Lattice

枫聆

2021 年 3 月 9 日

目录

Ordered Sets

Definition 1.1. Partially ordered set is a system $\mathcal{P} = (P, \leq)$ where P is a nonempty set and $\leq$ is a binary relation on P satisfying，for all $x, y, z \in P$,

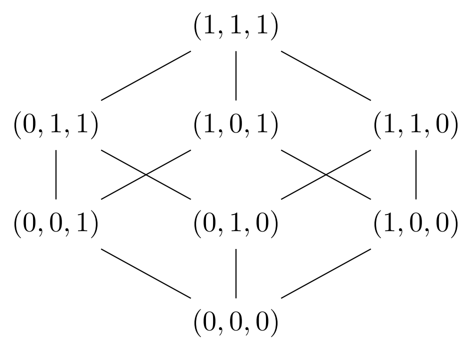
1. $x \leq x$, (reflexivity)
2. if $x \leq y$ and $y \leq x$,then $x = y$, (antisymmetry)
3. if $x \leq y$ and $y \leq z$,then $x \leq z$. (transitivity)

Definition 1.2. $\mathcal{C}$ is a chain if for every $x, y \in \mathcal{C}$，either $x \leq y$ or $y \leq x$.

chain 上的元素都可以相互比较，所以它是 totally ordered 或者 linearly ordered.

Definition 1.3. We say that x is covered by y in $\mathcal{P}$，written $x \prec y$，if $x \leq y$ and there is no $z \in P$ with $x \leq z \leq y$.

Definition 1.4. Hasse diagram for a finite partially order set $\mathcal{P}$: the elements of P are represented by points in the plane, and a line is drawn from a up to b precisely when $a \prec b$.



Definition 1.5. Given a partially order set，f is a order preserving map satisfying the condition $x \leq y$ implies $f(x) \leq f(y)$.

Definition 1.6. Given two posets $(P, \leq_S)$ and $(Q, \leq_Q)$，an order isomorphism from $(P, \leq_S)$ to $(Q, \leq_Q)$ is a bijective order preserving map.

Definition 1.7. Given two posets $(P, \leq_S)$ and $(Q, \leq_Q)$，an order embedding from $(P, \leq_S)$ to $(Q, \leq_Q)$ is a both order-preserving and order-reflecting map that $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.

相比 order isomorphism 而言稍微弱一点，不需要是一个 surjective.

Definition 1.8. An ideal I of a partially ordered set $\mathcal{P}$ is a subset of the elements of P which satisfy the property that if $x \in \mathcal{P}$ and exists $y \in I$ with $x \leq y$, then $x \in I$.

衍生自 the ideal of ring，后面我们将会看见 the ideal of lattice.

Definition 1.9. Given an ordered set $\mathcal{P} = (P, \leq)$. The dual of P is another poset $\mathcal{P}^d = (P, \leq^d)$ with the order relation defined by $x \leq^d y \iff y \leq x$.

Definition 1.10. The dual notion of an ideal is called a filter that F is a subset of P such $x \geq y \in F$ implies $x \in F$

类似的还有 principle ideal 和 principle filter. 就是通过一个元素生成的.

Definition 1.11. The poset $\mathcal{P}$ has a maximum(element) if there exists $x \in P$ such that $y \leq x$ for all $x \in P$.

An element $x \in P$ is maximal if there is no element $y \in P$ with $x \leq y$ and $x \neq y$.

maximum 是一个名词表示最大值 (greatest)，maximal 是一个形容词表示极大的意思. 在 poset 中可能不只有一个 maximal element.

Lemma 1.12. The following are equivalent for an poset $\mathcal{P}$.

1. Every nonempty subset $S \subseteq P$ contains an element minimal in S.
2. $\mathcal{P}$ contains no infinite descending chain

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots .$$

这里去掉等号是指 $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq \cdots$

3. If

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$$

in $\mathcal{P}$, then there exists k such that $a_n = a_k$ for all $n \geq k$.

这个 lemma 被称为 descending chain condition(DCC). 对偶地也有 ascending chain condition(ACC). original 'a partially ordered set $\mathcal{P}$ requires that all decreasing sequences in $\mathcal{P}$ become eventually constant'.

证明. (2) ⇒ (3). 前提只存在 finite descending chain. 假设 (3) 不成立，且 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ 是 infinite chain. 则对于任意的 k，都能找到 $n \geq k$ 使得 $a_n \neq a_k$ 且 $a_k \geq a_n$，那么 $a_k > a_n$. 这样从 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 开始我们每次都可以找到 $a_{n_0} > a_{n_1} > \cdots$. 这样我们实际构造了一个 infinite descending chain，这是和前提矛盾的. 若 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ 是一个 finite chain，它的最后一个元素显然是满足 (3)，这和假设是矛盾的.

(3) ⇒ (2). 也是分 infinite chain 和 finite chain 来讨论，finite 是显然的，infinite 的时候可以把它变成 finite.

(1) $\Rightarrow$ (2). (1) 前提满足下，假设 (2) 不成立，即 $\mathcal{P}$ 存在 infinite descending chain. 把这个 chain 上的所有元素取出来组成一个 subset S，那么任取 a_k 都有 $a_{k+1} \leq a_k$. 即找不到 minimal.

(2) $\Rightarrow$ (1). (2) 前提满足下，假设 (1) 不成立. 这里需要用一下选择公理了，定义 S 上一个选择函数 $f\colon S \to T$，其中 $T \subseteq S$. 让 $a_0 = f(S)$，递归地定义对任意的 $i \in \omega$ 有 $a_{i+1} = f(\{\, s \in S \mid s < a_i \,\})$. 接下来让这个 definition make sense，(2) 前提下 S 是没有 minimal, 所以 $\{\, s \in S \mid s \leq a_i \,\}$ 不是 empty set. 这样就找到了一个 infinite descending chain，与假设矛盾.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

done well! $\square$

Lemma 1.13. Let $\mathcal{P}$ be an poset satisfyint the DCC. If $\varphi(x)$ is statement such that

1. $\varphi(x)$ holds for all minimal elements of P， and
2. whenever $\varphi(y)$ holds for all $y < x$， then $\varphi(x)$ holds，

then $\varphi(x)$ is true for every element of P.

