# Logik

## Aussagenlogik

**Aussage** Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

**Theoreme** sind wahre Aussagen.

### Junktoren

**Negation** $\neg\mathcal{A}$ „Nicht“ (`!`, `~`, )

**Konjunkt.** $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ „und“ (`&&`, )

**Disjunkt.** $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ „oder“ (`||`, )

**Implikat.** $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „Wenn, dann“ / „$\mathcal{B}$“ ($\rightarrow$, `if`)

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „$\mathcal{A}$ hinreichend“

$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ „$\mathcal{A}$ notwendig“

**Äquiv.** $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ „Genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$, $\equiv$, `==`, )

**Wahrheitswertetabelle** mit $2^n$ Zeilen für $n$ Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\neg\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ | $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

❧ ❧ ❧

| Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$ | | Bezeichnung |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | $B \wedge A$ | Kommutativ |
| $A \vee B$ | $B \vee A$ | |
| $A \wedge (B \wedge C)$ | $(A \wedge B) \wedge C$ | Assoziativ |
| $A \vee (B \vee C)$ | $(A \vee B) \vee C$ | |
| $A \wedge (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributiv |
| $A \vee (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | |
| $A \wedge A$ | $A$ | Idempotenz |
| $A \vee A$ | $A$ | |
| $\neg\neg A$ | $A$ | Involution |
| $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | De-Morgan |
| $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | |
| $A \wedge (\mathbf{A} \vee B)$ | $A$ | Absorption |
| $A \vee (\mathbf{A} \wedge B)$ | $A$ | |
| $A \Rightarrow B$ | $\neg\mathbf{A} \vee B$ | Elimination |
| $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ | |
| $A \Leftrightarrow B$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ | |

## Axiomatik

**Axiome** als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen.
Anspruch, aber nach Gödels Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

## Prädikatenlogik

**Quantoren** Innerhalb eines Universums:

**Existenzq.** $\exists$ „Mind. eines“

**Individuum** $\exists!$ „Genau eines“

**Allq.** $\forall$ „Für alle“

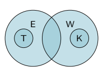
**Quantitative Aussagen**

**Erfüllbar** $\exists x F(x)$

**Widerlegbar** $\exists x \neg F(x)$

**Tautologie** $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

**Kontradiktion** $\bot = \forall x \neg F(x)$




| Klassische Tautologien | Bezeichnung |
|---|---|
| $A \vee \neg A$ | Ausgeschlossenes Drittes |
| $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ | Modus ponens |
| $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | Abschwächung |
| $A \Rightarrow (A \vee B)$ | |

**Negation** (De-Morgan)

$$\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$
$$\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

### Häufige Fehler

- $U = \emptyset^{\complement}$ nicht notwendig
- $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \not\Rightarrow \exists x P(x)$
- $\neg\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg\exists y P(x,y)$

## Beweistechniken

**Achtung:** Aus falschen Aussagen können wahre *und* falsche Aussagen folgen.

**Direkt** $A \Rightarrow B$ Angenommen $A$, zeige $B$. Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (*Kontraposition*).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

**Fallunters.** Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

**Widerspruch** $(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg\mathbf{B}$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

**Ring** (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{A}$$

**Induktion** $F(n) \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. **Anfang:** Zeige $F(n_0)$.
2. **Schritt:** Angenommen $F(n)$ (Hypothese), zeige $F(n+1)$ (Behauptung).

   **Starke Induktion:** Angenommen $F(k) \quad \forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

### Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquival. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

# Naive Mengenlehre

**Mengen** Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

**Element** $x \in M$ „enthält“

**Leere M.** $\emptyset = \{\}$

**Universum** $U$

**Einschränkung** $\{x \mid F(x)\}$

## Relationen

**Teilmenge** $N \subseteq M$
$\Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$

**Gleichheit** $M = N$
$\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

## Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ & M \text{ injekt.} \Leftrightarrow M \text{ surj.} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$

$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

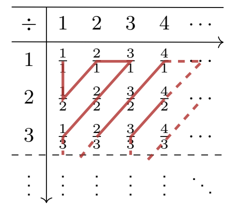
**Kardinalität** ÄK. für Gleichmächtigkeit

$$|M| \leq |N| \Leftarrow \exists f_{\text{injekt.}} : M \to N$$

- $M \subseteq N \Rightarrow |M| \leq |N|$
- $|M| \leq |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{surj.}} : N \to M$ (AC)

**Abzählbar** $|M| \leq |\mathbb{N}|$

- Endliche Mengen, $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ $(= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots\})$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$



$$f(1) = 0, \mathbf{r_{11}} r_{12} r_{13} r_{14} \ldots$$
$$f(2) = 0, r_{21} \mathbf{r_{22}} r_{23} r_{24} \ldots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32} \mathbf{r_{33}} r_{34} \ldots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43} \mathbf{r_{44}} \ldots$$
$$\vdots$$

(Cantors Diagonalargumente )

## Operationen

**Vereinig.** $M \cup N$
$\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

**Schnitt** $M \cap N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ $(= \emptyset$ „disjunkt“)

**Diff.** $M \setminus N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

**Komplement** $M^{\complement}$ $\{x \mid x \notin M\}$

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

### Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$ , nicht $\forall M : \emptyset \in M$

## Quantitative Relationen

Sei Indexmenge $I$ und Mengen $M_i \quad \forall i \in I$.

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

**Neutrale Elemente**

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen")
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ („wegnehmen")

## Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

**Satz von Cantor** $|M| < |\mathcal{P}(M)|$

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

- Menge der Kardinalitäten $\mathcal{K}$ ist unendlich

**Satz von Hartogs (AC)** $(\mathcal{K}, \preceq)$ ist total geordnet

❧ ❧ ❧

$$|(0,1)| = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

**Kontinuumshypothese**

$$\nexists M : |\mathbb{N}| < |M| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$

## Auswahlaxiom (AC)

Für Menge $\mathcal{X}$ nicht-leerer Mengen:

$$\exists c : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$$
$$\forall X \in \mathcal{X} : c(X) \in X$$

Nutzung kennzeichnen!

- unabh. vom ZFC

## Relationen

**Kartesisches Produkt**

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

**Relation** $\sim$ von/auf $M$ nach $N$ ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m,n) \in R$$

$\equiv$ **Reflexiv** $\forall x \in M : (x,x) \in R$ $\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

**Irreflexiv** $\forall x \in M : (x,x) \notin R$ $\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$ **Sym.** $\forall (x,y) \in R : (y,x) \in R$ $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

$\preceq$ **Antis.** $\forall x,y : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$ $\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

$\equiv$ **Transitiv** $\forall x,y,z : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow (x,z) \in R$ $\Leftrightarrow R;R \subseteq R$

**Vollst.** $\forall x,y \in M : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$ $\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

## Spezielle Relationen

**Inverse Relation** $R^{-1}$ mit $R \in M \times N := \{(n,m) \in N \times M \mid (m,n) \in R\}$

**Komposition** $R;R$ mit $R' \in N \times P := \{(m,p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m,n) \in R \wedge (n,p) \in R'\}$

**Leere Relation** $\emptyset$

**Identität** $\mathrm{id}_M := \{(m,m) \mid m \in M\}$ $(=)$

**Allrelation** $M \times M$

**Äquivalenzrelation** $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

**Äquivalenzklasse** $[m]_\equiv$ auf $M$, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

**Zerlegung** $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von $M$.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$ $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

**Quotient** $(M/\equiv)$ Sei $\equiv$ ÄR. auf $M$. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

(Korrespondiert zur ÄK.)

**Ordnungsrelation** $\preceq$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Minimale** $x$ $\forall m \in M \setminus \{x\} : m \npreceq x$

**Untere Schranken** $m \in \downarrow X$ $\forall x \in X : m \preceq x$

- $^\downarrow/_\uparrow\emptyset = M$

**Kleinstes** $\min_\preceq X \in X$

**Infimum** $\max \downarrow X$

- $\inf\{x,y\} = x \wedge y$
- $\sup\{x,y\} = x \vee y$

**Totale Ordnung** + vollständig (Trichotomie)

## Abbildungen

**Abbildung** $f$ von $X$ (Definitionsb. ) nach $Y$ (Werteb. ) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

**Totalität** $\forall x \in X \exists y \in Y : f(x) = y$

**Eindeutigkeit** $\forall x \in X \forall a,b \in Y : f(x) = a \wedge f(x) = b \Rightarrow a = b$

$$f : X \to Y$$

**Bilder** $f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$ $X' \subseteq X$

**Urbilder** $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$ $Y' \subseteq Y$

**Graph** $\mathrm{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

**Identität**

$$\mathrm{id}_A : A \to A$$
$$\mathrm{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

**Umkehrfunktion** $f^{-1} : Y \to X$ wenn $f$ bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ bzw. $f;f^{-1} = \mathrm{id}_X \wedge f^{-1};f = \mathrm{id}_X$
Für die Relation $f^{-1}$ gilt:

- $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$
- $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ falls $f$ surjektiv

**Eigenschaften**

**Injektiv** $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Surjektiv** $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

**Bijektiv/Invertierbar** wenn injektiv und surjektiv

**Cantor-Schröder-Bernstein**

$$\left.\begin{array}{l} f : M \to N \\ g : N \to M \end{array}\right\} \text{injekt.}$$
$$\Rightarrow \exists B_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

**Fixpunkt** $f(m) = m$
Sei $X \subseteq Y \subseteq M$, $f : M \to N$

- $f(X) \subseteq f(Y)$ (Monotonie)
- $M \setminus Y \subseteq M \setminus X$
- $M \setminus (M \setminus X) = X$

**Knaster-Tarski-Lemma** Sei $X \subseteq Y \subseteq M \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$ (monoton), dann hat $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ einen Fixpunkt

**Verkettung** $f \circ g : A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & C \end{tikzcd}$$

## Verbände

Sei $(M, \preceq)$ teilweise geordnet

$$\forall m,n \in M \exists^{\inf}/_{\sup}\{m,n\}$$

**Vollständig** $\forall X \subseteq M : \exists^{\inf}/_{\sup} X$

- $\exists^{\min}/_{\max} M = {}^{\sup}/_{\inf}\emptyset$

**Distributivität**

$\forall x,y,z \in M$:
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

- Jede total geordnete Menge ist distributiv

# Analysis

## Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

## Angeordnete Körper

(Gilt auch für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)

**Körperaxiome** $(\mathbb{R}, +, *)$ $a,b,c \in \mathbb{R}$

**Addition** $(\mathbb{R}, +)$

**Assoziativität** $a + (b + c) = (a + b) + c$

**Kommutativität** $a + b = b + a$

**Neutrales Element Null** $a + 0 = a$ $0 \in \mathbb{R}$

**Inverses „Negativ"** $a + (-a) = 0$ $(-a) \in \mathbb{R}$

**Multiplikation** $(\mathbb{R}, *)$

**Assoziativität** $a * (b * c) = (a * b) * c$

**Kommutativität** $a * b = b * a$

**Neutrales Element Eins** $a * 1 = a$ $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Inverses „Kehrwert"** $a * (a^{-1}) = 1$
$a \neq 0, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$

**Distributivität** $a * (b + c) = a * b + a * c$

**Totale Ordnung**

**Transitivität** $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

**Trichotomie** Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
$\Rightarrow$ *Irreflexivität* $(a < b \Rightarrow a \neq b)$

**Addition** $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

**Multiplikation**
$a<b \Rightarrow a*c<b*c \quad 0<c$

Bei Additiver oder Multiplikativer Inversion dreht sich die Ungleichung.

