Elektrischer Strom

Elektrisches Feld

Elektrische Ladung

$$Q = N * e_0 = [C] = [As]$$

- $1C = (6,242 * 10^{18}) * e_0$
- $e_0 = 1,602 * 10^{-19} C$

Culombsches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} * \frac{Q_1 * Q_2}{r^2} * (\vec{r_0}) = [N]$$

- $\epsilon_0 = 8,854 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
- Ungleiche Ladungen (Q) ziehen sich an, gleich stoßen sich ab
- $F \propto 1/r^2$

Elektrisches Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \left[\frac{V}{m}\right] = \left[\frac{N}{C}\right]$$

- Kraft, die Probeladung q erfährt
- Feldlinien von kleineren Ladung zur größeren Ladung (Positiv zu Negativ); gleich der wirkenden Kraftrichtung

Elektrisches Potential

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = (-\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr)$$

- Punktladung Q erzeugt Potential um sich
- Potential ist Steigung des E-Feld $E = -\frac{d\varphi}{dr}$

Elektrische Spannung

$$U = \frac{W}{q} = [V] = [\frac{Nm}{C}]$$
$$U_{r_1 \to r_2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2)$$

- Arbeit um q von r_1 nach r_2 zu bewegen $W_{r_1 \to r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} dr$

Elektrischer Strom

$$I = Q/t = [A] = \left[\frac{C}{s}\right]$$

- Gleichmäßig gerichteter Fluss von Elektronen von Minus nach Plus („physikalisch")
- $1A = \frac{1}{1,602} * 10^{19}$ Elektronen pro Sekunde
- $\Rightarrow Q = \int_0^t i(t)dt$

Elektrische Arbeit

$$W = I * t * U = [Ws] = [J]$$

- Ladungstransport über Zeit mit Spannung
- Am Widerstand freigesetzte Energie $W = \frac{U^2}{R} * t$

Elektrische Leistung

$$P = \frac{W}{t} = U * I = [W] = [VA]$$

- Arbeit pro Zeit
- Am Widerstand $P = U^2/R$

Elektrisches Netz

Strom fließt per Definition („technisch") von Plus (+) nach Minus (−)

GENERATOR G gibt Energie frei $W < 0$

VERBRAUCHER R verbraucht E. $W > 0$

VERBINDUNGSLEITUNGEN nach Kirchhoff:

Knoten K Verzweigung der Verbindungsleitung

$$\sum_{i \in K} I_i = 0A$$

- Stromrichtung einmalig willkürlich festlegen
- Eingehende Ströme addieren, ausgehende subtrahieren
- Ladungen werden nicht angehäuft ⇒ Eingehender = ausgehender Strom auch bei Bauteilen

Masche M Geschlossener Pfad ohne Knotenwiederholung

$$\sum_{k \in M} U_k = 0V$$

- Pfad startet im Knoten
- Vorher Spannungsrichtung (= Stromrichtung) einzeichnen
- Spannungsrichtung in Maschenrichtung addieren, entgegen Maschenrichtung (Quellen) subtrahieren

Lösen Linearer Gleichungssysteme

Kirchhoff'sche Sätze schaffen Lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b$$

- x ist der gesuchte Vektor der Ströme $I_k = x_k$
- A ist die Matrix der Koeffizienten (Widerstände)
- b sind vom Strom unabhängige Größen (Spannungen, $0A$ im Knoten)

Matrixmul. $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

(Zeile × Spalte)

Determinante

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det A_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det A_{ij}$$

- Für Matrix $A \in \mathbb{R}^n$
- „Entwickeln" nach i-ter Zeile oder j-ter Spalte
- A_{ij} = Matrix A ohne i-te Zeile und j-te Spalte
- Zeile/Spalte wählen mit viel $a_{ij} = 0$, damit $\det A_{ij}$ nicht berechnet werden muss

(2×2) Matrix

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(3×3) Matrix (Regel von Sarrus)

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Cramer'sche Regel

$$x_k = (I_k) = \frac{\det A_k}{\det A} \quad \det A_k \neq 0$$
$$A_k = (a_1 \mid \cdots \mid a_{k-1} \mid b \mid a_{k+1} \mid a_m)$$

- A_k ist Matrix A mit Vektor b statt k-ter Spalte
- Lösbar ⇔ $\det A \neq 0$

Elektromagnetisches Feld

Stromdurchflossene Leiter erzeugen Magnetfelder orthogonal zur Flussrichtung:

