

В данных типовых расчетах наряду с обозначением e^x для показательной функции с основанием e применяется второе стандартное обозначение $\exp x$ в случае громоздких показателей, а также используются гиперболические функции:

$\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$
и обратные к ним функции.

Типовой расчет “Ряды”

Методические указания

Содержание расчетных заданий

- I. Исследовать сходимость числовых рядов.
- II. Найти область сходимости функционального ряда.
- III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.
- IV. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 , используя разложения Маклорена элементарных функций. Указать область в которой разложение справедливо.
- V. Вычислить интеграл с точностью до 0,001, используя разложение в степенной ряд.
- VI. Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения в виде ряда по степеням x .
- VII. Задать аналитически функцию, график которой изображен на рисунке. Построить для этой функции 3 ряда Фурье: общий тригонометрический, по синусам и по косинусам. Изобразить графики сумм построенных рядов.

Образцы выполнения заданий

I. Исследовать сходимость числовых рядов.

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^4 - 1)}{n^6 + 5n + 6}.$$

Общий член данного ряда обозначим $u_n = \frac{(-1)^n(2n^4 - 1)}{n^6 + 5n + 6}.$

Очевидно, что $|u_n| = \frac{2n^4 - 1}{n^6 + 5n + 6} < \frac{2n^4}{n^6} = \frac{2}{n^2}.$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится на основании интегрального признака Коши: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1,$ то есть $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ тоже сходится, откуда, используя свойства сходящихся рядов, получаем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}.$

Тогда на основании признака сравнения заключаем, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, а следовательно, по определению абсолютной сходимости исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^4 - 1)}{n^6 + 5n + 6}$ сходится абсолютно.

Замечание. Из абсолютной сходимости следует сходимость исходного ряда (абсолютная сходимость - более сильное свойство). В рассмотренном примере для доказательства абсолютной сходимости можно использовать и признак сравнения в предельной форме:

$$|u_n| = \frac{2n^4 - 1}{n^6 + 5n + 6} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2 - 1/n^4}{1 + 5/n^5 + 6/n^6} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{1/n^2} = 2,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^4 - 1}{n^6 + 5n + 6}$ сходится, так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^5 + n^3 + 5)}{n^6 + n^2 - 1}.$$

Пусть $\frac{(-1)^n(n^5 + n^3 + 5)}{n^6 + n^2 - 1} = u_n.$ Очевидно, что

$$|u_n| = \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1} > \frac{n^5}{n^6 + n^2} \geq \frac{n^5}{2n^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический. Он расходится по интегральному признаку Ко-

ши: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$, значит, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ расходится, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Из расходимости гармонического ряда на основании признака сравнения следует, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1}$ тоже расходится.

В предельной форме признак сравнения здесь применяется так:

$$|u_n| = \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1} \sim \frac{1}{n} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, так как расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ делаем вывод: исходный ряд абсолютно расходится. Теперь нужно выяснить: сходится ли он? Применим признак Лейбница, который утверждает, что знакопередающийся ряд сходится, если модуль его общего члена, монотонно убывая, стремится к нулю. Введем обозначения:

$$\phi(x) = \frac{x^5 + x^3 + 5}{x^6 + x^2 - 1}, \quad \text{тогда } \phi(n) = |u_n|.$$

Вычислим производную этой функции:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{(5x^4 + 3x^2)(x^6 + x^2 - 1) - (6x^5 + 2x)(x^5 + x^3 + 5)}{(x^6 + x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{-x^{10} - 3x^6(x^2 - 1) - 30x^5 - 4x^4 - 3x^2 - 10x}{(x^6 + x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\phi'(x) < 0$ при всех $x \geq 1$. Следовательно, функция $\phi(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1, \infty)$, откуда имеем: $|u_n|$ монотонно убывает. Теперь достаточно найти предел этого модуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^3 + 5}{n^6 + n^2 - 1} = 0.$$

Таким образом, получили, что на основании признака Лейбница данный ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^5 + n^3 + 5)}{n^6 + n^2 - 1}$ сходится, но не абсолютно (такие ряды называются условно сходящимися).

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \arctg \frac{n+1}{2^n}.$

Обозначим $\operatorname{arctg}((n+1)/2^n) = u_n$ и, используя эквивалентность $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, вычислим предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)2^n}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится на основании признака Даламбера в предельной форме.

Ответ: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{2^n}$ сходится.

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n^3 + 3}{5n^3 + 7}.$$

Найдем предел общего члена этого ряда при $n \rightarrow \infty$:

$$|u_n| = \ln \frac{2n^3 + 3}{5n^3 + 7} \rightarrow \ln \frac{2}{5} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0.$$

Таким образом, получили, что для данного ряда не выполнен необходимый признак сходимости, следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n^3 + 3}{5n^3 + 7}$ расходится.

II. Найти область сходимости функционального ряда.

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} (x+5)^n.$$

$$\text{Пусть } u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} (x+5)^n.$$

$$\text{Тогда } |u_n(x)| = \frac{|x+5|^n}{2^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+5|^{n+1} 2^n}{2^{n+1} |x+5|^n} = \frac{|x+5|}{2} = q(x).$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при $q(x) < 1$, расходится при $q(x) > 1$, а при $q(x) = 1$ требуется дополнительное исследование. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при $|x+5| < 2$ и расходится при $|x+5| > 2$. Отсюда делаем вывод, что исходный ряд при $|x+5| < 2$ сходится абсолютно. При $|x+5| > 2$ исходный ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости. Интервал сходимости $(-7, -3)$.

В точках $x_1 = -7$ и $x_2 = -3$, то есть при $q(x) = 1$, проведем исследование сходимости возникающих числовых рядов при помощи каких-нибудь других достаточных признаков сходимости:

$$u_n(x_1) = (-1)^{2n+1} = -1, \text{ то есть } u_n(x_1) \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_1)$ расходится. Аналогично расходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Замечание. Расходимость этих рядов можно было бы доказать и по определению, рассматривая их частные суммы:

$$S_n(x_1) = -n - 1 \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и}$$

$$S_n(x_2) = \begin{cases} -1, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

то есть $S_n(x_2)$ не имеет предела.

Ответ: в интервале $(-7, -3)$ данный ряд сходится абсолютно, вне интервала – расходится.

$$б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(2-x)^n}.$$

Обозначим:

$$u_n(x) = \frac{3^n}{(n+1)(2-x)^n}, \quad |u_n(x)| = \frac{3^n}{(n+1)|2-x|^n}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1}|x-2|^n}{(n+2)3^n|x-2|^{n+1}} = \frac{3}{|x-2|} = q(x).$$

Применив признак Даламбера, видим, что условие сходимости $q(x) < 1$ эквивалентно неравенству $|x-2| > 3$, множеством решений которого является объединение интервалов $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$. В открытом интервале $(-1, 5)$ величина $q(x) > 1$ и, следовательно, не выполнен необходимый признак сходимости – исходный ряд расходится.

Величина $q(x) = 1$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, в этих точках требуется провести дополнительное исследование. При $x_1 = -1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – расходится (гармонический ряд). При $x_2 = 5$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ – сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно, так как ряд из модулей является гармоническим.

Ответ: исходный ряд сходится на множестве $(-\infty, -1) \cup [5, \infty)$, при этом в точке $x = 5$ ряд является условно сходящимся, в остальных точках сходится абсолютно.

