Logik

Aussagenlogik

Aussage Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

Theoreme sind wahre Aussagen.

Junktoren

Negation $\neg\mathcal{A}$ „Nicht“ (`!`, `~`,)

Konjunkt. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ „und“ (`&&`,)

Disjunkt. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ „oder“ (`||`,)

Implikat. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „Wenn, dann“ / „$\mathcal{B}$“ ($\rightarrow$, `if`)

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „$\mathcal{A}$ hinreichend“

$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ „$\mathcal{A}$ notwendig“

Äquiv. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ „Genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$, $\equiv$, `==`,)

Wahrheitswertetabelle mit 2^n Zeilen für n Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	**0**	0
1	1	0	1	1	1	1

❧ ❧ ❧

Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativ
$A \vee B$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativ
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributiv
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$A \wedge A$	A	Idempotenz
$A \vee A$	A	
$\neg\neg A$	A	Involution
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	De-Morgan
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	
$A \wedge (\mathbf{A} \vee B)$	A	Absorption
$A \vee (\mathbf{A} \wedge B)$	A	
$A \Rightarrow B$	$\neg\mathbf{A} \vee B$	
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	Elimination
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	

Axiomatik

Axiome als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen.

Anspruch, aber nach Gödels Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

Prädikatenlogik

Quantoren Innerhalb eines Universums:

Existenzq. $\exists$ „Mind. eines“

Individuum $\exists!$ „Genau eines“

Allq. $\forall$ „Für alle“

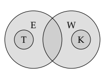
Quantitative Aussagen

Erfüllbar $\exists x F(x)$

Widerlegbar $\exists x \neg F(x)$

Tautologie $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

Kontradiktion $\bot = \forall x \neg F(x)$



Klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$	Modus ponens
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	Abschwächung
$A \Rightarrow (A \vee B)$	

Negation (De-Morgan)

$$\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$
$$\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

Häufige Fehler

- $U = \emptyset^{\complement}$ nicht notwendig
- $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x P(x)$
- $\neg\exists x\exists y P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg\exists y P(x,y)$

Beweistechniken □

Achtung: Aus falschen Aussagen können wahre *und* falsche Aussagen folgen.

Direkt $A \Rightarrow B$ Angenommen A, zeige B. Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (*Kontraposition*).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Fallunters. Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

Widerspruch $(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg\mathbf{B}$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

Ring (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{A}$$

Induktion $F(n)$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. **Anfang:** Zeige $F(n_0)$.
2. **Schritt:** Angenommen $F(n)$ (Hypothese), zeige $F(n+1)$ (Behauptung).

Starke Induktion: Angenommen $F(k)$ $\forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquival. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

Naive Mengenlehre

Mengen Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

Element $x \in M$ „enthält“

Leere M. $\emptyset = \{\}$

Universum U

Einschränkung $\{x \mid F(x)\}$

Relationen

Teilmenge $N \subseteq M$ $\Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$

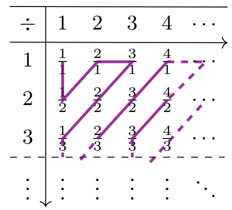
Gleichheit $M = N$ $\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$
$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \rightarrow N$$

Abzählbar $\exists f_{\text{surj.}} : \mathbb{N} \rightarrow M$

- Endliche Mengen, $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ $(= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \dots\})$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$



$$f(1) = 0, \mathbf{r_{11}} r_{12} r_{13} r_{14} \dots$$
$$f(2) = 0, r_{21}\, \mathbf{r_{22}}\, r_{23} r_{24} \dots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32}\, \mathbf{r_{33}}\, r_{34} \dots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43}\, \mathbf{r_{44}} \dots$$
$$\vdots$$

(Cantors Diagonalargumente)

Operationen

Vereinig. $M \cup N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

Schnitt $M \cap N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ ($= \emptyset$ „disjunkt“)

Diff. $M \setminus N$ $\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

Komplement $M^{\complement}$ $\{x \mid x \notin M\}$

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$, nicht $\forall M : \emptyset \in M$

Quantitative Relationen

Sei Indexmenge I und Mengen $M_i \quad \forall i \in I$.

