightarrow (A \vee B)$	

Negation (DE-MORGAN)

$$\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$
$$\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

Häufige Fehler

- $U = \emptyset^\complement$ nicht notwendig
- $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \not\Rightarrow \exists x P(x)$
- $\neg\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg\exists y P(x,y)$

Beweistechniken □

Achtung: Aus falschen Aussagen können wahre *und* falsche Aussagen folgen.

DIREKT $A \Rightarrow B$ Angenommen A, zeige B. Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (*Kontraposition*).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

FALLUNTERS. Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

WIDERSPRUCH $(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg\mathbf{B}$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

RING (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{A}$$

INDUKTION $F(n)$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. ANFANG: Zeige $F(n_0)$.
2. SCHRITT: Angenommen $F(n)$ (Hypothese), zeige $F(n+1)$ (Behauptung).

STARKE INDUKTION: Angenommen $F(k)$ $\forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquival. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

Naive Mengenlehre

Mengen Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

ELEMENT $x \in M$ „enthält“

LEERE M. $\emptyset = \{\}$

UNIVERSUM U

EINSCHRÄNKUNG $\{x \mid F(x)\}$

Relationen

TEILMENGE $N \subseteq M$ $\Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$

GLEICHHEIT $M = N$ $\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ & M \text{ injekt.} \Leftrightarrow M \text{ surj.} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$

$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

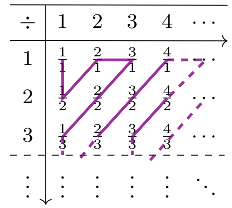
Kardinalität ÄK. für Gleichmächtigkeit

$$|M| \leq |N| \Leftarrow \exists f_{\text{injekt.}} : M \to N$$

- $M \subseteq N \Rightarrow |M| \leq |N|$
- $|M| \leq |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{surj.}} : N \to M$ (AC)

Abzählbar $|M| \leq |\mathbb{N}|$

- Endliche Mengen, $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ $(= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots\})$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$



$$f(1) = 0, \mathbf{r_{11}} r_{12} r_{13} r_{14} \ldots$$
$$f(2) = 0, r_{21}\, \mathbf{r_{22}}\, r_{23} r_{24} \ldots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32}\, \mathbf{r_{33}}\, r_{34} \ldots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43}\, \mathbf{r_{44}} \ldots$$
$$\vdots$$

(CANTORS Diagonalargumente)

Operationen

VEREINIG. $M \cup N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

SCHNITT $M \cap N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ ($= \emptyset$ „disjunkt“)

DIFF. $M \setminus N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

KOMPLEMENT $M^\complement$ $\{x \mid x \notin M\}$

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$, nicht $\forall M : \emptyset \in M$

Quantitative Relationen

Sei Indexmenge I und Mengen M_i $\forall i \in I$.

Benedikt Schöps (@m4dh0rs3) <schoeps.benedikt@gmail.com>, 7. Januar 2023

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$
$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

Neutrale Elemente

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen“)
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ („wegnehmen“)

Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

Satz von Cantor $\quad |M| < |\mathcal{P}(M)|$

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

- Menge der Kardinalitäten $\mathcal{K}$ ist unendlich

Satz von Hartogs (AC) $\quad (\mathcal{K}, \preceq)$ ist total geordnet

❧ ❧ ❧

$$|(0,1)| = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

Kontinuumshypothese

$$\nexists M : |\mathbb{N}| < |M| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$

Auswahlaxiom (AC)

Für Menge $\mathcal{X}$ nicht-leerer Mengen:

$$\exists c : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$$
$$\forall X \in \mathcal{X} : c(X) \in X$$

Nutzung kennzeichnen!