## Archimedes Axiom

$$\forall x\in\mathbb{R}\exists n\in\mathbb{N}: n>x$$
$$n>\frac{1}{x}$$

## Teilbarkeit

$$a|b \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}: b=a*n$$

($\Rightarrow \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

## Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x<0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

## Operationen

**Brüche**

- $\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b}\overset{*d}{=}\frac{ad}{bd}$
- $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$

**Wurzeln** $b^n=a\Leftrightarrow b=\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{a*b}=\sqrt[n]{a}*\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n*m]{a}$
- $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\quad 0\le a<b$
- $\sqrt[n+1]{a}<\sqrt[n]{a}\quad 1<a$
- $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n+1]{b}\quad 0<a<1$

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|\quad a\in\mathbb{R}$$

**Potenzen** $a^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{a^x}$

- $a^x*b^x=(a*b)^x$
- $a^x*a^y=a^{x+y}$
- $(a^x)^y=a^{x*y}$

## Dezimaldarstellung

**Gauss-Klammer** $[y]:=\max\{k\in\mathbb{Z}\mid k\le y\}=\lfloor y\rfloor$

$$[y]=k\Leftrightarrow k\le y<k+1$$

**Existenz** $\forall x\ge 0\exists!(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

- $a_n\in\{0,\dots,9\}\quad\forall n\in\mathbb{N}$
- $\sum_{i=0}^n\frac{a_i}{10^i}\le x<\sum_{i=0}^n\frac{a_i}{10^i}+\frac{1}{10^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}_0$

Die Umkehrung gilt mit Lemma:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$$

**Lemma** $x\ge 0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Dezi. von $x$

$$\neg(\exists N\in\mathbb{N}\forall n\ge N: a_n=9)$$

$$x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ periodisch}$$

## Intervalle

Sei $A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\emptyset, a_0\in A$.

**Geschlossen** $[a;b]:=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$
(„Ecken sind mit enthalten")

**Offen** $(a;b):=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$
(Bei $\infty$ immer offen, da $\infty\notin\mathbb{R}$)

**Kleinstes/Größtes Element**

**Minimum** $\min(A):=a_0$
$\Leftrightarrow\forall a\in A: a_0\le a$

**Maximum** $\max(A):=a_0$
$\Leftrightarrow\forall a\in A: a\le a_0$

$(\nexists^{\min}/_{\max}(a;b))$

**Beschränktheit** $A$ heißt

**Oben beschränkt** $\exists s\in\mathbb{R}\forall a\in A: a\le s$

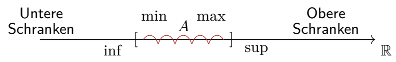
**Unten beschränkt** $\exists s\in\mathbb{R}\forall a\in A: s\le a$

**Vollständigkeit**

**Infimum (klein)** $\inf(A)$
$:=\max\{s\in\mathbb{R}\mid\forall a\in A: s\le a\}$

**Supremum (groß)** $\sup(A)$
$:=\min\{s\in\mathbb{R}\mid\forall a\in A: a\le s\}$

**Vollständigkeitsaxiom** $\exists\sup(A)$.




## Folgen

**Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A$ ist eine Abb. $f:\mathbb{N}\to A$ mit $a_n=f(n)$.

**Arithmetische Folge** $a_{n+1}=a_n+d$
$a_n=a+(n-1)*d\quad d,a\in\mathbb{R}$

**Geometrische Folge** $a_{n+1}=a_n*q$
$a_n=q^n\quad q\in\mathbb{R}$

**Rekursion** $a_n$ ist auf $a_{n-1}$ definiert.

$$a_{n+1}=F(n,a_n)\quad\forall n\in\mathbb{N}$$
$$F:A\times\mathbb{N}\to A$$

**Primfaktorzerlegung** $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$

$$\exists p_1,\dots,p_n\in\mathbb{P}: n=p_1*\dots*p_n$$

## Summen und Produkte

**Summe** $\sum_{i=1}^n i=1+2+\dots+n$

**Produkt** $\prod_{i=1}^n i=1*2*3*\dots*n$

**Fakultät** $n!=\prod^n i\ (0!=1)$

**Gaussche Summe** $n\in\mathbb{N}$

$$\sum^n i=\frac{n*(n+1)}{2}$$

**Geom. Summe** $q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, n\in\mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n q^i=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Bernoulli Unglei.** $n\in\mathbb{N}_0, x\ge -1$

$$(1+x)^n\ge 1+nx$$

**Binom. Koeff.** $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Rechnen: $\frac{n>k}{0<(n-k)}$
- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
- $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

**Binomischer Satz** $n\in\mathbb{N}$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}*a^{n-k}b^k$$

## Grenzwerte

**Betrag** $|x|:=\begin{cases}x & 0\le x\\ -x & x<0\end{cases}$

**Lemma** $|x*y|=|x|*|y|$

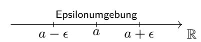
**Dreiecksungleichung** $|x+y|\le|x|+|y|$

**Umgekehrte Dreiecksungleichung**
$||x|-|y||\le|x-y|$

## Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$.

$$a_n\xrightarrow{n\to\infty}a\Leftrightarrow$$
$$\forall\epsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\, n\ge n_0:$$
$$|a_n-a|\le\epsilon$$
$$(a-\epsilon\le a_n\le a+\epsilon)$$




- $a_n\xrightarrow{n\to\infty}a\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=a$

Beschränkt + monoton $\Rightarrow$ konvergent:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{fall.}}\\ \sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{steig.}}\end{cases}$$

**Nullfolgen** $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0\quad k\in\mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty}nq^n=0$

**Folgen gegen 1**

- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad a>0$
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

**Bestimmt Divergent**

$$a_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty\Leftrightarrow$$
$$\forall R>0\exists n\ge n_0\in\mathbb{N}: a_n\ge R$$
$$a_n\xrightarrow{n\to\infty}-\infty\Leftrightarrow$$
$$\forall R<0\exists n\ge n_0\in\mathbb{N}: a_n\le R$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n\begin{cases}=0 & (-1;1)\\ =1 & =1\\ \ge\infty & >1\\ \text{div.} & \le -1\end{cases}$$

**Monotonie**

**Monoton fallend**
$a_n\underset{\text{(streng)}}{\ge}a_{n+1}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

**Monoton steigend**
$a_n\underset{\text{(streng)}}{\le}a_{n+1}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

**Beschränktheit**

$$\exists k>0\forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\le k$$

- Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
- Unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

## Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \ \wedge\ a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ $\Rightarrow a = b$ (Max. einen Grenzw.)
- $a = 0 \wedge (b_n)_{beschr.}$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $a_n \le b_n \Leftrightarrow a \le b$ (nicht $<$)
- $\lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_n \pm b_n = a \pm b \\ a_n * b_n = a * b \\ a_n * c = a * c \\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \\ |a_n| = |a| \end{cases}$

### Einschachtelungssatz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$
$$\forall n \ge N \in \mathbb{N} : a_n \le c_n \le b_n$$
$$(\exists) \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

## Spezielle Folgen

**Teilfolge** *streng mnt.* Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $b_k = a_{n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$$

(da $n_k$ mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_{mnt.}}$$

(nicht streng!)

