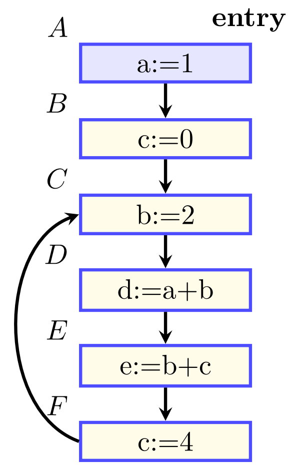
Definitions

Definition 1.1. 一个有限有向图 $G = (N, E)$ 由有限集合 N 和集合 $E \subseteq N \times N$ 构成. 对定义的补充: 取 N 上两个顶点 n_1 和 n_2，若有一条 n_1 到 n_2 有向边 e，那么 $e \in E$.

Definition 1.2. 一个程序图是一个有限有向图 $G = (N, E)$，其中 N 表示程序中的所有指令（instruction）构成的集合，E 表示指令之间的控制流（control flow）构成的集合.

Example 1.3. 通篇将使用下面的例子来阐述.



Definition 1.4. Constant pool表示由一群有序对 (order pair)(v, c) 构成的集合，记为 $\mathbf{P}$. 其中 v 表示程序中某个具体的变量，c 表示某个常量. G 上某顶点 i 处的 Constant pool 记为 $\mathbf{P}_i$，若 $(v, c) \in \mathbf{P}_i$，那么表示在程序动态运行时变量 v 可以取到常量 c，所以是可以存在 $(v, c_1), (v, c_2) \in \mathbf{P}_i$

Definition 1.5. 给定 G 上某个顶点 i 和从 entry 到 i 的一条路径 $\pi = (p_1, \cdots, p_n)$，其中 p_1 为 entry，p_n 为顶点 i. 用 $\mathbf{P}_i^\pi$ 表示限制在路径 π 上 i 点的 constant pool，注意其含义是在路径 π 确定的情况下，沿着 π 执行到顶点 i 处时，这一点的程序状态是确定的，所以若 $(v, c) \in \mathbf{P}_i^\pi$，则不会同时存在 $(v, c') \in \mathbf{P}_i^\pi$.

Example 1.6. 以上图的 D 点举例，如果我们关注的路径是 $\pi_1 = (A, B, C, D)$，那么

$$\mathbf{P}_D^{\pi_1} = \{(a, 1), (c, 0), (b, 2)\}.$$

如果我们关注的路径是 $\pi_2 = (A, B, C, D, E, F, C, D)$，那么

$$\mathbf{P}_D^{\pi_2} = \{(a, 1), (c, 4), (b, 2), (d, 3), (e, 2)\}.$$

Definition 1.7. 给定程序图 $G = (N, E)$ 中的某个顶点 i，那么它的Propagated constant pool表示为

$$\mathcal{P}_i = \bigcap_{k \in K} \mathbf{P}_i^{\pi_k}.$$

其中 G 上总共有 K 条 entry 到 i 的路径.

Definition 1.8. 给定程序图 $G=(N,E)$，定义集合 V 表示 G 上所有的变量，集合 C 表示图上所有的常量和集合 $U=V\times C$ 表示可能出现在任意顶点上 constant pool 中 order pairs. 那么一个常量传播函数表示为

$$f\colon \overline{N}\times\mathfrak{P}(U)\to\mathfrak{P}(U).$$

其中 $\mathfrak{P}(U)$ 表示 U 的幂集.

给定某个具体顶点 i 和 constant pool $\mathbf{P}$，若 $(v,c)\in f(i,\mathbf{P})$ 当且仅当

1. $(v,c)\in\mathbf{P}$ 且顶点 i 处没有对 v 进行赋值，或
2. 对 v 赋值表达式的结果是常量 c.

那么前面的Propagated constant pool的定义可以改写为

$$\mathcal{P}_i=\bigcap_{u\in F^i}u,$$

其中 $F^i=\{f(p_{k_n},f(p_{k_{n-1}},\cdots,f(p_1,\mathbf{P}_\varepsilon))\cdots),\cdots\}$，$(p_{k1},\cdots,p_{kn})$ 是一个 entry ε 到 i 的路径 $\pi_k,k\in K$，$\mathbf{P}_\varepsilon$ 表示 entry 处的初始化的 constant pool.