Rechte-Hand-Regel

- Daumen in (technische) Stromrichtung (Vektorprodukt)
- Gekrümmte Finger in Magnetfeldrichtung (Norden)
- Zeigefinger in Magnetfeldrichtung ⇒ Mittelfinger in Kraftwirkung auf Leiter

Magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{\vec{I}}{2\pi r} = \left[\frac{A}{m}\right]$$

- Erzeugt durch stromdurchflossene Leiter $\vec{I}$
- Kreisradius $2\pi r$ beliebig

1. Maxwell'sche Gleichung: Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} ds = \iint_A \vec{j} dA$$

Geschlossene magnetische Feldlinien werden von Strom durchflutet

Magnetische Spannung

$$\vec{\Theta}_{s_1 \to s_2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{H} ds = \vec{I} = [A]$$

- Zwischen Umfang s_1 (z.B $2\pi r_1$) und s_2

Magnetische Flussdichte

$$B = \mu_0 * \mu_r * \vec{H} = [T] = \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$$

- $\mu_0 = 1,2566 * 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

Relative Permeabilität: Hysteresekurve

- Feromagnetische Stoffe $\mu_r = 10^2 \ldots 10^5$ oder nicht konstant
- Speichern magnetische Zustände

REMANENZPUNKT B_r Magnetische Flussdichte B_r, die *nach* ($H = 0$) einer Magnetisierung besteht

KOERZITIVFELDSTÄRKE $-H_c$ Feldstärke um Material zu entmagnetisieren

Wechselschriftverfahren

- **1** Permanenter Richtungswechsel des Stroms (durch antiparalleles Magnetfeld zum vorherigen Takt)
- **0** keine Veränderung des Stroms

LESEN Bewegung des magnetisierten Mediums induziert Strom bei antiparalleln Magnetfeld zum vorherigen Takt (Veränderung), bleibt 0 bei keiner Veränderung

SCHREIBEN Positiver und negativer Strom magnetisiert Medium antiparallel

Kraftwirkung des magnetischen Feldes

$$\vec{F} = \mu * l * \vec{I} \times \vec{H} = l * \vec{I} \times \vec{B}$$

- Kinetische Kraft auf stromdurchflossene Leiter $\vec{I}$ der Länge l
- $|F| = \mu * l * I * H = l * I * B$

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Elektromagnetische Induktion

$$U_i = -\frac{d \iint \vec{B} d\vec{A}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Umgekehrt induziert Bewegung eines Leiters im Magnetfeld eine Spannung

Magnetischer Fluss

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{A} = [Wb] = [T * m^2]$$

- Homogenes Magnetfeld $\Phi = \vec{B} * \vec{A}$
- Leiter im Winkel zum geradlinigen Magnetfeld $\Phi = B * A * \cos\varphi$

Wechselstrom

Die Rotation eines Leiters in einem Magnetfeld induziert eine Wechselspannung und einen Wechselstrom:

$$u(t) = \hat{u} * \sin(\omega t)$$
$$i(t) = \hat{i} * \sin(\omega t)$$

- Frequenz $f = 1/T$ (Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit)
- Drehgeschwindigkeit $\omega = \frac{\varphi}{t} = 2\pi f$ (Anzahl der Perioden auf 2π Weg)

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} * (\cos\hat{\varphi} + j \sin\hat{\varphi}) = \hat{u} * e^{j\hat{\varphi}}$$

- Komplexe Amplitude mit Phasensprung $\hat{\varphi}$

Kenngrößen

LINEARER MITTELWERT (Durchschnitt)

$$\overline{Y} = \frac{\int y(x)dx}{\int dx} \quad \overline{I} = \frac{1}{T}\int^T i(t)dt$$

- Gemäß Normung $= 0A$

GLEICHRICHTWERT (Durchschnitt des Betrag)

$$|\overline{I}| = \frac{1}{T}\int^T |i(t)|dt$$

EFFEKTIVWERT (Leistung Gleichstrom)

$$I_{\text{eff.}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int^T i^2(t)dt}$$

- Sinusförmig: $I_{\text{eff.}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}, U_{\text{eff.}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

FORMFAKTOR $k = \frac{I_{\text{eff.}}}{|\overline{I}|}$

- Sinusförmig: $k = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \approx 1{,}1107$
- Rechteck: $k = 1$

Häufige Fehler

- Vektor und Skalare Formeln mischen
- $mm^3 = (10^{-3}m)^3 = 10^{-9}m^3$
- $1/k\Omega = m\Omega$

