

Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativ
$A \vee B$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativ
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributiv
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$A \wedge A$	$A$	Idempotenz
$A \vee A$	$A$	
$\neg \neg A$	$A$	Involution
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	DE-MORGAN
$A \wedge (\neg A \vee B)$	$A$	
$A \vee (\neg A \wedge B)$	$A$	Absorption
$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	Elimination
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	

•  $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$  („hinzufügen“)

•  $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$  („wegnehmen“)

**Injektiv**  $\forall x_1, x_2 \in X :$

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Surjektiv**  $\forall y \in Y \exists x \in X : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

**Bijektiv/Invertierbar** wenn injektiv und surjektiv

$\equiv$  **Reflexiv**  $\forall x \in M : (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in R$   
 $\Leftrightarrow \text{id}_M \subseteq R$

**Irreflexiv**  $\forall x \in M : (x, x) \notin R$   
 $\Leftrightarrow \text{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$  **Sym.**  $\forall (x, \mathbf{y}) \in R : (\mathbf{y}, x) \in R$   
 $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

$\preceq$  **Antis.**  $\forall x, y : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$   
 $\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \text{id}_M$

$\equiv$  **Transitiv**  $\forall \mathbf{x}, y, \mathbf{z} : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in R$   
 $\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

**Vollst.**  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$   
 $\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

**Inverse Relation**  $R^{-1}$  mit  $R \in M \times N$  :=  
 $\{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}$

**Komposition**  $R; R$  mit  $R' \in N \times P$  :=  
 $\{(m, p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m, n) \in R \wedge (n, p) \in R'\}$

**Leere Relation**  $\emptyset$

**Identität**  $\text{id}_M := \{(m, m) \mid m \in M\}$   
 $(=)$

**Allrelation**  $M \times M$

**Äquivalenzrelation**  $\equiv$  reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit\*\*\*)

**Äquivalenzklasse**  $[m]_{\equiv}$  auf  $M$ , Vertreter  $m \in M$ .

$$[m]_{\equiv} := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

$$\Leftrightarrow [m]_{\equiv} = [x]_{\equiv}$$

**Zerlegung**  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$  von  $M$ .

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$   
 $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

**Quotient**  $(M/\equiv)$  Sei  $\equiv$  ÄR. auf  $M$ .  
 (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

- (Korrespondiert zur ÄK.)

**Ordnungsrelation**  $\preceq$  reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Minimale**  $x \forall m \in M \setminus \{x\} : m \not\preceq x$

**Untere Schranken**  $m \in \downarrow X$   
 $\forall x \in X : m \preceq x$

**Kleinstes**  $\min_{\preceq} X \in X$

**Totale Ordnung** + vollständig (Trichotomie)

- $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n * n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet a^{\times} * b^{\times} = (a * b)^{\times}$$

$$\bullet a^x * a^y = a^{x+y}$$

$$\bullet (a^x)^y = a^{x*y}$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

**Minimum**  $\min(A) := a_0$   
 $\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a}_0 \leq a$

**Maximum**  $\max(A) := a_0$   
 $\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a} \leq a_0$

**Infimum (klein)**  $\inf(A)$   
 $:= \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a\}$

**Supremum (groß)**  $\sup(A)$   
 $:= \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s\}$

$$\sum_i^n i = \frac{n * (n + 1)}{2}$$

**Geom. Summe**  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Bernoulli Unglei.**  $n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

**Binom. Koeff.**  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} * a^{n-k} b^k$$

**Lemma**  $|x * y| = |x| * |y|$

**Dreiecksungleichung**  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Umgekehrte Dreiecksungleichung**  
 $||x| - |y|| \leq |x - y|$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \geq n_0 :$$

$$|a_n - a| \leq \epsilon$$

$$(a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon)$$

Beschränkt + monoton  $\Rightarrow$  konvergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{fall.}} \\ \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{steig.}} \end{cases}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow$$

$$\forall R > 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall R < 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq R$$

- Konvergent  $\Rightarrow$  beschränkt
- Unbeschränkt  $\Rightarrow$  divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

$$\forall n \geq N \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n \leq \mathbf{c}_n \leq \mathbf{b}_n$$

$$(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \mathbf{a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a$$

(da  $n_k$  mnt. steigend)

$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mnt.}$   
 (nicht streng!)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschr.} \Rightarrow \exists h \text{ Häuf.}$$

(Beschränkte Teilfolgen besitzen mind. einen Häufungspunkt)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 :$$

$$|a_n - a_m| \leq \epsilon$$

**Geom.**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad q \in (-1; 1)$

**Harmon.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergent

**Allg. Harmon.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  konvergiert  
 $\forall \alpha > 1$

**Cauchy**

$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CAUCHY}$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m > n_0 :$$

$$|\sum_{k=m+1}^n a_k| \leq \epsilon$$

**Notwendig**

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}}$$

**Beschränkt**  $a_n \geq 0 (\Rightarrow \text{mnt.}) \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{beschr.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

**Majorante**  $0 \leq \mathbf{a}_n \leq \mathbf{b}_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

**Quotient**  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 \rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > 1 \rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

**Wurzel**  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 \rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > 1 \rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

**Absolut**

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(Dreiecksungleichung)

**Leibniz**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mnt. Nullfolge

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n \right)_{\text{konv.}}$$

**Grenzwert**  $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow$$

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)_{\text{konv.}}$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp(x) * \exp(y) = \exp(x + y)$$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

