Wir beginnen mit einer Definition der Vektoren:

$$|00\rangle = |0\rangle_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = |1\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |10\rangle = |2\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = |3\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Damit können wir die Operatoren n_i definieren:

$$n_0|00\rangle = 0|00\rangle, n_0|01\rangle = 1|01\rangle, n_0|10\rangle = 0|10\rangle, n_0|11\rangle = 1|11\rangle \tag{1.2}$$

Daraus folgt für die Matrixform:

$$n_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Für n_1 ergibt sich:

$$n_1|00\rangle = 0|00\rangle, n_1|01\rangle = 0|01\rangle, n_1|10\rangle = 1|10\rangle, n_1|11\rangle = 1|11\rangle \tag{1.4}$$

In Matrixform:

$$n_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Jetzt definieren wir die NOT – Operatoren X_i :

$$X_0|00\rangle = |01\rangle, X_0|01\rangle = |00\rangle, X_0|10\rangle = |11\rangle, X_0|11\rangle = |10\rangle \tag{1.6}$$

In Matrixform:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Nun definieren wir die NOT – Operatoren X_1 :

$$X_1|00\rangle = |10\rangle, X_1|01\rangle = |11\rangle, X_1|10\rangle = |00\rangle, X_1|11\rangle = |01\rangle \tag{1.8}$$

In Matrixform:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Damit erhalten wir für C_{10} :

$$\begin{aligned} C_{10} &= \tilde{n}_1 + X_0 n_1 \\ &= 1 - n_1 + X_0 n_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.10}$$