# Logik

## Aussagenlogik

**Aussage** Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

**Theoreme** sind wahre Aussagen.

## Junktoren

**Negation** $\neg\mathcal{A}$ „Nicht“ (`!`, `~`, )

**Konjunkt.** $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ „und“ (`&&`, )

**Disjunkt.** $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ „oder“ (`||`, )

**Implikat.** $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „Wenn, dann“ / „$\mathcal{B}$“ ($\rightarrow$, `if`)

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „$\mathcal{A}$ hinreichend“

$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ „$\mathcal{A}$ notwendig“

**Äquiv.** $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ „Genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$, $\equiv$, `==`, )

**Wahrheitswertetabelle** mit $2^n$ Zeilen für $n$ Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $\neg\mathcal{A}$ | $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

❧ ❧ ❧

| Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$ | | Bezeichnung |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | $B \wedge A$ | Kommutativ |
| $A \vee B$ | $B \vee A$ | |
| $A \wedge (B \wedge C)$ | $(A \wedge B) \wedge C$ | Assoziativ |
| $A \vee (B \vee C)$ | $(A \vee B) \vee C$ | |
| $A \wedge (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributiv |
| $A \vee (B \wedge C)$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | |
| $A \wedge A$ | $A$ | Idempotenz |
| $A \vee A$ | $A$ | |
| $\neg\neg A$ | $A$ | Involution |
| $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | De-Morgan |
| $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | |
| $A \wedge (A \vee B)$ | $A$ | Absorption |
| $A \vee (A \wedge B)$ | $A$ | |
| $A \Rightarrow B$ | $\neg A \vee B$ | Elimination |
| $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ | |
| $A \Leftrightarrow B$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ | |

## Axiomatik

**Axiome** als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen.
Anspruch, aber nach Gödels Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

## Prädikatenlogik

**Quantoren** Innerhalb eines Universums:

**Existenzq.** $\exists$ „Mind. eines“

**Individuum** $\exists!$ „Genau eines“

**Allq.** $\forall$ „Für alle“

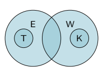
**Quantitative Aussagen**

**Erfüllbar** $\exists x F(x)$

**Widerlegbar** $\exists x \neg F(x)$

**Tautologie** $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

**Kontradiktion** $\bot = \forall x \neg F(x)$



| Klassische Tautologien | Bezeichnung |
|---|---|
| $A \vee \neg A$ | Ausgeschlossenes Drittes |
| $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ | Modus ponens |
| $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | Abschwächung |
| $A \Rightarrow (A \vee B)$ | |

**Negation** (De-Morgan)

$$\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$
$$\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

## Häufige Fehler

- $U = \emptyset^\complement$ nicht notwendig
- $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \nRightarrow \exists x P(x)$
- $\neg\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg\exists y P(x,y)$

## Beweistechniken

**Achtung:** Aus falschen Aussagen können wahre *und* falsche Aussagen folgen.

**Direkt** $A \Rightarrow B$ Angenommen $A$, zeige $B$. Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (*Kontraposition*).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

**Fallunters.** Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

**Widerspruch** $(\neg A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg B$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

**Ring** (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$$

**Induktion** $F(n)$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. **Anfang:** Zeige $F(n_0)$.
2. **Schritt:** Angenommen $F(n)$ (Hypothese), zeige $F(n+1)$ (Behauptung).

**Starke Induktion:** Angenommen $F(k)$ $\forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

## Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquival. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

# Naive Mengenlehre

**Mengen** Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

**Element** $x \in M$ „enthält“

**Leere M.** $\emptyset = \{\}$

**Universum** $U$

**Einschränkung** $\{x \mid F(x)\}$

## Relationen

**Teilmenge** $N \subseteq M \Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$

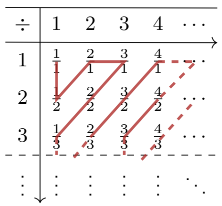
**Gleichheit** $M = N \Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

## Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$
$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

**Abzählbar** $\exists f_{\text{surj.}} : \mathbb{N} \to M$

- Endliche Mengen, $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ $(= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \dots\})$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$



$$f(1) = 0, r_{11} r_{12} r_{13} r_{14} \dots$$
$$f(2) = 0, r_{21} r_{22} r_{23} r_{24} \dots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32} r_{33} r_{34} \dots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43} r_{44} \dots$$
$$\vdots$$

(Cantors Diagonalargumente )

## Operationen

**Vereinig.** $M \cup N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

**Schnitt** $M \cap N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ ($= \emptyset$ „disjunkt“)

**Diff.** $M \setminus N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

**Komplement** $M^\complement$ $\{x \mid x \notin M\}$

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

## Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$ , nicht $\forall M : \emptyset \in M$

## Quantitative Relationen

Sei Indexmenge $I$ und Mengen $M_i$ $\forall i \in I$.

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

**Neutrale Elemente**

- $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen“)
- $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$ („wegnehmen“)

## Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$
$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

## Auswahlaxiom (AC)

Für Menge $\mathcal{X}$ nicht-leerer Mengen:

$$\exists c : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$$
$$\forall X \in \mathcal{X} : c(X) \in X$$

Nutzung kennzeichnen!

