Logik

Aussagenlogik

Aussage Satz/Formel entweder wahr oder falsch; „-form“ bei zu wenig Infos.

Theoreme sind wahre Aussagen.

Junktoren

Negation $\neg\mathcal{A}$ „Nicht“ (`!`, `~`,)

Konjunkt. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ „und“ (`&&`,)

Disjunkt. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ „oder“ (`||`,)

Implikat. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „Wenn, dann“ / „$\mathcal{B}$“ ($\to$, `if`)

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ „$\mathcal{A}$ hinreichend“
$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ „$\mathcal{A}$ notwendig“

Äquiv. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ „Genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$, $\equiv$, `==`,)

Wahrheitswertetabelle mit 2^n Zeilen für n Atome. Konstruktionssystematik: Frequenz pro Atom verdoppeln.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$	$\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

❧ ❧ ❧

Äquivalente Formeln $\Leftrightarrow$		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativ
$A \vee B$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Assoziativ
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributiv
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$A \wedge A$	A	Idempotenz
$A \vee A$	A	
$\neg\neg A$	A	Involution
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	De-Morgan
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	
$A \wedge (\mathbf{A} \vee B)$	A	Absorption
$A \vee (\mathbf{A} \wedge B)$	A	
$A \Rightarrow B$	$\neg\mathbf{A} \vee B$	Elimination
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	

Axiomatik

Axiome als wahr angenommene Aussagen; an Nützlichkeit gemessen.
Anspruch, aber nach Gödels Unvollständigkeitssatz nicht möglich:

- Unabhängig
- Vollständig
- Widerspruchsfrei

Prädikatenlogik

Quantoren Innerhalb eines Universums:

Existenzq. $\exists$ „Mind. eines“

Individuum $\exists!$ „Genau eines“

Allq. $\forall$ „Für alle“

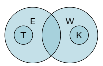
Quantitative Aussagen

Erfüllbar $\exists x F(x)$

Widerlegbar $\exists x \neg F(x)$

Tautologie $\top = \forall x F(x)$ (alle Schlussregeln)

Kontradiktion $\perp = \forall x \neg F(x)$



Klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	Ausgeschlossenes Drittes
$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$	Modus ponens
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	Abschwächung
$A \Rightarrow (A \vee B)$	

Negation (De-Morgan)

$$\neg\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$
$$\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

Häufige Fehler

- $U = \emptyset^{\complement}$ nicht notwendig
- $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \nRightarrow \exists x P(x)$
- $\neg\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \neg\exists y P(x,y)$

Beweistechniken

Achtung: Aus falschen Aussagen können *und* falsche Aussagen folgen.

Direkt $A \Rightarrow B$ Angenommen A, zeige B. Oder: Angenommen $\neg B$, zeige $\neg A$ (*Kontraposition*).

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Fallunters. Aufteilen, lösen, zusammenführen. O.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“

Widerspruch $(\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$ Angenommen $A \wedge \neg\mathbf{B}$, zeige Kontradiktion. (Reductio ad absurdum)

Ring (Transitivität der Implikation)

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \cdots$$
$$\equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{A}$$

Induktion $F(n) \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

1. **Anfang:** Zeige $F(n_0)$.
2. **Schritt:** Angenommen $F(n)$ (Hypothese), zeige $F(n+1)$ (Behauptung).

   Starke Induktion: Angenommen $F(k) \quad \forall n_0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$.

Häufige Fehler

- Nicht voraussetzen, was zu beweisen ist
- Äquival. von Implikat. unterscheiden (Zweifelsfall immer Implikat.)

Naive Mengenlehre

Mengen Zusammenfassung versch. Objekte „Elemente“.

Element $x \in M$ „enthält“

Leere M. $\emptyset = \{\}$

Universum U

Einschränkung $\{x \mid F(x)\}$

Relationen

Teilmenge $N \subseteq M$
$\Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M$

Gleichheit $M = N$
$\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

Mächtigkeit

$$|M| \begin{cases} = n & \text{endlich} \\ \geq \infty & \text{unendlich} \end{cases}$$
$$= |N| \Leftrightarrow \exists f_{\text{bijekt.}} : M \to N$$

Abzählbar $\exists f_{\text{surj.}} : \mathbb{N} \to M$

- Endliche Mengen, $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N_{\text{abz.}} \Rightarrow (M \cup N)_{\text{abz.}}$ $(= \{m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots\})$
- $M_{\text{abz.}} \wedge N \subseteq M \Rightarrow N_{\text{abz.}}$