**Groß-O-Notation** Kosten  $C_f(n)$  mit  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0$

**Untere Schranke**  $\Omega(f)$

$$C_f(n) \geq c * g(n)$$

**Obere Schranke**  $O(f)$

$$C_f(n) \leq c * g(n)$$

**Exakte Schranke**  $\Theta(f)$

$$C_f(n) \in \Omega(f) \cap O(f)$$

Polynom  $k$ ten Grades  $\in \Theta(n^k)$

(Beweis:  $g$  und  $c$  finden)

**Elementare Operationen, Kontrollstr.**  
 $\in O(1)$

**Schleifen**  $\in i$  Wiederholungen  $* O(f)$   
teuerste Operation

**Abfolge**  $O(g)$  nach  $O(f) \in O(\max(f; g))$

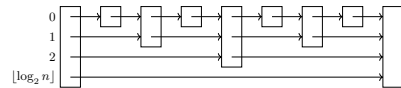
**Rekursion**  $\in k$  Aufrufe  $* O(f)$  teuerste Operation

**Mastertheorem**  $a \geq 1, b > 1, \Theta \geq 0$

$$T(n) = a * T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta(n^k) & a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^k \end{cases}$$

**Skip**



- Zeiger auf Ebene  $i$  zeigt zu nächstem  $2^i$  Element
- Suchen  $\in O(\log n)$

**(Perfekt)** Einfügen, Löschen  $\in O(n)$   
(Vollst. Reorga.)

**Randomisiert** Höhe zufällig (keine vollst. Reorga.)

$$P(h) = \frac{1}{2^{h+1}}: \text{Einfügen, Löschen} \in O(\log n)$$

**Sortierproblem**

**Gegeben** (endliche) Folge von Schlüsseln (von Daten)  $(K_i)_{i \in I}$

**Gesucht** Bijektive Abbildung  $\pi : I \rightarrow I$  (Permutation), sodass  $K_{\pi(i)} \leq K_{\pi(i+1)} \quad \forall i \in I$

**Ordnung** Allgemein vs. speziell: Ordnung wird nur über Schlüsselvergleiche hergestellt

**Relation** Stabil vs. instabil: Vorherig relative Reihenfolge bleibt erhalten

**Speicher** In situ vs. ex situ: Zusätzlicher Speicher notwendig

**Lokal** Intern vs. extern: Alles im RAM oder Mischung vorsortierter externer Teilfolgen

**Anzahl der Inversionen** Anzahl kleinerer Nachfolger für jedes Element:

$$\text{inv}(L) := |\{(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq n-1, L[i] \geq L[j]\}|$$

**Anzahl der Runs** Ein Run ist eine sortierte Teilliste, die nicht nach links oder rechts verlängert werden kann. Die Anzahl der Runs ist:

$$\text{runs}(L) := |\{i \mid 0 \leq i < n-1, L[i+1] < L[i]\}| + 1$$

**Längster Run** Anzahl der Elemente der längsten sortierten Teilliste:

$$\text{las}(L) := \max\{r.\text{len} \mid r \text{ ist Run in } L\}$$

$$\text{rem}(L) := L.\text{len} - \text{las}(L)$$

Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt im Worst- und Average-case Schlüsselvergleiche von mindestens:

$$\Omega(n \log n)$$

**Lexikographische Ordnung**  $\leq$  Sei  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  ein Alphabet, dass sich mit gegebener Ordnung  $a_1 < \dots < a_n$  wie folgt auf dem Lexikon  $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$  fortsetzt:

$$v = (v_1, \dots, v_p) \leq w = (w_1, \dots, w_q)$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq p : v_i = w_i \quad p \leq q$$

$$\vee \forall 1 \leq j \leq i : v_j = w_j \quad v_i < w_i$$

**Fachverteilen** Sortieren von  $n$   $k$ -Tupeln in  $k$  Schritten: Sortieren nach letztem Element, vorletztem usw.

Algo.	Stabil	Mem.	Schlüsselvergleiche	$C_n$	$M_n$	Satzkomplexitäten	$M_n$	$M_n$
Selection	✓	1	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
Insertion	✓	1	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$
Bubble	✓	1	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
			Best-case	Average-case	Worst-case			
Shell	✓	1	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$
Quick	✓	$\log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$
Timmer	✓	$2n-1$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$
Heap	✓	1	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$
Merge	✓	$n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$
Distribution	✓	$n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$	$n \log n$

**Einfach** keine Schleife oder Doppelkanten

**Zusammenhängend** Für jede zwei Knoten gibt es genau eine Folge von Kanten die sie verbindet

**Azyklisch** kein Zyklus (Cycle)

**Ordnung** Max. Anzahl von Kindern jedes Knoten eines Baums

**Tiefe** Anzahl Kanten zwischen einem Knoten und Wurzel

**Stufe** Alle Knoten gleicher Tiefe

**Höhe** Max. Tiefe +1

**Geordnet** Kinder erfüllen Ordnung von links nach rechts

**Vollständig** Alle Blätter auf gleicher Stufe, jede Stufe hat max. Anzahl von Kindern

**Strikt** Jeder Knoten hat 0 oder 2 Kinder (Kein Knoten hat genau 1 Kind).

**Vollständig** Jeder Knoten außer der letzten Stufe hat genau 2 Kinder.

**Fast Vollständig** Vollständig, außer Blätter können rechts fehlen.

**Ausgeglichen** Vollständig, aber Blätter auf letzten 2 Stufen

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

(Reihe  $\times$  Spalte)