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

Neutrale Elemente

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen“)
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ („wegnehmen“)

Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

Abbildungen

Abbildung f von X (Definitionsb.) nach Y (Werteb.) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

$$\mathbf{f} : X \to Y$$

Graph $\mathrm{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

Identität

$$\mathrm{id}_A : A \to A$$
$$\mathrm{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ wenn f bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$

Eigenschaften

Injektiv $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektiv $\forall y \in Y \exists x \in X : \mathbf{y} = \mathbf{f(x)}$

Bijektiv wenn injektiv und surjektiv

Verkettung $f \circ g : A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & C \end{tikzcd}$$

Relationen

Kartesisches Produkt

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

Relation $\sim$ von/auf M nach N ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m,n) \in R$$

$\equiv$ **Reflexiv** $\forall x \in M : (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

Irreflexiv $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$ **Sym.** $\forall (x, \mathbf{y}) \in R : (\mathbf{y}, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

Antis. $\forall x, y : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
$\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

$\equiv$ **Transitiv** $\forall \mathbf{x}, y, \mathbf{z} : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in R$
$\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

Vollst. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$
$\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

Spezielle Relationen

Inverse Relation R^{-1} mit $R \in M \times N := \{(n,m) \in N \times M \mid (m,n) \in R\}$

Komposition $R; R$ mit $R' \in N \times P := \{(m,p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m,n) \in R \wedge (n,p) \in R'\}$

Leere Relation $\emptyset$

Identität id_M $:= \{(m,m) \mid m \in M\}$ $(=)$

Allrelation $M \times M$

Äquivalenzrelation $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

Äquivalenzklasse $[\mathbf{m}]_\equiv$ auf M, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

Zerlegung $\mathcal{N}$ $\subseteq \mathcal{P}(M)$ von M.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$
  $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

Quotient $(\mathbf{M}/\equiv)$ Sei $\equiv$ ÄR. auf M. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

Analysis

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Angeordnete Körper

(Gilt auch für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)

Körperaxiome $(\mathbb{R}, +, *)$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Addition $(\mathbb{R}, +)$

Assoziativität
$a + (b + c) = (a + b) + c$

Kommutativität
$a + b = b + a$

Neutrales Element Null
$a + 0 = a \quad 0 \in \mathbb{R}$

Inverses „Negativ“
$a + (-a) = 0 \quad (-a) \in \mathbb{R}$

Multiplikation $(\mathbb{R}, *)$

Assoziativität $a * (b * c) = (a * b) * c$

Kommutativität $a * b = b * a$

Neutrales Element Eins
$a * 1 = a \quad 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Inverses „Kehrwert“
$a * (a^{-1}) = 1$
$a \neq \mathbf{0}, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$

Distributivität
$\mathbf{a} * (b + c) = \mathbf{a} * b + \mathbf{a} * c$

Totale Ordnung

Transitivität
$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Trichotomie Entweder
$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
$\Rightarrow$ *Irreflexivität* $(a < b \Rightarrow a \neq b)$

Addition
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Multiplikation
$a < b \Rightarrow a * c < b * c \quad 0 < c$

Bei Additiver oder Multiplikativer Inversion dreht sich die Ungleichung.

Archimedes Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$
$$n > \frac{1}{x}$$

Teilbarkeit

$$a | b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : b = a * n$$

($\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x < 0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

Operationen

Brüche

- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$
- $\frac{a}{b} \overset{*\mathbf{d}}{=} \frac{a*\mathbf{d}}{b*\mathbf{d}}$
- $\frac{a}{\mathbf{c}} + \frac{b}{\mathbf{c}} = \frac{a+b}{\mathbf{c}}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$

Wurzeln $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{\mathbf{a} * \mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}} * \sqrt[n]{\mathbf{b}}$
- $\sqrt[\mathbf{n}]{\sqrt[\mathbf{m}]{a}} = \sqrt[\mathbf{n*m}]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

Potenzen $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

- $a^{\mathbf{x}} * b^{\mathbf{x}} = (a * b)^{\mathbf{x}}$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

Intervalle

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a_0 \in A$.