这个 lemma 有点意思，如果对 P 上所有的 minimal element m 都有命题 $\varphi(m)$ 成立，且 $\mathcal{P}$ 满足 DCC. 那么再加上一个条件: 只要对任意元素 $x \in P$，满足 $y < x$ 都有 $\varphi(y)$ 成立. 则对任意元素 $x \in P$ 都有 $\varphi(x)$ 成立.

证明. 其实 (1) 是 (2) 的一个 special case. 在 (1)(2)hold 的情况下，我们试想一下 $\varphi(x)$ 没有被 hold 住的是哪些元素呢? 即对于某个 x，存在 $y < x$ 使得 $\varphi(y)$ 没有被 hold. 递归地，我们再去考虑这个 y. 那么这里就存在一条 descending chain 在这里，由于 $\mathcal{P}$ 是满足 DCC，所以这个 descending chain 是 infinite 的. 这条 chain 的结尾显然是一个 minimal element，但是它是满足 $\varphi(x)$. 所以实际上是不存在这里的 x 不满足 $\varphi(x)$. $\square$

Definition 1.14. Let $\mathcal{P}$ be poset. Two elements a and b of $\mathcal{P}$ are called comparable if $a \leq b$ or $a \geq b$. Otherwise, they are called incomparable.

元素的可比性.

Definition 1.15. An antichain in $\mathcal{P}$ is a subset A of $\mathcal{P}$ in which each pair of different element are incomparable.

Definition 1.16. Define the width of an poset $\mathcal{P}$ by

$$w(\mathcal{P}) = \sup\{\, |A| \mid \text{A is an antichain in } \mathcal{P} \,\}$$

where $|A|$ denotes the cardinality(集合的势) of A.

Definition 1.17. We define the chain-covering-number CCN $c(\mathcal{P})$ to be the least cardinal number k, such that P is a union of k chains(finite) of P, means $P = \bigcup C_i$

另一种 covering number，有趣.

Lemma 1.18. *Suppose* $P = \bigcup C_i$ *where* $i \in I$, *then* $w(\mathcal{P}) \leq |I|$.

证明. 因为 $|A \cap C_i| \leq 1$ for $i \in I$. 也就是说你把 A 里面的元素分开塞到 C_i 上，每次都只能塞一个. 那么最多你可以每个 C_i 上都塞一个. □

Theorem 1.19. (Dilworth ,1950) Let $\mathcal{P}$ be a finite poset. $w(\mathcal{P})$ is width. Then $\mathcal{P}$ is a union of $w(\mathcal{P})$-chains.

证明. TODO. □

Semilattices, Lattices and Complete Lattices

Semilattice

Definition 2.1. A semilattice is an algebra $\mathcal{S} = (S, *)$ satisfying，for all $x, y, z \in \mathcal{S}$，

1. $x * x = x$,
2. $x * y = y * x$,
3. $x * (y * z) = x * (y * z)$.

where $*$ is binary operator. 换句话说 semilattice 就是一个 idempotent commutative semigroup(幂等交换半群).

Theorem 2.2. In a semilattice $\mathcal{S}$，define $x \leq y$ if $x * y = x$. Then $(S, \leq)$ is a poset in which every pair of elements has a greater lower bound.

Conversely，given an poset P with that property，define $x * y = g.l.b(x, y)$. Then $(P, *)$ is a semilattice.

semilattice 上弄了一个特殊的 poset 出来, 它最好的性质就是任意两个元素都有一个下确界. 把 $*$ 换成 $\cap$, 然后把 $\leq$ 换成 $\subseteq$，可能就很熟悉了. A semilattice with the above ordering is usually called meet semilattice.

证明. 先证明这个是一个 poset.

1. $x * x = x$ implies $x\ leqx$,
2. if $x \leq y$ and $x \geq y$, then $x = x * y = y * x = y$,
3. if $x \leq y$ and $y \leq z$. then $x * z = (x * y) * z = x * (y * z) = x * y = x$, so $x \leq z$.

   这个 greater lower bound 就是 $x*y$. 首先证明它是一个 lower bound，$x*(x*y) = x*y$ and $y*(x*y) = x*y$，所以 $x * y$ 是一个 lower bound. 再来证明所有的 lower bound 都比它小，假设 $z \leq x$ 和 $z \leq y$，即 z 是 $\{x, y\}$ 的一个 lower bound. 那么 $z * (x * y) = z * y = z$，所以 $z \leq (x * y)$. 最后 $x * y$ 的一个 greater lower bound.

□

对偶地，使得 $x \geq y \iff x * y = x$，则称 $\mathcal{S}$ 为是一个join semilattice. 自然地在 $(S, \leq)$ 下任意的 pair 都有一个 least upper bound $x \vee y$.

Definition 2.3. A homomorphism between two semilattice is a map $f \colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ with the property that $f(x*y) = f(x) * f(y)$. An isomorphism is a homomorphism that injective and surjective.

nothing new...

Theorem 2.4. Let $\mathcal{S}$ be a meet semilattice. Define ϕ: $S \to \mathcal{O}(S)$ by

$$\phi(x) = \{\, y \in S \mid y \leq x \,\}$$

where $\mathcal{O}(S)$ is collection of all order ideals of $\mathcal{S}$. Then $\mathcal{S}$ is isomophic $(\mathcal{O}(S), \cap)$(注意这里是 $\mathcal{S}$ 的 image).