## Abbildungen

**Abbildung** $f$ von $X$ (Definitionsb. ) nach $Y$ (Werteb. ) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

**Totalität** $\forall x \in X \exists y \in Y : f(x) = y$

**Eindeutigkeit** $\forall x \in X \forall a, b \in Y : f(x) = a \wedge f(x) = b \Rightarrow a = b$

$$f : X \to Y$$

**Bilder** $f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$ $X' \subseteq X$

**Urbilder** $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$ $Y' \subseteq Y$

**Graph** $\mathrm{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

**Identität**

$$\mathrm{id}_A : A \to A$$
$$\mathrm{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

**Umkehrfunktion** $f^{-1} : Y \to X$ wenn $f$ bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ bzw. $f; f^{-1} = \mathrm{id}_X \wedge f^{-1}; f = \mathrm{id}_X$

Für die Relation $f^{-1}$ gilt:

- $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$
- $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ falls $f$ surjektiv

**Eigenschaften**

**Injektiv** $\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Surjektiv** $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

**Bijektiv/Invertierbar** wenn injektiv und surjektiv

**Verkettung** $f \circ g : A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & C \end{tikzcd}$$

## Relationen

**Kartesisches Produkt**

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

**Relation** $\sim$ von/auf $M$ nach $N$ ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m, n) \in R$$

$\equiv$ **Reflexiv** $\forall x \in M : (x, x) \in R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

**Irreflexiv** $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$ **Sym.** $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

**Antis.** $\forall x, y : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$
$\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

$\equiv$ **Transitiv** $\forall x, y, z : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$
$\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

**Vollst.** $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

## Spezielle Relationen

**Inverse Relation** $R^{-1}$ mit $R \in M \times N :=$
$\{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}$

**Komposition** $R; R$ mit $R' \in N \times P :=$ $\{(m, p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m, n) \in R \wedge (n, p) \in R'\}$

**Leere Relation** $\emptyset$

**Identität** $\mathrm{id}_M := \{(m, m) \mid m \in M\}$ $(=)$

**Allrelation** $M \times M$

**Äquivalenzrelation** $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

**Äquivalenzklasse** $[m]_\equiv$ auf $M$, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

**Zerlegung** $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von $M$.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$ $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

**Quotient** $(M/\equiv)$ Sei $\equiv$ ÄR. auf $M$. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

- (Korrespondiert zur ÄK.)

# Analysis

## Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

## Angeordnete Körper

(Gilt auch für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)

**Körperaxiome** $(\mathbb{R}, +, *)$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

**Addition** $(\mathbb{R}, +)$

**Assoziativität**
$a + (b + c) = (a + b) + c$

**Kommutativität**
$a + b = b + a$

**Neutrales Element Null**
$a + 0 = a \quad 0 \in \mathbb{R}$

**Inverses „Negativ“**
$a + (-a) = 0 \quad (-a) \in \mathbb{R}$

**Multiplikation** $(\mathbb{R}, *)$

**Assoziativität** $a*(b*c) = (a*b)*c$

**Kommutativität** $a * b = b * a$

**Neutrales Element Eins**
$a * 1 = a \quad 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Inverses „Kehrwert“**
$a * (a^{-1}) = 1$
$a \neq 0, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$

**Distributivität**
$a * (b + c) = a * b + a * c$

**Totale Ordnung**

**Transitivität**
$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

**Trichotomie** Entweder
$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
$\Rightarrow$ *Irreflexivität* $(a < b \Rightarrow a \neq b)$

**Addition**
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

**Multiplikation**
$a < b \Rightarrow a * c < b * c \quad 0 < c$

Bei Additiver oder Multiplikativer Inversion dreht sich die Ungleichung.

## Archimedes Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$
$$n > \frac{1}{x}$$

## Teilbarkeit

$$a | b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : b = a * n$$

($\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

## Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x < 0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

## Operationen

**Brüche**

- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} \overset{*d}{=} \frac{ad}{bd}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

**Wurzeln** $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

**Potenzen** $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

- $a^x * b^x = (a * b)^x$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

## Dezimaldarstellung

**Gauss-Klammer** $[y] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq y\} = \lfloor y \rfloor$

$$[y] = k \Leftrightarrow k \leq y < k + 1$$

**Existenz** $\forall x \geq 0 \exists! (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

- $a_n \in \{0, \ldots, 9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x < \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Die Umkehrung gilt mit Lemma:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

**Lemma** $x \geq 0$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Dezi. von $x$

$$\neg(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n = 9)$$

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ periodisch}$$

## Intervalle

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a_0 \in A$.

**Geschlossen** $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ („Ecken sind mit enthalten")

**Offen** $(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (Bei $\infty$ immer offen, da $\infty \notin \mathbb{R}$)

### Kleinstes/Größtes Element

**Minimum** $\min(A) := a_0 \Leftrightarrow \forall a \in A : a_0 \leq a$

**Maximum** $\max(A) := a_0 \Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq a_0$

$(\nexists^{\min}/_{\max}(a;b))$

### Beschränktheit $A$ heißt

**Oben beschränkt** $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq s$

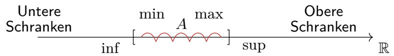
**Unten beschränkt** $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : s \leq a$

### Vollständigkeit

**Infimum (klein)** $\inf(A) := \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : s \leq a\}$

**Supremum (groß)** $\sup(A) := \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq s\}$

**Vollständigkeitsaxiom** $\exists \sup(A)$.




## Folgen

**Folge** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A$ ist eine Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ mit $a_n = f(n)$.