III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Ряд Маклорена имеет вид $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, где $f^{(n)}(0)$ - значение n -ой производной в нуле ($f^{(0)}(0) = f(x)$). Для заданной функции имеем: $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Теперь найдем последовательно столько производных, сколько потребуется, чтобы три из них были отличны от нуля в точке $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1/\cos^2 x, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= 2\cos^{-3} x \cdot \sin x, & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= 2\cos^{-2} x + 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x, & f'''(0) &= 2; \\ f^{IV}(x) &= 16\cos^{-3} x \cdot \sin x + 24\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x, & f^{IV}(0) &= 0; \\ f^V(x) &= 8\cos^{-2} x \cdot (2 + 15\operatorname{tg}^4 x + 15\operatorname{tg}^2 x), & f^V(0) &= 16. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + \dots$

б) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Для этой функции имеем:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; \\ f'(x) &= \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x) - \cos x \cdot 2\sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \\ &= \sin x \cdot \frac{\sin^2 x - 3}{(\sin^2 x + 1)^2}, & f''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим: $\frac{\sin^2 x - 3}{(\sin^2 x + 1)^2} = \phi(x)$, $\frac{7 - \sin^2 x}{(\sin^2 x + 1)^3} = \psi(x)$.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \cos x \cdot \phi(x) + \sin x \cdot \sin 2x \psi(x), & f'''(0) &= -3; \\ f^{IV}(x) &= \psi(x)(-\sin x \cdot + 2\cos x \cdot \sin 2x + \\ &\quad + \sin x \cdot \cos 2x) + \sin x \cdot \sin 2x \cdot \psi'(x), & f^{IV}(0) &= 0; \\ f^V(x) &= -\cos x \cdot \phi(x) + 6\cos x \cdot \cos 2x \cdot \psi(x) + \end{aligned}$$

$$+ \sin x \cdot [\psi''(x) \cdot \sin 2x + 2\psi'(x)(3 \cos^2 x + 2 \cos 2x) - \\ - 3 \sin 2x \cdot \psi(x)], \quad f^V(0) = 3 + 42 = 45.$$

Ответ: $\arctg(\sin x) = x - x^3/2 + 3x^5/8 + \dots$

IV. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 , используя известные разложения Маклорена. Указать область, в которой разложение справедливо.

а) $f(x) = e^{3-x} + 5x, \quad x_0 = 2.$

Обозначим $x - x_0 = x - 2 = -t$, тогда $x = -t + 2$ и

$$\begin{aligned} e^{3-x} + 5x &= e^{1+t} - 5t + 10 = \\ &= e\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots\right) - 5t + 10 = \\ &= e + 10 + (e - 5)t + e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \\ &= e + 10 + (5 - e)(x - 2) + e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Разложение получено. Теперь выясним, в какой области оно справедливо. Нам известно, что функция e^t представима своим рядом Маклорена при $t \in (-\infty, +\infty)$. Так как $x = -t + 2$, то отсюда следует, что областью, в которой полученное разложение справедливо является вся вещественная ось.

Ответ: $e^{3-x} + 5x = e + 10 + (5 - e)(x - 2) + e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 2)^n}{n!}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$.

б) $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^{-1}, \quad x_0 = 0.$

Знаменатель данной дробно-рациональной функции имеет простые вещественные корни, из чего следует, что существует единственное представление этой функции в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + 3} = \\ &= -\frac{1}{4} [(1 - x)^{-1} + (3 + x)^{-1}] = -\frac{1}{4} \left[(1 - x)^{-1} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых $(1 - x)^{-1}$ и $(1 + x/3)^{-1}$ в последней квадратной скобке представим рядом Маклорена для $(1 + t)^\mu$, где $\mu = -1$, $t = -x$ в первом слагаемом и $t = x/3$ — во втором. Тогда получим следующие представления:

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Первое разложение справедливо на интервале $(-1, 1)$ второе — на $(-3, 3)$ (те же разложения в ряд простейших дробей $(1-x)^{-1}$ и $(1+x/3)^{-1}$ можно получить, используя формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии). Сложив почленно два ряда и умножив на $-1/4$, получим следующее разложение:

$$f(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4} \left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 3^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1}} x^n,$$

которое справедливо на интервале $(-1, 1)$.

Ответ: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 3^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1}} x^n$ при $x \in (-1, 1)$.

в) $f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$, $x_0 = 2$.

Сделаем замену переменных $x - 2 = t$; тогда, используя стандартное разложение Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln [-(t+2)^2 + 2(t+2) + 3] = \ln [-(t^2 + 2t - 3)] = \\ &= \ln \left[3(1-t) \left(1 + \frac{t}{3} \right) \right] = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) = \\ &= \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n 3^n}, \quad t = x - 2. \end{aligned}$$

Область представимости функции $\ln(1-t)$ рядом $-\sum_{n=1}^{\infty} t^n/n$ есть полуоткрытый интервал $J_1 = [-1, 1)$, а функции $\ln(1+t/3)$ рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n 3^n}$ — интервал $J_2 = (-3, 3]$. Оба разложения справедливы в интервале J_1 , то есть при $-1 \leq t < 1$. Последнее неравенство, учитывая, что $t = x - 2$, эквивалентно неравенству $-1 \leq x - 2 < 1$ или $1 \leq x < 3$.

Складывая эти ряды почленно и переходя к переменной x , получим разложение (ответ)

$$\ln(-x^2 + 2x + 3) = \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n 3^n} (x-2)^n,$$

которое справедливо в интервале $[1, 3)$.

V. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Используя стандартный ряд Маклорена для функции $f(t) = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, будем иметь:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Интегрируя этот ряд почленно, получим

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Отсюда, на основании признака Лейбница, следует, что абсолютная величина погрешности, возникающей при замене суммы ряда n -ой частичной суммой, не превосходит модуля первого отброшенного члена. Вычисляя последовательно слагаемые полученного числового ряда видим, что модуль пятого члена

$$|a_5| = \left| \frac{(-1)^5}{5!(2 \cdot 5 + 1)} \right| = \frac{1}{120 \cdot 11} < 0,001.$$

Следовательно, в качестве нужного нам приближения достаточно взять

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \simeq 0,747.$$

Ответ: $\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 0,747.$

VI. Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения в виде ряда по степеням x :

$$\begin{cases} y'' - xy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Первый способ решения.

Можно решение этой задачи сразу искать в виде ряда Маклорена

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \text{где } y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

а остальные значения производных в нуле $y^{(n)}(0)$, $n \geq 2$ последовательно находить из исходного уравнения:

$$\begin{array}{llll} y'' & = & xy & \Rightarrow y''(0) = 0, \\ y''' & = & y + xy' & \Rightarrow y'''(0) = y(0) = 1, \\ y^{IV} & = & 2y' + xy'' & \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y'(0) = 0, \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{(n+3)} & = & (n+1)y^{(n)} + xy^{(n+1)} & \Rightarrow y^{(n+3)}(0) = (n+1)y^{(n)}(0). \end{array}$$

Первое равенство получили, выразив y'' из данного в задаче уравнения, для получения второго продифференцировали уравнение, для получения третьего продифференцировали уравнение второй раз и так далее. Таким образом, получили рекуррентную формулу, выражающую значение $(n+3)$ -ей производной в нуле через значение n -ой (то есть на 3 порядка ниже) производной. Поскольку $y'(0) = y''(0) = 0$, то значения всех производных порядка $3m+1$ и $3m+2$, $m = 0, 1, 2, \dots$, в нуле равны нулю. Отличны от нуля при $x = 0$ только производные, порядок которых кратен трем:

$$\begin{aligned} y^{VI}(0) &= 4 \cdot y'''(0) = 4 \cdot 1, & y^{IX}(0) &= 7 \cdot y^{VI}(0) = 7 \cdot 4 \cdot 1, \dots \\ y^{(3m)}(0) &= 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot [3(m-1) + 1], & m &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ответ:
$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (1 + 3(m-1))}{(3m)!} x^{3m}.$$

Второй способ решения.