怎么感觉这些 ideal 都是 principle ideal.

证明. $\cap$ 表示 set inclusion, ϕ 是 order-preserving 和 order-reflecting 还是比较 obvious. 所以 ϕ 是一个 order embedding of $\mathcal{S}$ into $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Moreover $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \cap \phi(y)$ because $x \wedge y$ is the greate lower bound of $\{x, y\}$, so that $z \leq x \wedge v$ if and only if $z \leq x$ and $z \leq y$. $\square$

Lattice

Definition 2.5. A lattice is an algebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ satisfying，for all $x, y, z \in L$,

1. $x \wedge x = x$ and $x \vee x = x$,
2. $x \wedge y = y \wedge x$ and $x \vee y = y \vee x$,
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ and $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
4. $x \wedge (x \vee y) = x$ and $x \vee (x \wedge y) = x$.

就第四个在我们眼里似乎没有那么自然，它叫 absorption laws(吸收律)，它在这里可以保证后面 $\wedge$ 和 $\vee$ 定义了相同的 partial order(虽然是 dual)．前三个我们知道 lattice 同时在两种 binary operator 都是 semilattice，所以我们只要在 lattoce 上定义前面合适的 partial order，它就是 both meet and join semilattice.

Theorem 2.6. In a lattice $\mathcal{L}$，define $x \le y$ if and only if $x \wedge y = x$. Then $(L, \le)$ is a poset in which every pair of elements has a greatest lower bound and a least upper bound.

证明. 给定一个 pair (x, y)．前面已经证明了 $x \wedge y$ 是它的一个 greater lower bound. 再根据 lattice definition 的第四条的第一个式子，$x \vee y$ 是它的一个 upper bound，第二式子说明当 $x \ge y$ 时，有 $x \vee y = x$，对偶地 $x \vee y$ 是 least upper bound.

这里若 $x \wedge y = x$，则 $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$. 类似地 $x \vee y = y$，则 $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$. 所以有一个很重要的结论就是$x \wedge y = x \iff x \vee y = y$. □

类似的我们可以通过一个 poset 构造 lattice.

Theorem 2.7. Given an poset $\mathcal{P}$ with that above property，define $x \wedge y = \sup\{x, y\}$ and $x \vee y = \inf\{x, y\}$. Then $(P, \wedge, \vee)$ is a lattice.

所以实际上 lattice 可以有两种定义第一种是前面的代数定义，第二种就是在 poset 上定义 join 和 meet 操作，这一点要清楚.

the definitions of sublattice，homomorphism and isomorphism).

Definition 2.8. Two lattice $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ are isomorphic if there is bijective α from $\mathcal{L}_1$ to $\mathcal{L}_2$ such that for every a, b in $\mathcal{L}_1$ the following two equations hold: $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$ and $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b)$. Such an α is called by an isomorphism.

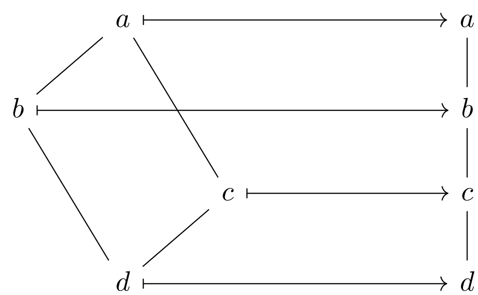
在用 poset 基础上定义的 lattice 之间的 isomorphism 也可以用下述定理来描述.

Theorem 2.9. Two lattices $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ are isomorphic iff there is a bijection α from $\mathcal{L}_1$ to $\mathcal{L}_2$ such that both α and α^{-1} are order-preserving.

证明. 如果 α 是 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的一个 isomorphism 和 $a \le b$ hold in $\mathcal{L}_1$. $a \le b$ hold means $a = a \wedge b$，那么 $\alpha(a) = \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$，所以 $\alpha(a) \le \alpha(b)$. 反过来 α^{-1} 也是一个 isomorphism，所以 α^{-1} 也是 order-preserving 的.

反过来如果 α 是 bijective 的且 α 和 α^{-1} 都是 order-preserving 的. 给定 $a, b \in \mathcal{L}_1$，有 $a \le a \vee b$，那么 $\alpha(a) \le \alpha(a \vee b)$. 同理对 b 也有 $\alpha(b) \le \alpha(a \vee b)$，那么 $\alpha(a) \vee \alpha(b) \le \alpha(a \vee b)$. 我们要把这个小于等于换成等于，就是要证明 $\alpha(a \vee b)$ 确实是一个 greatest upper bound，那么对应任意的 upper u，即 $\alpha(a) \vee \alpha(b) \le u$，分别有 $\alpha(a) \le u$ 和 $\alpha(b) \le u$. 由于 α^{-1} 也是 order-preserving，所以有 $a \le \alpha^{-1}(u)$ 和 $b \le \alpha^{-1}(u)$，那么 $a \vee b \le \alpha^{-1}(u)$，在用 α 作用一遍 $\alpha(a \vee b) \le u$. 到这里证明了 $\alpha(a \vee b)$ 确实是一个 greatest upper bound，即 $\alpha(a) \vee \alpha(b) = \alpha(a \vee b)$. 同理也可以证 $\alpha(b) \wedge \alpha(b) = \alpha(a \wedge b)$. □

Example 2.10. 记录一个 α 是 bijective 但只有 α order-preserving，这样的 α 可能不是一个 isomorphism. Hasse 图可能画的不标准!