- unabh. vom ZFC

Relationen

Kartesisches Produkt

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \\ |x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

Relation $\sim$ von/auf M nach N ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m,n) \in R$$

$\equiv$ Reflexiv $\forall x \in M : (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

Irreflexiv $\forall x \in M : (x,x) \notin R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$ Sym. $\forall (x, \mathbf{y}) \in R : (\mathbf{y}, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

$\preceq$ Antis. $\forall x, y : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
$\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

$\equiv$ Transitiv $\forall \mathbf{x}, y, \mathbf{z} : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in R$
$\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

Vollst. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$
$\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

Spezielle Relationen

Inverse Relation R^{-1} mit $R \in M \times N := \{(n,m) \in N \times M \mid (m,n) \in R\}$

Komposition $R;R$ mit $R' \in N \times P := \{(m,p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m,n) \in R \wedge (n,p) \in R'\}$

Leere Relation $\emptyset$

Identität $\mathrm{ID}_M := \{(m,m) \mid m \in M\}$ $(=)$

Allrelation $M \times M$

Äquivalenzrelation $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

Äquivalenzklasse $[\mathbf{m}]_\equiv$ auf M, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

Zerlegung $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von M.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$
  $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

Quotient $(\mathbf{M}/\equiv)$ Sei $\equiv$ ÄR. auf M. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

(Korrespondiert zur ÄK.)

Ordnungsrelation $\preceq$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Minimale x $\forall m \in M \setminus \{x\} : m \npreceq x$

Untere Schranken $m \in \downarrow X$
$\forall x \in X : m \preceq x$

- ${}^{\downarrow}/{}_{\uparrow}\emptyset = M$

Kleinstes $\min_\preceq X \in X$

Infimum $\max \downarrow X$

- $\inf\{x,y\} = x \wedge y$
- $\sup\{x,y\} = x \vee y$

Totale Ordnung + vollständig (Trichotomie)

Abbildungen

Abbildung f von X (Definitionsb.) nach Y (Werteb.) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

Totalität $\forall x \in X \exists y \in Y : f(x) = y$

Eindeutigkeit $\forall x \in X \forall a, b \in Y : f(x) = a \wedge f(x) = b \Rightarrow a = b$

$$\mathbf{f} : X \to Y$$

Bilder $f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\} \quad X' \subseteq X$

Urbilder $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\} \quad Y' \subseteq Y$

Graph $\mathrm{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

Identität

$$\mathrm{id}_A : A \to A$$
$$\mathrm{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$
wenn f bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ bzw. $f; f^{-1} = \mathrm{id}_X \wedge f^{-1}; f = \mathrm{id}_X$

Für die Relation f^{-1} gilt:

- $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$
- $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ falls f surjektiv

Eigenschaften

Injektiv $\forall x_1, x_2 \in X :$
$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektiv $\forall y \in Y \exists x \in X : \mathbf{y} = \mathbf{f(x)}$

Bijektiv/Invertierbar wenn injektiv und surjektiv

Cantor-Schröder-Bernstein

$$\left.\begin{array}{l} f : M \to N \\ g : N \to M \end{array}\right\} \text{injekt.}$$
$$\Rightarrow \exists B_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

Fixpunkt $\quad f(m) = m$
Sei $X \subseteq Y \subseteq M$, $f : M \to N$

- $f(X) \subseteq f(Y)$ (Monotonie)
- $M \setminus Y \subseteq M \setminus X$
- $M \setminus (M \setminus X) = X$

Knaster-Tarski-Lemma Sei $X \subseteq Y \subseteq M \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$ (monoton), dann hat $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ einen Fixpunkt

Verkettung $\quad f \circ g : A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & C \end{tikzcd}$$

Verbände

Sei $(M, \preceq)$ teilweise geordnet

$$\forall m, n \in M \exists^{\inf}/_{\sup}\{m,n\}$$

- Dann gilt Kommutativität, Assoziativität, Distributivität

Vollständig $\quad \forall X \subseteq M : \exists^{\inf}/_{\sup} X$

- $\exists^{\min}/_{\max} M = {}^{\sup}/_{\inf}\emptyset$
- Jede endliche nicht-leere Menge ist vollständig