$\div$	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\cdots$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\cdots$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$f(1) = 0, \mathbf{r_{11}} r_{12} r_{13} r_{14} \ldots$$
$$f(2) = 0, r_{21} \mathbf{r_{22}} r_{23} r_{24} \ldots$$
$$f(3) = 0, r_{31} r_{32} \mathbf{r_{33}} r_{34} \ldots$$
$$f(4) = 0, r_{41} r_{42} r_{43} \mathbf{r_{44}} \ldots$$
$$\vdots$$

(Cantors Diagonalargumente)

Operationen

Vereinig. $M \cup N$
$\Leftrightarrow \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

Schnitt $M \cap N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ ($= \emptyset$ „disjunkt“)

Diff. $M \setminus N \Leftrightarrow \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

Komplement $M^{\complement}$ $\{x \mid x \notin M\}$

Alle logischen Äquivalenzen gelten auch für die Mengenoperationen.

Häufige Fehler

- $\forall M : \emptyset \subseteq M$, nicht $\forall M : \emptyset \in M$

Quantitative Relationen

Sei Indexmenge I und Mengen $M_i \quad \forall i \in I$.

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

Neutrale Elemente

- $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$ („hinzufügen“)
- $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$ („wegnehmen“)

Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$
$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \quad (\in / \notin \text{ binär})$$

Abbildungen

Abbildung f von X (Definitionsb.) nach Y (Werteb.) ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.

$$f : X \to Y$$

Graph $\text{gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

Identität

$$\text{id}_A : A \to A$$
$$\text{id}_A(a) := a \quad \forall a \in A$$

Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ wenn f bijektiv und $(f \circ f^{-1})(y) = y$

Eigenschaften

Injektiv $\forall x_1, x_2 \in X:$
$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Surjektiv $\forall y \in Y \exists x \in X: y = f(x)$

Bijektiv wenn injektiv und surjektiv

Verkettung $f \circ g : A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

(der Reihenfolge nach)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & C \end{tikzcd}$$

Relationen

Kartesisches Produkt

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \\ | x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}$$

Relation $\sim$ von/auf M nach N ist Teilmenge $R \subseteq M \times N$. ($R' \subseteq N \times P$)

$$m \sim n \Leftrightarrow (m, n) \in R$$

$\equiv$ **Reflexiv** $\forall x \in M : (x, x) \in R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \subseteq R$

Irreflexiv $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
$\Leftrightarrow \mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

$\equiv$ **Sym.** $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$

Antis. $\forall x, y : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$
$\Leftrightarrow R \cap R' \subseteq \mathrm{id}_M$

$\equiv$ **Transitiv** $\forall x, y, z : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$
$\Leftrightarrow R; R \subseteq R$

Vollst. $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$
$\Leftrightarrow R \cup R^{-1} = M \times M$

Spezielle Relationen

Inverse Relation R^{-1} mit $R \in M \times N :=$
$\{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}$

Komposition $R; R$ mit $R' \in N \times P := \{(m, p) \in M \times P \mid \exists n \in N : (m, n) \in R \wedge (n, p) \in R'\}$

Leere Relation $\emptyset$

Identität $\mathrm{id}_M := \{(m, m) \mid m \in M\}$ $(=)$

Allrelation $M \times M$

Äquivalenzrelation $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. (Gleichheit***)

Äquivalenzklasse $[m]_\equiv$ auf M, Vertreter $m \in M$.

$$[m]_\equiv := \{x \in M \mid m \equiv x\}$$
$$\Leftrightarrow [m]_\equiv = [x]_\equiv$$

Zerlegung $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von M.

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$
- $M = \bigcup \mathcal{N}$
- $N \cap N' = \emptyset$
  $(N, N' \in \mathcal{N} : N \neq N')$
- (Korrespondiert zur ÄR.)