Ищем решение задачи Коши в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 0$ (эти два значения получены из начальных условий).

Считаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в окрестности нуля и, следовательно, его в силу свойств степенного ряда можно почленно дифференцировать в области сходимости. Найдем y' и y'' :

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{(n-1)}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставим эти выражения в исходное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Сложим эти ряды (то есть приведем подобные члены). Для этого можно, например, преобразовать первый из складываемых рядов: сначала заменим n - индекс суммирования - на m , затем положим $m - 2 = n + 1$, тогда $m = n + 3$, $m - 1 = n + 2$, откуда

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} = 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}.$$

После этого произведем сложение рядов и получим тождество

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n]x^{n+1} \equiv 0.$$

Так как мы предполагаем, что в некоторой окрестности нуля это тождество справедливо и его левая часть является степенным рядом, то этот ряд, в силу единственности представления функции степенным рядом, является рядом Маклорена функции $g(x) \equiv 0$. Следовательно, все коэффициенты этого ряда равны нулю, так как они имеют вид $c_{n+1} = (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = g^{(n)}(0)/n! = 0$, $n > 0$, $c_0 = 2a_2 = g(0) = 0$. Получили $a_2 = 0$ и рекуррентное соотношение $a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$.

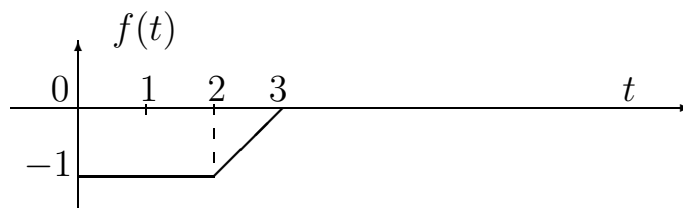
Из рекуррентного соотношения и равенств $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ следует, что все коэффициенты $a_{3m+1} = a_{3m+2} = 0$ при $m = 0, 1, 2, \dots$. Коэффициенты же с номерами, кратными трем, отличны от нуля и равны

$$\begin{aligned} a_{3m} &= \frac{a_{3(m-1)}}{3m(3m-1)} = \frac{a_0}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (1+3(m-1))}{(3m)!} \cdot a_0, \quad \text{где } a_0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (1+3(m-1))}{(3m)!} \cdot x^{3m}.$$

VII. Задать аналитически функцию, график которой изображен на рисунке. Построить для этой функции 4 ряда Фурье: общий тригонометрический, по синусам, по косинусам и в комплексной форме. Изобразить графики сумм построенных рядов.

Дано:



Решение:

1. Зададим функцию, график которой изображен на рисунке, аналитически. Прежде всего заметим, что она определена только на отрезке $[0, 3]$. Видим, что на промежутке $[0, 2]$ функция постоянна и все ее значения равны -1 , то есть $f(t) = -1$ при $t \in [0, 2]$. На интервале $[2, 3]$ график функции есть отрезок прямой l , проходящей через точки $(2, -1)$ и $(3, 0)$. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Подставив в это уравнение величины $x = t$, $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 0$ получим уравнение $y = t - 3$ прямой l в координатах t, y .

Окончательно, аналитическое задание данной функции будет иметь следующий вид:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 2, \\ t - 3, & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

2. Построим общий тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t,$$

где $\omega = 2\pi/T$, T — длина промежутка $[a, b]$, на котором задана исходная, интегрируемая на нем, функция $f(t)$, а также период суммы ряда Фурье. Коэффициенты a_n, b_n вычисляются по функции $f(t)$ следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos n\omega t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

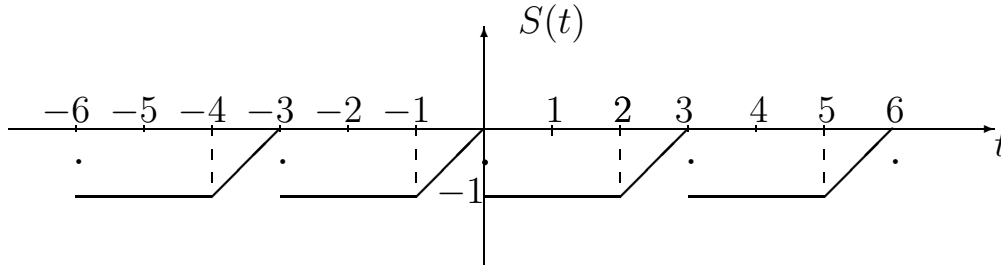
$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \sin n\omega t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Так как функция задана на интервале $[0, 3]$, то $a = 0$, $b = 3$, $T = b - a = 3$. Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3} \left(\int_0^2 (-1) dt + \int_2^3 (t - 3) dt \right) = \frac{2}{3} \left(-2 + \left(\frac{t^2}{2} - 3t \right) \Big|_2^3 \right) = -\frac{5}{3}. \\ a_n &= \frac{2}{3} \left(- \int_0^2 \cos \frac{2\pi nt}{3} dt + \int_2^3 (t - 3) \cos \frac{2\pi nt}{3} dt \right) = \frac{2}{3} \left(- \frac{3}{2\pi n} \sin \frac{2\pi nt}{3} \Big|_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2\pi n} (t - 3) \sin \frac{2\pi nt}{3} \Big|_2^3 + \frac{9}{(2\pi n)^2} \cos \frac{2\pi nt}{3} \Big|_2^3 \right) = -\frac{3}{2\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right). \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{3} \left(-\int_0^2 \sin \frac{2\pi nt}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \sin \frac{2\pi nt}{3} dt \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2\pi n} \cos \frac{2\pi nt}{3} \Big|_0^2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{2\pi n} (t-3) \cos \frac{2\pi nt}{3} \Big|_2^3 + \frac{9}{(2\pi n)^2} \sin \frac{2\pi nt}{3} \Big|_2^3 \right) = -\frac{1}{\pi n} - \frac{3}{2\pi^2 n^2} \sin \frac{4\pi n}{3}.$$

Затем, используя, например, теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный нами ряд Фурье сходится к $\hat{f}(t)$ - периодическому (с периодом $T = 3$) продолжению исходной функции при всех $t \neq 3n$, и $S(3n) = -1/2$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где через $S(t)$ обозначена сумма ряда Фурье. График функции $S(t)$ имеет следующий вид:



$$\text{Ответ: } f(t) = -\frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right) \cos \frac{2\pi nt}{3} - \\ - \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{3}{2\pi^2 n^2} \sin \frac{4\pi n}{3} \right) \sin \frac{2\pi nt}{3}, \quad t \in (0, 3); \\ S(t) = \hat{f}(t), \quad t \neq 3n; \quad S(3n) = -\frac{1}{2} \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. Построим ряд Фурье по синусам.