Distributivität

$$\forall x, y, z \in M :$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- Jede total geordnete Menge und alle Ketten ist distributiv
- Keine Unterstruktur isomorph zu M_3 $(l \vee (m \wedge r))$ oder N_5 $(l_\perp \vee (r \wedge l_\top))$

Algebraische Strukturen

$$\mathcal{U} = (U, \langle R_1, \ldots, R_k\rangle, \langle f_1, \ldots, f_l\rangle, \\ \langle g_1, \ldots, g_m\rangle, \langle c_1, \ldots, c_n\rangle)$$

des Types (k, l, m, n)

- Grundmenge U
- Relationen R_i auf U
- Binäre Funktionen f_i auf U
- Unäre Funktionen g_i auf U
- Konstanten c_i auf U (Beschränken mögliche Isomorphismen)

Isomorphismus $\quad \varphi : U \to U'$

- $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ gleichen Typs
- φ bijektiv
- $(u_1, u_2) \in R_i \Leftrightarrow (\varphi(u_1), \varphi(u_2)) \in R_i'$
- $\varphi(f_i(u_1, u_2)) = f_i'(\varphi(u_1), \varphi(u_2))$

- $\varphi(g_i(u)) = g_i'(\varphi(u))$
- $\varphi(c_i) = c_i'$

φ ist ÄR. auf algebraischen Strukturen gleichen Typs

Unterstruktur $\mathcal{U}$ von $\mathcal{O}$

- $\mathcal{U}$ und $\mathcal{O}$ gleichen Typs
- $U \subseteq O$
- $(u_1, u_2) \in R_i' \Leftrightarrow (u_1, u_2) \in R_i$
- $f_i'(u_1, u_2) = f_i(u_1, u_2)$
- $g_i'(u) = g_i(u)$
- $c_i' = c_i$

Analysis

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Angeordnete Körper

(Gilt auch für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)

Körperaxiome $(\mathbb{R}, +, *)$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

ADDITION $(\mathbb{R}, +)$

ASSOZIATIVITÄT
$a + (b + c) = (a + b) + c$

KOMMUTATIVITÄT
$a + b = b + a$

NEUTRALES ELEMENT NULL
$a + 0 = a \quad 0 \in \mathbb{R}$

INVERSES „NEGATIV“
$a + (-a) = 0 \quad (-a) \in \mathbb{R}$

MULTIPLIKATION $(\mathbb{R}, *)$

ASSOZIATIVITÄT $a*(b*c) = (a*b)*c$

KOMMUTATIVITÄT $a * b = b * a$

NEUTRALES ELEMENT EINS
$a * 1 = a \quad 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

INVERSES „KEHRWERT“
$a * (a^{-1}) = 1$
$a \neq \mathbf{0}, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$

DISTRIBUTIVITÄT
$\mathbf{a} * (b + c) = \mathbf{a} * b + \mathbf{a} * c$

Totale Ordnung

TRANSITIVITÄT
$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

TRICHOTOMIE Entweder
$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
$\Rightarrow$ *Irreflexivität* $(a < b \Rightarrow a \neq b)$

ADDITION
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

MULTIPLIKATION
$a < b \Rightarrow a * c < b * c \quad 0 < c$

Bei Additiver oder Multiplikativer Inversion dreht sich die Ungleichung.

