

Logik

Aussagenlogik

Aussage Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

Theoreme sind wahre Aussagen.

Junktoren

Negation $\neg A$ „Nicht“ ($!$, \sim , \nrightarrow)

Konjunkt. $A \wedge V$ „und“ ($\&$, \boxplus)

Disjunkt. $A \vee B$ „oder“ ($||$, \boxminus)

Implikat. $A \Rightarrow B$ „Wenn, dann“ / „zwingt“ (\rightarrow , if)

Äquiv. $A \Leftrightarrow B$ „Genau dann, wenn“ (\leftrightarrow , \equiv , $=$, \boxdot)

Wahrheitstabelle mit 2^n Zeilen für n Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Äquivalente Formeln \Leftrightarrow		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativ
$A \vee B$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativ
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributiv
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$A \wedge A$	A	Idempotenz
$A \vee A$	A	
$\neg \neg A$	A	Involution
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	DE-MORGAN
$A \wedge (A \vee B)$	A	
$A \vee (A \wedge B)$	A	Absorption
$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	Elimination
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	

Axiomatik

Axiome als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen. Anspruch, aber nach GÖDELS Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

Prädikatenlogik

Quantoren Innerhalb eines Universums:

Existenzq. \exists „Mind. eines“

Individuum $\exists!$ „Genau eines“

Allq. \forall „Für alle“

Quantitative Aussagen

Erfüllbar $\exists x F(x)$

Widerlegbar $\exists x \neg F(x)$

Tautologie $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

Kontradiktion $\perp = \forall x \neg F(x)$



Klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$	Modus ponens
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	Abschwächung
$A \Rightarrow (A \vee B)$	

Negation (DE-MORGAN)

$$\neg \exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

$$\neg \forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

Häufige Fehler

- $U = \emptyset^c$ nicht notwendig
- $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x P(x)$
- $\neg \exists x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \forall x \neg \exists y P(x, y)$

Beweistechniken

Achtung: Aus falschen Aussagen können wahre *und* falsche Aussagen folgen.

Direkt $A \Rightarrow B$ Angenommen A , zeige B . Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (**Kontraposition**).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Fallunters. Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

Widerspruch $(\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg B$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

Ring (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \dots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \dots \Rightarrow A$$

Induktion $F(n) \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. **Anfang:** Zeige $F(n_0)$.

2. **Schritt:** Angenommen $F(n)$ (Hypothese), zeige $F(n+1)$ (Behauptung).

Starke Induktion: Angenommen $F(k) \quad \forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquiv. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

Naive Mengenlehre

$$f(1) = 0, r_{11} r_{12} r_{13} r_{14} \dots$$
$$f(2) = 0, r_{21} r_{22} r_{23} r_{24} \dots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32} r_{33} r_{34} \dots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43} r_{44} \dots$$

\vdots

(CANTORS Diagonalargumente)

Mengen Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

Element $x \in M$ „enthält“

Leere M. $\emptyset = \{\}$

Universum U

Einschränkung $\{x \mid F(x)\}$

Relationen

Teilmenge $N \subseteq M$
 $\Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$ \odot

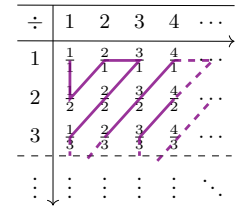
Gleichheit $M = N$
 $\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$ \odot

Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$
$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \rightarrow N$$

Abzählbar $\exists f_{\text{surj.}} : \mathbb{N} \rightarrow M$

- Endliche Mengen, $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ ($= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \dots\}$)
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$



Operationen

Vereinig. $M \cup N$
 $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ \odot

Schnitt $M \cap N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ ($= \emptyset$ „disjunkt“) \odot

Diff. $M \setminus N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ \odot

Komplement $M^c = \{x \mid x \notin M\}$ \odot

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$, nicht $\forall M : \emptyset \in M$

Quantitative Relationen

Sei Indexmenge I und Mengen $M_i \quad \forall i \in I$.