Ряд Фурье по синусам в общем случае существует только для нечетной функции. Для того чтобы построить ряд по синусам для заданной функции, продолжим ее нечетным образом на промежуток $[-3, 0]$. Обозначим через $\tilde{f}(t)$ нечетное продолжение нашей функции, заданное на промежутке $[-3, 3]$. Затем, считая, что $T = 6$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для нечетной функции:

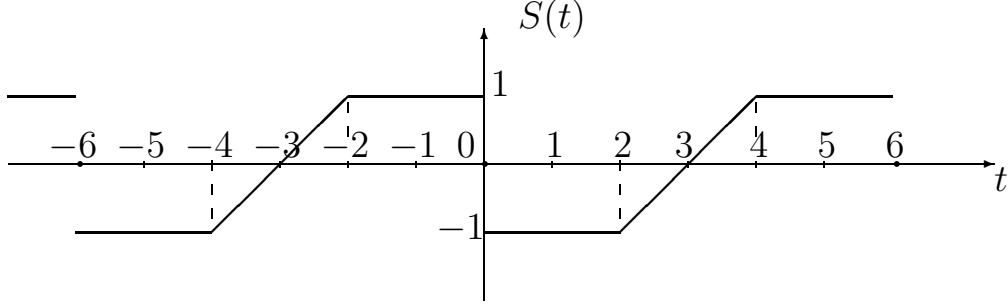
$$\tilde{f}(t) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin n\omega t, \quad \text{где } \tilde{b}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычислим коэффициенты \tilde{b}_n :

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{3} \left[-\int_0^2 \sin \frac{\pi nt}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \sin \frac{\pi nt}{3} dt \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi nt}{3} \Big|_0^2 - \right.$$

$$- \frac{3}{\pi n} (t-3) \cos \frac{\pi n t}{3} \Big|_2^3 + \frac{9}{(\pi n)^2} \sin \frac{\pi n t}{3} \Big|_2^3 = -\frac{2}{\pi n} - \frac{3}{4\pi^2 n^2} \sin \frac{2\pi n}{3}.$$

Применив теорему Дирихле, видим, что $S(t) = \hat{f}(t)$ при $t \neq 6k$, (здесь через $\hat{f}(t)$ обозначено периодическое продолжение функции $\tilde{f}(t)$) и $S(6k) = 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:



$$\text{Ответ: } f(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} + \frac{3}{4\pi^2 n^2} \sin \frac{2\pi n}{3} \right) \sin \frac{\pi n t}{3} \text{ при } t \in (0, 3],$$

$$S(t) = \hat{f}(t) \text{ при } t \neq (6k) \text{ и } S(6k) = 0 \text{ при } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4. Построим ряд Фурье по косинусам.

Аналогично, ряд Фурье по косинусам существует только для четной функции. Для того чтобы построить ряд по косинусам для заданной функции, продолжим ее четным образом на промежуток $[-3, 0]$. Обозначим через $\tilde{f}(t)$ четное продолжение нашей функции, заданное на промежутке $[-3, 3]$. Затем, как и в предыдущем случае, считая, что $T = 6$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для четной функции:

$$\tilde{f}(t) \doteq \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos n\omega t, \quad \tilde{a}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

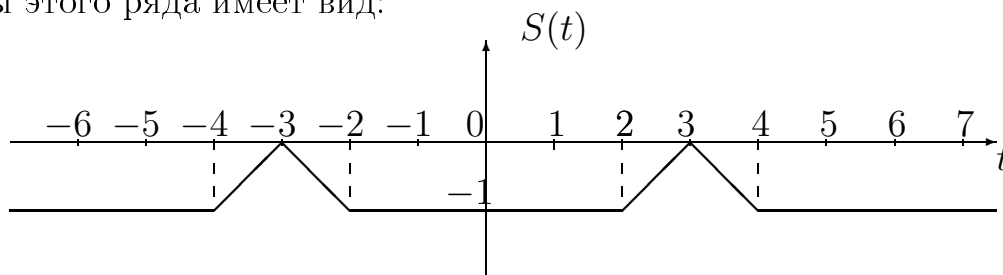
Вычислим коэффициенты \tilde{a}_n :

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{3} \left[- \int_0^2 dt + \int_2^3 (t-3) dt \right] = -\frac{5}{3},$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{3} \left[- \int_0^2 \cos \frac{\pi n t}{3} dt + \int_2^3 (t-3) \cos \frac{\pi n t}{3} dt \right] = \frac{6}{\pi^2 n^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{2\pi n}{3} \right].$$

Применив теорему Дирихле, видим, что $S(t) = \hat{f}(t)$ при всех вещественных значениях аргумента t (здесь, как и раньше, через $\hat{f}(t)$ обозначено

периодическое продолжение функции $\tilde{f}(t)$). Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:



Ответ: $f(t) = -\frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} \left[(-1)^n - \cos \frac{2\pi n}{3} \right] \cos \frac{\pi n t}{3}$ при $t \in [0, 3]$,
 $S(t) = \hat{f}(t)$ при всех вещественных t .

5. Построим ряд Фурье в комплексной форме.

Ряд Фурье для функции $f(t)$ в комплексной форме имеет вид:

$$f(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}, \quad \text{где } c_n = T^{-1} \int_a^b f(t) e^{-i\omega n t} dt, \quad \omega = 2\pi/T.$$

В нашем примере $a = 0$, $b = 3$, $T = 3$, $\omega = 2\pi/3$, тогда

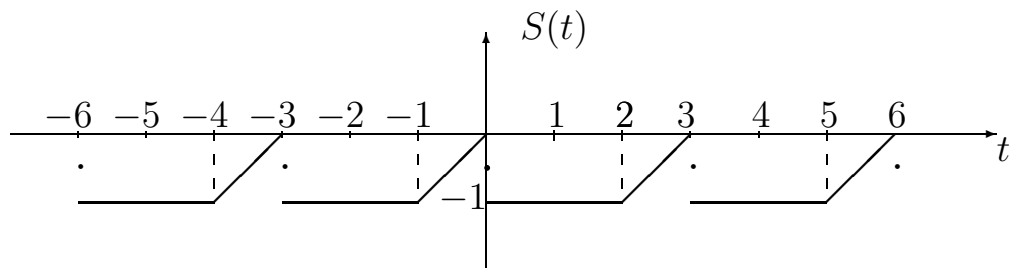
$$\begin{aligned} c_0 &= 3^{-1} \int_0^3 f(t) dt = a_0/2 = -5/6, \\ c_n &= 3^{-1} \left(-\int_0^2 e^{-i\omega n t} dt + \int_2^3 (t-3) e^{-i\omega n t} dt \right) = 3^{-1} \left\{ -\frac{3i}{2\pi n} e^{-i\omega n t} \Big|_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3i}{2\pi n} \left[(t-3) e^{-i\omega n t} - \frac{3i}{2\pi n} e^{-i\omega n t} \right] \Big|_2^3 \right\} = \frac{i}{2\pi n} + \frac{3}{4\pi^2 n^2} (1 - e^{-2\omega n i}) = \\ &= \frac{3}{4\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right) + \frac{i}{2\pi n} \left(1 + \frac{3}{2\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты c_n связаны с коэффициентами a_n , b_n общего ряда Фурье следующим образом:

$$c_n = \begin{cases} 2^{-1}(a_n - ib_n), & n \geq 0, \\ 2^{-1}(a_{-n} + ib_{-n}), & n < 0. \end{cases}$$

Затем, как и ранее, используя теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный нами ряд Фурье в комплексной форме сходится к периодическому, периода $T = 3$, продолжению исходной функции при всех $t \neq 3n$, и $S(3n) = -1/2$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

График суммы этого ряда Фурье имеет следующий вид (поведение ряда Фурье и его график в этом случае совпадают с поведением и графиком ряда Фурье для случая общего тригонометрического ряда Фурье):



$$\begin{aligned}
 \text{Ответ: } f(t) &= -\frac{5}{6} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left[\frac{3}{4\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{4\pi n}{3} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{2\pi n} \left(1 + \frac{3}{2\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3} \right) \right] e^{i2\pi nt/3} \quad \text{при } t \in (0, 3) \\
 S(t) &= \hat{f}(t), \quad t \neq 3n; \quad S(3n) = -\frac{1}{2} \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

