Linear Algebra

枫聆

2021 年 7 月 4 日

目录

Vector Space

Definition of Vector Space

Definition 1.1. vector spaces 是一个具有加法 (addition) 和数量乘法 (salar multiplication) 的集合 V

- 加法是指对任意的元素 $u, v \in V$, 有 $u + v \in V$
- 数量乘法是指对任意的元素 $\lambda \in F$ 和 $v \in V$，有 $\lambda v \in V$

  同时它们存在下面的属性:

- 加法交换律 $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
- 加法结合律 $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ 和 $\forall a, b \in F, (ab)v = a(bv)$
- 加法单位元 $\forall v \in V, v + 0 = v$
- 加法逆元 $\forall v \in V, \exists v^{-1}, v + v^{-1} = 0$
- 数量乘法的单位元 $\forall v \in V, 1v = v$
- 分配律 $\forall v, w \in V, \forall a, b \in F, a(u + v) = au + av, (a + b)v = av + bv$

vector spaces 背后的直觉是什么? 《linear algebra done right》上说来自于 F^n 上的 addition 和 scalar multiplication. 很明显 addition 包含了 abelian group 的所有性质，vector space 是 R-module 的特殊化，R-module 从结构上来说，要比 Ring(带单位元) 的性质要弱一些，主要体现在乘法上，弱化为数量乘法，表示把一个环作用在一个 abelian group 上. 这样做的好处是可以让可以把环上一些看起来不那么好性质都变得好一点，例如 ideal 在一般情况下并不一定还是一个环. 不那么好是相对于群的一些性质来说的，例如正规子群. 在定义了 module 之后，你会发现 ideal 就是一个 module，我们的操作终于都在一个东西下面了，不会轻易的跑出去.

我想这里多记录一些 R-module 的东西，如何把一个环弱化成一个模结构呢? 首先我们需要一个 abelian group M，定义 "the left-action of a ring R on M" 为

$$\sigma\colon R \to \mathsf{End}_{Ab}(M)$$

是一个环同态. 可能这里有一个小疑问为什么 $\mathsf{End}_{Ab}(M)$ 是一个环结构? 首先这个环里面的元素都是关于 M 的 endomorphisms, 乘法定义为 endomorphisms 之间的复合，加法定义为 $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$，其中 $f, g \in \mathsf{End}_{Ab}(M)$. 我们说 σ 把 M 变成了一个 left-R-module，σ 这个映射可以理解为 left-R-module structure(算子)，

$$\sigma(r)(m) \in_R M$$

间接的定义了数量乘法，并且有一些有趣的性质:

- 分配律 $\sigma(r)(m_1+m_2)=\sigma(r)(m_1)+\sigma(r)(m_2)$
- 分配律 $\sigma(r_1+r_2)(m)=\sigma(r_1)(m)+\sigma(r_2)(m)$ (环同态下可以保证)
- 结合性 $\sigma(r_1r_2)(m)=\sigma(r_1)(\sigma(r_2)(m))$ (环同态下可以保证)
- 单位元 $\sigma(1)(m)=m$

如果要定义更清楚一点，可以这样

$$\rho\colon R\times M\to M$$

,ρ 和 σ 的关系为

$$\rho(r,m)=\sigma(r)(m)$$

, 但是这里不是环同态无法保证上面的一些性质，所以需要额外规定一些东西

- $\rho(r_1+r_2,m)=\rho(r_1,m)+\rho(r_2,m)$（分配律）
- $\rho(r,m_1+m_2)=\rho(r,m_1)+\rho(r,m_2)$（分配律）
- $\rho(r_1r_2,m)=\rho(r_1,\rho(r_2,m))$（结合率）
- $\rho(1,m)=m$ （单位元）

把 vector space 一般化的感觉是不是很爽？其实 R-module 在一定程度要比 vector space 更复杂，当用更抽象方式去理解 vector space，我们定义了一个 σ 环同态，这个环同态很精妙的把环作用在 abelian group 的 action 表示出来，所以我们用理解 R-module 的方式去理解 vector space，就是首先我们要有一个 abelian group 定义了加法，然后把一个 field 作用在了它之上，定义为数量乘法，最后我们就得到了这样的一个结构。

这篇 note 既然是在《linear algebra done right》的基础上记录的，我会尽可能的记录一些抽象的延伸的东西，让自己对 linear algebra 有一个不同于大学的颠覆性的认知。