Definition 2.11. If $\mathcal{L}$ is lattice and $L' \neq \emptyset$ is a subset of L such that for every pair of elements $a, binL'$ both $a \wedge b$ and $a \vee b$ are in L', where $\wedge$ and $\vee$ are the lattice operations of $\mathcal{L}$, then we say L' with the same operations of $\mathcal{L}$ is a sublattice of $\mathcal{L}$.

Complete Lattice

Definition 2.12. For a subset A of a poset P, let A^u denote the set of all upper bounds of A,

$$\begin{aligned} A^u &= \{ x \in P \mid x \geq a \text{ for all } a \in A \} \\ &= \bigcap_{a \in A} \uparrow a \end{aligned}$$

where $\uparrow a = \{ x \in P \mid x \geq a \}$. Dually, A^l is the set of all lower bounds of A,

$$\begin{aligned} A^l &= \{ x \in P \mid x \leq a \text{ for all } a \in A \} \\ &= \bigcap_{a \in A} \downarrow a \end{aligned}$$

where $\downarrow a = \{ x \in P \mid x \leq a \}$.

思考一个问题poset P 的一个 subset A 什么时候 least upper bound? 很显然 A^u 一定不是空的，更确切地说 A^u 有一个 greatest lower upper z，而且 $z \in A^u$，根据 z 的 definition 它是 A 的 least upper bound. 这种情况下我们就说the join of A exists，and write $z = \bigvee A$. 对偶地，考虑 A 的 greatest lower bound，则 A^l 一定不为空，那么 A^u 里面是有一个 lower upper bound 的 w，根据 w 的 definition 它是 A 的 greatest lower bound. 这种情况下我们就说the meet of A exists，and write $w = \bigwedge A$.

这样我们 define 两个特殊的 meet 和 join 作用在一个集合上.

Theorem 2.13. Let $\mathcal{S}$ be a finite meet semilattice with greatest element 1. Then $\mathcal{S}$ is a lattice with join operation defined by

$$x \vee y = \bigwedge \{x, y\}^u = \bigwedge (\uparrow x \cap \uparrow y).$$

证明. $\mathcal{S}$ 有 greatest element，则 A^u 肯定不是空了，至少这个 greatest element 里面. $\bigwedge A^u$ 就是要找 A^u 的 lower upper bound. 由于 $\mathcal{S}$ 是一个 finite lattice，所以 A^u 也是 finite. A^u 里面的元素做有限次 meet 操作得到就是一个 lower upper bound，但是你还得说明它在 A^u 里面. 这是很显然的，$x \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_k = x$ 其中 $z_i \in A^u$，所以 $\bigwedge A^u$ 是它的一个 upper bound.

还得 proof 一下它是一个 lattice，上面只是证明了这个东西是 well behaved. Lattcie definition 中前三条还是比较明显的.

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

这也很显然，因为 $x \vee y \in \{x, y\}^u$.

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

因为 $x \wedge y$ 是 $\{x, y\}$ 的一个 greatest lower bound，有 $x \geq x \wedge y$，那么 $\inf(x, x \wedge y) = x$. □

这个 theorem 告诉我们: if a finite poset P has a greatest element and every pair of elements has a meet, then P is a lattice. 这就是 lattice 非代数形式的 definition.

Theorem 2.14. Every finite subset of a lattice has a greatest lower bound and a leaset upper bound.

证明. $\mathcal{L}$ 是 finite，则它的 subset 也是 finite. 前面我们知道 lattice 中任意一个 pair 都有 greatest lower bound 和 least upper bound，这是 meet 和 join 定义下的 partial order 所带来的性质. 在 finite subset 里面先挑两个出来做 meet 或者 join 可以得到 inf 和 sup 它们也是属于 L 的，再从剩下的 subset 里面再挑一个出来做同样的操作，这个操作只会做有限多次，所以最终我可以得到这个 subset 的 greatest lower bound 和 least upper bound. $\square$

这个性质在 infinite lattice 下可能就无法成立. 例如 infinite subset 上述操作可能根本就停不下. 由此我们定义另外一个概念.

Definition 2.15. Given poset $\mathcal{L}$. If every subset A of $\mathcal{L}$ has a greatest lower bound $\bigwedge A$ and a least upper bound $\bigvee A$, then $\mathcal{L}$ is called complete lattice.

subset 其中就包含了 pair，所以它是一个 lattice 还是比较明显的. 此外，finite lattice 是 complete 的，并且所有 complete lattice 都包含 greatest element 和 least element.

Definition 2.16. a complete meet semilattice is an poset $\mathcal{S}$ with greatest element and the property that every nonempty subset A of S has a greatest lower bound $\bigwedge A$.

下面这个 theorem 让我们抛弃了更强的 finite，如何在 complete meet semilattice 上构造一个 complete lattice 出来.

Theorem 2.17. If $\mathcal{L}$ is a complete meet semilattice, then $\mathcal{L}$ is a complete lattice with the join operation defined by

$$\bigvee A = \bigwedge A^u = \bigwedge(\bigcap_{a\in A} \uparrow a).$$

证明. 和前面在 finite meet semilattice 上构造 lattice 类似，这里 finite 换成了 complete. 这里我们直接就可以知道 $\bigwedge A^u$ 是有意义的，前面也证明了 $\bigwedge A^u \in A^u$. 那么 $\bigwedge A$ 的 definition 是满足 A 的 least upper bound. $\square$

Closure System

这一章我们的主旋律.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{closure system} \arrow[dr] & \\
\text{closure rules} \arrow[ur] & & \text{closure operator} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Definition 2.18. A closure system on a set X is a collection $\mathcal{C}$ of subsets of X thats is closed under arbitrary intersections(任意的交). The sets in $\mathcal{C}$ are called closed set.

Example 2.19. 有一些 closure system 的例子

1. closed subsets of topological space,
2. subgroups of group,
3. subspace of vector space.
4. convex subsets of euclidean space $\mathbb{R}^n$,
5. order ideals of an poset.