**Häufungspunkt** $h$ mit einer Teilfolge

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = h$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists! : h = a$

**Bolzano-Weierstraß**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{beschr.}} \Rightarrow \exists h_{Häuf.}$$

(Beschränkte Teilfolgen besitzen mind. einen Häufungspunkt)

## Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \ge n_0 :$$
$$|a_n - a_m| \le \epsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

### Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}}$$
$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{beschr.}}}$$
$$\Rightarrow \exists h \quad \text{(BW)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = h)$$

## Stetigkeit

**Berührungspunkt** $D \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

$$a \text{ BP. von } D$$
$$\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$$
$$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - a| \le \delta$$

**Grenzwert gegen Stelle** $f : D \to \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a$ BP. von $D$

$$\lim_{x\to a} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$
$$|x - a| \le \delta \Rightarrow |f(x) - y| \le \epsilon$$

(Grenzwertsätze gelten analog)

**Stetig an Stelle** $f$ stetig bei $a$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$
$$|x - a| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \epsilon$$

(U.A. stetig: Summen, Produkte, Quotienten, Verkettungen stetiger Fkt. und Polynome)

**Einseitiger Grenzwert** $x_0 {}^{<}/_{>} a \in D$

$$\lim_{x\nearrow/\searrow a} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$(x_n \xrightarrow{n\to a} a \wedge \forall n : x_n {}^{<}/_{>} a)$$
$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = y \wedge x_0 {}^{<}/_{>} a \in D$$

**Grenzwert gegen** $\infty$ $D$ unbeschränkt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} \forall x \in D :$$
$$x \ge x_0 \Rightarrow |f(x) - y| \le \epsilon$$

**Grenzwert** $= \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } :$$
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$
$$\Leftrightarrow \forall R > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$
$$|x - a| \le \delta \Rightarrow f(x) \ge R$$

## Eigenschaften stetiger Funktionen

**Lemma** $f(a) > \eta \Rightarrow \forall x \exists \delta > 0 \in D \cap [a - \delta, a + \delta] : f(x) > \eta$

**Zwischenwert** $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \ne f(b)$

$$f(a) < c < f(b)$$
$$\Rightarrow \exists \xi \in (a; b) : f(\xi) = c$$

**Korollar** $f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a; b) : f(\xi) = 0$ (versch. Vorzeichen)

**Satz**

$$f : [a; b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$
$$\Rightarrow f \text{ beschränkt}$$
$$\Rightarrow \exists^{\min}/_{\max} \{f(x) \mid x \in [a; b]\}$$

**Satz** Sei $I$ Intervall, $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to J$ stetig, strg. mnt ($\Rightarrow$ injektiv), surjektiv

$$\Rightarrow J \text{ Intervall}$$
$$\Rightarrow f \text{ bijektiv}$$
$$\Rightarrow f^{-1} : J \to I \text{ stetig}$$

## Reihen

**Reihe** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den Gliedern $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$n$**te Partialsumme** $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

**Grenzwert** ebenfalls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls $s_n$ konvergiert

### Spezielle Reihen

**Geom.** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ $\quad q \in (-1; 1)$

**Harmon.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

**Allg. Harmon.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\forall \alpha > 1$

### Lemma

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent
  - $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$
  - $c * \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} c * a_k$
- $\exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$ (Es reicht spätere Glieder zu betrachten)
- $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$ $\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$ $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0$

## Konvergenzkriterien

### Cauchy

$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{Cauchy}$$
$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m > n_0 :$$
$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \le \epsilon$$

### Notwendig

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}}$$

**Beschränkt** $a_n \ge 0$ ($\Rightarrow$ *mnt.*) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{beschr.} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

**Majorante** $0 \le a_n \le b_k$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

**Quotient** $a_n \ge 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

**Wurzel** $a_n \ge 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

### Absolut

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(Dreiecksungleichung)

**Leibniz** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mnt. Nullfolge

$$(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n)_{\text{konv.}}$$

**Grenzwert** $a_n, b_n \ge 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow$$
$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}}$$

## Exponentialfunktion

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!} = e^x$$

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e \approx 2,71828 \notin \mathbb{Q}$ $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

$$\exp(x) * \exp(y) = \exp(x+y)$$

**Cauchy-Produkt**

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

**Korollar**

- $\exp(x) > 0$
- $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$
- $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
- $\exp(r * x) = (\exp(x))^r$
- $\exp(r) = e^r$

$$\exp_a(x) := \exp(x * \log a) = a^x$$

- $a > 1 \Rightarrow$ strng. mnt. steigend
- $0 < a < 1 \Rightarrow$ strng. mnt. fallend
- $0 < a \neq 1 \Rightarrow \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv

## Logarithmen

$$\log = \exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

- $\log 1/x = -\log x$
- $\log x/y = \log x - \log y$
- $\log x^r = r * \log x$

$$\log(x * y) = \log x + \log y$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \exp_a^{-1}$$

## Trigonometrische Funktionen

$$\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

(beide absolut konvergent, $0^0 := 1$)

- $|{}^{\sin}/{}_{\cos} x| \leq 1$
- $\sin -x = -\sin x$
- $\cos -x = \cos x$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$
- $\cos x - \cos y = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2})$

$$\pi : \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

- ${}^{\sin}/{}_{\cos}(x + 2\pi) = {}^{\sin}/{}_{\cos} x$
- ${}^{\sin}/{}_{\cos}(x + \pi) = -{}^{\sin}/{}_{\cos} x$
- ${}^{\sin}/{}_{\cos}(x + \frac{\pi}{2}) = {}^{\cos}/{}_{\sin} x$
- $\sin x = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$
- $\cos x = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} : x = (2k+1) * \frac{\pi}{2}$

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

## Differenzierbarkeit

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ BP von $D \setminus \{a\}$

**Differenzierbar** an der Stelle $a$, falls

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} =: f'(x)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- Differenzierbar bei $a \Rightarrow$ stetig bei $a$

**Summenregel** $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

**Faktorregel** $(c * f)'(a) = c * f'(a)$

**Produktregel** $(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$

**Reziprokregel** $(1/f)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

**Quotientenregel** $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)*g(a)-f(a)*g'(a)}{g^2(a)}$

**Kettenregel** $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) * g'(a)$

**Umkehrfunktion** $(f^{-1})'(b) = 1/f'(f^{-1}(b))$

| $f'$ | $f$ | $F$ |
|---|---|---|
| $0$ | $a$ | $ax + c$ |
| $1$ | $x$ | $\frac{1}{2}x^2 + c$ |
| $-1/x^2$ | $1/x$ | $\ln(x) + c$ |
| $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ |
| $ax^a - 1$ | $x^a$ | $\frac{1}{a+1}x^a + 1 + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $-\cos(x) + c$ |
| $-\sin x$ | $\cos x$ | $\sin(x) + c$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x \ln a$ | $a^x$ | |
| $\frac{1}{x \ln a}$ | $\log_a x$ | |

Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und stetig:

**Satz von Rolle**

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$

**Mittelwertsatz**

$$\exists\xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\exists\xi \in (a,b) :$$
$$f'(\xi)(g(b)-g(a)) = g'(\xi)(f(b)-f(a))$$

**Monotonie**

- $(\forall x \in D : f(x) \leq 0) \Rightarrow f$ mnt. fallend
- $(\forall x \in D : f(x) < 0) \Rightarrow f$ strng. mnt. fallend
- $f$ (nicht streng) mnt. fallend $\Rightarrow \forall x \in D : f'(x) \leq 0$

**Höhere Ableitungen**

**$n$-mal ableitbar** $\exists f', f'', \ldots, f^{(n)}$

**Stetig ableitbar** Ableitung stetig

## Extrema

**Lokales Extrema**

$$\exists\epsilon > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) :$$
$$f(x_0) {}^{\leq}/{}_{\geq} f(x)$$

Ist $D$ Intervall und $x_0$ innerer Punkt und lokales Extremum:

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

(Achtung: Umkehrung nicht notwendig!)
Sei zusätzlich $f(x_0) = 0$ und $f2$ mal ableitbar:

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lokales Minimum

# Algorithmen auf Datenstrukturen

**Algorithmus** Handlungsvorschrift aus endlich vielen Einzelschritten zur Problemlösung.

- Korrektheit (Test-based dev.)
- Terminierung (Touring)
- Effizienz (Komplexität)

**Formen (High to low)** Menschl. Sprache, Pseudocode, Mathematische Ausdrücke, Quellcode, Binärcode

**Divide & Conquer**

**Divide** Zerlegen in kleinere Teilprobleme

**Conquer** Lösen der Teilprobleme mit gleicher Methode (rekursiv)

**Merge** Zusammenführen der Teillösungen

## Effizienz

Raum/Zeit-Tradeoff: Zwischenspeichern vs. Neuberechnen

| Programmlaufzeit/-allokationen | Komplexität |
|---|---|
| Einfluss äußerer Faktoren | Unabh. |
| Konkrete Größe | Asymptotische Schätzung |

**Inputgröße** $n$ Jeweils

- Best-case $C_B$
- Average-case
- Worst-case $C_W$

## Asymptotische Zeit-/Speicherkomplexität

**Groß-O-Notation** Kosten $C_f(n)$ mit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0$

**Untere Schranke** $\Omega(f)$
$C_f(n) \geq c * g(n)$

**Obere Schranke** $O(f)$
$C_f(n) \leq c * g(n)$

**Exakte Schranke** $\Theta(f)$
$C_f(n) \in \Omega(f) \cap O(f)$
Polynom $k$ten Grades $\in \Theta(n^k)$

(Beweis: $g$ und $c$ finden)

| Groß-O | Wachstum | Klasse | |
|---|---|---|---|
| $O(1)$ | Konstant | | lösbar |
| $O(\log n)$ | Logarithmisch | | lösbar |
| $O(n)$ | Linear | | lösbar |
| $O(n \log n)$ | Nlogn | | lösbar |
| $O(n^2)$ | Quadratisch | Polynomiell $O(n^k)$ | |
| $O(n^3)$ | Kubisch | Polynomiell $O(n^k)$ | |
| $O(2^n)$ | Exponentiell | Exponentiell $O(\alpha^n)$ | |
| $O(n!)$ | Fakultät | | hart |
| $O(n^n)$ | | | hart |

### Rechenregeln

**Elementare Operationen, Kontrollstr.** $\in \mathbf{O(1)}$

**Schleifen** $\in i$ Wiederholungen $* O(f)$ teuerste Operation

**Abfolge** $O(g)$ nach $O(f) \in O(\max(f; g))$

**Rekursion** $\in k$ Aufrufe $* O(f)$ teuerste Operation

**Mastertheorem** $a \geq 1$, $b > 1$, $\Theta \geq 0$

$$T(n) = a * T(\frac{n}{b}) + \Theta(n^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta(n^k) & a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^k \end{cases}$$

**Floor/Ceiling** Runden

**Floor** $\lfloor x \rfloor$ nach unten

**Ceiling** $\lceil x \rceil$ nach oben

# Suchverfahren

**Lineare Liste** endlich, geordnete (nicht sortierte) Folge $n$ Elemente $L := [a_0, \dots, a_n]$ gleichen Typs.

**Array** Sequenzielle Abfolge im Speicher, statisch, Index $O(1)$, schnelle Suchverfahren $\boxed{L[0] \mid \cdots \mid L[n-1]}$

**Sequenziell** $C_A(n) = \frac{1}{n} * \sum^n i = \frac{n+1}{2} \in O(n)$

```
Algorithm: Sequential Search

Input: Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
for i ← 0 to L.len − 1 do
    if x = L[i] then
        return i
    end
end
return −1
```