**Arithmetische Folge** $a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a + (n-1) * d \quad d, a \in \mathbb{R}$

**Geometrische Folge** $a_{n+1} = a_n * q$
$a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R}$

**Rekursion** $a_n$ ist auf $a_{n-1}$ definiert.

$$a_{n+1} = F(n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$F : A \times \mathbb{N} \to A$$

### Primfaktorzerlegung $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P} : n = p_1 * \dots * p_n$$

## Summen und Produkte

**Summe** $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$

**Produkt** $\prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * 3 * \dots * n$

**Fakultät** $n! = \prod^n i \; (0! = 1)$

### Gaussche Summe $n \in \mathbb{N}$

$$\sum^n i = \frac{n * (n+1)}{2}$$

### Geom. Summe $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

### Bernoulli Unglei. $n \in \mathbb{N}_0, x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

### Binom. Koeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Rechnen: $\frac{n>k}{0<(n-k)}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

### Binomischer Satz $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} * a^{n-k} b^k$$

## Grenzwerte

**Betrag** $|x| := \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -x & x < 0 \end{cases}$

**Lemma** $|x * y| = |x| * |y|$

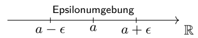
**Dreiecksungleichung** $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Umgekehrte Dreiecksungleichung** $||x| - |y|| \leq |x - y|$

## Konvergenz

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} a \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 :$$
$$|a_n - a| \leq \epsilon$$
$$(a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon)$$




- $a_n \xrightarrow{n \to \infty} a \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = a$

Beschränkt + monoton ⇒ konvergent:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{fall.}} \\ \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & (a_n)_{\text{steig.}} \end{cases}$$

**Nullfolgen** $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad k \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \to \infty} nq^n = 0$

**Folgen gegen 1**

- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

**Bestimmt Divergent**

$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R > 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$$
$$a_n \xrightarrow{n \to \infty} -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R < 0 \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq R$$

$$\lim_{n \to \infty} q^n \begin{cases} = 0 & (-1;1) \\ = 1 & = 1 \\ \geq \infty & > 1 \\ \text{div.} & \leq -1 \end{cases}$$

**Monotonie**

**Monoton fallend**
$a_n \underset{(\text{streng})}{\geq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Monoton steigend**
$a_n \underset{(\text{streng})}{\leq} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Beschränktheit**

$$\exists k > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k$$

- Konvergent ⇒ beschränkt
- Unbeschränkt ⇒ divergent

## Grenzwertsätze

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \; \lim_{n \to \infty} b_n = b$$

- $a_n \xrightarrow{n \to \infty} a \wedge a_n \xrightarrow{n \to \infty} b \Rightarrow a = b$ (Max. einen Grenzw.)
- $a = 0 \wedge (b_n)_{\text{beschr.}} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n b_n = 0$
- $a_n \leq b_n \Leftrightarrow a \leq b$ (nicht $<$)
- $\lim_{n \to \infty} \begin{cases} a_n \pm b_n = a \pm b \\ a_n * b_n = a * b \\ a_n * c = a * c \\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \\ |a_n| = |a| \end{cases}$

**Einschachtelungssatz**

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = a$$
$$\forall n \geq N \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n$$
$$(\exists) \lim_{n \to \infty} c_n = a$$

## Spezielle Folgen

**Teilfolge** *streng mnt.* Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $b_k = a_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n_k} = a$$

(da $n_k$ mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_{\text{mnt.}}}$$

(nicht streng!)

**Häufungspunkt** $h$ mit einer Teilfolge

$$\lim_{n \to \infty} a_{n_k} = h$$

- $\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists! : h = a$

**Bolzano-Weierstraß**

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\text{beschr.}}} \Rightarrow \exists h_{\text{Häuf.}}$$

(Beschränkte Teilfolgen besitzen mind. einen Häufungspunkt)

## Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 :$$
$$|a_n - a_m| \leq \epsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

**Vollständigkeit von $\mathbb{R}$**

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\text{CAUCHY}}} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n$$

$(\exists \lim_{n \to \infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\text{CAUCHY}}}$
$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\text{beschr.}}}$
$\Rightarrow \exists h$ (BW)
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = h)$

## Reihen

**Reihe** $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{k=1}^\infty a_k$ mit den Gliedern $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

**$n$te Partialsumme** $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

**Grenzwert** ebenfalls $\sum_{k=1}^\infty a_k$, falls $s_n$ konvergiert

**Spezielle Reihen**

**Geom.** $\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q} \quad q \in (-1;1)$

**Harmon.** $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ divergent

**Allg. Harmon.** $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\forall \alpha > 1$

**Lemma**

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent
  - $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$
  - $c * \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} c * a_k$
- $\exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$ (Es reicht spätere Glieder zu betrachten)
- $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0$

## Konvergenzkriterien

**Cauchy**

$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy}$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)_{\text{konv.}}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > m > n_0 :$$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \epsilon$$

**Notwendig**

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}}$$

**Beschränkt** $a_n \geq 0$ ($\Rightarrow$ *mnt.*) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\textit{beschr.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

**Majorante** $0 \leq a_n \leq b_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

**Quotient** $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

**Wurzel** $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \\ > 1 \to (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{div.}} \end{cases}$$