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

Neutrale Elemente

- $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen“)
- $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$ („wegnehmen“)

Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

Abbildungen

Abbildung f von X (Definitions- b.) nach Y (Werteb.) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

$$f : X \rightarrow Y$$

Graph $\text{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

Identität

$$\text{id}_A : A \rightarrow A$$

$$\text{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$ wenn f bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$

Eigenschaften

Injektiv $\forall x_1, x_2 \in X :$
 $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

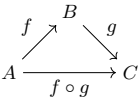
Surjektiv $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

Bijektiv wenn injektiv und surjektiv

Verkettung $f \circ g : A \rightarrow C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)



Relationen

Kartesisches Produkt

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

Relation \sim von/auf M nach N ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m, n) \in R$$

\equiv **Reflexiv** $\forall x \in M : (x, x) \in R$
 $\Leftrightarrow \text{id}_M \subseteq R$

Irreflexiv $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
 $\Leftrightarrow \text{id}_M \cap R = \emptyset$

\equiv **Sym.** $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$
 $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

Antis. $\forall x, y : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$
 $\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \text{id}_M$

\equiv **Transitiv** $\forall x, y, z : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$
 $\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

Vollst. $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
 $\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

Spezielle Relationen

Inverse Relation R^{-1} mit $R \in M \times N := \{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}$

Komposition $R; R$ mit $R' \in N \times P := \{(m, p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m, n) \in R \wedge (n, p) \in R'\}$

Leere Relation \emptyset

Identität $\text{id}_M := \{(m, m) \mid m \in M\}$
(=)

Allrelation $M \times M$

Äquivalenzrelation \equiv reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

Äquivalenzklasse $[m]_{\equiv}$ auf M , Vertreter $m \in M$.

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

$$\Leftrightarrow [m]_{\equiv} = [x]_{\equiv}$$

Zerlegung $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von M .

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$
($N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N'$)
- (Korrespondiert zur ÄR.)

Quotient (M / \equiv) Sei \equiv ÄR. auf M . (ist Zerlegung)

$$(M / \equiv) := \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

Analysis

Reelle Zahlen \mathbb{R}

Angeordnete Körper

(Gilt auch für \mathbb{Z} und \mathbb{Q} .)

Körperaxiome ($\mathbb{R}, +, *$) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Addition ($\mathbb{R}, +$)

Assoziativität
 $a + (b + c) = (a + b) + c$

Kommutativität
 $a + b = b + a$

Neutrales Element Null

$$a + 0 = a \quad 0 \in \mathbb{R}$$

Inverses „Negativ“

$$a + (-a) = 0 \quad (-a) \in \mathbb{R}$$

Multiplikation ($\mathbb{R}, *$)

Assoziativität $a * (b * c) = (a * b) * c$

Kommutativität $a * b = b * a$

Neutrales Element Eins

$$a * 1 = a \quad 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Inverses „Kehrwert“

$$a * (a^{-1}) = 1$$

$$a \neq 0, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$$

Distributivität

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

Totale Ordnung

Transitivität

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

Trichotomie Entweder

$$a < b \text{ oder } a = b \text{ oder } b < a$$

$$\Rightarrow \text{Irreflexivität } (a < b \Rightarrow a \neq b)$$

Addition

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Multiplikation

$$a < b \Rightarrow a * c < b * c \quad 0 < c$$

Bei Additiven oder Multiplikativen Inversion dreht sich die Ungleichung.

ARCHIMEDES Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

$$n > \frac{1}{x}$$

Teilbarkeit

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : b = a * n$$

($\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x < 0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

Operationen

Brüche

- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$
- $\frac{a}{b} \stackrel{*d}{=} \frac{a*d}{b*d}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$

Wurzeln $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

Potenzen $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

- $a^x * b^x = (a * b)^x$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

Intervalle

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a_0 \in A$.

Geschlossen $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(„Ecken sind mit enthalten“)

Offen $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Bei ∞ immer offen, da $\infty \notin \mathbb{R}$)

Kleinstes/Größtes Element

Minimum $\min(A) := a_0$
 $\Leftrightarrow \forall a \in A : a_0 \leq a$

Maximum $\max(A) := a_0$
 $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq a_0$

$$(\sharp^{\min} / \max(a; b))$$

Beschränktheit A heißt

Oben beschränkt $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s$

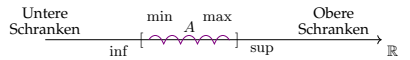
Unten beschränkt $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a$

Vollständigkeit

Infimum (klein) $\inf(A)$
:= $\max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a\}$

Supremum (groß) $\sup(A)$
:= $\min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s\}$

Vollständigkeitsaxiom $\exists \sup(A).$



Folgen

Folge $(\mathbf{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ in A ist eine Abb. $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ mit $a_n = f(n)$.