ARCHIMEDES Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

$$n > \frac{1}{x}$$

Teilbarkeit

$$a|b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : b = a * n$$

($\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x < 0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

Operationen

Brüche

- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} \overset{*\mathbf{d}}{=} \frac{a\mathbf{d}}{b\mathbf{d}}$
- $\frac{a}{\mathbf{c}} + \frac{b}{\mathbf{c}} = \frac{a+b}{\mathbf{c}}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

Wurzeln $\quad b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{\mathbf{a} * \mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}} * \sqrt[n]{\mathbf{b}}$
- $\sqrt[\mathbf{n}]{\sqrt[\mathbf{m}]{a}} = \sqrt[\mathbf{n*m}]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

Potenzen $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

- $a^{\mathbf{x}} * b^{\mathbf{x}} = (a * b)^{\mathbf{x}}$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

Dezimaldarstellung

GAUSS-Klammer $\quad [y] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq y\} = \lfloor y \rfloor$

$$[y] = k \Leftrightarrow k \leq y < k + 1$$

Existenz $\quad \forall x \geq 0 \exists! (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

- $a_n \in \{0, \dots, 9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x < \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Die Umkehrung gilt mit Lemma:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Lemma $\quad x \geq 0, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Dezi. von x

$$\neg(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n = 9)$$

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ periodisch}$$

Intervalle

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a_0 \in A$.

GESCHLOSSEN $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(„Ecken sind mit enthalten“)

OFFEN $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Bei ∞ immer offen, da $\infty \notin \mathbb{R}$)

Kleinstes/Größtes Element

MINIMUM $\min(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a_0} \leq a$

MAXIMUM $\max(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a} \leq a_0$

$(\nexists^{\min}/_{\max}(a; b))$

Beschränktheit $\quad A$ heißt

OBEN BESCHRÄNKT $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s$

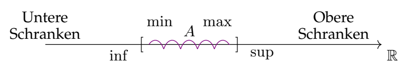
UNTEN BESCHRÄNKT $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a$

Vollständigkeit

INFIMUM (KLEIN) $\inf(A)$
$:= \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a\}$

SUPREMUM (GROSS) $\sup(A)$
$:= \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s\}$

Vollständigkeitsaxiom $\quad \exists \sup(A)$.



Folgen

Folge $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}}$ in A ist eine Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ mit $a_n = f(n)$.

ARITHMETISCHE FOLGE $a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a + (n-1) * d \quad d, a \in \mathbb{R}$

GEOMETRISCHE FOLGE $a_{n+1} = a_n * q$
$a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R}$

Rekursion $\quad a_n$ ist auf $\mathbf{a_{n-1}}$ definiert.

$$a_{n+1} = F(n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$F : A \times \mathbb{N} \to A$$

Primfaktorzerlegung $\quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P} : n = \mathbf{p_1} * \dots * \mathbf{p_n}$$

Summen und Produkte

SUMME $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n$

PRODUKT $\prod_{i=1}^{n} i = 1 * 2 * 3 * \dots * n$

FAKULTÄT $n! = \prod^n i$ $(\mathbf{0! = 1})$

GAUSSCHE Summe $\quad n \in \mathbb{N}$

$$\sum^{n} i = \frac{n * (n+1)}{2}$$

Geom. Summe $\quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

BERNOULLI Unglei. $\quad n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Binom. Koeff. $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Rechnen: $\frac{n > k}{0 < (n-k)}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Binomischer Satz $\quad n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} b^k$$

Grenzwerte

Betrag $|x| := \begin{cases} x & 0 \le x \\ -x & x < 0 \end{cases}$

LEMMA $|x * y| = |x| * |y|$

DREIECKSUNGLEICHUNG $|x + y| \le |x| + |y|$

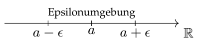
UMGEKEHRTE DREIECKSUNGLEICHUNG

$$||x| - |y|| \le |x - y|$$

Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \ge n_0 :$$
$$\mathbf{|a_n - a| \le \epsilon}$$
$$(a - \epsilon \le a_n \le a + \epsilon)$$



- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow \mathbf{lim}_{n\to\infty} a_n = a$

Beschränkt + monoton $\Rightarrow$ konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \mathbf{inf}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\mathit{fall.}} \\ \mathbf{sup}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\mathit{steig.}} \end{cases}$$

NULLFOLGEN $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \mathbf{0} \quad k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} nq^n = \mathbf{0}$

FOLGEN GEGEN **1**

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \mathbf{1} \quad a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \mathbf{1}$