**Absolut**

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}}$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(Dreiecksungleichung)

**Leibniz** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mnt. Nullfolge

$$(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n * a_n)_{\text{konv.}}$$

**Grenzwert** $a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)_{\text{konv.}}$$

## Exponentialfunktion

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!}$$

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e \approx 2,71828 \notin \mathbb{Q}$
  $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

$$\exp(x) * \exp(y) = \exp(x + y)$$

**Cauchy-Produkt**

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

**Korollar**

- $\exp(x) > 0$
- $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$
- $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
- $\exp(r * x) = (\exp(x))^r$
- $\exp(r) = e^r$

# Algorithmen auf Datenstrukturen

**Algorithmus** Handlungsvorschrift aus endlich vielen Einzelschritten zur Problemlösung.

- Korrektheit (Test-based dev.)
- Terminierung (Touring)
- Effizienz (Komplexität)

**Formen (High to low)** Menschl. Sprache, Pseudocode, Mathematische Ausdrücke, Quellcode, Binärcode

**Divide & Conquer**

**Divide** Zerlegen in kleinere Teilprobleme

**Conquer** Lösen der Teilprobleme mit gleicher Methode (rekursiv)

**Merge** Zusammenführen der Teillösungen

## Effizienz

Raum/Zeit-Tradeoff: Zwischenspeichern vs. Neuberechnen

| Programmlaufzeit/-allokationen | Komplexität |
|---|---|
| Einfluss äußerer Faktoren | Unabh. |
| Konkrete Größe | Asymptotische Schätzung |

**Inputgröße** $n$ Jeweils

- Best-case $C_B$
- Average-case
- Worst-case $C_W$

## Asymptotische Zeit-/Speicherkomplexität

**Groß-O-Notation** Kosten $C_f(n)$ mit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0$

**Untere Schranke** $\Omega(f)$
$C_f(n) \geq c * g(n)$

**Obere Schranke** $O(f)$
$C_f(n) \leq c * g(n)$

**Exakte Schranke** $\Theta(f)$
$C_f(n) \in \Omega(f) \cap O(f)$
Polynom $k$ten Grades $\in \Theta(n^k)$

(Beweis: $g$ und $c$ finden)

| Groß-O | Wachstum | Klasse | |
|---|---|---|---|
| $O(1)$ | Konstant | | lösbar |
| $O(\log n)$ | Logarithmisch | | |
| $O(n)$ | Linear | | |
| $O(n \log n)$ | Nlogn | | |
| $O(n^2)$ | Quadratisch | Polynomiell $O(n^k)$ | |
| $O(n^3)$ | Kubisch | | |
| $O(2^n)$ | Exponentiell | Exponentiell $O(\alpha^n)$ | hart |
| $O(n!)$ | Fakultät | | |
| $O(n^n)$ | | | |

**Rechenregeln**

**Elementare Operationen, Kontrollstr.** $\in O(1)$

**Schleifen** $\in i$ Wiederholungen $* O(f)$ teuerste Operation

**Abfolge** $O(g)$ nach $O(f) \in O(\max(f; g))$

**Rekursion** $\in k$ Aufrufe $* O(f)$ teuerste Operation

**Mastertheorem** $a \geq 1,\ b > 1,\ \Theta \geq 0$

$$T(n) = a * T(\frac{n}{b}) + \Theta(n^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta(n^k) & a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^k \end{cases}$$

**Floor/Ceiling** Runden

**Floor** $\lfloor x \rfloor$ nach unten

**Ceiling** $\lceil x \rceil$ nach oben

## Suchverfahren

**Lineare Liste** endlich, geordnete (nicht sortierte) Folge $n$ Elemente $L := [a_0, \ldots, a_n]$ gleichen Typs.

**Array** Sequenzielle Abfolge im Speicher, statisch, Index $O(1)$, schnelle Suchverfahren $\boxed{L[0] \mid \cdots \mid L[n-1]}$

**Sequenziell** $C_A(n) = \frac{1}{n} * \sum^n i = \frac{n+1}{2} \in O(n)$

```
Algorithm: Sequential Search

Input: Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
for i ← 0 to L.len − 1 do
    if x = L[i] then
        return i
    end
end
return −1
```

**Auswahlproblem** Finde $i$-kleinstes Element in unsortierter Liste $\in \Theta(n)$

```
Algorithm: i-Smallest Element

Input: Unsortierte Liste L, Level i
Output: Kleinstes Element x
p ← L[L.len − 1]
for k = 0 to L.len − 1 do
    if L[k] < p then
        Push (L<, L[k])
    if L[k] > p then
        Push (L>, L[k])
    end
end
if L<.len = i − 1 then
    return p
if L<.len > i − 1 then
    return i-Smallest Element L<
if L<.len < i − 1 then
    return i-Smallest Element (L>,
      i − 1 − L<.len)
end
```

## Sortierte Listen

**Binär** $C_W(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, $C_A(n) \overset{n\to\infty}{\approx} \log_2 n \in O(\log n)$

```
Algorithm: Binary Search

Input: Sortierte Liste L, Predikat x
Output: Index i von x
if L.len = 0 then
    return −1
else
    m ← ⌊L.len / 2⌋
if x = L[m] then
    return m
if x < L[m] then
    return Binary Search [L[0], ..., L[m − 1]]
if x > L[m] then
    return m + 1+ Binary Search
      [L[m + 1], ..., L[L.len − 1]]
end
```