(

Расчетные задания

I. Исследовать сходимость числовых рядов.

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n! 2^n};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$
2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{5^n};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(2n+1)!};$
3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{n! (n+1) 2^n};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3};$
4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n! \sqrt{n^2+1}};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2+1};$
5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3/n)}{1/n};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)};$
6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^3}+5}{n^3+6};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{4}{n^2+1};$
7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \right);$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n + e^{-n}};$
8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!};$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{n^4+2n+1};$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n + n^2};$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+\sqrt{n})}{(n+1)(n+3)};$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cos \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{3n}{n^2-2n+2};$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+3) \ln^3(n+3)}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/(n+1))}{\sqrt{n+3}};$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3^n+\sqrt{n})}{4^n+1}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + \sqrt{n^2+1}}{2^{n^2+n}};$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! 5^n}.$
- b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{4^{n+2} (n-5)!};$
 d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1) \ln(n-1)}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!};$
 d) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{7}{(n-2) \ln^{3/2}(n-2)}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^4+n};$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-n^2}{n+1} \right).$

9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{3^n + n^3};$
c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n};$
10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2}{5^n + n};$
11. a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n-7}};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \sqrt[3]{n}}{5^n + 1};$
12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n + n};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2};$
13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + n \ln n};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!};$
14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{5}{2^n};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n)! n^2};$
15. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + n \sqrt{n}}{n^3 + n^2 - 1};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{2^n + 3}};$
16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + n^3}{(3n)!};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2^n}{3^n + 5};$
17. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sin^4 n};$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n^4}{e^{n^2+1}};$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+5)};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2 + 2}{3 - n^2}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{2n+3}{3n+1};$
d) $\sum_{n=5}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n-4}} \right).$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3^n + 2}{3^n};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n^2-1}}{6^n + n^6}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n);$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+5}{n+3};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n^2}}{5^{n^3}}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+9}{n^2 + 9n + 20};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{3/2} \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2 + 1} \right).$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{3n-2}{6n+1};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{3^{2n+1}}.$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n+1}};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right).$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{\ln(n+4)};$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{5^n (n+3)!}.$

18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n-1}{5n+2}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n^2+5}}{(2n-1)!}$;
19. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (2n+1)!}{(3n)!}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + \cos n}{5^n + n^2}$;
20. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{5}{\sqrt{n}}$;
 c) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln \ln n}$;
21. a) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n+1}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;
22. a) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n-5}{2n+3}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n + \operatorname{tg}^2(1/n)}$;
23. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \ln \frac{2n}{2n+1}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n+2}}{2^{n^2+1}}$;
24. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (2n-1)!}{(3n-1)!}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1) \sqrt{n+1}}$;
25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2-1)}{(2n+1)!}$;
 c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+n+1}}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{n+1}}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2+n} - 2^n}{7^{6n+2}}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1+n) \sin \frac{1}{n}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n/(n^2+1))}{n+1}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{3^{n^2} + 2^n}\right) \cdot 5^n$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-1)^{2n+1}}{n^2 + 2}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)! (2n+3)!}{(3n-2)!}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^3 + 2n}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n}{3 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (5n-2)}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(1+1/n)^{10} - 1]$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{3^{n^2} + n^3}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sin(1/n)}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 6^{n+2}}$;

26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{2n+3}{2n+1}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{3^n + n^2}$;
27. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
 c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$;
28. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n\sqrt{n}}{5^n - 1}$;
29. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$;
 c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n + \ln n}{2n^2}$;
30. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}$;
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^5$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(3n)!}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^{3/4} n}$.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2^n}{7^n + n^2 + 1}$.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{4^{n-3}}$.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!}{3^n (n+3)!}$.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n+2)! 4^n}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2} + n^3}{3^{n+7}}$.

II. Найти область сходимости функционального ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x+1)^{2n+1}}{n+2\sqrt{n}}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^2+3}}{2^n} (x+5)^{2n}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{3^n n^3}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n + n^2}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^{n^2} 3^{n^2}$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x-3)^n}{3^{2n}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (3x-2)^{2n}}{2n+\sqrt{n}}$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(x-5)^{2n+1} (2n+7)}$.

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+2)^{2n}}{(2n+1) 5^n}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+2) (x-3)^{2n}}.$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (2x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{2^n (x-1)^n}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n (x+3)^{2n}}.$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (2x+3)^n}.$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+n}{(x+1)^{2n}}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-4n) 5^n}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3 (x-2)^{3n}}.$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2) (x-3)^{2n}}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n (x-1)^{2n} n}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^{2n}}{n 9^n}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(x-1)^{4n}}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (2x+1)^{2n}}{n}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^{2n+1}}{5^n}.$
29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(3n+7) (x+3)^n}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n+3)}.$

III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.

1. $f(x) = \ln(5 + e^{-2x}).$
2. $f(x) = \operatorname{arctg}(2 + 3x)^{-1}.$
3. $f(x) = \exp(\operatorname{arctg} 3x).$
4. $f(x) = \exp(x^2 + 4x + 7).$
5. $f(x) = \exp(5 - x)^{-1}.$
6. $f(x) = (1 + \operatorname{ctg}(x + 1))^{-1}.$
7. $f(x) = x \sin(1 + 2x).$
8. $f(x) = 1 + x \operatorname{arctg}(x + 1).$
9. $f(x) = \ln \cos 3x.$
10. $f(x) = \exp(\arcsin 3x).$
11. $f(x) = (\cos 3x)^{-1}.$
12. $f(x) = \ln(1 - \sin x)^{-1}.$
13. $f(x) = e^x \cos^{-1} 2x.$

14. $f(x) = \exp\left(1 + \sin \frac{x}{2}\right).$
15. $f(x) = \operatorname{arctg} e^{-3x}.$
16. $f(x) = \exp(1 + \sin x).$
17. $f(x) = \exp(\operatorname{tg} 3x).$
18. $f(x) = \sqrt{3 + 5x - x^2}.$
19. $f(x) = x \operatorname{ctg}(3 - x).$
20. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}.$
21. $f(x) = \ln^2(1 - 5x).$
22. $f(x) = \ln \cos(1 - 3x).$
23. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 3}.$
24. $f(x) = \ln(3 - \sin 2x).$
25. $f(x) = x \operatorname{tg}(x + 1).$
26. $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - 2x).$
27. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \cos x}.$
28. $f(x) = \operatorname{arctg}(2 + e^{-x}).$
29. $f(x) = \sin^3(1 + x).$
30. $f(x) = \sqrt[3]{2 + 3x + x^3}.$

IV. Построить ряд Тейлора данной функции в окрестности точки x_0 , используя стандартные разложения Маклорена основных элементарных функций. Указать область, в которой разложение справедливо.