Elektrische Bauteile

Elektrischer Leiter

Elektrische Flussdichte

$$D = \frac{Q}{A} = \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

- Frei bewegliche Ladungsträger verteilen sich gleichmäßig auf der Oberfläche
- $\Rightarrow Q = A * \iint_A Dd$
- $\vec{D} = \epsilon_0 * \epsilon_r * \vec{E}$ (r raumfüllendes Material)

Elektrische Stromdichte

$$J = \frac{I}{A}$$

- Querschnitt A senkrecht zum Stromfluss $\vec{I}$
- $\propto$ Erwärmung des Leiters
- Aber: Dünne Leitungen kühlen besser (Verhältnis Querschnitt zu Umfang) $\Rightarrow$ Dicke Leitungen haben geringeres zulässiges J

Metallischer Leiter

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

- Linearer Widerstand, abhängig vom Material ρ
- $\rho = [\Omega\frac{mm^2}{m}] \propto$ Länge, kleinere Oberfläche

Ohmsch: Lineare Widerstände

$$U = R * I$$

- Kurz „URI“
- Strom $\propto$ Spannung, kleinerer Widerstand

$$R = [\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$$

Leitwert $G = 1/R = [S] = \left[\frac{A}{V}\right]$

Schaltung

REIHE $R_G = \sum R_k$

- $I_k = I \Rightarrow U_k = I * R_k$

PARALLEL $R_G = 1/\sum \frac{1}{R_k}$

- $U_k = U \Rightarrow I_k = U/R_k$

Kennlinie Graph $I(U_A)$

- Je flacher desto stärker der Widerstand
- Für lineare Bauteile: Nullstelle $I(U_A) = 0A$ und Schnittpunkt mit der I-Achse bestimmen $I(0V) = I_0$
- Für nicht-lineare Graphen $R(U, I) = U/I$ gilt das Ohmsche Gesetz nicht!

Arbeitspunkt Schnittpunkt der Kennlinien $I_1(U_A) = I_2(U_A)$

- Bestimmung der dynamischen Austarierung nicht-linearer Bauteile
- Kennlinie in Abhängigkeit der Spannung am Bauteil, nicht der Quellspannung!

Wechselstrom

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{R} * \sin\omega t$$

- Maximalstrom $\hat{i} = \frac{\hat{u}}{R}$
- Widerstand $R = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$
- Komplex $\underline{u}(t) = R * \underline{i}(t)$, $\underline{U}_{\text{eff.}} = R * \underline{I}_{\text{eff.}}$

Energierverbrauch

$$W_R = t * RI^2$$

Kapazitiv: Kondensator

$$Q = C * U$$

(„Kuh gleich Kuh“)

$$E = \frac{U}{d} = \frac{D}{\epsilon}$$

Kapazität

$$C = \frac{\epsilon * A}{d} = [F] = \left[\frac{C}{V}\right]$$

- Kondensator speichert elektrische Ladung
- $\propto$ Große Oberfläche, große Permittivität, kleiner Abstand
- Durchschlagfestigkeit $E_d = U_d/d$

Energie im Elektrischen Feld

$$W = \frac{1}{2}C * U^2$$

Influenz: Faraday'scher Käfig Das Innere eines metallischen Hohlraums ist feldfrei.

Schaltung

REIHE $C_G = 1/\sum \frac{1}{C_k}$

PARALLEL $C_G = \sum C_k$

Ladevorgänge

EINSCHALTEN

- $U_C = U * (1 - e^{-\frac{t}{R*C}})$
- $I_C = \frac{U}{R} * e^{-\frac{t}{R*C}}$

AUSSCHALTEN

- $U_C = U * e^{-\frac{t}{R*C}}$
- $I_C = \frac{U}{R} * e^{-\frac{t}{R*C}}$

Wechselstrom

$$i(t) = C\hat{u} * \omega \cos(\omega t)$$

- Maximalstrom $\hat{i} = C\hat{u} * \omega$
- Phasensprung von $\pi/2$
- Widerstand $R_C = \frac{1}{\omega * C}$
- Komplex $\underline{i}(t) = C\underline{u}(t) * j\omega$, $\underline{u}(t) = \underline{i}(t)/(C * j\omega)$, $\underline{I}_{\text{eff.}} = C\underline{U}_{\text{eff.}} * j\omega$