**Sprung** Kosten Vergleich $a$, Sprung $b$ mit optimaler Sprungweite:

$$m = \lfloor \sqrt{(\frac{a}{b}) * n)} \rfloor$$

$$C_A(n) = \frac{1}{2}(\lceil \frac{n}{m} \rceil * a + mb) \in O(\sqrt{n})$$

**Algorithm:** Jump Search

**Input:** Sortierte Liste $L$, Predikat $x$
**Output:** Index $i$ von $x$
$m \leftarrow \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
**while** $i < L$.*len* **do**
  $i \leftarrow i + m$
  **if** $x < L[i]$ **then**
    **return** Search $[L[i-m], \dots, L[i-1]]$
  **end**
**end**
**return** $-1$

- $k$-Ebenen Sprungsuche $\in O(\sqrt[k]{n})$
- Partitionierung in Blöcke $m$ möglich

**Exponentiell** $\in O(\log x)$

**Algorithm:** Exponential Search

**Input:** Sortierte Liste $L$, Predikat $x$
**Output:** Index $i$ von $x$
**while** $x > L[i]$ **do**
  $i \leftarrow 2 * i$
**end**
**return** Search $[L\lfloor i/2 \rfloor, \dots, L[i-1]]$

- Unbekanntes $n$ möglich

**Interpolation** $C_A(n) = 1 + \log_2 \log_2 n$, $C_W(n) \in O(n)$

**Algorithm:** Searchposition

**Input:** Listengrenzen $[u, v]$
**Output:** Suchposition $p$
**return** $\lfloor u + \frac{x - L[u]}{L[v] - L[u]}(v - u) \rfloor$

**Algorithm:** Interpolation Search

**Input:** Sortierte Liste $[L[u], \dots, L[v]]$, Predikat $x$
**Output:** Index $i$ von $x$
**if** $x < L[u] \vee x > L[v]$ **then**
  **return** $-1$
$p \leftarrow$ Searchposition$(u, v)$
**if** $x = L[p]$ **then**
  **return** $p$
**if** $x > L[p]$ **then**
  **return** Interpolation Search$(p+1, v, x)$
**else**
  **return** Interpolation Search$(u, p-1, x)$
**end**

**Häufigkeitsordnungen** mit Zugriffswahrscheinlichkeit $p_i$: $C_A(n) = \sum_{i=0}^{n} i p_i$

**Frequency-count** Zugriffszähler pro Element

**Transpose** Tausch mit Vorgänger

**Move-to-front**

## Verkettete Listen

**Container** Jedes Element $p$ ist in der Form $p \rightarrow$ | (key) | value | next |. Index ist seq. Suche $\in O(n)$

**Löschen** $\in O(1)$

**Algorithm:** Delete

**Input:** Zeiger $p$ auf *Vorgänger* des löschendes Elements
**if** $p \neq \emptyset \wedge p \rightarrow$ *next* $\neq \emptyset$ **then**
  $p \rightarrow$ next $\leftarrow$ $(p \rightarrow$ next$) \rightarrow$ next
**end**

- desh. sehr dynamisch

**Suchen** $C_A(n) = \frac{n+1}{2} \in O(n)$

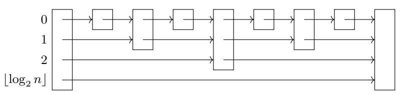
**Algorithm:** Search Linked List

**Input:** Verkettete Liste $L$, Predikat $x$
**Output:** Zeiger $p$ auf $x$
$p \leftarrow L$.head **while** $p \rightarrow$ *value* $\neq x$ **do**
  $p \leftarrow p \rightarrow$ next
**end**
**return** $p$

**Doppelt Verkettet** Zeiger auf Vorgänger | (key) | value | prev | next |

- Bestimmung des Vorgängers (bei Einfügen, Löschen) $\in O(1)$ statt $O(n)$
- Höherer Speicheraufwand

**Skip**




- Zeiger auf Ebene $i$ zeigt zu nächstem $2^i$ Element
- Suchen $\in O(\log n)$

**(Perfekt)** Einfügen, Löschen $\in \mathbf{O(n)}$ (Vollst. Reorga.)

**Randomisiert** Höhe zufällig (keine vollst. Reorga.) $P(h) = \frac{1}{2^{h+1}}$: Einfügen, Löschen $\in \mathbf{O}(\log \mathbf{n})$

## Spezielle Listen

**ADT** „Abstrakte Datentypen“

**Stack** $S = |\texttt{TOP}, \cdots$ Operationen nur auf letztem Element $\in O(1)$

**Queue** $Q = ||\texttt{HEAD}, \cdots, \texttt{TAIL}$ Vorne Löschen, hinten einfügen $\in O(1)$

**Priority Queue** $P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ Jedes Element $a$ hat Priorität $p$; Entfernen von Element mit höchster (MIN) Priorität