Arithmetische Folge $a_{n+1} = a_n + d$
 $a_n = a + (n - 1) * d \quad d, a \in \mathbb{R}$

Geometrische Folge $a_{n+1} = a_n * q$
 $a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R}$

Rekursion a_n ist auf $\mathbf{a_{n-1}}$ definiert.

$$a_{n+1} = F(n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$F : A \times \mathbb{N} \rightarrow A$$

Primfaktorzerlegung $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P} : n = \mathbf{p_1 * \dots * p_n}$$

Summen und Produkte

Summe $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$

Produkt $\prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * 3 * \dots * n$

Fakultät $n! = \prod i \quad (\mathbf{0! = 1})$

GAUSSISCHE SUMME $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n * (n + 1)}{2}$$

Geom. Summe $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

BERNOULLI Unglei. $n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1 + x)^n \geq 1 + n * x$$

Binom. Koeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$

• Rechnen: $\frac{n > k}{0 < (n - k)}$

• $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

• $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Binomischer Satz $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$$

Grenzwerte

Betrag $|x| := \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Lemma $|x * y| = |x| * |y|$

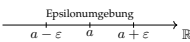
Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$

Umgekehrte Dreiecksungleichung
 $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Konvergenz

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : |\mathbf{a_n - a}| \leq \varepsilon$$
$$(a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon)$$



• $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow \mathbf{lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Beschränkt + monoton \Rightarrow konvergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \mathbf{inf}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{fall.}} \\ \mathbf{sup}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{steig.}} \end{cases}$$

Nullfolgen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \mathbf{0}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \mathbf{0} \quad k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n * q^n = \mathbf{0}$

Folgen gegen 1

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \mathbf{1} \quad a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \mathbf{1}$

Bestimmt Divergent

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \forall R > 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$$
$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \Leftrightarrow \forall R < 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq R$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} = \mathbf{0} & (-1; 1) \\ = \mathbf{1} & = 1 \\ \geq \infty & > 1 \\ \mathbf{div.} & \leq -1 \end{cases}$$

Monotonie

Monoton fallend

$$a_n \underset{\text{streng}}{\geq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Monoton steigend

$$a_n \underset{\text{streng}}{\leq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beschränktheit

$$\exists k > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |\mathbf{a_n}| \leq \mathbf{k}$$

- Konvergent \Rightarrow beschränkt
- Unbeschränkt \Rightarrow divergent

Grenzwertsätze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

• $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \wedge a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \Rightarrow a = b$ (Max. einen Grenzw.)

• $a = \mathbf{0} \wedge (b_n)_{\text{beschr.}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * b_n = \mathbf{0}$

• $a_n \leq b_n \Leftrightarrow a \leq b$ (nicht <)

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} a_n \pm b_n = a \pm b \\ a_n * b_n = a * b \\ a_n * c = a * c \\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \\ |a_n| = |a| \end{cases}$

Einschachtelungssatz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$
$$\forall n \geq N \in \mathbb{N} : \mathbf{a_n \leq c_n \leq b_n}$$
$$(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \mathbf{a}$$

Spezielle Folgen

Teilfolge *streng mnt.* Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $b_k = \mathbf{a_{n_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

(da n_k mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mnt.}$$

(nicht streng!)

Häufungspunkt h mit einer Teilfolge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = h$$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists ! : h = a$

BOLZANO-WEIERSTRASS

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschr.} \Rightarrow \exists h_{\text{Häuf.}}$$

(Teilfolge + (beschr.) $\Rightarrow \exists$ Häuf.)

Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

Vollständigkeit von \mathbb{R}

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschr.} \Rightarrow \exists h \quad (\text{BW}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = h)$$