1. а) $f(x) = \sin 3x, x_0 = \pi;$
 б) $f(x) = xe^{3+x}, x_0 = 1.$
2. а) $f(x) = e^{2+3x}, x_0 = 2;$
 б) $f(x) = 6 \sin x^3 + x^2(6 - x^4), x_0 = 0.$
3. а) $f(x) = \ln(6 + 3x), x_0 = -1;$
 б) $f(x) = 2 - 3(x^5 - x) + 3 \cos x^2, x_0 = 0.$
4. а) $f(x) = 5(2 - x)^{-1/3}, x_0 = 1;$
 б) $f(x) = x^2 \cos(x + 1), x_0 = -1.$
5. а) $f(x) = \cos(x/4), x_0 = \pi;$
 б) $f(x) = x^2(1 + x)^{-2}, x_0 = 0.$
6. а) $f(x) = 2^{3(x+1)}, x_0 = -2;$
 б) $f(x) = x(x + 2)^{-1}, x_0 = 1.$
7. а) $f(x) = e^{x^2-4x}, x_0 = 2;$
 б) $f(x) = 1 + x^2 - \ln(2 - x), x_0 = 1.$
8. а) $f(x) = (4 - 3x)^{-1}, x_0 = -1;$
 б) $f(x) = (x + 2)(e^{x^2} - 1), x_0 = 0.$

9. a) $f(x) = (5 - 2x)^{1/3}$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x \sin(x + 1)$, $x_0 = -1$.
10. a) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = xe^{2x}$, $x_0 = 1$.
11. a) $f(x) = \ln(2 - 5x)$, $x_0 = -3$;
b) $f(x) = \operatorname{sh} 2x$, $x_0 = 1$.
12. a) $f(x) = (7 + 3x)^{-1/4}$, $x_0 = -1$;
b) $f(x) = \operatorname{ch} 3x$, $x_0 = 2$.
13. a) $f(x) = e^{x^2 - 6x + 7}$, $x_0 = 3$;
b) $f(x) = x(x^2 - 2x + 5)^{-1}$, $x_0 = 1$.
14. a) $f(x) = (5 + x^2)^{-1/2}$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x^2 e^x$, $x_0 = 1$.
15. a) $f(x) = (2x - 5)^{-1}$, $x_0 = -3$;
b) $f(x) = x + 2 + xe^x$, $x_0 = 1$.
16. a) $f(x) = \cos(\pi x/3)$, $x_0 = -3/2$;
b) $f(x) = x \ln(1 + 3x)$, $x_0 = 1$.
17. a) $f(x) = e^{-3(x^2 + 5)}$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x(x + 3)^{-1}$, $x_0 = 1$.
18. a) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = (x + 1)(x - 2)^{-1}$, $x_0 = 1$.
19. a) $f(x) = e^x + x + 3$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = (1 + x) \ln(3 + x)$, $x_0 = -2$.
20. a) $f(x) = x^2 + 3 + 1/x$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = \operatorname{ch} 2x$, $x_0 = -1$.
21. a) $f(x) = \ln(x^2 + 6x + 5)$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = xe^{1-x}$, $x_0 = 1$.
22. a) $f(x) = e^{2-x} + 3x$, $x_0 = 4$;
b) $f(x) = (7 - 2x)(x^2 - x - 2)^{-1}$, $x_0 = 0$.
23. a) $f(x) = x^2 + \cos 2x$, $x_0 = -\pi$;
b) $f(x) = x \ln(4 + 3x)$, $x_0 = -1$.

24. a) $f(x) = (x^2 + x)^{-1}$, $x_0 = -2$;
 b) $f(x) = (2x + 3)(e^{x^2} - 1)$, $x_0 = 0$.
25. a) $f(x) = x^2 e^{-6x}$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = x^3 + \ln(2 - x)$, $x_0 = 1$.
26. a) $f(x) = x^2 \cos(x^3 + \pi/4)$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$, $x_0 = -3$.
27. a) $f(x) = (2 + 7x^5)^{-1/2}$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = \operatorname{sh} x$, $x_0 = 2$.
28. a) $f(x) = (4x)^{1/3}$, $x_0 = -1$;
 b) $f(x) = x^2 + \sin(1 - x)$, $x_0 = 1$.
29. a) $f(x) = \sin(x^2 + \pi/4)$, $x_0 = 0$;
 b) $f(x) = x \ln(3 + x)$, $x_0 = -1$.
30. a) $f(x) = (2x + 3)^{-2/3}$, $x_0 = -2$;
 b) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x_0 = 1$.

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx.$ | 7. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{64 + x^3}} dx.$ |
| 2. $\int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx.$ | 8. $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1 + x/2)}{x} dx.$ |
| 3. $\int_0^{1,5} 1 \sqrt[4]{81 + x^4} dx.$ | 9. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx.$ |
| 4. $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$ | 10. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$ |
| 5. $\int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx.$ | 11. $\int_0^{0,2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$ |
| 6. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$ | 12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{16 + x^4}} dx.$ |

$$13. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

$$22. \int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx.$$

$$14. \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx.$$

$$23. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$$

$$15. \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$$

$$24. \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx.$$

$$16. \int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}} dx.$$

$$25. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{256+x^4}} dx.$$

$$17. \int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx.$$

$$26. \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx.$$

$$18. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx.$$

$$27. \int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[4]{625+x^4}} dx.$$

$$19. \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx.$$

$$28. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx.$$

$$20. \int_0^1 \cos x^2 dx.$$

$$29. \int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx.$$

$$21. \int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[3]{125+x^3}} dx.$$

$$30. \int_0^1 \sin x^2 dx.$$

6. Найти решение задачи Коши в виде ряда.

$$1. 2y'' + xy' + 10y = x - x^2; y(0) = 1/30, y'(0) = 0.$$

$$2. y'' + 2xy' + 4y = 1 + x + x^2; y(0) = 3/16, y'(0) = 0.$$

$$3. 5y'' - 2xy' - 2y = -2x^2; y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$4. 2y'' - xy' + 2y = 1; y(0) = -1, y'(0) = -12.$$

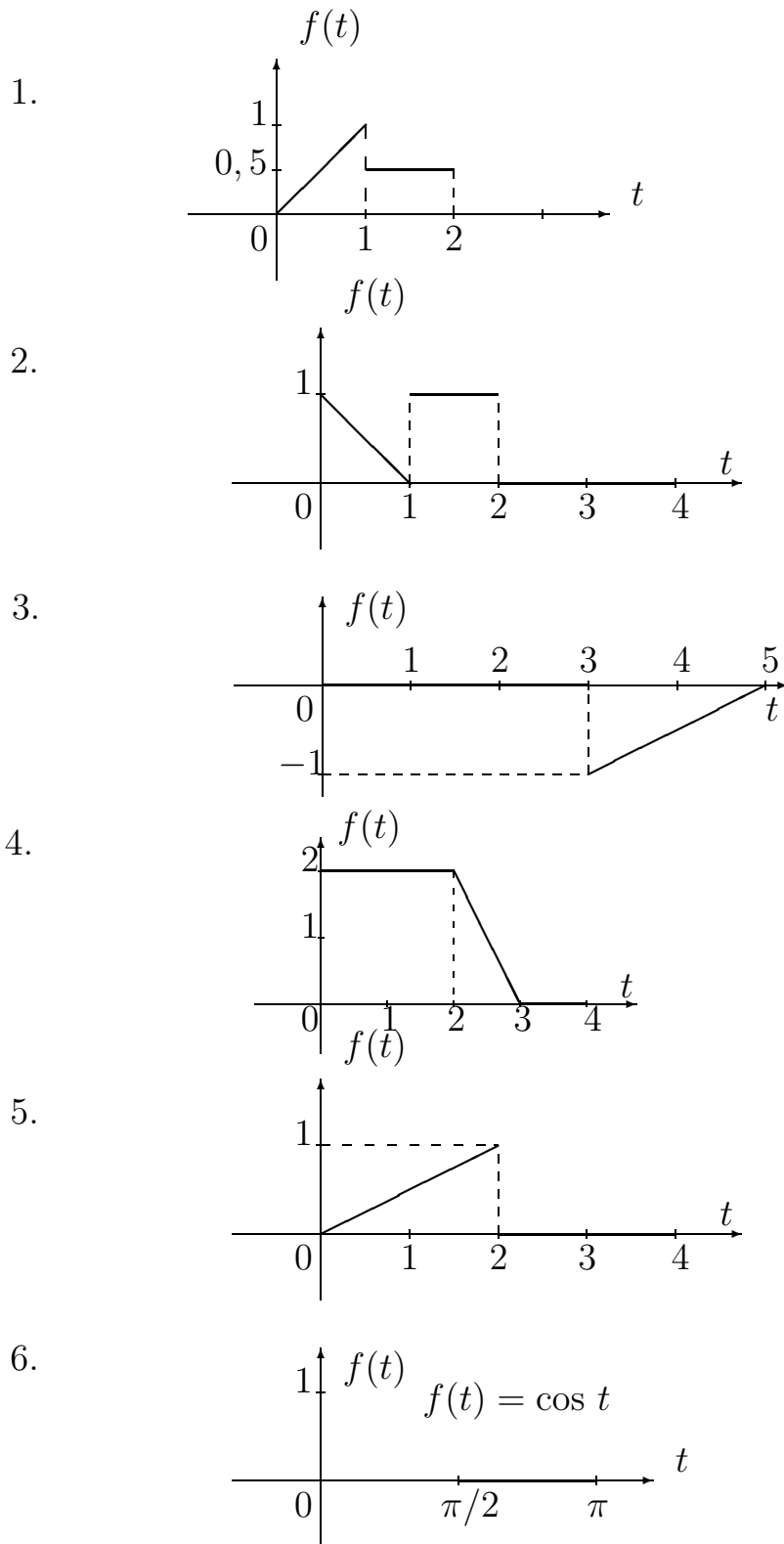
$$5. 2y'' + xy' + 10y = 11x; y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