Quotient $(M/\equiv)$ Sei $\equiv$ ÄR. auf M. (ist Zerlegung)

$$(M/\equiv) := \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

Analysis

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Angeordnete Körper

(Gilt auch für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)

Körperaxiome $(\mathbb{R}, +, *)$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

Addition $(\mathbb{R}, +)$

Assoziativität
$a + (b + c) = (a + b) + c$

Kommutativität
$a + b = b + a$

Neutrales Element Null
$a + 0 = a \quad 0 \in \mathbb{R}$

Inverses „Negativ“
$a + (-a) = 0 \quad (-a) \in \mathbb{R}$

Multiplikation $(\mathbb{R}, *)$

Assoziativität $a*(b*c) = (a*b)*c$

Kommutativität $a * b = b * a$

Neutrales Element Eins
$a * 1 = a \quad 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Inverses „Kehrwert“
$a * (a^{-1}) = 1$
$a \neq 0, (a^{-1}) \in \mathbb{R}$

Distributivität
$a * (b + c) = a * b + a * c$

Totale Ordnung

Transitivität
$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Trichotomie Entweder
$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$
$\Rightarrow$ *Irreflexivität* $(a < b \Rightarrow a \neq b)$

Addition
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Multiplikation
$a < b \Rightarrow a * c < b * c \quad 0 < c$

Bei Additiver oder Multiplikativer Inversion dreht sich die Ungleichung.

Archimedes Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$
$$n > \frac{1}{x}$$

Teilbarkeit

$$a | b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : b = a * n$$

($\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ nicht teilerfremd)

Häufige Fehler

- Nicht durch Null teilen/kürzen
- Nicht $-x < 0$ annehmen
- Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt Ungleichungen

Operationen

Brüche

- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$
- $\frac{a}{b} \overset{*d}{=} \frac{a*d}{b*d}$
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$

Wurzeln $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

- $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad 0 \leq a < b$
- $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \quad 1 < a$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{b} \quad 0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad a \in \mathbb{R}$$

Potenzen $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

- $a^x * b^x = (a * b)^x$
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$

Intervalle

Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a_0 \in A$.

Geschlossen $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(„Ecken sind mit enthalten“)

Offen $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Bei ∞ immer offen, da $\infty \notin \mathbb{R}$)

Kleinstes/Größtes Element

Minimum $\min(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : a_0 \leq a$

Maximum $\max(A) := a_0$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq a_0$

$(\nexists^{\min}/_{\max}(a; b))$

Beschränktheit A heißt

Oben beschränkt $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq s$

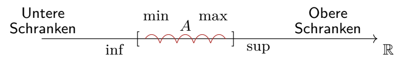
Unten beschränkt $\exists s \in \mathbb{R} \forall a \in A : s \leq a$

Vollständigkeit

Infimum (klein) $\inf(A)$
$:= \max\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : s \leq a\}$

Supremum (groß) $\sup(A)$
$:= \min\{s \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq s\}$

Vollständigkeitsaxiom $\exists \sup(A)$.



Folgen

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A ist eine Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ mit $a_n = f(n)$.

Arithmetische Folge $a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a + (n-1) * d \quad d, a \in \mathbb{R}$

Geometrische Folge $a_{n+1} = a_n * q$
$a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R}$

Rekursion a_n ist auf a_{n-1} definiert.

$$a_{n+1} = F(n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$F : A \times \mathbb{N} \to A$$

Primfaktorzerlegung $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\exists p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P} : n = p_1 * \cdots * p_n$$

Summen und Produkte

Summe $\sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n$

Produkt $\prod_{i=1}^n i = 1*2*3*\dots*n$

Fakultät $n! = \prod^n i$ $(0! = 1)$

Gaussche Summe $n\in\mathbb{N}$

$$\sum^n i = \frac{n*(n+1)}{2}$$

Geom. Summe $q \in \mathbb{R}\ \{0\}, n\in\mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Bernoulli Unglei. $n\in\mathbb{N}_0, x\ge -1$

$$(1+x)^n \ge 1+n*x$$

Binom. Koeff. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$

- Rechnen: $\frac{n>k}{0<(n-k)}$
- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
- $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

Binomischer Satz $n\in\mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} * a^{n-k}*b^k$$

Grenzwerte

Betrag $|x| := \begin{cases} x & 0\le x \\ -\ x & x<0\end{cases}$

Lemma $|x*y| = |x|*|y|$

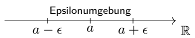
Dreiecksungleichung $|x+y| \le |x|+|y|$

Umgekehrte Dreiecksungleichung $||x|-|y|| \le |x-y|$

Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$.