Induktiv: Spule

Die durch die Spannungsveränderung (z.B Anlegung) induzierte Spannung wirkt der Spannung entgegen (Lenzsche Regel):

$$U = L * \frac{dI}{dt}$$

Ein magnetischer Fluss induziert in der Spule eine Spannung:

$$\Phi = L * I$$

Selbstinduktivität

$$L = [H] = \left[\frac{Vs}{A}\right]$$

- $1H$ wenn bei einer gleichförmigen Stromveränderung von $1A$ in $1s$ eine Selbstinduktion von $1V$ erzeugt wird
- $\propto N^2$ Quadrat der Windungszahl

Energie im Magnetfeld

$$W = \frac{1}{2} L * I^2$$

Ladevorgänge

EINSCHALTEN $I_L = \frac{U}{R} * (1 - e^{-t * \frac{R}{L}})$

AUSSCHALTEN $I_L = \frac{U}{R} * e^{-t * \frac{R}{L}}$

Wechselstrom

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\omega * L} * \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

- Maximalstrom $\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\omega * L}$
- Phasensprung von $-\pi/2$
- Widerstand $R_L = \omega * L$
- Komplex $\underline{u}(t) = L * \underline{i}(t) * j\omega$, $\underline{U}_{\text{eff.}} = L * \underline{I}_{\text{eff.}} * j\omega$

Quellen

Spannungsquelle

Feste Spannung U_Q

- Ideal: $\lim_{R_L \to 0} I \geq \infty$

Klemmspannung Tatsächliche Spannung mit geringem Innenwiderstand R_{iQ}

$$U = U_Q - I * R_{iQ} \Rightarrow I = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_L}$$

LEERLAUF Nicht geschlossen, $I = 0$

KURZSCHLUSS Ohne Last geschlossen; da R_{iQ} gering $\Rightarrow$ gefährlich hohe Leistung $P = U_Q^2 / R_{iQ}$

Stromquelle

Fester Strom $\forall R_L : I_L = \text{konst.}$

Reale Stromquelle Hoher Innenwiderstand R_{iQ}

- $I_L = I_Q - I_{iR}$
- Ideal: $\lim_{R_{iQ}} \to \infty I_L = I_Q$

LEERLAUF Nicht geschlossen, $U = R_{iQ} * I_Q$

KURZSCHLUSS Ohne Last geschlossen; $I_L = I_Q$, $U = 0$

Messgeräte

Spannung: Voltmeter

- Schaltung in Parallel, ohne Amperemeter messen!
- Hoher Innenwiderstand $R_{iV} \Rightarrow$ Strom teilt sich auf, Spannung geringer gemessen
- $R_{iV} \gg R_L \Rightarrow U_L \approx R_L * I$

Strom: Amperemeter

- Schaltung in Reihe, ohne Voltmeter messen!
- Geringer Innenwiderstand $R_{iA} \Rightarrow$ Strom geringer gemessen
- $R_{iA} \ll R_L \Rightarrow I_L \approx U/R_L$

Widerstand: Fehlerschaltungen

Zum Messen des Widerstands R wird I_R und U_R benötigt:

Kleiner Widerstand: Stromfehlerschaltung

- Erst Amperemeter in Reihe, dann Voltmeter parallel zum Widerstand
- $I \approx I_R$

Großer Widerstand: Spannungsfehlerschaltung

- Erst Voltmeter, dazu parallel der Widerstand und dazwischen in Reihe des Amperemeter
- $U \approx U_R$

Spezielle Kombinationen

Spannungsteiler

Die Arbeitsspannung verhält sich zur Quellspannung wie der zweiter Widerstand zum Gesamtwiderstand:

$$\frac{U_A}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Setzt Restenergie in Wärme frei

Potentiometer $R_1 = R - R_2$

$$\Rightarrow U_A = U_0 * \frac{R_2}{R}$$

Potentiometer unter Last R_L $R_1 = R - (R_2 \parallel R_L)$

$$\Rightarrow U_A = U_0 * \frac{R_2}{R} * \frac{R_L}{R_L + R_2}$$

Transformator

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

- Wechselspannung der Primärspule induziert Wechselspannung in Sekundärspule
- Ideal: Verlustfreier Spannungsteiler, da Energie im Magnetfeld durch Abbau wiedererlangt wird

Schwingkreis

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L * C}} = \frac{2\pi}{T}$$

- $u_C(t) + u_L(t) = 0V$
- (Gedämpft durch Widerstand)

Häufige Fehler

- Parallelschaltung von Kondensatoren verhält sich wie Reihenschaltung von Widerständen