Linear Algebra

枫聆

2020 年 11 月 28 日

目录

Vector Space

Definition of Vector Space

Definition 1.1. *vector spaces* 是一个具有加法 *(addition)* 和数量乘法 *(salar multiplication)* 的集合 V

- 加法是指对任意的元素 $u, v \in V$, 有 $u + v \in V$
- 数量乘法是指对任意的元素 $\lambda \in F$ 和 $v \in V$, 有 $\lambda v \in V$

同时它们存在下面的属性:

- 加法交换律 $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
- 结合律 $\forall u, v, w, (u + v) + w = u + (v + w)$ 和 $\forall a, b \in F, (ab)v = a(bv)$
- 加法单位元 $\forall v \in V, v + 0 = v$
- 加法逆元 $\forall v \in V, \exists v^{-1}, v + v^{-1} = 0$
- 数量乘法的单位元 $\forall v \in V, 1v = v$
- 分配律 $\forall v, w \in V, \forall a, b \in F, a(u + v) = au + av, (a + b)v = av + bv$

vector spaces 背后的直觉是什么？《linear algebra done right》上说来自于 F^n 上的 addition 和 scalar multiplication. 很明显 addition 包含了 abelian group 的所有性质，vector space 是 R-module 的特殊化，R-module 从结构上来说，要比 Ring(带单位元) 的性质要弱一些，主要体现在乘法上，弱化为数量乘法，表示把一个环作用在一个 abelian group 上，而不是环上的乘法，这样可以把 ideal 和商环都归纳进来，一般情况下它们都不是子环，但是有了 R-module 之后让环也有类似于群那样例如正规子群是一个子群优美性质。

我想这里多记录一些 R-module 的东西，如何把一个环弱化成一个模结构呢？首先我们还是需要把一个 abelian group 弄出来（有点群表示论的意思），定义“the left-action of a ring R on M”为

$$\sigma\colon R \to \mathsf{End}_{Ab}(M)$$

是一个环同态，M 表示一个 abelian group。为什么 $\mathsf{End}_{Ab}(M)$ 是一个环结构？首先这个环里面的元素都是关于 M 的 endomorphisms, 乘法定义为 endomorphisms 之间的复合，加法定义为 $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$，其中 $f, b \in \mathsf{End}_{Ab}(M)$。我们说 σ 把 M 变成了一个 left-R-module，为什么呢？

$$\sigma(r)(m) \in_R M$$

间接的定义了数量乘法，并且有一些有趣的性质, 其实都是环同态的性质

- $\sigma(r_1 + r_2)(m) = \sigma(r_1)(m) + \sigma(r_2)(m)$
- $\sigma(r_1 r_2)(m) = \sigma(r_1)(\sigma(r_2)(m))$
- $\sigma(1)(m) = m$

如果要定义更清楚一点，可以这样

$$\rho\colon R \times M \to M$$

,ρ 和 σ 的关系为

$$\rho(r, m) = \sigma(r)(m)$$

, 但是这里不是环同态无法保证上面的一些性质，所以需要额外规定一些东西

- $\rho(r_1 + r_2, m) = \rho(r_1, m) + \rho(r_2, m)$（交换率）
- $\rho(r, m_1 + m_2) = \rho(r, m_1) + \rho(r, m_2)$（交换律）
- $\rho(r_1 r_2, m) = \rho(r_1, \rho(r_2, m))$（结合率）
- $\rho(1, m) = m$ （单位元）

把 vector space 一般化的感觉是不是很爽？其实 R-module 在一定程度要要比 vector space 更复杂，我想用更抽象方式去理解 vector space，我们定义了一个 σ 环同态，这个环同态很精妙的把环作用在 abelian group 的 action 表示出来，所以我们用理解 R-module 的方式去理解 vector space，就是首先我们要有一个 abelian group 定义了加法，然后把一个 field 作用在了它之上，定义为数量乘法，最后我们就得到了这样的一个结构。

这篇 note 既然是在《linear algebra done right》的基础上记录的，我会尽可能的记录一些抽象的延伸的东西，让自己对 linear algebra 有一个不同于大学的颠覆性的认知。