$$6. 2y'' - xy' + 2y = x - 4x^2; y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

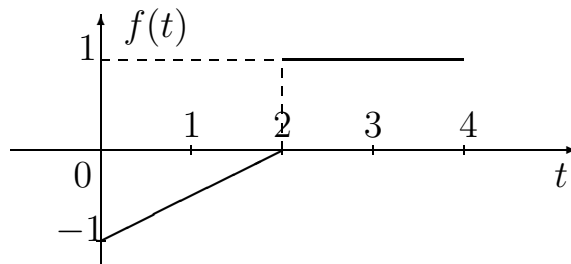
$$7. 3y'' - xy' + 2y = 1 + 2x^2; y(0) = 5, y'(0) = 0.$$

8. $3y'' - xy' + 3y = 1; y(0) = 0, y'(0) = 1.$
9. $4y'' - 2xy' - 4y = 3x^3; y(0) = 0, y'(0) = 2.$
10. $3y'' + 2xy' + 4y = 1; y(0) = 1, y'(0) = 0.$
11. $4y'' - 3xy' + 3y = 1; y(0) = 0, y'(0) = 0.$
12. $4y'' - 3xy' - 3y = 2x + 2x^3; y(0) = 0, y'(0) = 3.$
13. $3y'' - 4xy' + 4y = 3x^2; y(0) = 0, y'(0) = 1/2.$
14. $5y'' + 2xy' - 4y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 1.$
15. $5y'' + 2xy' - 4y = -7x; y(0) = 1, y'(0) = 1.$
16. $4y'' + 3xy' - 6y = -x; y(0) = 2, y'(0) = 0.$
17. $2xy'' + (x - 1)y' + y = 1 + 5x; y(0) = 2, y'(0) = 1.$
18. $2xy'' + (x - 1)y' + y = 6x^2; y(0) = 1, y'(0) = 1.$
19. $2xy'' + (x + 2)y' + y = 2x + 1; y(0) = -1, y'(0) = 1.$
20. $2xy'' + (x + 4)y' + y = x + 1; y(0) = 0, y'(0) = 1/4.$
21. $xy'' + (x + 1)y' + y = 10x; y(0) = 2, y'(0) = -2.$
22. $xy'' - (x - 1)y' - y = x + 1; y(0) = -1, y'(0) = 0.$
23. $xy'' + (2x^2 + 1)y' + 2xy = 2; y(0) = 0, y'(0) = 2.$
24. $2xy'' + (2x + 1)y' + y = x; y(0) = 1, y'(0) = -1.$
25. $xy'' + (x + 2)y' + 2y = -1; y(0) = 0, y'(0) = -1/2.$
26. $xy'' + (x^2 + 1)y' + 2xy = 10x; y(0) = 0, y'(0) = 0.$
27. $xy'' + (x^2 + 1)y' + 2xy = 1; y(0) = 0, y'(0) = 1.$
28. $2y'' + 2xy' + 4y = 3x; y(0) = 1, y'(0) = 1/2.$
29. $y'' - 2xy' - 4y = 8x^2; y(0) = -1/2, y'(0) = 1.$
30. $xy'' + (1 - x)y' - y = 1 + x; y(0) = -1, y'(0) = 0.$

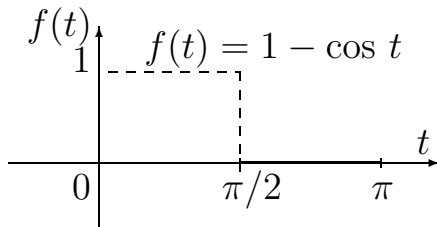
VII. Для заданной графически функции $f(x)$ построить 4 ряда Фурье и графики сумм этих рядов.



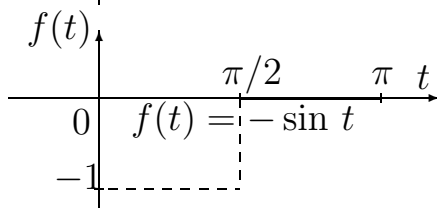
7.



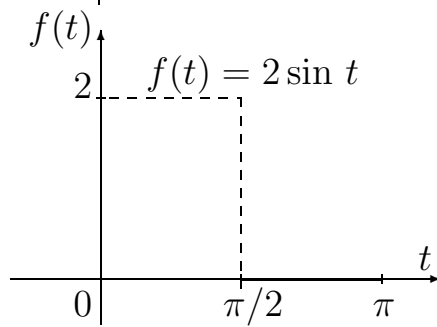
8.



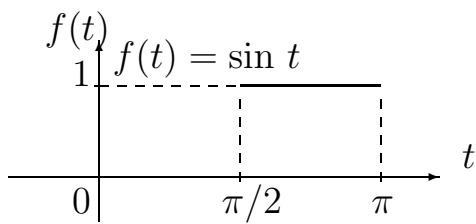
9.



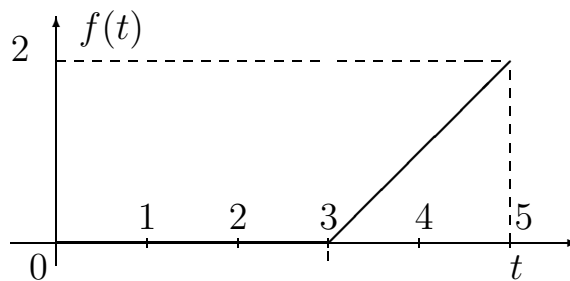
10.



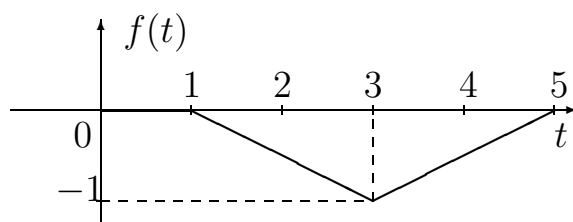
11.



