Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativ
$A \vee B$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativ
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributiv
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$A \wedge A$	A	Idempotenz
$A \vee A$	A	
$\neg\neg A$	A	Involution
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	De-Morgan
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	
$A \wedge (\mathbf{A} \vee B)$	A	Absorption
$A \vee (\mathbf{A} \wedge B)$	A	
$A \Rightarrow B$	$\neg \mathbf{A} \vee B$	
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	Elimination
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen“)
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ („wegnehmen“)

Injektiv $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektiv $\forall y \in Y \exists x \in X : \mathbf{y = f(x)}$

Bijektiv/Invertierbar wenn injektiv und surjektiv

$\equiv$ *Reflexiv* $\forall x \in M : (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

Irreflexiv $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$ *Sym.* $\forall (x, \mathbf{y}) \in R : (\mathbf{y}, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

$\preceq$ *Antis.* $\forall x, y : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow \mathbf{x = y}$
$\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

$\equiv$ *Transitiv* $\forall \mathbf{x}, y, \mathbf{z} : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in R$
$\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

Vollst. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$
$\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

Inverse Relation R^{-1} mit $R \in M \times N :=$
$\{(n,m) \in N \times M \mid (m,n) \in R\}$

Komposition $R; R$ mit $R' \in N \times P :=$
$\{(m,p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m,n) \in R \wedge (n,p) \in R'\}$

Leere Relation $\emptyset$

Identität $\mathrm{id}_M := \{(m,m) \mid m \in M\}$ $(=)$

Allrelation $M \times M$

Äquivalenzrelation $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

Äquivalenzklasse $[\mathrm{m}]_\equiv$ auf M, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

Zerlegung $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von M.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$
  $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

Quotient $(\mathrm{M}/\equiv)$ Sei $\equiv$ ÄR. auf M. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

- (Korrespondiert zur ÄK.)

Ordnungsrelation $\preceq$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Minimale x $\forall m \in M \setminus \{x\} : m \npreceq x$

Untere Schranken $m \in\downarrow X$ $\forall x \in X : m \preceq x$

Kleinstes $\min_\preceq X \in X$

Totale Ordnung + vollständig (Trichotomie)

- $\sqrt[n]{\mathbf{a * b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}} * \sqrt[n]{\mathbf{b}}$
- $\sqrt[\mathbf{n}]{\sqrt[\mathbf{m}]{a}} = \sqrt[\mathbf{n*m}]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

- $a^{\mathbf{x}} * b^{\mathbf{x}} = (a * b)^{\mathbf{x}}$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Minimum $\min(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a_0} \leq a$

Maximum $\max(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a} \leq a_0$

Infimum (klein) $\inf(A)$
$:= \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a\}$

Supremum (groß) $\sup(A)$
$:= \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s\}$

$$\sum^n i = \frac{n * (n+1)}{2}$$

Geom. Summe $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bernoulli Unglei. $n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Binom. Koeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} b^k$$

Lemma $|x * y| = |x| * |y|$

Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$

Umgekehrte Dreiecksungleichung
$||x| - |y|| \leq |x - y|$

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 :$$
$$\mathbf{|a_n - a|} \leq \epsilon$$
$$(a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon)$$

Beschränkt + monoton $\Rightarrow$ konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\textit{fall.}} \\ \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\textit{steig.}} \end{cases}$$

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R > 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$$
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R < 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq R$$

- Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
- Unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$
$$\forall n \geq N \in \mathbb{N} : \mathbf{a_n \leq c_n \leq b_n}$$
$$(\exists) \lim_{n\to\infty} c_n = \mathbf{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n\,k} = a$$

(da n_k mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \exists (a_{n\,k})_{k\in\mathbb{N}_{\textit{mnt.}}}$$

(nicht streng!)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\textit{beschr.}}} \Rightarrow \exists h_{\textit{Häuf.}}$$

(Beschränkte Teilfolgen besitzen mind. einen Häufungspunkt)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 :$$
$$|a_n - a_m| \leq \epsilon$$

Geom. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad q \in (-1; 1)$

Harmon. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

Allg. Harmon. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\forall \alpha > 1$

Cauchy

$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy}$$
$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m > n_0 :$$
$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \epsilon$$

Notwendig

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}}$$

Beschränkt $a_n \geq 0$ ($\Rightarrow$ *mnt.*) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\textit{beschr.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

Majorante $0 \leq \mathbf{a_n \leq b_k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

Quotient $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

Wurzel $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > \mathbf{1} \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

Absolut

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(Dreiecksungleichung)

Leibniz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mnt. Nullfolge

$$(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n * a_n)_{\text{konv.}}$$

Grenzwert $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} > \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}}$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x!}$$

$$\exp(x) * \exp(y) = \exp(x+y)$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Groß-O-Notation Kosten $C_f(n)$ mit $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\exists c>0\exists n_0>0\forall n\geq n_0$

Untere Schranke $\mathbf{\Omega}(f)$
$C_f(n) \geq c * g(n)$

Obere Schranke $O(f)$
$C_f(n) \leq c * g(n)$

Exakte Schranke $\Theta(f)$
$C_f(n) \in \Omega(f) \cap O(f)$
Polynom $k$ten Grades $\in \Theta(n^k)$

(Beweis: g und c finden)

Elementare Operationen, Kontrollstr. $\in \mathbf{O(1)}$

Schleifen $\in i$ Wiederholungen $*$ $O(f)$ teuerste Operation

Abfolge $O(g)$ nach $O(f) \in O(\mathbf{max}(f;g))$

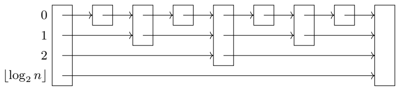
Rekursion $\in k$ Aufrufe $*$ $O(f)$ teuerste Operation

Mastertheorem $a \geq 1,\ b > 1,\ \Theta \geq 0$

$$T(n) = a * T(\frac{n}{b}) + \Theta(n^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta(n^k) & a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^k \end{cases}$$

Skip



- Zeiger auf Ebene i zeigt zu nächstem 2^i Element
- Suchen $\in O(\log n)$

(Perfekt) Einfügen, Löschen $\in \mathbf{O(n)}$ (Vollst. Reorga.)