## Sortierverfahren

**Sortierproblem**

**Gegeben** (endliche) Folge von Schlüsseln (von Daten) $(K_i)_{i \in I}$

**Gesucht** Bijektive Abbildung $\pi : I \rightarrow I$ (Permutation), sodass $K_{\pi(i)} \leq K_{\pi(i+1)} \quad \forall i \in I$

mit Optimierung nach geringen

- Schlüsselvergleichen $C$
- Satzbewegungen $M$

**Eigenschaften**

**Ordnung** *Allgemein* vs. *speziell*: Ordnung wird nur über Schlüsselvergleiche hergestellt

**Relation** *Stabil* vs. *instabil*: Vorherig relative Reihenfolge bleibt erhalten

**Speicher** *In situ* vs. *ex situ*: Zusätzlicher Speicher notwendig

**Lokal** *Intern* vs. *extern*: Alles im RAM oder Mischung vorsortierter externer Teilfolgen

**Ordnung** $\forall x, y \in X$

**Reflexiv** $x \leq x$

**Antisym.** $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

**Transitiv** $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x = z$

**Total (Vollständig)** $x \leq y \vee y \leq x$

(ohne Total: „*Halbordnung*“)

## Grad der Sortierung

**Anzahl der Inversionen** Anzahl kleinerer Nachfolger für jedes Element:

$$\text{inv}(L) := |\{(i,j) \mid 0 \leq i < j \leq n-1, L[i] \geq L[j]\}|$$

**Anzahl der Runs** Ein *Run* ist eine sortierte Teilliste, die nicht nach links oder rechts verlängert werden kann. Die Anzahl der Runs ist:

$$\text{runs}(L) := |\{i \mid 0 \leq i < n-1, L[i+1] < L[i]\}| + 1$$

**Längster Run** Anzahl der Elemente der längsten sortierten Teilliste:

$$\text{las}(L) := \max\{r.\text{len} \mid r \text{ ist Run in } L\}$$
$$\text{rem}(L) := L.\text{len} - \text{las}(L)$$

## Einfache Sortierverfahren $\mathbf{O(n^2)}$

**Selection** Entferne kleinstes Element in unsortierter Liste und füge es sortierter Liste an.

**Algorithm:** Selectionsort

**Input:** Liste $L$
**Output:** Sortierte Liste $L$
**for** $i \leftarrow 0$ **to** $L$.*len* $- 2$ **do**
  min $\leftarrow$ i
  **for** $j \leftarrow i + 1$ **to** $L$.*len* $- 1$ **do**
    **if** $L[i] < L[$*min*$]$ **then**
      min $\leftarrow$ j
  **end**
  **if** *min* $\neq i$ **then**
    Swap $L[\min]$, $L[i]$
**end**
**if** $L$.*len* $= 0$ **then**
  **return** $-1$

**Insertion** Verschiebe erstes Element aus unsortierter Liste von hinten durch sortierte Liste, bis das vorgehende Element kleiner ist.

**Algorithm:** Insertionsort

**Input:** Liste $L$
**Output:** Sortierte Liste $L$
**for** $i \leftarrow 1$ **to** $L$.*len* $- 1$ **do**
  **if** $L[i] < L[i-1]$ **then**
    temp $\leftarrow L[i]$
    $j \leftarrow i$
    **while** *temp* $< L[j-1] \wedge j > 0$ **do**
      $L[j] \leftarrow L[j-1]$
      $j - -$
    **end**
    $L[j] \leftarrow$ *temp*
**end**

**Bubble** Vertausche benachbarte Elemente, durchlaufe bis nichts vertauscht werden muss. *Achtung:* Die hinteren Elemente können im Durchlauf ignoriert werden!

**Algorithm:** Bubblesort

**Input:** Liste $L$
**Output:** Sortierte Liste $L$
$i \leftarrow L$.len
swapped $\leftarrow 1$
**while** *swapped* **do**
  swapped $\leftarrow 0$
  **for** $j \leftarrow 0$ **to** $i - 2$ **do**
    **if** $L[j] > L[j+1]$ **then**
      Swap $L[j]$, $L[j+1]$
      swapped $\leftarrow 1$
  **end**
  $i - -$
**end**

## Verbesserte Sortierverfahren $\mathbf{O(n \log n)}$

**Shell** Insertionsort, nur werden Elemente nicht mit Nachbarn getauscht, sondern in $t$ Sprüngen $h_i$, die kleiner werden (Kamm). Im letzten Schritt dann Insertionsort ($h_t = 1$); somit Sortierung von grob bis fein, also Reduzierung der Tauschvorgänge.

**Algorithm:** Shellsort

**Input:** Liste $L$, Absteigende Liste von Sprunggrößen $H$
**Output:** Sortierte Liste $L$
**foreach** $h$ *in* $H$ **do**
  **for** $i \leftarrow h$ **to** $L$.*len* $- 1$ **do**
    temp $\leftarrow L[i]$
    **for** $j \leftarrow i$; *temp* $< L[j-h] \wedge j \geq h$;
      $j \leftarrow j - h$ **do**
        $L[j] \leftarrow L[j-h]$
    **end**
    $L[j] \leftarrow$ temp
  **end**
**end**

**Quick** Rekursiv: Pivot-Element in der Mitte, Teillisten $L_<$, $L_>$, sodass $\forall l_< \in L_< \forall l_> \in L_> : l_< < x < L_>$. Zerlegung: Durchlauf von Links bis $L[i] \geq x$ und von Rechts bis $L[j] \leq x$, dann tauschen.