**Auswahlproblem** Finde $i$-kleinstes Element in unsortierter Liste $\in \Theta(n)$

```
Algorithm: i-Smallest Element

Input: Unsortierte Liste L, Level i
Output: Kleinstes Element x
p ← L[L.len − 1]
for k = 0 to L.len − 1 do
    if L[k] < p then
        Push (L<, L[k])
    if L[k] > p then
        Push (L>, L[k])
    end
end
if L<.len = i − 1 then
    return p
if L<.len > i − 1 then
    return i-Smallest Element L<
if L<.len < i − 1 then
    return i-Smallest Element (L>,
      i − 1 − L<.len)
end
```

## Sortierte Listen

**Binär** $C_W(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, $C_A(n) \overset{n \to \infty}{\approx} \log_2 n \in O(\log n)$

```
Algorithm: Binary Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
if L.len = 0 then
    return −1
else
    m ← ⌊L.len / 2⌋
if x = L[m] then
    return m
if x < L[m] then
    return Binary Search [L[0], ..., L[m − 1]]
if x > L[m] then
    return m + 1+ Binary Search
      [L[m + 1], ..., L[L.len − 1]]
end
```

**Sprung** Kosten Vergleich $a$, Sprung $b$ mit optimaler Sprungweite:

$$m = \left\lfloor \sqrt{(\frac{a}{b}) * n)} \right\rfloor$$

$$C_A(n) = \frac{1}{2}(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil * a + mb) \in O(\sqrt{n})$$

```
Algorithm: Jump Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
m ← ⌊√n⌋
while i < L.len do
    i ← i + m
    if x < L[i] then
        return Search
          [L[i − m], ..., L[i − 1]]
    end
end
return −1
```

- $k$-Ebenen Sprungsuche $\in O(\sqrt[k]{n})$
- Partitionierung in Blöcke $m$ möglich

**Exponentiell** $\in O(\log x)$

```
Algorithm: Exponential Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
while x > L[i] do
    i ← 2 * i
end
return Search [L⌊i/2⌋, ..., L[i − 1]]
```

- Unbekanntes $n$ möglich

**Interpolation** $C_A(n) = 1 + \log_2 \log_2 n$, $C_W(n) \in O(n)$

```
Algorithm: Searchposition

Input: Listengrenzen [u, v]
Output: Suchposition p
return ⌊u + (x − L[u]) / (L[v] − L[u]) (v − u)⌋
```

```
Algorithm: Interpolation Search

Input: Sortierte Liste [L[u], ..., L[v]], Predikat x
Output: Index i von x
if x < L[u] ∨ x > L[v] then
    return −1
p ← Searchposition(u, v)
if x = L[p] then
    return p
if x > L[p] then
    return Interpolation Search(p + 1, v, x)
else
    return Interpolation Search(u, p − 1, x)
end
```

**Häufigkeitsordnungen** mit Zugriffswahrscheinlichkeit $p_i$: $C_A(n) = \sum_{i=0}^{n} ip_i$

**Frequency-count** Zugriffszähler pro Element

**Transpose** Tausch mit Vorgänger

**Move-to-front**

## Verkettete Listen

**Container** Jedes Element $p$ ist in der Form $p \to$ $\boxed{\text{(key)} \mid \text{value} \mid \text{next}}$. Index ist seq. Suche $\in O(n)$

**Löschen** $\in O(1)$

```
Algorithm: Delete

Input: Zeiger p auf Vorgänger des löschendes Elements
if p ≠ ∅ ∧ p → next ≠ ∅ then
    p → next ← (p → next) → next
end
```

- desh. sehr dynamisch

**Suchen** $C_A(n) = \frac{n+1}{2} \in O(n)$

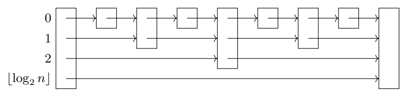
```
Algorithm: Search Linked List

Input: Verkettete Liste L, Predikat x
Output: Zeiger p auf x
p ← L.head while p → value ≠ x do
    p ← p → next
end
return p
```

**Doppelt Verkettet** Zeiger auf Vorgänger $\boxed{\text{(key)} \mid \text{value} \mid \text{prev} \mid \text{next}}$

- Bestimmung des Vorgängers (bei Einfügen, Löschen) $\in O(1)$ statt $O(n)$
- Höherer Speicheraufwand

**Skip**




- Zeiger auf Ebene $i$ zeigt zu nächstem $2^i$ Element
- Suchen $\in O(\log n)$

**(Perfekt)** Einfügen, Löschen $\in \mathbf{O(n)}$ (Vollst. Reorga.)

**Randomisiert** Höhe zufällig (keine vollst. Reorga.) $P(h) = \frac{1}{2^{h+1}}$: Einfügen, Löschen $\in \mathbf{O(\log n)}$

## Spezielle Listen

**ADT** „Abstrakte Datentypen"

**Stack** $S = |\texttt{TOP}, \cdots$ Operationen nur auf letztem Element $\in O(1)$

**Queue** $Q = ||\texttt{HEAD}, \cdots, \texttt{TAIL}$ Vorne Löschen, hinten einfügen $\in O(1)$

**Priority Queue** $P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

Jedes Element $a$ hat Priorität $p$; Entfernen von Element mit höchster (MIN) Priorität

## Sortierverfahren

### Sortierproblem

**Gegeben** (endliche) Folge von Schlüsseln (von Daten) $(K_i)_{i \in I}$

**Gesucht** Bijektive Abbildung $\pi : I \to I$ (Permutation), sodass $K_{\pi(i)} \leq K_{\pi(i+1)} \quad \forall i \in I$

mit Optimierung nach geringen

- Schlüsselvergleichen $C$
- Satzbewegungen $M$

### Eigenschaften

**Ordnung** *Allgemein* vs. *speziell*: Ordnung wird nur über Schlüsselvergleiche hergestellt

**Relation** *Stabil* vs. *instabil*: Vorherig relative Reihenfolge bleibt erhalten

**Speicher** *In situ* vs. *ex situ*: Zusätzlicher Speicher notwendig

**Lokal** *Intern* vs. *extern*: Alles im RAM oder Mischung vorsortierter externer Teilfolgen

**Ordnung** $\forall x, y \in X$

**Reflexiv** $x \leq x$

**Antisym.** $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

**Transitiv** $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x = z$

**Total (Vollständig)** $x \leq y \vee y \leq x$

(ohne Total: „*Halbordnung*")

## Grad der Sortierung

**Anzahl der Inversionen** Anzahl kleinerer Nachfolger für jedes Element:

$$\text{inv}(L) := |\{(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq n-1, L[i] \geq L[j]\}|$$

**Anzahl der Runs** Ein *Run* ist eine sortierte Teilliste, die nicht nach links oder rechts verlängert werden kann. Die Anzahl der Runs ist:

$$\text{runs}(L) := |\{i \mid 0 \leq i < n-1, L[i+1] < L[i]\}| + 1$$

**Längster Run** Anzahl der Elemente der längsten sortierten Teilliste:

$$\text{las}(L) := \max\{r.\text{len} \mid r \text{ ist Run in } L\}$$
$$\text{rem}(L) := L.\text{len} - \text{las}(L)$$

## Einfache Sortierverfahren $O(n^2)$

**Selection** Entferne kleinstes Element in unsortierter Liste und füge es sortierter Liste an.

```
Algorithm: Selectionsort

Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
for i ← 0 to L.len − 2 do
|   min ← i
|   for j ← i + 1 to L.len − 1 do
|   |   if L[i] < L[min] then
|   |   |   min ← j
|   end
|   if min ≠ i then
|   |   Swap L[min], L[i]
end
if L.len = 0 then
|   return −1
```

**Insertion** Verschiebe erstes Element aus unsortierter Liste von hinten durch sortierte Liste, bis das vorgehende Element kleiner ist.

```
Algorithm: Insertionsort

Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
for i ← 1 to L.len − 1 do
|   if L[i] < L[i − 1] then
|   |   temp ← L[i]
|   |   j ← i
|   |   while temp < L[j − 1] ∧ j > 0 do
|   |   |   L[j] ← L[j − 1]
|   |   |   j − −
|   |   end
|   |   L[j] ← temp
end
```

**Bubble** Vertausche benachbarte Elemente, durchlaufe bis nichts vertauscht werden muss. *Achtung:* Die hinteren Elemente können im Durchlauf ignoriert werden!

```
Algorithm: Bubblesort

Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
i ← L.len
swapped ← 1
while swapped do
|   swapped ← 0
|   for j ← 0 to i − 2 do
|   |   if L[j] > L[j + 1] then
|   |   |   Swap L[j], L[j + 1]
|   |   |   swapped ← 1
|   end
|   i − −
end
```

## Verbesserte Sortierverfahren $O(n \log n)$

**Shell** Insertionsort, nur werden Elemente nicht mit Nachbarn getauscht, sondern in $t$ Sprüngen $h_i$, die kleiner werden (Kamm). Im letzten Schritt dann Insertionsort ($h_t = 1$); somit Sortierung von grob bis fein, also Reduzierung der Tauschvorgänge.

```
Algorithm: Shellsort

Input: Liste L, Absteigende Liste von Sprunggrößen H
Output: Sortierte Liste L
foreach h in H do
|   for i ← h to L.len − 1 do
|   |   temp ← L[i]
|   |   for j ← i; temp < L[j − h] ∧ j ≥ h;
|   |     j ← j − h do
|   |     |   L[j] ← L[j − h]
|   |   end
|   |   L[j] ← temp
|   end
end
```

**Quick** Rekursiv: Pivot-Element in der Mitte, Teillisten $L_<$, $L_>$, sodass $\forall l_< \in L_< \forall l_> \in L_> : l_< < x < L_>$. Zerlegung: Durchlauf von Links bis $L[i] \geq x$ und von Rechts bis $L[j] \leq x$, dann tauschen.

```
Algorithm: Quicksort

Input: Liste L, Indices l, r
Output: L, sortiert zwischen l und r
if l ≥ r then
|   return
i ← l
j ← r
piv ← L[⌊(l+r)/2⌋]
do
|   while L[i] < piv do
|   |   i + +
|   end
|   while L[j] > piv do
|   |   j − −
|   end
|   if i ≤ j then
|   |   Swap L[i], L[j]
|   |   i + +
|   |   j − −
while i ≤ j;
Quicksort (L, l, j)
Quicksort (L, i, r)
```

**Turnier** Liste also Binärbaum, bestimme $\min(L)$ durch Austragen des Turniers, entferne Sieger und wiederhole von Siegerpfad aus.