Geschlossen $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(„Ecken sind mit enthalten“)

Offen $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Bei ∞ immer offen, da $\infty \notin \mathbb{R}$)

Kleinstes/Größtes Element

Minimum $\min(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a_0} \leq a$

Maximum $\max(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : \mathbf{a} \leq a_0$

$(\nexists^{\min}/_{\max}(a; b))$

Beschränktheit A heißt

Oben beschränkt $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s$

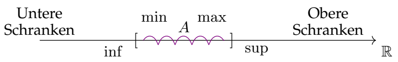
Unten beschränkt $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a$

Vollständigkeit

Infimum (klein) $\inf(A) := \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{s} \leq a\}$

Supremum (groß) $\sup(A) := \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : \mathbf{a} \leq s\}$

Vollständigkeitsaxiom $\exists \sup(A)$.



Folgen

Folge $(\mathbf{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in A ist eine Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ mit $a_n = f(n)$.

Arithmetische Folge $a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a + (n-1) * d \quad d, a \in \mathbb{R}$

Geometrische Folge $a_{n+1} = a_n * q$
$a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R}$

Rekursion a_n ist auf $\mathbf{a_{n-1}}$ definiert.

$$a_{n+1} = F(n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$F : A \times \mathbb{N} \to A$$

Primfaktorzerlegung $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P} : n = \mathbf{p_1 * \cdots * p_n}$$

Summen und Produkte

Summe $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \cdots + n$

Produkt $\prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * 3 * \cdots * n$

Fakultät $n! = \prod^n i$ ($0! = 1$)

Gaussche Summe $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i}^{n} i = \frac{n * (n+1)}{2}$$

Geom. Summe $q \in \mathbb{R} \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bernoulli Unglei. $n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + n * x$$

Binom. Koeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$

- Rechnen: $\frac{n>k}{0<(n-k)}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Binomischer Satz $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$$

Grenzwerte

Betrag $|x| := \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -\ x & x < 0 \end{cases}$

Lemma $|x * y| = |x| * |y|$

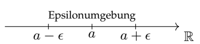
Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$

Umgekehrte Dreiecksungleichung $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 :$$
$$|\mathbf{a_n - a}| \leq \epsilon$$
$$(a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon)$$



- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow \mathbf{\lim}_{n\to\infty} a_n = a$

Beschränkt + monoton ⇒ konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \mathbf{inf}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{fall.} \\ \mathbf{sup}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{steig.} \end{cases}$$

Nullfolgen $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \mathbf{0} \quad k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} n * q^n = \mathbf{0}$

Folgen gegen 1

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \mathbf{1} \quad a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \mathbf{1}$

Bestimmt Divergent

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R > 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$$
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R < 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq R$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = \mathbf{0} & (-1;1) \\ = \mathbf{1} & = 1 \\ \geq \infty & > 1 \\ \text{div.} & \leq -1 \end{cases}$$

Monotonie

Monoton fallend $a_n \underset{\text{(streng)}}{\geq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Monoton steigend $a_n \underset{\text{(streng)}}{\leq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beschränktheit

$$\exists k > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |\mathbf{a_n}| \leq \mathbf{k}$$

- Konvergent ⇒ beschränkt
- Unbeschränkt ⇒ divergent

Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge a_n \xrightarrow{n\to\infty} b \Rightarrow a = b$ (Max. einen Grenzw.)
- $a = \mathbf{0} \wedge (b_n)_{beschr.} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n * b_n = \mathbf{0}$
- $a_n \leq b_n \Leftrightarrow a \leq b$ (nicht $<$)
- $\lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_n \pm b_n = a \pm b \\ a_n \divideontimes b_n = a \divideontimes b \\ a_n * c = a * c \\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \\ |a_n| = |a| \end{cases}$

Einschachtelungssatz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$
$$\forall n \geq N \in \mathbb{N} : \mathbf{a_n \leq c_n \leq b_n}$$
$$(\exists) \lim_{n\to\infty} c_n = \mathbf{a}$$

Spezielle Folgen

Teilfolge *streng mnt.* Folge $(b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $b_k = \mathbf{a_{n_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$$

(da n_k mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_{mnt.}}$$

(nicht streng!)

Häufungspunkt h mit einer Teilfolge

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = h$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists! : h = a$

Bolzano-Weierstrass

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{beschr.}} \Rightarrow \exists h_{Häuf.}$$

(Teilfolge + (beschr.) ⇒ ∃ Häuf.)

Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 :$$
$$|a_n - a_m| \leq \epsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}}$$
$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{beschr.}}}$$
$$\Rightarrow \exists h \quad \text{(BW)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = h)$$

Reihen

Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^\infty a_k$ mit den Gliedern $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$n$te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} a_k$

Grenzwert ebenfalls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls s_n konvergiert

Spezielle Reihen

Geom. $\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q} \quad q \in (-1;1)$

Harmon. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ divergent

Allg. Harmon. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\forall \alpha > \mathbf{1}$

Lemma

- $\sum_{k=1}^\infty a_k, \sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergent
  - $\sum_{k=1}^\infty \mathbf{a_k} + \sum_{k=1}^\infty \mathbf{b_k} = \sum_{k=1}^\infty (\mathbf{a_k} + \mathbf{b_k})$
  - $\mathbf{c} * \sum_{k=1}^\infty \mathbf{a_k} = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{c * a_k}$
- $\exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^\infty a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}}$ (Es reicht spätere Glieder zu betrachten)
- $(\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^\infty a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^\infty a_k = 0$

Konvergenzkriterien

Cauchy

$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \; \text{Cauchy}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m > n_0 :$$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \le \epsilon$$

Notwendige

$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{div.}}$$

Hinreichende

Lemma $a_k \ge \mathbf{0}$ ($\Rightarrow$ *mnt.*) $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\textit{beschr.}}$$

Majorante $0 \le \mathbf{a_k} \le \mathbf{b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (Min. $\le$ Major.)

$$(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$

Algorithmen auf Datenstrukturen

Algorithmus Handlungsvorschrift aus endlich vielen Einzelschritten zur Problemlösung.

- Korrektheit (Test-based dev.)
- Terminierung (Touring)
- Effizienz (Komplexität)

Formen (High to low) Menschl. Sprache, Pseudocode, Mathematische Ausdrücke, Quellcode, Binärcode

Divide & Conquer

Divide Zerlegen in kleinere Teilprobleme

Conquer Lösen der Teilprobleme mit gleicher Methode (rekursiv)

Merge Zusammenführen der Teillösungen

Effizienz

Raum/Zeit-Tradeoff: schnell + großvs. klein + langsam.

Programmlaufzeit/-allokationen	Komplexität
Einfluss äuSSerer Faktoren	Unabh.
Konkrete Größe	Asymptotische Schätzung

Inputgröße n Jeweils

- Best-case C_B
- Average-case C_A
- Worst-case C_W

Asymptotische Zeit-/Speicherkomplexität

Groß-O-Notation Kosten $C_f(n)$ mit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \ge n_0$

Untere Schranke $\Omega(f)$
$C_f(n) \ge c * g(n)$

Obere Schranke $O(f)$
$C_f(n) \le c * g(n)$

Exakte Schranke $\Theta(f)$
$C_f(n) \in \Omega(f) \cap O(f)$
Polynom $k$ten Grades $\in \Theta(n^k)$

(Beweis: g und c finden)

Groß-O	Wachstum	Klasse	
$O(1)$	Konstant		lösbar
$O(\log n)$	Logarithmisch		
$O(n)$	Linear		
$O(n \log n)$	Nlogn		
$O(n^2)$	Quadratisch	Polynomiell $O(n^k)$	
$O(n^3)$	Kubisch		
$O(2^n)$	Exponentiell	Exponentiell $O(\alpha^n)$	hart
$O(n!)$	Fakultät		
$O(n^n)$			

Rechenregeln

Elementare Operationen, Kontrollstr. $\in \mathbf{O(1)}$

Schleifen $\in i$ Wiederholungen $* \, O(f)$ teuerste Operation

Abfolge $O(g)$ nach $O(f)$ $\in O(\mathbf{max}(f;g))$

Rekursion $\in k$ Aufrufe $* \, O(f)$ teuerste Operation

Mastertheorem $a \ge 1, b > 1, \Theta > 0$

$$T(n) = a * T(\frac{n}{b}) + \Theta(n^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta(n^k) & a < b^k \\ \Theta(n^k * \log n) & a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^k \end{cases}$$

Floor/Ceiling Runden

Floor $\lfloor x \rfloor$ nach unten

Ceiling $\lceil x \rceil$ nach oben

Suchverfahren

Lineare Liste endlich, geordnete (nicht sortierte) Folge n Elemente $L := [a_0, \dots, a_n]$ gleichen Typs.