**Algorithm:** Quicksort

**Input:** Liste $L$, Indices $l$, $r$
**Output:** $L$, sortiert zwischen $l$ und $r$
**if** $l \geq r$ **then**
  **return**
$i \leftarrow l$
$j \leftarrow r$
piv $\leftarrow L[\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$
**do**
  **while** $L[i] <$ *piv* **do**
    $i + +$
  **end**
  **while** $L[j] >$ *piv* **do**
    $j - -$
  **end**
  **if** $i \leq j$ **then**
    Swap $L[i]$, $L[j]$
    $i + +$
    $j - -$
**while** $i \leq j$;
Quicksort $(L, l, j)$
Quicksort $(L, i, r)$

**Turnier** Liste also Binärbaum, bestimme $\min(L)$ durch Austragen des Turniers, entferne Sieger und wiederhole von Siegerpfad aus.

**Heap** Stelle Max-Heap (größtes Element in der Wurzel) her, gib Wurzel aus und ersetze mit Element ganz rechts in unterster Ebene.

```
Algorithm: Max-Heapify

Input: Liste $L$, Index $i$ der MHE widerspricht und
       $\forall j > i$ erfüllen MHE
Output: Liste $L$ mit MHE $\forall j \geq i$
$l \leftarrow 2i + 1$
$r \leftarrow 2i + 2$
if $l < L.len \wedge L[l] > L[i]$ then
    largest $\leftarrow l$
else
    largest $\leftarrow i$
end
if $r < L.len \wedge L[r] > L[largest]$ then
    largest $\leftarrow r$
if largest $\neq i$ then
    Swap $L[i]$, $L$[largest]
    Max-Heapify $L$, largest
end
```

```
Algorithm: Build-Max-Heap

Input: Liste $L$
Output: Liste $L$ mit MHE
for $i \leftarrow \lfloor \frac{L.len}{2} \rfloor - 1$ to $0$ do
    Max-Heapify $L$, $i$
end
```

```
Algorithm: Heapsort

Input: Liste $L$
Output: Sortierte Liste $L$
Build-Max-Heap L
for $i \leftarrow L.len - 1$ to $1$ do
    Swap $L[0]$, $L[i]$
    $L$.len $- -$
    Max-Heapify $L$, $0$
end
```

**Merge** Zerlege Liste in $k$ Teile, sortiere diese (mit Mergesort) und verschmelze die sortierten Teillisten (merge).

```
Algorithm: 2-Merge

Input: Liste $L$ mit $L[l \dots m-1]$ und $L[m \dots r]$
       sortiert, Indices $l$, $m$, $r$
Output: Liste $L$ mit $L[l \dots r]$ sortiert
$j \leftarrow l$
$k \leftarrow m$
for $i \leftarrow 0$ to $r - l$ do
    if $k > r \vee (j < m \wedge L[j] \leq L[k])$ then
        $B[i] \leftarrow L[j]$
        $j \leftarrow j + 1$
    else
        $B[i] \leftarrow L[k]$
        $k \leftarrow k + 1$
    end
end
for $i \leftarrow 0$ to $r - l$ do
    $L[l + i] \leftarrow B[i]$
end
```

```
Algorithm: Rekursives 2-Mergesort

Input: Liste $L$, Indices $l$, $r$
Output: Liste $L$ mit $L[l \dots r]$ sortiert
if $l \geq r$ then
    return
else
    $m \leftarrow \lfloor \frac{l+r+1}{2} \rfloor$
    Mergesort $L$, $l$, $m - 1$
    Mergesort $L$, $m$, $r$
    Merge $L$, $l$, $m$, $r$
end
```

**Iteratives 2-Mergesort**

```
Algorithm: Iteratives 2-Mergesort

Input: Liste $L$
Output: Sortierte Liste $L$
for $k \leftarrow 2; k < n; k \leftarrow k * 2$ do
    for $i \leftarrow 0; i + k \leq n; i \leftarrow i + k$ do
        Merge $L$, $i$, $\min(i + k - 1, n - 1)$,
          $i + \frac{k}{2}$
    end
end
Merge $L$, $0$, $n - 1$, $\frac{k}{2}$
```

**Natürliches Mergesort** Verschmelzen von benachbarten Runs (Ausnutzen der Vorsortierung)

## Untere Schranke allgemeiner Sortierverfahren

Jedes allgemeine Sortierverfahren benötigt im Worst- und Average-case Schlüsselvergleiche von mindestens:

$$\Omega(n \log n)$$

(Siehe Pfadlänge auf Entscheidungsbaum)

## Spezielle Sortierverfahren $O(n)$

**Distribution** Abspeichern der Frequenz jedes Elementes $k$ auf $F[k]$; Ausgeben jedes Index $F[k]$ mal.

**Lexikographische Ordnung** $\leq$ Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Alphabet, dass sich mit gegebener Ordnung $a_1 < \dots < a_n$ wie folgt auf dem Lexikon $A* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ fortsetzt:

$$v = (v_1, \dots, v_p) \leq w = (w_1, \dots, w_q)$$
$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq p : v_i = w_i \quad p \leq q$$
$$\vee \forall 1 \leq j \leq i : v_j = w_j \quad v_i < w_i$$

**Fachverteilen** Sortieren von $n$ $k$-Tupeln in $k$ Schritten: Sortieren nach letztem Element, vorletzem usw.

## Große Datensätze sortieren

**Indirekt** Liste von Zeigern $Z[i] = i$ auf die eigentlichen Listenelemente. Schlüsselvergleiche mit $L[Z[i]]$, Satzbewegungen nur als Zeigertausch in $Z$. Anschließend linear kopieren.

