Abstract Interpretation

枫聆

2021 年 4 月 5 日

目录

Motivation

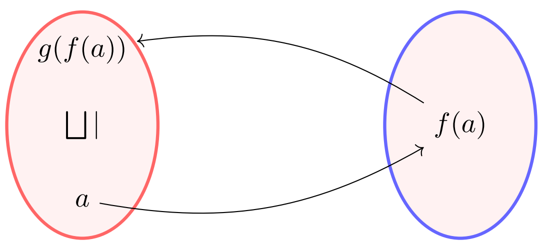
实际分析 domain 太复杂，也许这个实际分析 domain 满足一些不错的性质比如 ACC 等等，但是还是掩盖不了它过于复杂. 所以我们尝试使用某个抽象的 domain 来代替分析，这个抽象的 domain 要比实际分析的 domain 更小，我们分析起来更加得心应手，但是问题是如何构造这个抽象的 domain? 它分析出来的结果是否可以作为真的 truth? 它的结果能在多大程度上说明一些问题? 后期我们是否可以考虑优化抽象的 domain 来让结果更好一点?

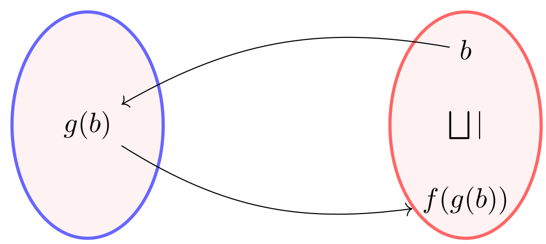
Galois connections

关于 galois connection 我们通常可以看到两个定义，下面我来说明两个定义是等价，也就是说可以从任意一个推出另外一个.

Definition 2.1. nlab 上的定义更贴近 adjunction 的味道 Given posets A and B, a Galois connection between A and B is a pair of order-preversing functions $f\colon A \to B$ and $g\colon B \to A$ such that $a \leq g(f(a))$ and $b \geq f(g(b))$ for all $a \in A$, $b \in B$.

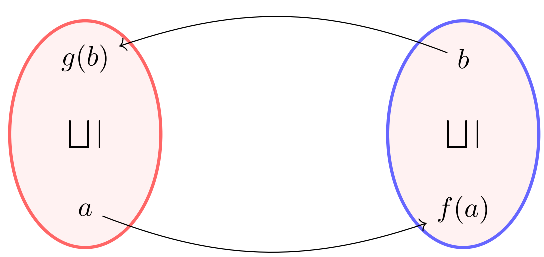
注意这里的 order-preversing，最原始的定义用的是 order-reversing，导致我在这里弄出了一些矛盾.





Proposition 2.2. Given posets A and B, a pair of order-preversing functions $f\colon A \to B$ and $g\colon B \to A$ is a Galois connection between A and B if and only if, for all $a \in A$, $b \in B$, we have

$$f(a) \leq b \text{ if and only if } a \leq g(b).$$



证明. ($\Rightarrow$). 前提 (f, g) 是一个 galois connection，给定 $a \in A$, $b \in B$. 若 $f(a) \leq b$, 两边同时 apply g, 有 $g(f(a)) \leq g(b)$，同时有 $a \leq g(f(a))$. 那么 $a \leq g(b)$. 若 $a \leq g(b)$，同理可以得到 $f(a) \leq b$.

($\Leftarrow$). 前提 (f, g) 满足 $f(a) \leq b$ if and only if $a \leq g(b)$. 我们直接取 $b = f(a)$, 那么 $f(a) \leq f(b)$ 当且仅当 $a \leq g(f(a))$. 同理直接取 $a = g(b)$，那么 $g(b) \leq g(b)$ 当且仅当 $f(g(a)) \leq b$. □

关于 adjunction 的东西 $fg \to id$ 和 $gf \to id$, 这个箭头是一个 natural transform, 至于更细的东西要去看看 category theory 了! PAAA 上说 f 和 g 互为 “weak inverse”，看起来也是比较形象啊！所以有下面的一个命题.

Proposition 2.3. weak inverse For galois connection (f, g), we have the equations

$$f \circ g \circ f = f$$
$$g \circ f \circ g = g.$$

证明. (1).

$$\begin{aligned} a \leq g(f(a)) \Rightarrow \quad & f(a) \leq f[g(f(a))] \quad & f \circ (g \circ f) \\ f(a) \leq f(a) \Rightarrow \quad & f \circ g(f(a))) \leq f(a) \quad & (f \circ g) \circ f, \end{aligned}$$

所以 $f \circ g \circ f = f$. 同理可证第二个式子. $\square$