Bestimmt Divergent

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\infty} \Leftrightarrow$$
$$\forall R > 0 \exists n \ge n_0 \in \mathbb{N} : a_n \ge R$$
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{-\infty} \Leftrightarrow$$
$$\forall R < 0 \exists n \ge n_0 \in \mathbb{N} : a_n \le R$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = \mathbf{0} & (-1;1) \\ = \mathbf{1} & = 1 \\ \ge \infty & > 1 \\ \text{div.} & \le -1 \end{cases}$$

Monotonie

MONOTON FALLEND
$a_n \underset{\text{(streng)}}{\ge} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

MONOTON STEIGEND
$a_n \underset{\text{(streng)}}{\le} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beschränktheit

$$\exists k > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \mathbf{|a_n| \le k}$$

- Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
- Unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge a_n \xrightarrow{n\to\infty} b \Rightarrow a = b$ (Max. einen Grenzw.)
- $a = \mathbf{0} \wedge (b_n)_{\mathit{beschr.}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \mathbf{0}$
- $a_n \le b_n \Leftrightarrow a \le b$ (nicht $<$)
- $\lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_n \pm b_n = a \pm b \\ a_n \divideontimes b_n = a \divideontimes b \\ a_n \divideontimes c = a \divideontimes c \\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \\ |a_n| = |a| \end{cases}$

Einschachtelungssatz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$
$$\forall n \ge N \in \mathbb{N} : \mathbf{a_n \le c_n \le b_n}$$
$$(\exists) \lim_{n\to\infty} c_n = \mathbf{a}$$

Spezielle Folgen

Teilfolge *streng mnt.* Folge $(b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $b_k = \mathbf{a_{n_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$$

(da n_k mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_{\mathit{mnt.}}}$$

(nicht streng!)

Häufungspunkt h mit einer Teilfolge

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = h$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists! : h = a$

BOLZANO-WEIERSTRASS

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\mathit{beschr.}}} \Rightarrow \exists h_{\mathit{Häuf.}}$$

(Beschränkte Teilfolgen besitzen mind. einen Häufungspunkt)

CAUCHY-Folge

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \ge n_0 :$$
$$|a_n - a_m| \le \epsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{CAUCHY}}} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{CAUCHY}}}$$
$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{beschr.}}}$$
$$\Rightarrow \exists h \quad \text{(BW)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = h)$$

Stetigkeit

BERÜHRUNGSPUNKT $D \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

$$a \text{ BP. von } D$$
$$\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$$
$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - a| \le \delta$$

GRENZWERT GEGEN STELLE $f : D \to \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a$ BP. von D

$$\lim_{x\to a} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$
$$|x - a| \le \delta \Rightarrow |f(x) - y| \le \epsilon$$

(Grenzwertsätze gelten analog)

STETIG AN STELLE f stetig bei a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$
$$|x - a| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \epsilon$$

(U.A. stetig: Summen, Produkte, Quotienten, Verkettungen stetiger Fkt. und Polynome)

EINSEITIGER GRENZWERT $x_0 {}^{<}/_{>} a \in D$

$$\lim_{x \nearrow / \searrow a} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$(x_n \xrightarrow{n\to a} a \wedge \mathbf{\forall n : x_n {}^{<}/_{>} a})$$
$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = y \wedge x_0 {}^{<}/_{>} a \in D$$

GRENZWERT GEGEN ∞ D unbeschränkt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} \forall x \in D :$$
$$x \ge x_0 \Rightarrow |f(x) - y| \le \epsilon$$

GRENZWERT $= \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$
$$\Leftrightarrow \forall R > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$
$$|x - a| \le \delta \Rightarrow f(x) \ge R$$

Eigenschaften stetiger Funktionen

LEMMA $f(a) > \eta \Rightarrow \forall x \exists \delta > 0 \in D \cap [a - \delta, a + \delta] : f(x) > \eta$