By convention, 把 $\bigcap \emptyset = X$ 的话, closure system 配合集合操作 (union and intersection) 就是一个 complete lattice.

Definition 2.20. A closure operator on a set X is a map $\Gamma\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ satifying, for all $A, B \subseteq X$,

1. $A \subseteq \Gamma(A)$,
2. $A \subseteq B$ implies $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$,
3. $\Gamma(\Gamma(A)) = \Gamma(A)$.

closure 的 general definition 有点意思. 简单地来说，就是 (1) 集合的闭包包含集合本身；(2) 如果两个集合有包含关系，则它们的闭包也有相同的包含关系；(3) 闭包的闭包是其本身.

如何在一个在 X 上利用已知的 closure system 构造一个 closure operator，即让 X 上的任意一个子集对应一个 closure?

Theorem 2.21. If $\mathcal{C}$ is a closure system on a set X， then the map $\Gamma_{\mathcal{C}}\colon \mathfrak{B}(X) \to \mathfrak{B}(X)$ defined by

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap \{\, D \in \mathcal{C} \mid A \subseteq D \,\}$$

is a closure operator. Moreover $\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = A$ if and only if $A \in \mathcal{C}$

所有包含这个集合的 closed set 的交是这个集合的 closure. 在 topology 里面 closure 是包含这个集合最小的 closed set.

Definition 2.22. A set of closure rules on a set X is a collection $\sum$ of properties $\varphi(S)$ of subsets of X. where each $\varphi(S)$ has one of the forms

$$x \in S$$

or

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with $x, z \in X$ and $Y \subseteq X$. A subset D of X is said to be closed with respect to these rules if $\varphi(D)$ is true for each $\varphi \in \sum$.

你看到这里一定会感觉非常的困惑，closure rules 到底是个啥东西？不急接着往下看你终会明白的.

Example 2.23. 对应前面列举到的 closure system.

1. In topological space, all rules $Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$ where z is an accumulation point of Y.
2. In subgroup, the rule $1 \in S$ and all rules

$$x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S\{x, y\} \in S \quad \Rightarrow xy \in S$$

3. In vector space，$0 \in S$ and all rules $\{x, y\} \subseteq S \Rightarrow ax + by \in S$ with a, b scalars.

closure rules 就是一系列判断 closed set 的命题.

Theorem 2.24. If Γ is a closure operator on a set X，$\sum_\Gamma$ be the set of (1)all rules where $c \in \Gamma(\emptyset)$，and (2)all rules

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with $z \in \Gamma(Y)$. Then a set $D \subseteq X$ satisfies all the rules of $\sum_\Gamma$ if and only if $\Gamma(D) = D$.

证明. (1) 是在说 $\emptyset$ 的 image 非空？(2) 是在说取 S 上任意子集 Y，都有 $\Gamma(Y) \subseteq S$. 直觉上就说这群规则是一个 closure rule，满足它的只有 closed set，自然地在 closure operator 上也是一个 closed set. 可这条件都 TM 都 abstract nosense 了!!!

我尝试用 closure operator 的 definition 来推一下，$Y \subset S$，结合前面那么有

$$Y \subseteq \Gamma(Y) \subseteq S.$$

特殊点，把 Y 换成 S，有 $S \subseteq \Gamma(S) \subseteq S$，所以 $\Gamma(S) = S$. 但是 (1) 在这里有啥用啊？保证 S 非空？

反过来若 $\Gamma(D) = D$. 自然地，当 $Y \subseteq D$，则有 $Y \subseteq \Gamma(Y) \subseteq \Gamma(D) = D$. $\square$

当有一个 closure operator 之后，最重要是我们知道了 closed set 在它的作用下是它本身.

Theorem 2.25. If $\sum$ is a set of closure rules on set X, let $\mathcal{C}_{\sum}$ be the collection all subsets of X that satisfy all the rules of $\sum$. Then a set $\mathcal{C}_{\sum}$ is a closure system.

证明. 这个定理可以更形象地去理解 closure rule 到底是什么？假设 A, B 是满足 $\sum$ 里面所有 rules 的两个集合. 我们看它们的交，对于第一类规则 $x \in S$，很显然在交下是保持的，因为 $x \in A$ 和 $x \in B$，则 $x \in A \cap B$. 对于第二类的规则，若 $C \subseteq A \cap B$，且它是某个规则里面对应的 Y，那么 $C \subseteq A$ 和 $C \subseteq B$，对应地有某个 $z \in A$ 和 $z \in B$，所以 $z \in A \cap B$. 综上 $A \cap B$ 也是属于 $\mathcal{C}_{\sum}$. □

在这里我们才终于认识到这样 closure rules 这样抽象的东西，它确实可以刻画一堆 closed set 组成了一个 closure system.

总结一下前面的所有东西，前面提到过一个 closure system 其实是一个 complete lattice，现在我们多了另外两个概念 closure operator 和 closure rules. 我们前面 3 个定理就是在说明它们之前是可以相互转换的，例如给定一个 closure operator，它 $\Gamma(D) = D$ 可以对应上 closure rules，然后我们用 closure rules 刻画的 sets 收集起来，这些 sets 在交运算下也能保持封闭，所以这些 sets 是一个 closure system，最终也得到了 complete lattice. 后面我们用 $\mathcal{C}_\Gamma$ 表示由 closure operator Γ 生成的 closed sets($\Gamma(D) = D$) with set inclusion 构成 poset. 很自然地有下面的定理.

Theorem 2.26. If Γ is a closure operator on a set X, and the operations on $\mathcal{C}_\Gamma$ are given by

$$\bigwedge_{i \in I} D_i = \bigcap_{i \in I} D_i$$
$$\bigvee_{i \in I} D_i = \Gamma(\bigcup_{i \in I} D_i).$$

in where $D_i \in \mathcal{C}_\Gamma$. Then $\mathcal{C}_\Gamma$ is complete lattice.