Randomisiert Höhe zufällig (keine vollst. Reorga.)
$P(h) = \frac{1}{2^{h+1}}$: Einfügen, Löschen $\in \mathbf{O(\log n)}$

Sortierproblem

Gegeben (endliche) Folge von Schlüsseln (von Daten) $(K_i)_{i\in I}$

Gesucht Bijektive Abbildung $\pi: I \to I$ (Permutation), sodass $K_{\pi(i)} \leq K_{\pi(i+1)} \quad \forall i \in I$

Ordnung *Allgemein* vs. *speziell*: Ordnung wird nur über Schlüsselvergleiche hergestellt

Relation *Stabil* vs. *instabil*: Vorherig relative Reihenfolge bleibt erhalten

Speicher *In situ* vs. *ex situ*: Zusätzlicher Speicher notwendig

Lokal *Intern* vs. *extern*: Alles im RAM oder Mischung vorsortierter externer Teilfolgen

Anzahl der Inversionen Anzahl kleinerer Nachfolger für jedes Element:

$$\text{inv}(L) := |\{(i,j) \mid 0 \leq i < j \leq n-1, L[i] \geq L[j]\}|$$

Anzahl der Runs Ein *Run* ist eine sortierte Teilliste, die nicht nach links oder rechts verlängert werden kann. Die Anzahl der Runs ist:

$$\text{runs}(L) := |\{i \mid 0 \leq i < n-1, L[i+1] < L[i]\}| + 1$$

Längster Run Anzahl der Elemente der längsten sortierten Teilliste:

$$\text{las}(L) := \max\{r.\text{len} \mid r \text{ ist Run in } L\}$$
$$\text{rem}(L) := L.\text{len} - \text{las}(L)$$

Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt im Worst- und Average-case Schlüsselvergleiche von mindestens:

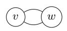
$$\Omega(n \log n)$$

Lexikographische Ordnung $\leq$ Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Alphabet, dass sich mit gegebener Ordnung $a_1 < \cdots < a_n$ wie folgt auf dem Lexikon $A* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A^n$ fortsetzt:

$$v = (v_1, \dots, v_p) \leq w = (w_1, \dots, w_q)$$
$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq p : v_i = w_i \quad p \leq q$$
$$\vee \forall 1 \leq j \leq i : v_j = w_j \quad v_i < w_i$$

Fachverteilen Sortieren von n k-Tupeln in k Schritten: Sortieren nach letztem Element, vorletzem usw.

Algo.	Stabil	Mem.	Schlüsselvergleiche			Satzbewegungen			
			C_B	C_A	C_W	M_B	M_A	M_W	
Selection	✗	1	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$3(n-1)$	$3(n-1)$	$3(n-1)$	$O(n^2)$
Insertion	✓	1	$n-1$	$\overset{n\to\infty}{\approx} \frac{n(n-1)}{4} + n - \ln n$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$2(n-1)$	$\frac{n^2+3n-4}{4} + n - 1$	$\frac{n^2+3n-4}{2}$	
Bubble	✓	1	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	0	$\frac{3n(n-1)}{4}$	$\frac{3n(n-1)}{2}$	
				Best-case		**Average-case**	**Worst-case**		
Shell	✗	1		-		-	-		$O(n \log n)$
Quick	✗	$\log n$		$n \log n$		$n \log n$	n^2		
Turnier	✗	$2n-1$		$n \log n$		$n \log n$	$n \log n$		
Heap	✗	1		$n \log n$		$n \log n$	$n \log n$		
Merge	✓	n		$n \log n$		$n \log n$	$n \log n$		
Untere Schranke $\Omega(n \log n)$ für allgemeine Sortierverfahren									
Distribution	✓	n		n		n	$n \log n,\ n^2$		$O(n)$

Einfach keine Schleife  oder Doppelkanten 

Zusammenhängend Für jede zwei Knoten gibt es genau eine Folge von Kanten die sie verbindet

Azyklisch kein Zyklus (Cycle) 

Ordnung Max. Anzahl von Kindern jedes Knoten eines Baums

Tiefe Anzahl Kanten zwischen einem Knoten und Wurzel

Stufe Alle Knoten gleicher Tiefe

Höhe Max. Tiefe $+1$

Geordnet Kinder erfüllen Ordnung von links nach rechts

Vollständig Alle Blätter auf gleicher Stufe, jede Stufe hat max. Anzahl von Kindern

Strikt Jeder Knoten hat 0 oder 2 Kinder (Kein Knoten hat genau 1 Kind).

Vollständig Jeder Knoten außer der letzten Stufe hat genau 2 Kinder.

Fast Vollständig Vollständig, außer Blätter können rechts fehlen.

Ausgeglichen Vollständig, aber Blätter auf letzten 2 Stufen

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

(Reihe $\times$ Spalte)