ZWISCHENWERT $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \ne f(b)$

$$f(a) < c < f(b)$$
$$\Rightarrow \exists \xi \in (a;b) : f(\xi) = c$$

KOROLLAR $f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a;b) : f(\xi) = 0$ (versch. Vorzeichen)

SATZ

$$f : [a;b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$
$$\Rightarrow f \text{ beschränkt}$$
$$\Rightarrow \exists^{\min}/_{\max}\{f(x) \mid x \in [a;b]\}$$

SATZ Sei I Intervall, $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to J$ stetig, strg. mnt ($\Rightarrow$ injektiv), surjektiv

$$\Rightarrow J \text{ Intervall}$$
$$\Rightarrow f \text{ bijektiv}$$
$$\Rightarrow f^{-1} : J \to I \text{ stetig}$$

Reihen

REIHE $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den Gliedern $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Benedikt Schöps (@m4dh0rs3) <schoeps.benedikt@gmail.com>, 7. Januar 2023

nTE PARTIALSUMME $s_n = \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} a_k$

GRENZWERT ebenfalls $\sum_{k=1}^{\boldsymbol{\infty}} a_k$, falls s_n konvergiert

Spezielle Reihen

GEOM. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad q \in (-1;1)$

HARMON. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

ALLG. HARMON. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\forall \alpha > \mathbf{1}$

Lemma

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent
  - $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{a_k} + \mathbf{b_k})$
  - $\mathbf{c} * \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{c} * \mathbf{a_k}$
- $\exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=\boldsymbol{N}}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{k=\mathbf{1}}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$ (Es reicht spätere Glieder zu betrachten)
- $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0$

Konvergenzkriterien

CAUCHY

$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CAUCHY}$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m > n_0 :$$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \epsilon$$

NOTWENDIG

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}}$$

BESCHRÄNKT $a_n \geq 0$ ($\Rightarrow$ *mnt.*) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\textit{beschr.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

MAJORANTE $0 \leq \mathbf{a_n} \leq \mathbf{b_k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

QUOTIENT $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

WURZEL $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

ABSOLUT

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(Dreiecksungleichung)

LEIBNIZ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mnt. Nullfolge

$$(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n)_{\text{konv.}}$$

GRENZWERT $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}}$$

Exponentialfunktion

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!} = e^x$$

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e \approx 2,71828 \notin \mathbb{Q}$ $e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

$$\exp(x) * \exp(y) = \exp(x + y)$$

CAUCHY-Produkt

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Korollar

- $\exp(x) > 0$
- $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$
- $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
- $\exp(r * x) = (\exp(x))^r$
- $\exp(r) = e^r$

$$\exp_a(x) := \exp(x * \log a) = a^x$$

- $a > 1 \Rightarrow$ strng. mnt. steigend
- $0 < a < 1 \Rightarrow$ strng. mnt. fallend
- $0 < a \neq 1 \Rightarrow \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv

Logarithmen

$$\log = \exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

- $\log 1/x = -\log x$
- $\log x/y = \log x - \log y$
- $\log x^r = r * \log x$

$$\log(x * y) = \log x + \log y$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \exp_a^{-1}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

(beide absolut konvergent, $0^0 := 1$)

- $|{}^{\sin}/{}_{\cos} x| \leq 1$
- $\sin -x = -\sin x$
- $\cos -x = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$
- $\cos x - \cos y = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2})$

$$\pi : \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

- ${}^{\sin}/{}_{\cos}(x + 2\pi) = {}^{\sin}/{}_{\cos} x$
- ${}^{\sin}/{}_{\cos}(x + \pi) = -{}^{\sin}/{}_{\cos} x$
- ${}^{\sin}/{}_{\cos}(x + \frac{\pi}{2}) = {}^{\cos}/{}_{\sin} x$
- $\sin x = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$
- $\cos x = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} : x = (2k+1) * \frac{\pi}{2}$