Example 1.9. 例如在上图 A 点的 constant pool 是一个 $\emptyset$，那么

$$f(A,\emptyset)=\{(a,1)\}.$$

如果我们把得到的结果当做 B 点的 constant pool，那么就有

$$f(B,f(A,\emptyset))=\{(a,1),(c,0)\}$$

Definition 1.10. 一个semilattice(半格) $\mathcal{S}$ 由一个非空集合 S 和一个二元运算 $\cdot$ 构成，其中 $\cdot$ 需要满足下面的条件

1. $x\cdot x=x$,
2. $x\cdot y=y\cdot x$,
3. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

通常我们把 $\cdot$ 用 $\wedge$ 或者 $\vee$ 来表示.

Definition 1.11. 给定一个 semilattice $\mathcal{S}$. 在其上构造一个 partial order set，我们定义若 $x\wedge y=x$，则 $x\leq y$，这个特殊的 poset(后面用它代称 partial order set) 我们称之为meet semilattice. 对偶地定义若 $x\vee y=y$，则 $x\leq y$，这个 poset 我们称之为 join semilattice.

Definition 1.12. 给定一个 meet semilattice $\mathcal{S}$，若 $\mathcal{S}$ 里面有一个最大元 1(maximum element)，即对于任意的 $x \in \mathcal{S}$，都有 $x \wedge 1 = x$，且对任意 $A \subseteq S$，有 $\bigwedge S$ 存在. 我们称 $\mathcal{S}$ 为一个complete meet semilattice. 同理给定一个 join semilattice 里面有一个最小元 0(minimum element)，且对任意 $A \subseteq S$，有 $\bigvee S$ 存在，则称其为complete join semilattice.

Definition 1.13. 给定常量域 U，设 $L = (\mathfrak{P}(U), \cap)$ 为一个 meet semilattice.

Lemma 1.14. 下面等式成立 homomorphism???

$$f(i, x \wedge y) = f(i, x) \wedge f(i, y).$$

其中 $y, u \in \mathfrak{P}(U)$.

证明. 分四种情况来分别说明

1. 若 $(v, c) \in x$ 和 $(v, c) \in y$. 那么 $(v, c) \in x \wedge y$，若 $(v, c) \in f(i, x \wedge y)$，则满足 f 定义提到的条件 (1)(2)，那么在满足 (1)(2) 的前提下均有 $(v, c) \in f(i, x)$ 和 $(v, c) \in f(i, y)$，即 $(v, c) \in f(i, x) \wedge f(i, y)$. 同理若 $(v, c) \notin f(i, x \wedge y)$，也可以得到 $(v, c) \notin f(i, x) \wedge f(i, y)$.

2. 若 $(v, c) \in x$ 和 y 里面没有关于 v 的 variable-constant pair. 同下

3. 若 x 里面没有关于 v 的 variable-constant pair 和 $(v, c) \in y$. 同下

4. 若 $(v, c_1) \in x$ 和 $(v, c_2) \in y$. 那么 $(v, c_1) \notin x \wedge$ 且 $(v, c_2) \notin x \wedge y$. 若 $(v, c_3) \in f(i, x \wedge y)$，则满足 f 定义中条件 (2). 那么满足 (2) 的前提下，有 $(v, c_3) \in f(i, x)$ 和 $(v, c_3) \in f(i, y)$，即 $(v, c_3) \in f(i, x) \wedge f(i, x)$. 若 $f(i, x \wedge y)$ 中没有关于 v 的 variable-constant pair，那么 f 中没有对 v 进行重新赋值，则 $(v, c_1) \in f(i, x)$ 和 $(v, c_2) \in f(i, y)$，即 $f(i, x) \wedge f(i, y)$ 里面也没有关于 v 的 variable-constant pair.