Array Sequenzielle Abfolge im Speicher, statisch, Index $O(1)$, schnelle Suchverfahren

Sequenziell $C_A(n) = \frac{1}{n} * \sum^n i = \frac{n+1}{2} \in O(n)$

Algorithm: Sequential Search

Input: Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
for $i \leftarrow 0$ **to** $L.len - 1$ **do**
  if $x = L[i]$ **then**
    return i
  end
end
return -1

Auswahlproblem Finde i-kleinstes Element in unsortierter Liste $\in \Theta(n)$

Algorithm: i-Smallest Element

Input: Unsortierte Liste L, Level i
Output: Kleinstes Element x
$p \leftarrow L[L.\text{len} - 1]$
for $k = 0$ **to** $L.len - 1$ **do**
  if $L[k] < p$ **then**
    `Push` $(L_<, L[k])$
  if $L[k] > p$ **then**
    `Push` $(L_>, L[k])$
  end
end
if $L_<.len = i - 1$ **then**
  return p
if $L_<.len > i - 1$ **then**
  return i`-Smallest Element` $L_<$
if $L_<.len < i - 1$ **then**
  return i`-Smallest Element` $(L_>, i - 1 - L_<.len)$
end

Sortierte Listen

Binär $C_W(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1, C_A(n) \approx \log_2 n \in O(\log n)$

Algorithm: Binary Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
if $L.len = 0$ **then**
  return -1
else
  $m \leftarrow \lfloor \frac{L.\text{len}}{2} \rfloor$
if $x = L[m]$ **then**
  return m
if $x < L[m]$ **then**
  return `Binary Search` $[L[0], \dots, L[m-1]]$
if $x > L[m]$ **then**
  return $m + 1 +$ `Binary Search` $[L[m+1], \dots, L[L.len - 1]]$
end

Sprung Kosten Vergleich a, Sprung b mit optimaler Sprungweite:

$$m = \lfloor \sqrt{(\frac{a}{b}) * n)} \rfloor$$

$$C_A(n) = \frac{1}{2}(\lceil \frac{n}{m} \rceil * a + m * b) \in O(\sqrt{n})$$

Algorithm: Jump Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
$m \leftarrow \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
while $i < L.len$ **do**
  $i \leftarrow i + m$
  if $x < L[i]$ **then**
    return `Search` $[L[i-m], \dots, L[i-1]]$
  end
end
return -1

- Rekursive Sprungsuche $\in O(\sqrt[k]{n})$
- Partitionierung in Blöcke m möglich

Exponentiell $\in O(\log x)$

Algorithm: Exponential Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
while $x > L[i]$ **do**
  $i \leftarrow 2 * i$
end
return `Search` $[L\lfloor i/2 \rfloor, \dots, L[i-1]]$

- Unbekanntes n möglich

Interpolation $C_A(n) = 1 + \log_2 \log_2 n, C_W(n) \in O(n)$

Algorithm: Searchposition

Input: Listengrenzen $[u, v]$
Output: Suchposition p
return $\lfloor u + \frac{x - L[u]}{L[v] - L[u]}(v - u) \rfloor$

Algorithm: Interpolation Search

Input: Sortierte Liste $[L[u], \dots, L[v]]$, Predikat x
Output: Index i von x
if $x < L[u] \lor x > L[v]$ **then**
  return -1
$p \leftarrow$ `Searchposition` (u, v)
if $x = L[p]$ **then**
  return p
if $x > L[p]$ **then**
  return `Interpolation Search` $(p + 1, v, x)$
else
  return `Interpolation Search` $(u, p - 1, x)$
end

Häufigkeitsordnungen mit Zugriffswahrscheinlichkeit p_i: $C_A(n) = \sum_{i=0}^{n} i * p_i$

Frequency-count Zugriffszähler pro Element

Transpose Tausch mit Vorgänger

Move-to-front

Verkettete Listen

Container Jedes Element p ist in der Form $p \to \boxed{\text{(key) | value | next}}$. Index $\in O(n)$