证明. 由 Theorem 2.24 和 Theorem 2.25 可以知道 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是一个 closure system. 自然地我们要用集合上 union 和 interestion. 先考虑 interestion $\bigcap_{i \in I} D_i$，它确实是 greatest lower bound，且在 closure system interestion 下有

$$\Gamma(\bigcap_{i \in I} D_i) = \bigcap_{i \in I} D_i.$$

所以 $\bigcap_{i \in I} D_i \in \mathcal{C}_\Gamma$. 对于 union $\bigcup_{i \in I} D_i$，它肯定是 X 上的 greatest upper bound，但是它不一定在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中，所以我们要在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中找所有包含它的 closed set，再交一下就可以得到 $\mathcal{C}_\Gamma$ 上的 greatest upper bound. 这是我们的思路，假设这样的 closed sets 为 $\{A_j\}_{i \in J}$. 明显地，$\bigcup_{i \in I} D_i \in \{A_j\}_{i \in J}$. 我们只要证明 $\Gamma(\bigcup_{i \in I} D_i) \subseteq A_j$ 对任意地 $j \in J$ 都成立即可. 因为 $\bigcup_{i \in I} D_i \subseteq A_j$，所以 $\Gamma(\bigcup_{i \in I} D_i) \subseteq A_j$. □

略algebra 一般定义和 subalgebra 上的 closure operator.

下面是一个representation theorem，刚才是 closure operator 到 complete lattice，现在是 complete lattice 到 closuse.

Theorem 2.27. If $\mathcal{L}$ is a complete lattice，define a closure operator Δ on L by

$$\Delta(A) = \{\, x \in L \mid x \leq \bigvee A \,\}.$$

Then $\mathcal{L}$ is isomorphic to $\mathcal{C}_\Delta$. The isomorphism $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}_\Delta$ is just given by $\varphi(x) = \downarrow x$.

证明. Δ 是一个 closure operator 还是比较 obvious. 我们来回顾一下 $\downarrow x$ 的 definition $\downarrow x = \{\, y \in L \mid y \leq x \,\}$. 所以 $\Delta(\downarrow x) = \downarrow x \in \mathcal{C}_\Delta$.

先证 bijective，若对于 $x, y \in L$ 有 $\varphi(x) = \varphi(y)$，那么 $y \in \varphi(x)$ 和 $x \in \varphi(y)$，就有 $y \leq x$ 和 $x \leq y$，所以 $x = y$，即 φ 是 injective. 任意一个 $C \in \mathcal{C}_\Delta$，那么都有 least upper bound $u \in C$. 自然地 $\varphi(u) = C$，即 φ 是 surjective.

给定任意地 $x, y \in L$，那么

$$\varphi(x \wedge y) = \uparrow (x \wedge y) = \uparrow x \cap \uparrow y = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

同理

$$\varphi(x \vee y) = \uparrow (x \vee y) = \uparrow x \cap \uparrow y = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

综上 φ 是一个 isomorphism. $\square$

Definition 2.28. An element q of lattice $\mathcal{L}$ is called join irreducible if $q = \bigvee F$ for a finite set F implies $q \in F$. The set of all join irreducible elements in $\mathcal{L}$ is denoted by $J(\mathcal{L})$.

换句话说就是 q 如果是 join irreducible，则它不可能是其他某些元素的一个 join. 如果 $\mathcal{L}$ 有一个最小元素 0，那么 0 其实不是 join irreducible 的，因为 $0 = \bigvee \emptyset$. 如果想要把 0 含进来，特殊地 $J_0(\mathcal{L}) = J(\mathcal{L}) \cap \{0\}$. 当然还有一种定义如果 q 是 join irreducible，那么当 $q = r \vee s$，则 $q = r$ 或者 $q = s$，在这种定义下 q 已经是针对非空的集合来说的.

Lemma 2.29. If a lattice $\mathcal{L}$ satisfies the DCC，then every element of $\mathcal{L}$ is a join of finitely many join irreducible elements.

证明. 用反证法来证明: 假设存在 $\mathcal{L}$ 上一些元素，使得找不到 join irreducible elements 的 join 正好是它们. 我们把这些元素记为集合 S，根据 DCC S 里面有一个最小值，我们设为 x. 那么 x 肯定也不是 join irreducible 的，如果它是的话，它就是它自己的一个 join，那么 $x \notin S$. 既然 x 不是一个 join irreducible，那么有 $x = \bigvee F$ 其中 F 是一个 finite set 且里面的元素都是严格小于 x 的，由于 x 是最小元素这个概念，所以比它小的元素都

是 the join of finitely many join irreducible elements. 那么对于 F 而言，任意的 $f \in F$ 都有一个 $G_f \subseteq J(\mathcal{L})$ 的 join 是 f. 所以

$$x = \bigvee_{f \in F} \bigvee G_f.$$

这里 $f = \bigvee G_f$，所以 x 可以表示称有个多个 join irreducible elements 的 join，这就矛盾了. 这里应该还要考虑一下 $x = 0$，但是讨论 0 确实没什么意义，0 可以定义为 join irreducible 也可以不是，这里还是避免这种情况吧... □

Definition 2.30. An element q of a complete lattice $\mathcal{L}$ is said to be completely join irreducible if $q = \bigvee X$ implies $q \in X$ for arbitrary (possibly infinite) subsets $X \subseteq L$. Let $J^*(\mathcal{L})$ denote the set of all completely join irreducible elements of $\mathcal{L}$.

Proposition 2.31. In general，$J^*(L) \subseteq J(L)$，but for lattices satisfying the ACC，equality holds.