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

Differenzierbarkeit

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ BP von $D \setminus \{a\}$

Differenzierbar an der Stelle a, falls

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Differenzierbar bei $a \Rightarrow$ stetig bei a

SUMMENREGEL $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

FAKTORREGEL $(c * f)'(a) = c * f'(a)$

PRODUKTREGEL $(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$

REZIPROKREGEL $(1/f)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

QUOTIENTENREGEL $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)*g(a) - f(a)*g'(a)}{g^2(a)}$

KETTENREGEL $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) * g'(a)$

UMKEHRFUNKTION $(f^{-1})'(b) = 1/f'(f^{-1}(b))$

f'	f	F
0	a	$ax + c$
1	x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
$-1/x^2$	$1/x$	$\ln(x) + c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$ax^a - 1$	x^a	$\frac{1}{a+1}x^a + 1 + c$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos(x) + c$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin(x) + c$
e^x	e^x	e^x
$a^x \ln a$	a^x	
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x$	

Sei $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffbar und stetig:

Satz von ROLLE

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Mittelwertsatz

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\exists \xi \in (a, b) :$$

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Monotonie

- $(\forall x \in D : f(x) \leq 0) \Rightarrow f$ mnt. fallend
- $(\forall x \in D : f(x) < 0) \Rightarrow f$ strng. mnt. fallend
- f (nicht streng) mnt. fallend $\Rightarrow \forall x \in D : f'(x) \leq 0$

Höhere Ableitungen

n-MAL ABLEITBAR $\exists f', f'', \dots, f^{(n)}$

STETIG ABLEITBAR Ableitung stetig

Extrema

Lokales Extrema

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) : \\ f(x_0) ^{\le}/_{\ge} f(x)$$

Ist D Intervall und x_0 innerer Punkt und lokales Extremum:

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

(Achtung: Umkehrung nicht notwendig!)
Sei zusätzlich $f'(x_0) = 0$ und f 2-mal ableitbar:

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lokales Minimum

Taylor-Polynome

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal diff.-bar

$$T^f_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(n)}{k!}(x-a)^k$$

Restglied (Lagrange) f $n+1$-mal diff.-bar

$$R_n(x) = f(x) - T^f_{n,a}(x) \\ \Rightarrow \exists \xi \in (x, a) : \\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Integralrechnung

Unterteilung $(x_i)_{i=0}^n \in [a,b]$ mit $a = x_0 < x_i < x_n = b$ (nicht notwendigerweise äquidistant)

Treppenfunktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\exists (x_i)_{i=0}^n \in [a,b] \forall (x_{i-1}, x_i) : \varphi(x) =$ konst. $= c_i$

Integral der Treppenfunktion

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

Sei $\varphi, \psi \in T[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$

- $\varphi + \psi \in T[a,b]$, $c\varphi \in T[a,b]$
- $I(\varphi + psi) = I(\varphi) + I(\psi)$, $I(c\varphi) = cI(\varphi)$
- $\varphi \le \psi \Rightarrow I(\varphi) \le I(\psi)$

Unter-/Oberintegral $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

UNTERI. $U(f) = \sup\{I(\varphi) \mid \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \le f\}$

OBERI. $O(f) = \inf\{I(\psi) \mid \psi \in T[a,b] \wedge \psi \ge f\}$

RIEMANN-Integral $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$U(f) = O(f) = \int_a^b f$$

Gleichmäßig Stetig $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : \\ |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon$$

- f glm. stetig $\Rightarrow f$ stetig
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ stetig

RIEMANN'sche Summe $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ glm.) stetig

$$s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n(f) = \int_a^b f$$

- $\int f + g = \int f + \int g$
- $\int cf = c \int f$
- $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$
- $|\int f| \le \int |f|$
- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad a < c < b$

Mittelwertsatz $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\exists c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

$$\text{bzw. } A = \int_a^b f = (b-a)f(c)$$