Löschen $\in O(1)$

```
Algorithm: Delete
Input: Zeiger p auf Vorgänger des löschendes Elements
if p ≠ ∅ ∧ p → next ≠ ∅ then
|   p → next ← (p → next) → next
end
```

- desh. sehr dynamisch

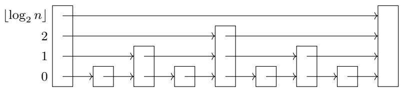
Suchen $C_A(n) = \frac{n+1}{2} \in O(n)$

```
Algorithm: Search Linked List
Input: Verkettete Liste L, Predikat x
Output: Zeiger p auf x
p ← L.head while p → value ≠ x do
|   p ← p → next
end
return p
```

Doppelt Verkettet Zeiger auf Vorgänger $\boxed{\text{(key)} \mid \text{value} \mid \text{prev} \mid \text{next}}$

- Bestimmung des Vorgängers $\in O(1)$ statt $O(n)$
- Höherer Speicheraufwand

Skip



- Zeiger auf Ebene i zeigt zu nächstem 2^i Element
- Suchen $\in O(\log n)$

Perfekt Einfügen, Löschen $\in O(n)$ (Vollst. Reorga.)

Randomisiert Höhe zufällig (keine vollst. Reorga.) $P(h) = \frac{1}{2^{h+1}}$: Einfügen, Löschen $\in O(\log n)$

Spezielle Listen

ADT „Abstrakte Datentypen“

Stack $S = |$**„TOP“**$, \cdots$ Operationen nur auf letztem Element $\in O(1)$

Queue $Q = ||$**„HEAD“**$, \cdots,$ **„TAIL“** Vorne Löschen, hinten einfügen $\in O(1)$

Priority Queue $P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ Jedes Element hat Priorität; Entfernen von Element mit höchster („MIN“) Priorität

Sortierverfahren

Sortierproblem

Gegeben (endliche) Folge von Schlüsseln (von Daten) $(K_i)_{i \in I}$

Gesucht Bijektive Abbildung $\pi : I \to I$ (Permutation), sodass $K_{\pi(i)} \leq K_{\pi(i+1)}$

mit Optimierung nach geringen

- Schlüsselvergleichen C
- Satzbewegungen M

Eigenschaften

Ordnung *Allgemein* vs. *speziell*: Ordnung wird nur über Schlüsselvergleiche hergestellt

Relation *Stabil* vs. *instabil*: Vorherig relative Reihenfolge bleibt erhalten

Speicher *In situ* vs. *ex situ*: Zusätzlicher Speicher notwendig

Lokal *Intern* vs. *extern*: Hauptspeicher oder Mischung vorsortierter externer Teilfolgen

Ordnung $\forall x, y \in X$

Reflexiv $x \leq x$

Antisym. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

Transitiv $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x = z$

Total (Vollständig) $x \leq y \vee y \leq x$

(ohne Total: „*Halbordnung*“)

Grad der Sortierung

Anzahl der Inversionen Anzahl kleinerer Nachfolger für jedes Element:

$$\text{inv}(L) := |\{(i,j) \mid 0 \leq i < j \leq n-1, L[i] \geq L[j]\}|$$

Anzahl der Runs Ein *Run* ist eine sortierte Teilliste, die nicht nach links oder rechts verlängert werden kann. Die Anzahl der Runs ist:

$$\text{runs}(L) := |\{i \mid 0 \leq i < n-1, L[i+1] < L[i]\}| + \mathbf{1}$$

Längster Run Anzahl der Elemente der längsten sortierten Teilliste:

$$\text{las}(L) := \max\{r.\text{len} \mid r \text{ ist Run in } L\}$$
$$\text{rem}(L) := L.\text{len} - \text{las}(L)$$

Einfache Sortierverfahren $\mathbf{O(n^2)}$

Selection Entferne kleinstes Element in unsortierter Liste und füge es sortierter Liste an.

```
Algorithm: Selectionsort
Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
for i ← 0 to L.len − 2 do
|   min ← i
|   for j ← i + 1 to L.len − 1 do
|   |   if L[i] < L[min] then
|   |   |   min ← j
|   end
|   if min ≠ i then
|   |   Swap L[min], L[i]
end
if L.len = 0 then
|   return −1
```