证明. 每个 completely join irreducible element 肯定是 join irreducible element. 这是很自然地，它是任意多个元素的 join，那肯定可以挑出来有限多个元素的 join 还是它. ACC 有了之后，$\mathcal{L}$ 上任意非空的子集都有一个最大元素，那么我们现在假设一个 join irreducible element x 它不是 complete 的，即可以找到某个集合 S，有 $x = \bigvee S$ 且 $x \notin S$. 矛盾就来了，ACC 下 least upper bound 应该是在 S 里面，所以现在又有每个 join irreducible element 是 completely join irreducible. □

Theorem 2.32. Let $\mathcal{L}$ be a lattice satisfying the ACC and DCC. Let $\sum$ be the set of all closure rules on $J(L)$ of the form

$$F \subseteq S \Rightarrow q \in S$$

where q is join irreducible，F is a finite subset of $J(L)$，and $q \leq \bigvee F$. (Include the degenerate cases $p \in S \Rightarrow q \in S$ for $q \leq p$ in $J(\mathcal{L})$.) Then $\mathcal{L}$ is isomorphic to the lattice of $\mathcal{C}_{\sum}$ of $\sum$-closed sets.

证明. 这里同构证明用 isomorphism definition 下面那个定律，即 bijective 加两个 order-preserving. 那么先给出两个 order-preserving 的 map $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}_{\sum}$ 和 $g\colon \mathcal{C}_{\sum} \to \mathcal{L}$

$$f(x) = \downarrow x \cap J(\mathcal{L})$$
$$g(S) = \bigvee S.$$

需要证明它们两个互为逆映射（感觉好突兀啊，虽然原文中说 straightforwrad233333). 那么对于 $gf(x) = x$，前面那个 lemma 应该告诉我们了，在 DCC 下 $\mathcal{L}$ 每一个元素都是 a join of finitely many join irreducible elements 对应是 $f(x)$ 的操作.

那么对于 $fg(S) = S$，在 ACC 下 $\bigvee S \in S$，也就是我们可以找到一些 finite set $F \subseteq S$ 使得 $\bigvee F = \bigvee S$，按照 closure rules，所有 join irreducible $q \leq \bigvee F$ 都是属于 S 的，$f(\bigvee F)$ 就是在做这件事. 但是这样得到是不是全

部的 S 呢? 考虑其他 finite set F', 那么 $\bigvee F' \le \bigvee S = \bigvee F$, f 是 order-preserving 的, 所以有 $f(\bigvee F') \subseteq f(\bigvee F)$, 所以 $f(\bigvee F)$ 涵盖了整个 S. □

Definition 2.33. A subset Q of a complete lattice $\mathcal{L}$ is join dense if for every $x \in L$,

$$x = \bigvee \{ q \in Q \mid q \le x \}.$$

Theorem 2.34. A lattice $\mathcal{L}$ is complete of if and only if every order-preserving map $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ has a fixed point.

证明. ($\Rightarrow$) 如果给定一个 complete lattice $\mathcal{L}$ 和一个 order-preserving map $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. 定义集合 $A = \{x \in L \mid f(x) \ge x\}$. 注意到 $0 \in A$ (0 表示 minimal element of L). 再让 $a = \bigvee A$, 那么对于任意的 $x \in A$ 都有 $a \ge x$, 结合 f 是 order-preserving 我们有

$$f(a) \ge \bigvee_{x \in A} f(x) \ge \bigvee_{x \in A} x = a.$$

所以 $a \in A$, 即 $f(a) \ge a$, 两边再作用一下 f 有 $f^2(a) \ge f(a)$, 这说明 $f(a) \in A$. a 可是整个 A 的 join, 那么有 $a \ge f(a)$. 综上 $f(a) = a$, a 就是这个 fixed point.

($\Leftarrow$) 这个方向的证明略微有些复杂, 故事主线是在 every order-preserving map has a fixed point 的前提下, 假设 $\mathcal{L}$ 不是 complete, 然后构造出来出来一个 order-preserving map 没有 fixed point 造成矛盾.

假设 $\mathcal{L}$ 不是 complete, 那么先给出第一个 claim.

Claim 1: $\mathcal{L}$ 没有最大元素 1 或者存在一个 chain $C \subseteq L$ 满足 ACC 且没有 meet(supermum).

证这个 claim, 我们还是用反证法, 假设 $\mathcal{L}$ 有最大元素 1 和所有满足 ACC 的 chain $C \subseteq L$ 都有 meet. 我们仔细考虑一下这个假设, 先回顾一下我们前面关于 complete meet semilattice 的 definition, 是要有一个 poset 满足有 greatest element 并且所有非空的子集都有 meet, 然后我们可以通过这个 complete meet semilattice 构造出来一个 complete lattice, 我们的证明大体上也是这个思路, 但是使用其对偶的形式 (因为你可以观察到我们假设的第二个条件有些不一样), 即在 complete join semilattice 来构造, 从而制造了一个 contradiction.

考虑某个子集 S 的所有 upper bound S^u. 注意到 $1 \in S^u$, 所以 S^u 不是 emptyset. 我们再来定义一个 poset $\mathcal{P}$, 它是 S^u 上所有满足 ACC 的 chains 的一个 collections. $\mathcal{P}$ 上的 partial-order 定义为若 $C_1 \le C_2$ 则 C_1 是 C_2 的一个 filter(我们回顾一下 filter 的定义, 它是 ideal 的对偶形式, 即首先有 $C_1 \subseteq C_2$, 若 $x \ge y \in C_1$ 则 $x \in C_1$ 其中 $x \in C_2$).