**Heap** Stelle Max-Heap (größtes Element in der Wurzel) her, gib Wurzel aus und ersetze mit Element ganz rechts in unterster Ebene.

```
Algorithm: Max-Heapify

Input: Liste L, Index i der MHE widerspricht und
       ∀j > i erfüllen MHE
Output: Liste L mit MHE ∀j ≥ i
l ← 2i + 1
r ← 2i + 2
if l < L.len ∧ L[l] > L[i] then
|   largest ← l
else
|   largest ← i
end
if r < L.len ∧ L[r] > L[largest] then
|   largest ← r
if largest ≠ i then
|   Swap L[i], L[largest]
|   Max-Heapify L, largest
end
```

```
Algorithm: Build-Max-Heap

Input: Liste L
Output: Liste L mit MHE
for i ← ⌊L.len/2⌋ − 1 to 0 do
|   Max-Heapify L, i
end
```

```
Algorithm: Heapsort

Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
Build-Max-Heap L
for i ← L.len − 1 to 1 do
|   Swap L[0], L[i]
|   L.len − −
|   Max-Heapify L, 0
end
```

**Merge** Zerlege Liste in $k$ Teile, sortiere diese (mit Mergesort) und verschmelze die sortierten Teillisten (merge).

```
Algorithm: 2-Merge

Input: Liste L mit L[l ... m − 1] und L[m ... r]
       sortiert, Indices l, m, r
Output: Liste L mit L[l ... r] sortiert
j ← l
k ← m
for i ← 0 to r − l do
|   if k > r ∨ (j < m ∧ L[j] ≤ L[k]) then
|   |   B[i] ← L[j]
|   |   j ← j + 1
|   else
|   |   B[i] ← L[k]
|   |   k ← k + 1
|   end
end
for i ← 0 to r − l do
|   L[l + i] ← B[i]
end
```

```
Algorithm: Rekursives 2-Mergesort

Input: Liste L, Indices l, r
Output: Liste L mit L[l ... r] sortiert
if l ≥ r then
|   return
else
|   m ← ⌊(l+r+1)/2⌋
|   Mergesort L, l, m − 1
|   Mergesort L, m, r
|   Merge L, l, m, r
end
```

### Iteratives 2-Mergesort

```
Algorithm: Iteratives 2-Mergesort

Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
for k ← 2; k < n; k ← k * 2 do
|   for i ← 0; i + k ≤ n; i ← i + k do
|   |   Merge L, i, min(i + k − 1, n − 1),
|   |     i + k/2
|   end
end
Merge L, 0, n − 1, k/2
```

**Natürliches Mergesort** Verschmelzen von benachbarten Runs (Ausnutzen der Vorsortierung)

## Untere Schranke allgemeiner Sortierverfahren

Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt im Worst- und Average-case Schlüsselvergleiche von mindestens:

$$\Omega(n \log n)$$

(Siehe Pfadlänge auf Entscheidungsbaum)

## Spezielle Sortierverfahren $O(n)$

**Distribution** Abspeichern der Frequenz jedes Elementes $k$ auf $F[k]$; Ausgeben jedes Index $F[k]$ mal.

**Lexikographische Ordnung** $\leq$ Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Alphabet, dass sich mit gegebener Ordnung $a_1 < \cdots < a_n$ wie folgt auf dem Lexikon $A* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ fortsetzt:

$$v = (v_1, \ldots, v_p) \leq w = (w_1, \ldots, w_q)$$
$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq p : v_i = w_i \quad p \leq q$$
$$\vee \forall 1 \leq j \leq i : v_j = w_j \quad v_i < w_i$$

**Fachverteilen** Sortieren von $n$ $k$-Tupeln in $k$ Schritten: Sortieren nach letztem Element, vorletzem usw.

## Große Datensätze sortieren

**Indirekt** Liste von Zeigern $Z[i] = i$ auf die eigentlichen Listenelemente. Schlüsselvergleiche mit $L[Z[i]]$, Satzbewegungen nur als Zeigertausch in $Z$. Anschließend linear kopieren.

**Extern** Zerlegen in $m$ Blöcke, sortieren im Hauptspeicher (Run) der mind. $m+1$ Blöcke groß ist, verschmelzen der Runs ($m$-Wege-Merge).

**Ausgeglichenes 2-Wege-Mergesort** Daten auf Band $n$, sortieren von Block $r_1 < n$ auf zweites Band und $r_2$ auf drittes Band, löschen des ersten Bandes und Merge $2r$ abwechseld auf erstes (neues $2r_1$) und viertes Band (neues $2r_2$) und wiederholen.

**Replacement Selectionsort** Lese $r < n$ Elemente auf Priority-Queue $Q$. Falls $x = \min(Q) \geq$ letztem Element auf zweiten Band, schreibe $x$ aus, sonst schreibe $Q$ auf Band. Wiederhole auf dritten Band und dann merge.

❧ ❧ ❧

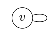
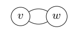
| Algo. | Stabil | Mem. | Schlüsselvergleiche $C_B$ | $C_A$ | $C_W$ | Satzbewegungen $M_B$ | $M_A$ | $M_W$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Selection | ✗ | $1$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $3(n-1)$ | $3(n-1)$ | $3(n-1)$ | $O(n^2)$ |
| Insertion | ✓ | $1$ | $n-1$ | $\overset{n\to\infty}{\approx} \frac{n(n-1)}{4} + n - \ln n$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $2(n-1)$ | $\frac{n^2+3n-4}{4} + n - 1$ | $\frac{n^2+3n-4}{2}$ | |
| Bubble | ✓ | $1$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $0$ | $\frac{3n(n-1)}{4}$ | $\frac{3n(n-1)}{2}$ | |
| | | | Best-case | | Average-case | | Worst-case | | |
| Shell | ✗ | $1$ | - | | - | | - | | $O(n \log n)$ |
| Quick | ✗ | $\log n$ | $n \log n$ | | $n \log n$ | | $n^2$ | | |
| Turnier | ✗ | $2n-1$ | $n \log n$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | | |
| Heap | ✗ | $1$ | $n \log n$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | | |
| Merge | ✓ | $n$ | $n \log n$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | | |
| Untere Schranke $\Omega(n \log n)$ für allgemeine Sortierverfahren | | | | | | | | | |
| Distribution | ✓ | $n$ | $n$ | | $n$ | | $n \log n$, $n^2$ | | $O(n)$ |

# Bäume

- Verallg. von Listen: Element/Knoten kann mehrere Nachfolger haben
- Darstellung von Hierarchien

**Ungerichteter Graph** $(V, E)$ mit einer Menge Knoten $V$ und Kanten $E \subseteq V \times V$

**Baum** Ungerichteter Graph mit

**Einfach** keine Schleife  oder Doppelkanten 

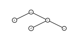
**Zusammenhängend** Für jede zwei Knoten gibt es genau eine Folge von Kanten die sie verbindet

**Azyklisch** kein Zyklus (Cycle) 

**Wurzelbaum** Baum mit genau einem Knoten der Wurzel heißt

**Orientierter Wurzelbaum** Alle Knoten sind Wurzel ihrer disjunkten Unterbäume und haben verschiedene Werte gleichen Typs. (Im Nachfolgenden einfach nur „Baum")

**Darstellungsarten**

**Graph**  

**Array** $[a, b, c, \emptyset, \emptyset, d, e]$

**Menge** $\{\{a, b, c, d, e\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{d\}, \{e\}\}$

**Klammer** $(a, (b), (c, (d), (e)))$

**Größen**

**Ordnung** Max. Anzahl von Kindern jedes Knoten eines Baums

**Tiefe** Anzahl Kanten zwischen einem Knoten und Wurzel

**Stufe** Alle Knoten gleicher Tiefe

**Höhe** Max. Tiefe $+1$

**Eigenschaften**

**Geordnet** Kinder erfüllen Ordnung von links nach rechts

**Vollständig** Alle Blätter auf gleicher Stufe, jede Stufe hat max. Anzahl von Kindern

## Binärbäume

Geordneter, orientierter Wurzelbaum der Ordnung $2$.

**Strikt** Jeder Knoten hat $0$ oder $2$ Kinder (Kein Knoten hat genau $1$ Kind).

**Vollständig** Jeder Knoten außer der letzten Stufe hat genau $2$ Kinder.

**Fast Vollständig** Vollständig, außer Blätter können rechts fehlen.

**Ausgeglichen** Vollständig, aber Blätter auf letzten $2$ Stufen

$2$ Binärbäume heißen

**Ähnlich** selbe Struktur

**Äquivalent** Ähnlich und selbe Knoten

**Größen**

- Für $i$ Stufen max. $2^i$ Knoten
- Für $n$ Knoten genau $n-1$ Kanten
- Vollständiger B. mit $n$ Knoten hat Höhe von $\log_2 n + 1$

## Speicherung

**Verkettet** | Zeiger Links | Knoten | Zeiger Rechts |

**Feldbaum** Sequenz von | Knoten | Index Links | Index Rechts |

**Sequenziell** Lesen vollst. Baum links nach rechts, oben nach unten, leere Elemente für fehlende Knoten (ineffizient für degenerierte Bäume)

## Traversierung

- $W$ Verarbeite Wurzel
- $L$ Durchlaufe linken Unterbaum
- $R$ Durchlaufe rechten Unterbaum

Konvention erst links, dann rechts:

- $WLR$ Preorder
- $LWR$ Inorder
- $LRW$ Postorder

Implementation rekursiv oder linear mit eigenem Stack (effizienter)

## Gefädelte Binärbäume

Zeiger „Faden" in Knoten zeigt auf nächsten Knoten nach Durchlaufordnung.