Insertion Verschiebe erstes Element aus unsortierter Liste von hinten durch sortierte Liste, bis das vorgehende Element kleiner ist.

```
Algorithm: Insertionsort
Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
for i ← 1 to L.len − 1 do
|   if L[i] < L[i − 1] then
|   |   temp ← L[i]
|   |   j ← i
|   |   while temp < L[j − 1] ∧ j > 0 do
|   |   |   L[j] ← L[j − 1]
|   |   |   j − −
|   |   end
|   |   L[j] ← temp
end
```

Bubble Vertausche benachbarte Elemente die nicht in Sortierordnung sind, durchlaufe bis nichts vertauscht wird. *Achtung:* Die hinteren Elemente können im Durchlauf ignoriert werden!

```
Algorithm: Bubblesort
Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
i ← L.len
swapped ← 1
while swapped do
|   swapped ← 0
|   for j ← 0 to i − 2 do
|   |   if L[j] > L[j + 1] then
|   |   |   Swap L[j], L[j + 1]
|   |   |   swapped ← 1
|   end
|   i − −
end
```

Verbesserte Sortierverfahren $\mathbf{O(n \log n)}$

Shell Insertionsort, nur werden Elemente nicht mit Nachbarn getauscht, sondern in t Sprüngen h_i, die kleiner werden. Im letzten Schritt dann Insertionsort ($h_t = 1$); somit Sortierung von grob bis fein, also Reduzierung der Tauschvorgänge.

```
Algorithm: Shellsort
Input: Liste L, Absteigende Liste von Sprunggrößen H
Output: Sortierte Liste L
foreach h in H do
|   for i ← h to L.len − 1 do
|   |   temp ← L[i]
|   |   for j ← i; temp < L[j − h] ∧ j ≥ h;
|   |     j ← j − h do
|   |   |   L[j] ← L[j − h]
|   |   end
|   |   L[j] ← temp
|   end
end
```

Quick Rekursiv: Pivot-Element in der Mitte, Teillisten $L_<$, $L_>$, sodass $\forall l_< \in L_< \forall l_> \in L_> : l_< < x < L_>$. Zerlegung: Durchlauf von Links bis $L[i] \geq x$ und von Rechts bis $L[j] \leq x$, dann tauschen.

```
Algorithm: Quicksort
Input: Liste L, Indices l, r
Output: L, sortiert zwischen l und r
if l ≥ r then
|   return
i ← l
j ← r
piv ← L[⌊(l+r)/2⌋]
do
|   while L[i] < piv do
|   |   i + +
|   end
|   while L[j] > piv do
|   |   j − −
|   end
|   if i ≤ j then
|   |   Swap L[i], L[j]
|   |   i + +
|   |   j − −
while i ≤ j;
Quicksort (L, l, j)
Quicksort (L, i, r)
```

Turnier Liste also Binärbaum, bestimme $\min L$ durch Austragen des Turniers, entferne Sieger und wiederhole von Siegerpfad aus.

Heap Stelle Max-Heap (gröSStes Element in der Wurzel) her, gib Wurzel aus under ersetze mit Element ganz rechts in unterster Ebene.

```
Algorithm: Max-Heapify
Input: Liste L, Index i der MHE widerspricht und
       ∀j > i erfüllen MHE
Output: Liste L mit MHE ∀j ≥ i
l ← 2i + 1
r ← 2i + 2
if l < L.len ∧ L[l] > L[i] then
|   largest ← l
else
|   largest ← i
end
if r < L.len ∧ L[r] > L[largest] then
|   largest ← r
if largest ≠ i then
|   Swap L[i], L[largest]
|   Max-Heapify L, largest
```

```
Algorithm: Build-Max-Heap
Input: Liste L
Output: Liste L mit MHE
for i ← ⌊L.len/2⌋ − 1 to 0 do
|   Max-Heapify L, i
end
```

```
Algorithm: Heapsort
Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L
Build-Max-Heap L
for i ← L.len − 1 to 1 do
|   Swap L[0], L[i]
|   L.len − −
|   Max-Heapify L, 0
end
```