我们再来考虑这个特殊的 poset $\mathcal{P}$ 上的 chain (chain of chains), 任取 $\mathcal{P}$ 上的一个 chain $\{C_i\}_{i \in I}$, 那么 $\bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{P}$, 根据上面定义的 partial order 这是显然的, 而且 $\bigcup_{i \in I} C_i$ 它是这个 chain 的一个 upper bound. 根据 Zorn's lemma, $\mathcal{P}$ 上有一个 maximal element C_m. 根据我们的假设 C_m 满足 ACC 是有 meet 的, 这个 meet 我们用 a 来表示, 即 $\bigwedge C_m = a$. 很明显 a 在是 S 的一个 upper bound, 所以 $a \in S^u$. 我们现在来证明 $a = \bigwedge S^u$(至于为什么后面你就知道了), 还是用反证法 (23333), 假设 a 不是 S^u 的 greatest lower bound, 那么存在 $t \in S^u$, 使得 $a \not\le t$. 则有 $a \wedge t \in S^u$, 为什么呢? 因为任取 $s \in S$, 都有 $s \wedge (a \wedge t) = s$. 自然地 $a > a \wedge t$(严格大于没有等号), 那么 chain $C_m \cup \{a \wedge t\}$ 也是满足 ACC, 且大于 C_m, 这就矛盾了, 所以 $a = \bigwedge S^u = \bigvee S$.

所以我们证明了对于任意的 $S \subseteq L$ 都有 join，那么马上我们有

$$\bigwedge S = \bigvee S^l.$$

所以 S 的 meet 也有意义了，但是这里 S^l 我们不知道是不是非空的啊？注意最前面我们用 0 加上 complete join semilattice 来构造 complete lattice，但是我们这里不需要构造因为 lattice 是给定了，那么对于任意非空的 S，$\bigwedge S \in S^l$ 的，所以 S^l 也是非空的，这里没有问题. 综上 $\mathcal{L}$ 是一个 complete lattice 与前提矛盾. **Claim 1** 证闭.

原谅我这个证明写不去了，原文省略太多的东西了... □

来另一个 1955 年给出的第一个证明.

Lemma 2.35. *如果 $\mathcal{L}$ 是 incomplete，那么存在两个 chain C 和 D 满足下面条件，*

1. *C 是一个 strictly ascending chain(严格大于)，D 是一个 strictly descending chain(严格小于).*
2. *D 中的每个元素都严格大于 C 中的每个元素.*
3. *不存在 $a \in L$ 使得它同时是 C 的 upper bound 和 D 的 lower bound.*

证明. Proof of above lemma. □

证明. 这里我们还是证 if every preserving map $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ has a fixed point then $\mathcal{L}$ is complete. 还是假设 $\mathcal{L}$ 是 incomplete，然后我们构造一个 preserving map 没有 fixed point.

假设 C, D 是满足前面 lemma 的两个 chains. 然后我们来定义这个特殊的 preserving map f，对于任意的 $x \in \mathcal{L}$，我们可以分两种情况来看，x 是 D 的 lower upper 或者不是.

第一种情况若 x 是 D 的 lower upper，反过来那么它肯定不是 C 的 upper bound，那么肯定存在某些 $c \in C$ 满足 $c \not\leq x$. 我们把这些 c 记为

$$C(x) = \{\, c \in C \mid c \not\leq x \,\}.$$

这种情况下我们取 $f(x) = \min C(x)$，即 $C(x)$ 中的最小值.

第二种情况 x 不是 D 的 lower upper，那么肯定存在某些 d D 满足 $c \not\geq x$. 我们把这些 d 记为

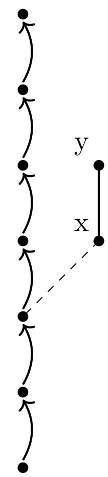
$$D(x) = \{\, d \in D \mid d \not\geq x \,\}.$$

这种情况下我们取 $f(x) = \max D(x)$，即 $D(x)$ 中的最大值.

这种情况定义出来的 $f(x)$ 都会满足 $f(x) \not\geq x$ 或者 $f(x) \not\leq x$，所以是不存在 $f(x) = x$，即没有 fixed point 的.

接下来我们证明 f 是一个 preserving map，取 $x \leq y$. 我们分下面几种情况来分别说明:

1. x 是 D 的 lower bound，y 是 D 的 lower bound. 那么 $f(x) = \min C(x)$ 和 $f(y) = \min C(y)$. 若 $y \not\geq c$，则 $x \not\geq c$ (else $y \geq x \geq c$)，所以 $C(y) \subseteq C(x)$.



C 是一个升链，那么 $C(x)$ 可以想象成这条链上一堆点，那么 $C(x)$ 还是一个升链，$C(y)$ 是它的一个子集必然满足 $\min C(x) \leq \min C(y)$，则 $f(x) \leq f(y)$.

2. x 是 D 的 lower bound，y 不是 D 的 lower bound. 那么 $f(x) = \min C(x)$ 和 $f(y) = \max D(y)$，显然 $f(x) \leq f(y)$.

3. x 不是 D 的 lower bound，y 是 D 的 lower bound. 这是不可能的，因为 $x \leq y$，那么当 y 是 D 的 lower bound 的时候，x 也是 D 的 lower bound.

4. x 不是 D 的 lower bound，y 不是 D 的 lower bound. 那么 $f(x) = \max D(x)$ 和 $f(y) = \max D(y)$. 若 $x \not\leq d$，则 $y \not\leq d$ (else $x \leq\leq d$). 所以 $D(x) \subseteq D(y)$. 由于 $D(y)$ 是一个降链上点的集合，这个集合还是一个降链，你在降链上找子集 $D(x)$，肯定有 $\max D(x) \leq \max D(y)$，则 $f(x) \leq f(y)$.

综上 $f(x) \leq f(y)$ 总是成立，所以 f 确实是一个 preserving map. $\square$