由于我们选取的 i 和 x, y 都是任意的，综上原式成立. □

Definition 1.15. 给定有向图 $G = (N, E)$ 上一个顶点 i, 若 $s \in N$ 且 $(i, s) \in E$, 则 s 为 i 的立即后继(immediate successor)，把 i 的所有立即后继记为 $\text{IS}(i)$; 同理若 $p \in N$ 且 $(p, i) \in E$，则 s 为 i 的立即前驱(immediate predecessor)，把所有的立即后继记为 $\text{IP}(i)$.

Algorithm

Algorithm 1: global analysis

input : A program graph $G = (N, E)$

output : The propagated constant pool $\mathcal{P}_i$ of every node i

begin

/* 我们只关注整个图只有一个 entry ε. 经典 worklist 的应用 */

$W \longleftarrow \{(\varepsilon, \mathbf{P}_\varepsilon)\}$;

/* 所有顶点的 propagated constant pool 初始化为整个 lattice 里面的最大值 */

foreach i *in* N **do**

$\mathcal{P}_i = 1$

while $W \neq \emptyset$ **do**

$X \longleftarrow (i, \mathbf{P}_i) \in W$;

$W \longleftarrow W - \{(i, \mathbf{P}_i)\}$;

/* 注意到这里 propagated constant pool 是不增的 */

if $X \wedge \mathcal{P}_i < \mathcal{P}_i$ **then**

$\mathcal{P}_i \longleftarrow X \wedge \mathcal{P}_i$;

/* 考虑所有后继 */

$W \longleftarrow W \cup \{\, (s, f(i, \mathcal{P}_i)) \mid s \in \mathrm{IS}(i) \,\}$

Theorem 2.1. 算法 1 的步骤是有限的.

Theorem 2.2. 算法 1 计算得到的结果 $\mathcal{P}_i = \bigwedge_{u \in F^i} u$，其中 $F^i = \{f(p_n, f(p_{n-1}, \cdots, f(p_1, \mathbf{P}_\varepsilon))\cdots), \cdots\}$.

证明. 注意上面的 $\bigwedge$ 在这里就是集合上的 $\bigcap$，因为我们的 semilattice 的 underlying set 是 $\mathfrak{B}(U)$. 对于从 ε 到 i 的任意一条路径 $\pi_k = (p_{k_1}, \cdots, p_{k_n})$，其中 $p_{k_1} = \varepsilon$, $p_{k_n} = i$，那么

$$\bigwedge_{u \in F^i} u = \bigwedge_{k \in K} f(p_{k_n}, f(p_{k_{n-1}}, \cdots, f(p_{k_1}, \mathbf{P}_\varepsilon))\cdots).$$

我们注意到对于任意的 $k \in K$ 都有 $p_{k_n} = i$，那么应用 lemma 1.13 就有

$$f(i, \bigwedge_{k \in K} f(p_{k_{n-1}}, \cdots, f(p_{k_1}, \mathbf{P}_\varepsilon)\cdots).$$

我们在想这个 $\bigwedge$ 能不能继续往里面推呢? 考虑对于任意的 $k \in K$, 集合 $\{p_{k_{n-1}}\}$ 可能就不是一个单点集了 (single set)，这个集合就是 i 的所有的立即前驱 $\mathrm{IP}(i)$. 我们又可以尝试用 lemma 1.13 合并一些项

$$f(i, \bigwedge_{i^{-1} \in \mathrm{IP}(i)} f(i^{-1}, \bigwedge_{k \in K \text{ and } p_{k_{n-1}} = i^{-1}} f(p_{k_{n-2}}, \cdots, f(p_{k_1}, \mathbf{P}_\varepsilon)\cdots))$$

那么最后我们可以给出一般式

$$f(i, \bigwedge_{i^{-1} \in \mathrm{IP}(i)} f(i^{-1}, \bigwedge_{k \in K \text{ and } p_{k_{n-1}} = i^{-1}} f(i^{-2}, \cdots \bigwedge_{k \in K \text{ and } p_{k_3} = i^{-(n-3)}} f(i^{-(n-3)}, \bigwedge_{k \in K \text{ and } p_{k_2} = i^{-(n-2)}} f(i^{-(n-2)}, f(p_{k_1}, \mathbf{P}_\varepsilon)))\cdots))).$$

体会这个一般式子，我们已经证明了. □