Merge Zerlege Liste in k Teile, sortiere diese (mit Mergesort) und verschmelze die sortierten Teillisten (merge).

```
Algorithm: 2-Merge
Input: Liste L mit L[l ... m − 1] und L[m ... r]
       sortiert, Indices l, m, r
Output: Liste L mit L[l ... r] sortiert
j ← l
k ← m
for i ← 0 to r − l do
|   if k > r ∨ (j < m ∧ L[j] ≤ L[k]) then
|   |   B[i] ← L[j]
|   |   j ← j + 1
|   else
|   |   B[i] ← L[k]
|   |   k ← k + 1
|   end
end
for i ← 0 to r − l do
|   L[l + i] ← B[i]
end
```

```
Algorithm: Rekursives 2-Mergesort
Input: Liste L, Indices l, r
Output: Liste L mit L[l ... r] sortiert
if l ≥ r then
|   return
else
|   m ← ⌊(l+r+1)/2⌋
|   Mergesort L, l, m − 1
|   Mergesort L, m, r
|   Merge L, l, m, r
end
```

Nicht Rekursives 2-Mergesort

Algorithm: 2-Mergesort (nicht rekursiv)

Input: Liste L
Output: Sortierte Liste L

```
for k ← 2; k < n; k ← k * 2 do
    for i ← 0; i + k ≤ n; i ← i + k do
        Merge L, i, min(i + k − 1, n − 1), i + k/2
    end
end
Merge L, 0, n − 1, k/2
```

Natürliches Mergesort Verschmelzen von benachbarten Runs (Ausnutzen der Vorsortierung)

Untere Schranke allgemeiner Sortierverfahren

Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt im Worst- und Average-case Schlüsselvergleiche von mindestens:

$$\Omega(n \log n)$$

(Siehe Pfadlänge auf Entscheidungsbaum)

Spezielle Sortierverfahren $\mathbf{O(n)}$

Distribution Abspeichern der Frequenz jedes Elementes k auf $F[k]$; Ausgeben jedes Index $F[k]$ mal.

Lexikographische Ordnung Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Alphabet, dass sich mit gegebener Ordnung $a_1 < \dots < a_n$ wie folgt auf dem Lexikon $A* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ fortsetzt:

$$
\begin{aligned}
&v = (v_1, \dots, v_p) \leq w = (w_1, \dots, w_q) \\
\Leftrightarrow &\forall 1 \leq i \leq p : v_i = w_i \quad p \leq q \\
\vee &\forall 1 \leq j \leq i : v_j = w_j \quad v_i < w_i
\end{aligned}
$$

(Die antisymmetrische Relation $\leq$ heißt Lexikographische Ordnung)

Fachverteilen Sortieren von n k-Tupeln in k Schritten: Sortieren nach letztem Element, vorletzem usw.

Große Datensätze sortieren

Algo.	Stabil	Mem.	Schlüsselvergleiche			Satzbewegungen			
			C_B	C_A	C_W	M_B	M_A	M_W	
Selection	✗	1	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$3*(n-1)$	$3*(n-1)$	$3*(n-1)$	$O(n^2)$
Insertion	✓	1	$n-1$	$\approx \frac{n*(n-1)}{4} + n - \ln n$	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$2*(n-1)$	$\frac{n^2+3n-4}{4} + n - 1$	$\frac{n^2+3n-4}{2}$	
Bubble	✓	1	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$\frac{n*(n-1)}{2}$	0	$\frac{3n*(n-1)}{4}$	$\frac{3n*(n-1)}{2}$	
				Best-case		Average-case	Worst-case		
Shell	✗	1		-		-	-		$O(n \log n)$
Quick	✗	$\log n$		$n \log n$		$n \log n$	n^2		
Turnier	✗	$2n-1$		$n \log n$		$n \log n$	$n \log n$		
Heap	✗	1		$n \log n$		$n \log n$	$n \log n$		
Merge	✓	n		$n \log n$		$n \log n$	$n \log n$		
Untere Schranke $\Omega(n \log n)$ für allgemeine Sortierverfahren									
Distribution	✓	n		n		n	$n \log n$, n^2		$O(n)$