**Extern** Zerlegen in $m$ Blöcke, sortieren im Hauptspeicher (Run) der mind. $m+1$ Blöcke groß ist, verschmelzen der Runs ($m$-Wege-Merge).

**Ausgeglichenes 2-Wege-Mergesort** Daten auf Band $n$, sortieren von Block $r_1 < n$ auf zweites Band und $r_2$ auf drittes Band, löschen des ersten Bandes und Merge $2r$ abwechselnd auf erstes (neues $2r_1$) und viertes Band (neues $2r_2$) und wiederholen.

**Replacement Selectionsort** Lese $r < n$ Elemente auf Priority-Queue $Q$. Falls $x = \min(Q) \geq$ letztem Element auf zweiten Band, schreibe $x$ aus, sonst schreibe $Q$ auf Band. Wiederhole auf dritten Band und dann merge.

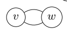
| Algo. | Stabil | Mem. | Schlüsselvergleiche $C_B$ | $C_A$ | $C_W$ | Satzbewegungen $M_B$ | $M_A$ | $M_W$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Selection | ✗ | $1$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $3(n-1)$ | $3(n-1)$ | $3(n-1)$ | $O(n^2)$ |
| Insertion | ✓ | $1$ | $n-1$ | $\overset{n\to\infty}{\approx} \frac{n(n-1)}{4} + n - \ln n$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $2(n-1)$ | $\frac{n^2+3n-4}{4} + n - 1$ | $\frac{n^2+3n-4}{2}$ | |
| Bubble | ✓ | $1$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $0$ | $\frac{3n(n-1)}{4}$ | $\frac{3n(n-1)}{2}$ | |
| | | | | **Best-case** | | **Average-case** | **Worst-case** | | |
| Shell | ✗ | $1$ | | - | | - | - | | $O(n \log n)$ |
| Quick | ✗ | $\log n$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | $n^2$ | | |
| Turnier | ✗ | $2n-1$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | $n \log n$ | | |
| Heap | ✗ | $1$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | $n \log n$ | | |
| Merge | ✓ | $n$ | | $n \log n$ | | $n \log n$ | $n \log n$ | | |
| **Untere Schranke $\Omega(n \log n)$ für allgemeine Sortierverfahren** | | | | | | | | | |
| Distribution | ✓ | $n$ | | $n$ | | $n$ | $n \log n$, $n^2$ | | $O(n)$ |

# Bäume

- Verallg. von Listen: Element/Knoten kann mehrere Nachfolger haben
- Darstellung von Hierarchien

**Ungerichteter Graph** $(V, E)$ mit einer Menge Knoten $V$ und Kanten $E \subseteq V \times V$

**Baum** Ungerichteter Graph mit

**Einfach** keine Schleife  oder Doppelkanten 

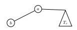
**Zusammenhängend** Für jede zwei Knoten gibt es genau eine Folge von Kanten die sie verbindet

**Azyklisch** kein Zyklus (Cycle) 

**Wurzelbaum** Baum mit genau einem Knoten der Wurzel heißt

**Orientierter Wurzelbaum** Alle Knoten sind Wurzel ihrer disjunkten Unterbäume und haben verschiedene Werte gleichen Typs. (Im Nachfolgenden einfach nur „Baum“)

**Darstellungsarten**

**Graph**  

**Array** $[a, b, c, \emptyset, \emptyset, d, e]$

**Menge** $\{\{a, b, c, d, e\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{d\}, \{e\}\}$

**Klammer** $(a, (b), (c, (d), (e)))$

**Größen**

**Ordnung** Max. Anzahl von Kindern jedes Knoten eines Baums

**Tiefe** Anzahl Kanten zwischen einem Knoten und Wurzel

**Stufe** Alle Knoten gleicher Tiefe

**Höhe** Max. Tiefe $+1$

**Eigenschaften**

**Geordnet** Kinder erfüllen Ordnung von links nach rechts

**Vollständig** Alle Blätter auf gleicher Stufe, jede Stufe hat max. Anzahl von Kindern

## Binärbäume

Geordneter, orientierter Wurzelbaum der Ordnung $2$.

**Strikt** Jeder Knoten hat $0$ oder $2$ Kinder (Kein Knoten hat genau $1$ Kind).

**Vollständig** Jeder Knoten außer der letzten Stufe hat genau $2$ Kinder.

**Fast Vollständig** Vollständig, auSSer Blätter können rechts fehlen.

**Ausgeglichen** Vollständig, aber Blätter auf letzten $2$ Stufen

$2$ Binärbäume heißen

**Ähnlich** selbe Struktur

**Äquivalent** Ähnlich und selbe Knoten

**Größen**

- Für $i$ Stufen max. $2^i$ Knoten
- Für $n$ Knoten genau $n - 1$ Kanten
- Vollständiger B. mit $n$ Knoten hat Höhe von $\log_2 n + 1$

# Exkurs Lineare Algebra

**Matrixmul.** $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

(Reihe $\times$ Spalte)