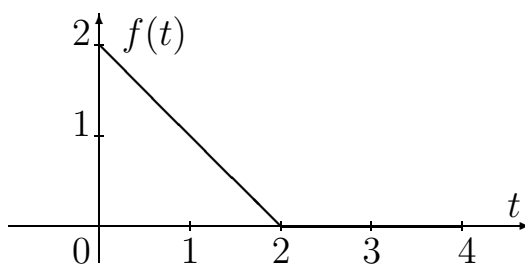
12.



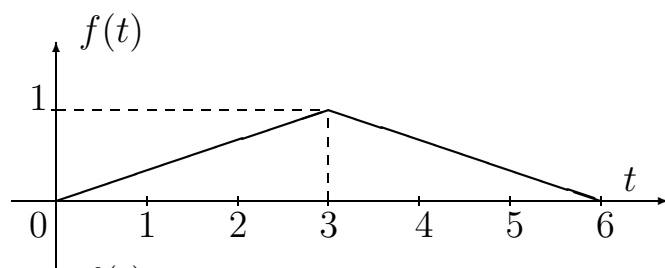
13.



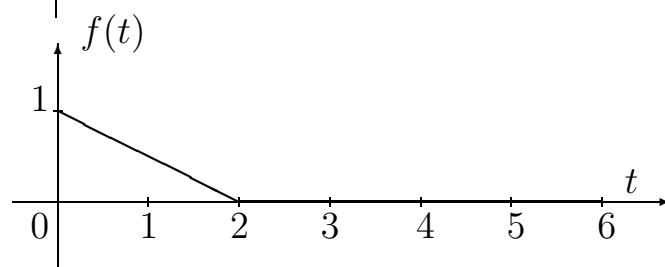
14.



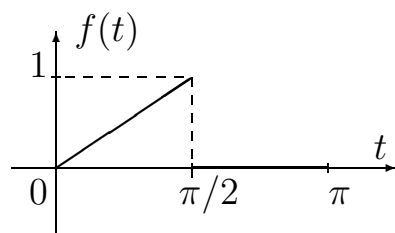
15.



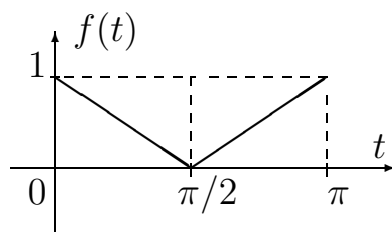
16.



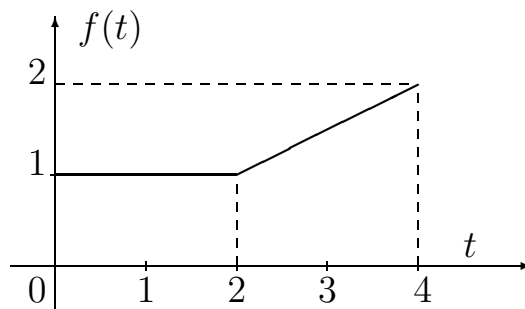
17.



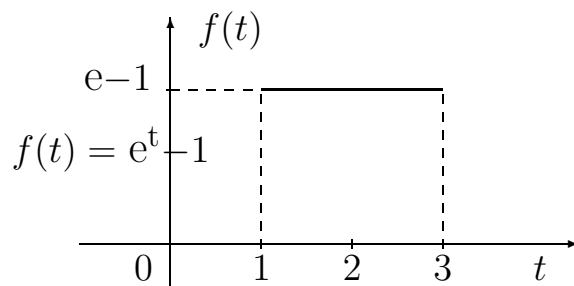
18.



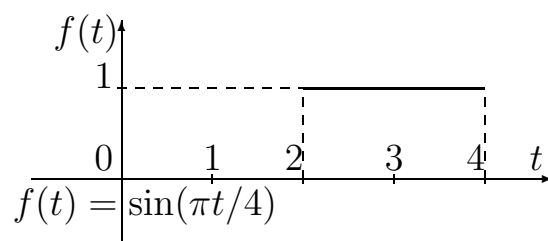
19.



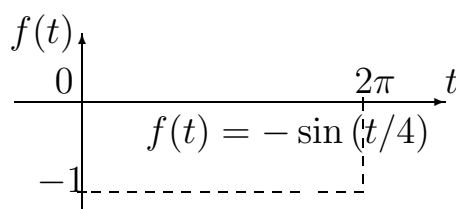
20.



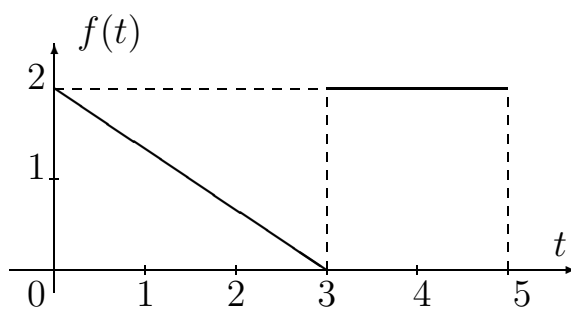
21.



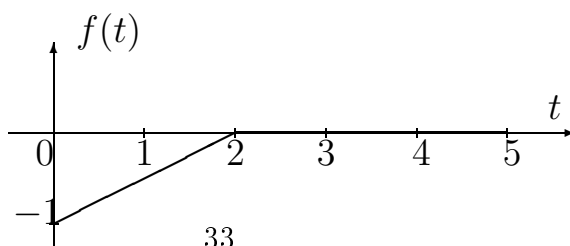
22.



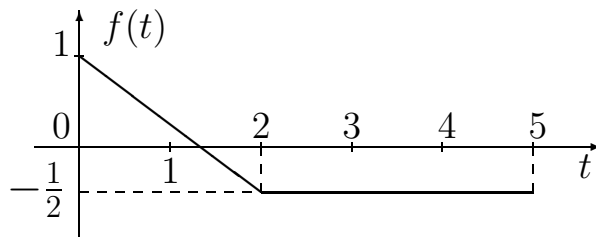
23.



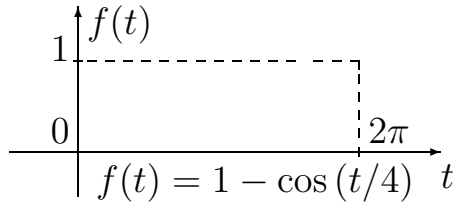
24.



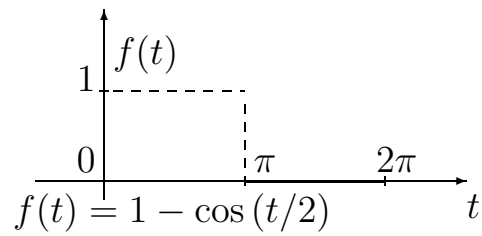
25.



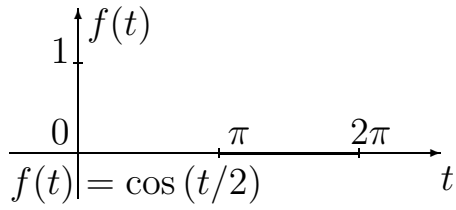
26.



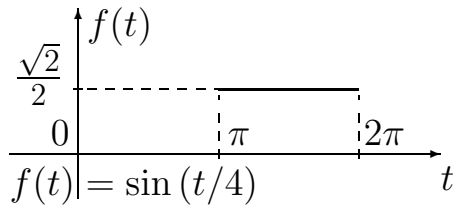
27.



28.



29.



30.