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow$$
$$\forall\epsilon>0 \exists n_0\in\mathbb{N} \forall n\in\mathbb{N}\, n\ge n_0 :$$
$$|a_n - a| \le \epsilon$$
$$(a-\epsilon \le a_n \le a+\epsilon)$$



- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

Beschränkt + monoton ⇒ konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases}\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} & (a_n)_{fall.}\\ \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} & (a_n)_{steig.}\end{cases}$$

Nullfolgen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad k\in\mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} n*q^n = 0$

Folgen gegen 1

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a>0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$

Bestimmt Divergent

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R>0 \exists n\ge n_0\in\mathbb{N}: a_n \ge R$$
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall R<0 \exists n\ge n_0 \in \mathbb{N}: a_n\le R$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} =0 & (-1;1)\\ =1 & =1 \\ \ge\infty & >1 \\ \text{div.} & \le -1\end{cases}$$

Monotonie

Monoton fallend

$$a_n \underset{\text{(streng)}}{\ge} a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Monoton steigend

$$a_n \underset{\text{(streng)}}{\le} a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Beschränktheit

$$\exists k>0 \forall n\in\mathbb{N}: |a_n| \le k$$

- Konvergent ⇒ beschränkt
- Unbeschränkt ⇒ divergent

Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \wedge a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ ⇒ $a=b$ (Max. einen Grenzw.)
- $a = 0 \wedge (b_n)_{beschr.}$ ⇔ $\lim_{n\to\infty} a_n * b_n = 0$
- $a_n \le b_n \Leftrightarrow a\le b$ (nicht $<$)
- $\lim_{n\to\infty}\begin{cases} a_n \pm b_n = a\pm b\\ a_n * b_n = a*b \\ a_n * c = a*c\\ \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}\\ |a_n| = |a|\end{cases}$

Einschachtelungssatz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$
$$\forall n\ge N\in\mathbb{N}: a_n\le c_n\le b_n$$
$$(\exists) \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

Spezielle Folgen

Teilfolge *streng mnt.* Folge $(b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $b_k = a_{n_k} \quad \forall k\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$$

(da n_k mnt. steigend)

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_{mnt.}}$$

(nicht streng!)

Häufungspunkt h mit einer Teilfolge

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = h$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists! : h = a$

Bolzano-Weierstraß

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{beschr.}} \Rightarrow \exists h_{Häuf.}$$

(Teilfolge + (beschr.) ⇒ ∃ Häuf.)

Cauchy-Folge

$$\forall\epsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n,m\ge n_0:$$
$$|a_n - a_m| \le \epsilon$$

(Konv. ohne bekannten Grenzwert)

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}}$$
$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\text{beschr.}}}$$
$$\Rightarrow \exists h \quad \text{(BW)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = h)$$

Reihen

Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^\infty a_k$ mit den Gliedern $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

n**te Partialsumme** $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Grenzwert ebenfalls $\sum_{k=1}^\infty a_k$, falls s_n konvergiert

Spezielle Reihen

Geom. $\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q} \quad q\in(-1;1)$

Harmon. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ divergent

Allg. Harmon. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert $\forall\alpha>1$

Lemma

- $\sum_{k=1}^\infty a_k, \sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergent
  - $\sum_{k=1}^\infty a_k + \sum_{k=1}^\infty b_k = \sum_{k=1}^\infty (a_k+b_k)$
  - $c*\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty c*a_k$
- $\exists N\in\mathbb{N}: (\sum_{k=N}^\infty a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow (\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}}$ (Es reicht spätere Glieder zu betrachten)
- $(\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}}$ $\Rightarrow \forall N\in\mathbb{N}: (\sum_{k=N}^\infty a_k)_{\text{konv.}}$ $\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\sum_{k=N}^\infty a_k = 0$

Konvergenzkriterien

Cauchy

$$(\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}}$$
$$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}_{\text{Cauchy}}}$$
$$\Leftrightarrow \forall\epsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n>m>n_0:$$
$$|\sum_{k=m+1}^n a_k| \le\epsilon$$

Notwendige

$$(\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \Rightarrow (\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{div.}}$$

Hinreichende

Lemma $a_k \ge 0$ (⇒ *mnt.*) $\forall k\in\mathbb{N}$

$$(\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{beschr.}}$$

Majorante $0\le a_k\le b_k \quad \forall k\in\mathbb{N}$
(Min. ≤ Major.)

$$(\sum_{k=1}^\infty b_k)_{\text{konv.}} \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^\infty a_k)_{\text{konv.}}$$