Nachteil: Zusätzlicher Speicheraufwand teilweise redundant; Lösung: Nur Null-Zeiger (Blätter) sind Fäden

**rFaden** zeigt auf Nachfolgerknoten

**lFaden** zeigt auf Vorgängerknoten

## Binäre Suchbäume

### Natürliche binäre Suchbäume

$$B_l < B_x < B_r$$

**Suchen** rekursiv oder mit Durchlaufalg. $\in O(\ln n)$

**Einfügen** dort wo Suche terminiert

**Löschen** mit zwei nicht-leeren Unterbäumen: Hochziehen des größten Wertes im linken oder kleinsten Wert im rechten Unterbaum (Alt: Als gelöscht markieren)

## Balancierte Binärbäume

Grundoperationen auf ausgeglichene Binärbäume kosten am wenigsten. Herstellung der Ausgeglichenheit in $O(n)$

**Balancefaktor** von Knoten $x$ ist $BF(x) := h(B_l(x)) - h(B_r(x))$

$k$-**Balanciert** $\forall x \in B : |BF(x)| \leq k$

**AVL-Baum** 1-balancierter Binärer Suchbaum

Herstellung der Ausgeglichenheit durch Rotationen

- $BF(u) = -2, BF(v) \in \{0, -1\}$: Einfachrotation Links(u)
- $BF(u) = +2, BF(v) \in \{0, -1\}$: Einfachrotation Rechts(u)
- $BF(u) = -2, BF(v) = +1$: Doppelrotation Rechts(v) + Links(u)
- $BF(u) = +2, BF(v) = -1$: Doppelrotation Links(v) + Rechts(u)

Für jeden AVL-Baum $T$ der Höhe $h$ gilt:

- $|T| \geq F_h$ (Fibonacci)
- $h \leq \frac{\log_2(n\sqrt{5}+1)}{\log_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}$

**Fibonacci-Bäume** $B_0$ ist leerer Baum, $B_1$ ist einzelner Knoten, $B_h = \texttt{BUILD}(B_{h-1}, x, B_{h-2})$ für $h \geq 2$

(Maximal unbalancierter AVL-Baum der Höhe h)

### Gewichtsbalancierte Binärbäume

**Wurzelbalance** $\rho(B) = \frac{n_l+1}{n+1}$ mit $n$ Knoten und $n_l$ Knoten im linken Unterbaum

**Gewichtsbalanciert (BB)** $\forall$ Unterbaum $B' : \alpha \leq \rho(B') \leq 1-\alpha$

- $\alpha = 1/2$: Vollst. Binärbaum
- $\alpha < 1/2$: Zunehmend weniger ausgeglichen
- $\alpha = 0$: Keine Einschränkung

## Mehrwegbäume

Breiter Baum als Indexstruktur für große externe Daten („Seiten")

### $m$-Wege-Suchbäume

- $m$-ter Ordnung (max. $m$ Kinder)
- Knoten mit max. $b \leq m-1$ sortierten Einträgen: $\boxed{\mathrm{P}_0|K_1|P_1|\dots|K_b|P_b}$
- Werte im Unterbaum: $K_i < B_{P_i} < K_{i+1}$

**B-Bäume** der Klasse $t$ ist (fast-ausgeglichener) $2t$-Wege-Suchbaum

- Blätter der Wurzel gleich weit entfernt
- Alle Knoten außer Wurzel min. $t-1$, max. $2t-1$ Werte und min. $t$, max. $2t$ Kinder (außer Blätter)
- Wurzel min. $1$, max. $2t-1$ Werte (oder B. leer) und min. $2$, max. $2t$ Kinder (oder Blatt)

Für $n$ Knoten ist Höhe $h \leq 1 + \log_t \frac{n+1}{2}$

**Suchen** Finde größten Index im Knoten $x \leq K_i$, suche in $P_i$

**Einfügen** Teilen voller $(2t-1)$ Knoten bei Suche, einfügen im Blatt

**Teilen** (Elternknoten ist nicht voll, da vorher geteilt) Mittlerer Wert in Elternknoten, Werte links davon in linken Unterbaum

**Löschen** Verschieben o. Verschmelzen zu kleiner $(t-1)$ Knoten bei Suche, dann entfernen

**Verschieben** Kleinster Wert (ganz vorne) im rechten Unterbaum in Knoten ziehen, Knoten in linken Unterbaum rechts anfügen (und umgekehrt, je nach dem welcher Baum größer ist)

**Verschmelzen** Beide Bäume zu klein, also $t-1$ zu einem Unterbaum zusammenfügen $(2t-2)$

**B*-Bäume** B-Baum Variante mit Daten in den Blättern, Blätter sequenziell verkettet; Standard in DBS

**Binäre B-Bäume** Alternative zu AVL-Bäumen

## Digitale Suchbäume

Blattschlüssel = Zeichenkette/Wort des Pfads von Wurzel zu Blatt

Für max. Schlüssellänge $l$ und Schlüsselteillänge $k$ ist Höhe $= l/k + 1$

$m$-**äre Tries** Knoten enthalten (Null-)Zeiger für jeden Teilschlüssel der Länge $k$ in $m = |\Sigma|^k$; Schlechte Speichernutzung, desh. Kompression des Knoten

**PATRICIA-Tree**

**Präfix-/Radix-Baum**

# Hashing

Aus Schlüsseln $S$ werden Adressen/Indices $A$ direkt berechnet,

$$h : S \to A$$

**Kollision** $|A| \ll |S| \Rightarrow \neg(h$ injekt.)

**Synonyme** $h(K_i) = h(K_j)$

**Kollisionsklasse** $[A]_h = \{K \in S \mid h(K) = A\}$

## Hashfunktionen

**Divisionsrest** $h(K_i) := K_i \mod q$

- $q$ prim $\Rightarrow$ keinen Teiler mit $K$
- Optimal bei äquidistanter Schlüsselverteilung

**Falten** Teilsequenzen des Schlüssels werden addiert (Quersumme) oder XOR-verknüpft (Binär)

**Rand-Falten** Rechte Teilsequenzen werden gespiegelt

**Shift-Falten** Teilsequenzen in Reihenfolge

**Mid-Square-Hash** $h(K) := K^2[K.\text{len} - t/2, K.\text{len} + t/2]$

**Zufalls-Hash** $K_i$ ist Saat des Zufallsgenerators

**Ziffernanalyse-Hash** Teilsequenz von $K_i$

## Hashtabelle

**Kapazität** $m$

**Belegte Adressen** $n_a$

**Belegungsfaktor** $\beta = n_a/m$ sollte $< .85$ und somit $m > n_a$

**Erfolgreiche Suche** in $S(\beta)$ Schritten

**Erfolglose Suche** in $U(\beta)$ Schritten

## Kollisionsbehandlung

Beim Auftritt einer Kollision $h(K_q) = h(K_p)$ eines gespeicherten $K_q$, welches die Adresse für $K_p$ besetzt:

**Sondieren** Zusätzliche Klasse Hashfunktionen $h_i$ nach $i$-ter Kollision

**Linear** $h_i(K_p) = (h_0(K_p) + f(i, h(K_p))) \mod m$

- $S(\beta) \approx \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1-\beta})$
- $U(\beta) \approx \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{(1-\beta)^2})$

**Quadratisch** $h_i(K_p) = (h_0(K_p) + ai + bi^2) \mod m$

$$h_i(K_p) = (h_0(K_p) - \lceil i/2 \rceil^2 (-1)^i) \mod m$$

(Sucht in quadratisch wachsenden Abstand in beide Richtungen zur ursprünglichen Adresse)

- Sondierungsfolge versch. Schlüssel korrellieren nicht (Uniform)
- $S(\beta) \approx -\frac{1}{\beta} \ln(1-\beta)$
- $U(\beta) \approx \frac{1}{1-\beta}$

**Zufällig** Deterministischer Zufallsgenerator generiert Schrittfolge $z_i$

$$h_i(K_p) = (h_0(K_p) + z_i) \mod m$$

**Double-Hash** Zweite Hashfunktion $h'$

$$h_i(K_p) = (h_0(K_p) + ih'(K_p)) \mod m$$

Platzhalter für gelöschte Schlüssel zur Signalisierung sondierter Adressen

**Verkettung** Synonyme werde in dynamischer externen Struktur (Sekundärbereich) in Einfügereihenfolge linear verkettet

- $S(\beta) \approx 1 + \frac{\beta}{2}$
- $U(\beta) \approx \beta - e^{-\beta}$

## Hashing auf Externspeicher

- Adresse bezeichnet Bucket der mehrere Daten in Einfügereihenfolge fässt
- Überlaufsmethode beliebig, aber Vermeidung langer Sondierungsfolgen, häufig spearater Überlaufsbereich mit dynamischer Zuordnung der Buckets

## Dynamische Hashstrukturen

Nachteile der Hashtabelle

- Statische Allokationen speicherineffizient
- Re-hashing bei Speichererweiterung

**Erweiterbares Hashing** Digitalbaumk; Bits des Schlüssels oder Hashs steuern Pfad

**HAMT: Hashed Array Mapped Tries** Viele Nullzeiger werden durch Bitmap-Kompression vermieden: Knoten mit $n$ Feldern hat $n$ lange Bitmap: 0 zeigt Nullzeiger an, 1 zeigt belegt durch Zeiger

## Signaturen

Möglichst eindeutiges Merkmal eines Datensatzes

**Rolling-Hash** Signaturhash der mit Hilfe des vorgehenden Fensters (Teilzeichenkette) in konstanter statt linearer Zeit berechnet werden kann

# Textsuche

Finden aller Positionen (erste Indice) eines Patterns der Länge $m$ in einem String der Länge $n$ durch Vergleich mit allen Fenstern

