

# Types and Programming Language

枫聆

2021 年 3 月 31 日

## 目录

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Untyped Systems</b>	<b>3</b>
2.1	Syntax . . . . .	3
2.2	Semantic Styles . . . . .	4
2.3	Evaluation . . . . .	5

## Introduction

**Definition 1.1.** A **type system** is a tractable syntactic method for proving the absence of certain program behaviors by classifying phrases according to the kinds of value they compute.

type system 是一种用于证明某些确定的程序行为不会发生的方法，它怎么做呢？通过它们计算出值的类型来分类，有点抽象... 我想知道 the kinds of value they compute 是什么？如何分类？分类之后接下来该怎么做？

**Annotation 1.2.** Being static, type systems are necessarily also **conservative**: they can categorically prove the absence of some bad program behaviors, but they can't prove their presence.

**Example 1.3.**

```
1 if <complex test> then 5 else <type error>
```

上面这个 annotation 在说 type system 只能证明它看到的一些 bad program behavior 不会出现，但是它们可能会 reject 掉一些 runtime time 阶段运行良好的程序，例如在 runtime 阶段上面的 else 可能永远都不会进。即 type system 无法证明它是否真的存在。

# Untyped Systems

## Syntax

**Definition 2.1.** The set of terms is the smallest set  $\mathcal{T}$  such that

1.  $\{\text{true}, \text{false}, 0\} \subseteq \mathcal{T}$ ;
2. if  $t_1 \in \mathcal{T}$ , then  $\{\text{succ } t_1, \text{pred } t_1, \text{iszero } t_1\} \subseteq \mathcal{T}$ ;
3. if  $t_1 \in \mathcal{T}, t_2 \in \mathcal{T}, t_3 \in \mathcal{T}$ , then  $\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \in \mathcal{T}$ .

**Definition 2.2.** The set of terms is defined by the following rules:

$$\begin{array}{c} \frac{\text{true} \in \mathcal{T}}{t_1 \mathcal{T}} \quad \frac{\text{false} \in \mathcal{T}}{t_1 \mathcal{T}} \quad \frac{0 \in \mathcal{T}}{t_1 \mathcal{T}} \\ \frac{}{\text{succ } t_1 \in \mathcal{T}} \quad \frac{}{\text{succ } t_1 \in \mathcal{T}} \quad \frac{}{\text{succ } t_1 \in \mathcal{T}} \\ \frac{t_1 \in \mathcal{T} \quad t_2 \in \mathcal{T} \quad t_3 \in \mathcal{T}}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3} \end{array}$$

**Definition 2.3.** For each natural number  $i$ , define a  $S(X)$  as follow:

$$\begin{aligned} S_0(X) &= X \\ S_1(X) &= \{\text{succ } t, \text{pred } t, \text{iszero } t \mid t \in X\} \cup \{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in X\} \\ &\vdots \\ S_{i+1}(X) &= S(S_i(X)). \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.**  $\mathcal{T} = \bigcup_{i=0}^{\omega} S_i(\{\text{true}, \text{false}, 0\})$ .

证明. 我们设  $\bigcup_{i=0}^{\omega} S_i(\{\text{true}, \text{false}, 0\}) = S$  和  $\{\text{true}, \text{false}, 0\} = T$ , 证明过程分两步走 (1)  $S$  follow Definition 2.1 (2)  $S$  is smallest.

proof (1).  $\{\text{true}, \text{false}, 0\} \in S$  这是显然的. 若  $t_1 \in S$ , 那么  $t_1 \in S_i(T)$ , 考虑  $\text{succ } t_1, \text{pred } t_1, \text{iszero } t_1 \in S_{i+1}(T)$ . 同理 Definition 2.1(3).

proof (2). 考虑任意 follow Definition 2.1 的集合  $S'$ , 我们需要证明  $S \subseteq S'$ . 我们考虑任意的  $S_i \subseteq S$ , 若都有  $S_i \subseteq S'$ , 那么则有  $S \subseteq S'$ . 这里我们使用 induction 来证明, 首先有  $S_0(T) \subseteq S'$ , 假设  $S_n(T) \subseteq S'$ . 那么考虑  $S_{n+1}(T) = S(S_n(T))$ , 任意的  $t_1, t_2, t_3 \in S_n(T)$ , 那么 Definition 2.1(1)(2)(3) 得到的结果都是属于  $S'$ , 因此  $S_{n+1}(T) \subseteq S'$ .  $\square$

## Semantic Styles

**Annotation 2.5.** 有三种方法来形式化语义:

1. Operational semantics(操作语义) 定义程序是如何运行的? 所以你需要一个 abstract machine 来帮助解释, 之所以 abstract 是因为它里面的 machine code 就是 the term of language. 其中又分为两种类型, big-step 和 small-step.
2. Denotational semantics(指称语义) 就是给定一个 semantic domain 和一个 interpretation function, 通过一个 function 把 term 映射到 semantic domain 里面, 这个 domain 里面可能是一堆数学对象. 它的优势是对求值进行抽象, 突出语言的本质. 我们可以在 semantic domain 里面做运算, 只要 interpretation function 建立的好, 运算结果可以表征程序本身的性质.
3. Axiomatic semantics(公理语义) 拿 axioms 堆起来的程序? 类似 Hoare logic.
4. Algebraic semantics(代数语义) 把程序本身映射到某个代数结构上, 转而研究这个代数?

## Evaluation

**Annotation 2.6.** 这一章在讲 operational semantic of boolean expression, 这个过程会清晰的告诉你我们求值的结果是什么? 当我们对 term 求值时, term 之间的转换规则应该是什么? 既然有了转换, 那么一定有终止的时候, 这个终止的时刻就是我们求值的结果, 那我们要问什么时候停止呢? 开头的表格告诉了关于前面这些问题的答案. 当然有一些东西也没有出现在表格里面, 但是它们同样重要, 例如不能在对 false, true, 0 这些东西再求值; 求值的顺序等等.

**Definition 2.7.** An instance of an inference rule is obtained by consistently replacing each metavariable by the same term in the rule's conclusion and all its premises (if any).

一个推导规则的实例, 就是把里面的 metavariable 替换成具体的 terms, 但是一定需要注意对应关系.

**Definition 2.8.** Evaluation relations: 一步求值 (基本 evaluation relation); 多步求值 (evaluation relation 的传递闭包产生的新的 relation, 这个 relation 包含原来的所有 evaluation relation);

**Definition 2.9.** A term  $t$  is in normal form if no evaluation rule applies to it.

范式是一个 term 无法继续求值的状态.

**Definition 2.10.** A closed term is stuck if it is in normal form but not a value.

受阻项是一种特殊的范式, 这个范式不是一个合法的值.