**Naiv** $\in O(n * m)$

**Statisch** effiziente Index-Strukturen (z.B Suffix-Baum, Signaturen) $\in O(m)$

**Patternanalyse** Vorverarbeitung des Patterns $\in O(n + m)$

## Patternanalyse $\in O(n + m)$

## Knuth-Morris-Pratt

Nutzung bereits gelesener Informationen bei Missmatch, kein Zurückgehen

### Next-Tabelle

- Wie lang sind Präfix und Suffix gleich im Pattern vor jedem Buchstabe?
- $\text{next}[0] = -1$

```
Algorithm: Next-Tabelle
Input: Muster pattern[0 ... m − 1]
Output: Tabelle next[0 ... m]
i ← 0
j ← −1
next[i] ← j
while j < m do
    while j ≥ 0 ∧ patter[j] ≠ pattern[i] do
        j ← next[j]
    end
    i ← i + 1
    j ← j + 1
    next[i] ← j
end
```

**Suche** $\in O(n + m)$ Bei Missmatch oder kompletten Match verschieben des Präfix auf den Suffix (oder bei 0 komplett dahinter)

```
Algorithm: Knuth-Morris-Pratt-Suche
Input: Pattern[0..m − 1], String[0 ... n − 1],
       Next-Tabelle
Output: Alle Positionen wo das Pattern im String liegt
i ← 0
j ← 0
while j < n do
    while j ≥ 0 ∧ string[i] ≠ pattern[j] do
        j ← next[i]
    end
    j ← j + 1
    i ← i + 1
    if j = m then
        Print i − m
        j ← next[i]
end
```

## Boyer-Moore

### Last-Tabelle

- Letztes Vorkommen im Pattern für jeden Buchstaben des Alphabets
- $-1$ falls nicht vorkommen

```
Algorithm: Last-Tabelle
Input: Alphabet Σ
Output: Tabelle next[0 ... |Σ| − 1]
foreach a ∈ Σ do
    last[a] ← −1
end
for j to m − 1 do
    a ← pattern[j]
    last[a] ← j
end
```

### Suche

- Vergleiche Patter von Rechts nach Links
- Bei Missmatch verschieben des letzten Pattern-Buchstaben zu String-Buchstaben
- Wenn Patter-Buchstabe nicht vorhanden, dann komplett verschieben
- $C_A(n, m) \in O(n/m)$
- $C_W(n, m) \in O(n * m)$

```
Algorithm: Boyer-Moore-Suche
Input: Pattern[0 ... m − 1], String[0 ... n − 1],
       Last-Tabelle
Output: Position des ersten Vorkommens oder −1
i ← 0
while i ≤ n − m do
    j ← m − 1
    while j ≥ 0 ∧ pattern[j] = string[i + j] do
        j ← j − 1
    end
    if j < 0 then
        return i
    else
        if last[string[i + j]] > j then
            i ← i + 1
        else
            i ← i + j− last[string[i + j]]
        end
    end
    return −1
end
```

## Statische Textsuche

- Index im Anhang von Büchern
- Signatur-Dateien

## Approximative Suche

**Hamming-Distanz** Anzahl der Missmatches zwischen $s_1$ und $s_2$

**Editierdistanz** Kosten $s_1$ zu $s_2$ editieren (Cut, Paste, Replace)

**$k$-Missmatch-Suchproblem** Alle Vorkommen eines Muster in einem Text mit einer HAMMING-Distanz $\leq k$

# Elektrischer Strom

## Elektrisches Feld

### Elektrische Ladung

$$Q = N * e_0 = [C] = [As]$$

- $1C = (6,242 * 10^{18}) * e_0$
- $e_0 = 1,602 * 10^{-19} C$

### Culombsches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} * \frac{Q_1 * Q_2}{r^2} * (\vec{r_0}) = [N]$$

- $\epsilon_0 = 8,854 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
- Ungleiche Ladungen ($Q$) ziehen sich an, gleich stoßen sich ab
- $F \propto 1/r^2$

### Elektrisches Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \left[\frac{V}{m}\right] = \left[\frac{N}{C}\right]$$

- Kraft, die Probeladung $q$ erfährt
- Feldlinien von kleineren Ladung zur größeren Ladung (Positiv zu Negativ); gleich der wirkenden Kraftrichtung

### Elektrisches Potential

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = (-\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr)$$

- Punktladung $Q$ erzeugt Potential um sich
- Potential ist Steigung des E-Feld $E = -\frac{d\varphi}{dr}$

### Elektrische Spannung

$$U = \frac{W}{q} = [V] = [\frac{Nm}{C}]$$
$$U_{r_1 \to r_2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2)$$

- Arbeit um $q$ von $r_1$ nach $r_2$ zu bewegen $W_{r_1 \to r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} dr$

## Elektrischer Strom

$$I = Q/t = [A] = \left[\frac{C}{s}\right]$$

- Gleichmäßig gerichteter Fluss von Elektronen von Minus nach Plus („physikalisch")
- $1A = \frac{1}{1{,}602} * 10^{19}$ Elektronen pro Sekunde
- $\Rightarrow Q = \int_0^t i(t)dt$

### Elektrische Arbeit

$$W = I * t * U = [Ws] = [J]$$

- Ladungstransport über Zeit mit Spannung
- Am Widerstand freigesetzte Energie $W = \frac{U^2}{R} * t$

### Elektrische Leistung

$$P = \frac{W}{t} = U * I = [W] = [VA]$$

- Arbeit pro Zeit
- Am Widerstand $P = U^2/R$

## Elektrisches Netz

Strom fließt per Definition („technisch") von Plus (+) nach Minus (−)

**Generator** $G$ gibt Energie frei $W < 0$

**Verbraucher** $R$ verbraucht E. $W > 0$

**Verbindungsleitungen** nach Kirchhoff:

**Knoten** $K$ Verzweigung der Verbindungsleitung

$$\sum_{i \in K} I_i = 0A$$

- Stromrichtung einmalig willkürlich festlegen
- Eingehende Ströme addieren, ausgehende subtrahieren
- Ladungen werden nicht angehäuft $\Rightarrow$ Eingehender $=$ ausgehender Strom auch bei Bauteilen

**Masche** $M$ Geschlossener Pfad ohne Knotenwiederholung

$$\sum_{k \in M} U_k = 0V$$

- Pfad startet im Knoten
- Vorher Spannungsrichtung (= Stromrichtung) einzeichnen
- Spannungsrichtung in Maschenrichtung addieren, entgegen Maschenrichtung (Quellen) subtrahieren

## Lösen Linearer Gleichungssysteme

Kirchhoff'sche Sätze schaffen Lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b$$

- $x$ ist der gesuchte Vektor der Ströme $I_k = x_k$
- $A$ ist die Matrix der Koeffizienten (Widerstände)
- $b$ sind vom Strom unabhängige Größen (Spannungen, $0A$ im Knoten)

**Matrixmul.** $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

(Zeile $\times$ Spalte)

### Determinante

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det A_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det A_{ij}$$

- Für Matrix $A \in \mathbb{R}^n$
- „Entwickeln" nach $i$-ter Zeile oder $j$-ter Spalte
- $A_{ij}$ = Matrix $A$ ohne $i$-te Zeile und $j$-te Spalte
- Zeile/Spalte wählen mit viel $a_{ij} = 0$, damit $\det A_{ij}$ nicht berechnet werden muss

$(2 \times 2)$ **Matrix**

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$(3 \times 3)$ **Matrix (Regel von Sarrus)**

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

### Cramer'sche Regel

$$x_k = (I_k) = \frac{\det A_k}{\det A} \qquad \det A_k \neq 0$$
$$A_k = (a_1 \mid \cdots \mid a_{k-1} \mid b \mid a_{k+1} \mid a_m)$$

- $A_k$ ist Matrix $A$ mit Vektor $b$ statt $k$-ter Spalte
- Lösbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

## Elektromagnetisches Feld

Stromdurchflossene Leiter erzeugen Magnetfelder orthogonal zur Flussrichtung:

### Rechte-Hand-Regel

- Daumen in (technische) Stromrichtung (Vektorprodukt)
- Gekrümmte Finger in Magnetfeldrichtung (Norden)
- Zeigefinger in Magnetfeldrichtung $\Rightarrow$ Mittelfinger in Kraftwirkung auf Leiter

### Magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{\vec{I}}{2\pi r} = \left[\frac{A}{m}\right]$$

- Erzeugt durch stromdurchflossene Leiter $\vec{I}$
- Kreisradius $2\pi r$ beliebig

### 1. Maxwell'sche Gleichung: Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} ds = \iint_A \vec{j} dA$$

Geschlossene magnetische Feldlinien werden von Strom durchflutet

### Magnetische Spannung

$$\vec{\Theta}_{s_1 \to s_2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{H} ds = \vec{I} = [A]$$

- Zwischen Umfang $s_1$ (z.B $2\pi r_1$) und $s_2$

### Magnetische Flussdichte

$$B = \mu_0 * \mu_r * \vec{H} = [T] = \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$$

- $\mu_0 = 1,2566 * 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

### Relative Permeabilität: Hysteresekurve

- Feromagnetische Stoffe $\mu_r = 10^2 \ldots 10^5$ oder nicht konstant
- Speichern magnetische Zustände

**Remanenzpunkt** $B_r$ Magnetische Flussdichte $B_r$, die nach $(H = 0)$ einer Magnetisierung besteht

**Koerzitivfeldstärke** $-H_c$ Feldstärke um Material zu entmagnetisieren

### Wechselschriftverfahren

- $1$ Permanenter Richtungswechsel des Stroms (durch antiparalleles Magnetfeld zum vorherigen Takt)
- $0$ keine Veränderung des Stroms

**Lesen** Bewegung des magnetisierten Mediums induziert Strom bei antiparallen Magnetfeld zum vorherigen Takt (Veränderung), bleibt $0$ bei keiner Veränderung

**Schreiben** Positiver und negativer Strom magnetisiert Medium antiparallel

### Kraftwirkung des magnetischen Feldes

$$\vec{F} = \mu * l * \vec{I} \times \vec{H} = l * \vec{I} \times \vec{B}$$

- Kinetische Kraft auf stromdurchflossene Leiter $\vec{I}$ der Länge $l$
- $|F| = \mu * l * I * H = l * I * B$

### Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

### Elektromagnetische Induktion

$$U_i = -\frac{d \iint \vec{B} d\vec{A}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Umgekehrt induziert Bewegung eines Leiters im Magnetfeld eine Spannung

- Induktivität $[H] = \frac{Vs}{A}$, wenn bei einer gleichförmigen Stromveränderung von einem Ampere in einer Sekunde eine Selbstinduktion von einem Volt erzeugt wird

**Magnetischer Fluss**

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{A} = [Wb] = [T * m^2]$$

- Homogenes Magnetfeld $\Phi = \vec{B} * \vec{A}$
- Leiter im Winkel zum geradlinigen Magnetfeld $\Phi = B * A * \cos\varphi$

## Wechselstrom

Die Rotation eines Leiters in einem Magnetfeld induziert eine Wechselspannung und einen Wechselstrom:

$$u(t) = \hat{u} * \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \hat{i} * \sin(\omega t)$$

- Frequenz $f = 1/T$ (Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit)
- Drehgeschwindigkeit $\omega = \frac{\varphi}{t} = 2\pi f$ (Anzahl der Perioden auf $2\pi$ Weg)

**Kenngrößen**

**Linearer Mittelwert** (Durchschnitt)

$$\overline{Y} = \frac{\int y(x)dx}{\int dx} \quad \overline{I} = \frac{1}{T}\int^T i(t)dt$$

- Gemäß Normung $= 0$

**Gleichrichtwert** (Durchschnitt des Betrag)

$$|\overline{I}| = \frac{1}{T}\int^T |i(t)|dt$$

**Effektivwert** (Leistung Gleichstrom)

$$I_{\text{eff.}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int^T i^2(t)dt}$$

- Sinusförmig: $I_{\text{eff.}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$, $U_{\text{eff.}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

**Formfaktor** $k = \frac{I_{\text{eff.}}}{|\overline{I}|}$

- Sinusförmig: $k = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \approx 1,1107$
- Rechteck: $k = 1$

## Häufige Fehler

- Vektor und Skalare Formeln mischen
- $mm^3 = (10^{-3}m)^3 = 10^{-9}m^3$
- $1/k\Omega = m\Omega$

# Elektrische Bauteile

## Elektrischer Leiter

**Elektrische Flussdichte**

$$D = \frac{Q}{A} = \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

- Frei bewegliche Ladungsträger verteilen sich gleichmäßig auf der Oberfläche
- $\Rightarrow Q = A * \iint_A Dd$
- $\vec{D} = \epsilon_0 * \epsilon_r * \vec{E}$ ($r$ raumfüllendes Material)

**Elektrische Stromdichte**

$$J = \frac{I}{A}$$

- Querschnitt $A$ senkrecht zum Stromfluss $\vec{I}$
- $\propto$ Erwärmung des Leiters
- Aber: Dünne Leitungen kühlen besser (Verhältnis Querschnitt zu Umfang) $\Rightarrow$ Dicke Leitungen haben geringeres zulässiges $J$

**Metallischer Leiter**

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

- Linearer Widerstand, abhängig vom Material $\rho$
- $\rho = [\Omega\frac{mm^2}{m}] \propto$ Länge, kleinere Oberfläche

## Ohmsch: Lineare Widerstände

$$U = R * I$$

- Kurz „Uri“
- Strom $\propto$ Spannung, kleinerer Widerstand

$$R = [\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$$

**Leitwert** $G = 1/R = [S] = \left[\frac{A}{V}\right]$

**Schaltung**

**Reihe** $R_G = \sum R_k$

- $I_k = I \Rightarrow U_k = I * R_k$

**Parallel** $R_G = 1/\sum\frac{1}{R_k}$

- $U_k = U \Rightarrow I_k = U/R_k$

**Kennlinie** Graph $I(U_A)$

- Je flacher desto stärker der Widerstand
- Für lineare Bauteile: Nullstelle $I(U_A) = 0A$ und Schnittpunkt mit der $I$-Achse bestimmen $I(0V) = I_0$
- Für nicht-lineare Graphen $R(U, I) = U/I$ gilt das Ohmsche Gesetz nicht!

**Arbeitspunkt** Schnittpunkt der Kennlinien $I_1(U_A) = I_2(U_A)$

- Bestimmung der dynamischen Austarierung nicht-linearer Bauteile
- Kennlinie in Abhängigkeit der Spannung am Bauteil, nicht der Quellspannung!

**Energierverbrauch**

$$W_R = t * RI^2$$

## Kapazitiv: Kondensator

$$Q = C * U$$

(„Kuh gleich Kuh“)

$$E = \frac{U}{d} = \frac{D}{\epsilon}$$

**Kapazität**

$$C = \frac{\epsilon * A}{d} = [F] = \left[\frac{C}{V}\right]$$

- Kondensator speichert elektrische Ladung
- $\propto$ Große Oberfläche, große Permittivität, kleiner Abstand
- Durchschlagfestigkeit $E_d = U_d/d$

**Energie im Elektrischen Feld**

$$W = \frac{1}{2}C * U^2$$

**Influenz: Faraday'scher Käfig** Das Innere eines metallischen Hohlraums ist feldfrei.

**Schaltung**

**Reihe** $C_G = 1/\sum\frac{1}{C_k}$

**Parallel** $C_G = \sum C_k$

**Ladevorgänge**

**Einschalten**

- $U_C = U * (1 - e^{-\frac{t}{R*C}})$
- $I_C = \frac{U}{R} * e^{-\frac{t}{R*C}}$

**Ausschalten**

- $U_C = U * e^{-\frac{t}{R*C}}$
- $I_C = \frac{U}{R} * e^{-\frac{t}{R*C}}$

**Wechselstrom**

$$i(t) = C\hat{u} * \omega\cos(\omega t)$$

- Maximalstrom $\hat{i} = C\hat{u} * \omega$
- Phasensprung von $\pi/2$
- Widerstand $R_C = \frac{1}{\omega * C}$

## Induktiv: Spule

Die durch die Spannungsveränderung (z.B Anlegung) induzierte Spannung wirkt der Spannung entgegen (Lenzsche Regel):

$$U = L * \frac{dI}{dt}$$

Ein magnetischer Fluss induziert in der Spule eine Spannung:

$$\Phi = L * I$$

**Selbstinduktivität** $L$

- $\propto N^2$ Quadrat der Windungszahl

**Energie im Magnetfeld**

$$W = \frac{1}{2}L * I^2$$

**Ladevorgänge**

**Einschalten** $I_L = \frac{U}{R} * (1 - e^{-t*\frac{R}{L}})$

**Ausschalten** $I_L = \frac{U}{R} * e^{-t*\frac{R}{L}}$

**Wechselstrom**

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\omega * L} * \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

- Maximalstrom $\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\omega * L}$
- Phasensprung von $-\pi/2$
- Widerstand $R_L = \omega * L$

## Quellen

### Spannungsquelle

Feste Spannung $U_Q$

- Ideal: $\lim_{R_L \to 0} I \geq \infty$

**Klemmspannung** Tatsächliche Spannung mit geringem Innenwiderstand $R_{iQ}$

$$U = U_Q - I * R_{iQ} \Rightarrow I = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_L}$$

**Leerlauf** Nicht geschlossen, $I = 0$

**Kurzschluss** Ohne Last geschlossen; da $R_{iQ}$ gering $\Rightarrow$ gefährlich hohe Leistung $P = U_Q^2/R_{iQ}$

## Stromquelle

Fester Strom $\forall R_L : I_L =$ konst.

**Reale Stromquelle** Hoher Innenwiderstand $R_{iQ}$

- $I_L = I_Q - I_{iR}$
- Ideal: $\lim_{R_{iQ}} \to \infty I_L = I_Q$

**Leerlauf** Nicht geschlossen, $U = R_{iQ} * I_Q$

**Kurzschluss** Ohne Last geschlossen; $I_L = I_Q$, $U = 0$

# Messgeräte

## Spannung: Voltmeter

- Schaltung in Parallel, ohne Amperemeter messen!
- Hoher Innenwiderstand $R_{iV} \Rightarrow$ Strom teilt sich auf, Spannung geringer gemessen
- $R_{iV} \gg R_L \Rightarrow U_L \approx R_L * I$

## Strom: Amperemeter

- Schaltung in Reihe, ohne Voltmeter messen!
- Geringer Innenwiderstand $R_{iA} \Rightarrow$ Strom geringer gemessen
- $R_{iA} \ll R_L \Rightarrow I_L \approx U/R_L$

## Widerstand: Fehlerschaltungen

Zum Messen des Widerstands $R$ wird $I_R$ und $U_R$ benötigt:

**Kleiner Widerstand: Stromfehlerschaltung**

- Erst Amperemeter in Reihe, dann Voltmeter parallel zum Widerstand
- $I \approx I_R$

**Großer Widerstand: Spannungsfehlerschaltung**

- Erst Voltmeter, dazu parallel der Widerstand und dazwischen in Reihe des Amperemeter
- $U \approx U_R$

# Spezielle Kombinationen

## Spannungsteiler

Die Arbeitsspannung verhält sich zur Quellspannung wie der zweiter Widerstand zum Gesamtwiderstand:

$$\frac{U_A}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Setzt Restenergie in Wärme frei

**Potentiometer** $R_1 = R - R_2$

$$\Rightarrow U_A = U_0 * \frac{R_2}{R}$$

**Potentiometer unter Last** $R_L$ $R_1 = R - (R_2 \parallel R_L)$

$$\Rightarrow U_A = U_0 * \frac{R_2}{R} * \frac{R_L}{R_L + R_2}$$

## Transformator

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

- Wechselspannung der Primärspule induziert Wechselspannung in Sekundärspule
- Ideal: Verlustfreier Spannungsteiler, da Energie im Magnetfeld durch Abbau wiedererlangt wird

## Schwingkreis

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L * C}} = \frac{2\pi}{T}$$

- $u_C(t) + u_L(t) = 0$
- (Gedämpft durch Widerstand)

# Häufige Fehler

- Parallelschaltung von Kondensatoren verhält sich wie Reihenschaltung von Widerständen