Subspace

Definition 1.2. *如果 V 中的子集 U 是一个子空间，当且仅当满足以下条件:*

1. $0 \in U$
2. $u, w \in U$ 蕴含 $u + w \in U$
3. $a \in F$,$u \in U$ 蕴含 $au \in U$

也就是说，V 下子空间一定是子集，包含加法单位元，且在加法和数量乘法下封闭。

Definition 1.3. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 是 V 的子集. 这些子集的和表示为*

$$U_1 + \cdots + U_m = \{ u_1 + \cdots + u_m \mid u_1 \in U_1, \cdots, u_m \in U_m \}$$

定义子集和，是为了引入下面这个性质

Proposition 1.4. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 都是 V 中的子空间，则 $U_1 + \cdots + U_m$ 是包含 $U_1, \cdots, U_m$ 的最小子空间.*

证明. 最小的就是指 V 里面任意包含 $U_1, \cdots, U_m$ 的子空间都包含 $U_1 + \cdots + U_m$, 首先得证明一下 $U_1 + \cdots + U_m$ 是一个子空间，按照子空间的定义，加法单位元和封闭性都很显然，满足上述条件的子空间很也显然需要包含所有子空间对应的子集和。 □

Definition 1.5. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 都是 V 中的子空间，如果 $U_1 + \cdots + U_m$ 中的每个元素都有唯一分解形式即 $u_1, \cdots, u_m$，则 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和 (direct sum)，用 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ 表示。*

那怎么判定一个子集合是不是直和呢?

Proposition 1.6. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 都是 V 中的子空间, 如果 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和当且仅当 $u_1 + \cdots + u_m = 0$ 时，$u_1 = \ldots = u_m = 0$。*

即只需要 0 有唯一的表示形式就够了，来证明一下

证明. 假设

$$u_1 + \cdots + u_m = u_1' + \cdots + u_m'$$

, 整理一下

$$(u_1 - u_1') + \cdots + (u_m - u_m') = 0$$

,0 有唯一的表示方式，则 $u_1 = u_1', \ldots, u_m = u_m'(u_1 - u_1' \in U_1, \ldots, u_m - u_m' \in U_m)$ □

下面再来个特殊情况, 只有两个子空间，怎么判定它们的子集和是不是直和?

Proposition 1.7. 定义 U 和 W 是 V 中的两个子空间，如果 $U+W$ 是直和当且仅当 $U\cap W=0$.

证明. $\Rightarrow$ 如果 $U+W$ 是直和，任取 $v\in U\cap W$, 则 $-v\in U\cap W$, 而 $0=v+(-v)$, 所以 v 只能是 0.

$\Leftarrow$ 如果 $U\cap W=\{0\}$, 我们假设还有 $0=v+w$，其中 v,w 不为 0，则 $w=(-v)$, 则 $v\in U\cap W$，与前提矛盾. 所以 0 有唯一表示。 □

Finite-Dimensional Vector Space

Linear Combinations and Span

Definition 2.1. 给定 V 里面一系列向量 $v_1, v_2, \cdots, v_m$(vector list)，它们的线性组合表示为

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in F$.

Definition 2.2. 给定 V 里面一系列向量 $v_1, v_2, \cdots, v_m$，所有的它们的线性组合构成的集合叫一个 **span**(linear span).

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \{\, a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m \mid a_1, a_2, \cdots, a_m \in F \,\}.$$

空的 vector list 的 span 表示为 $\{0\}$.

下面是关于 span 一些有趣的性质.

Proposition 2.3. span 是包含当前 vector list 里面所有 vectors 的 smallest subspace.

证明. 首先你得证明 span 确实是一个 subspace，然后所有其他的 subspace 都包含它. span 是一个 subspace 是 clearly 的. 假设 U 这样一个 subspace，包含 $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 则 $a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_mv_m$ 也是属于 U 的. 那么它们的和也应该是属于 U 的. 这就证明了 span 是含于 U 的. □

上面 span 是一个名词，那么下面 span 就是一个动词.

Definition 2.4. 如果 $\operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 等于 V，则称 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ **spans** V

finite-dimensional vector space 的严格定义.

Definition 2.5. 如果一个 vector space 可以被一些 vector list spans, 则称这个 vector sapce 是 finite-dimensional.

这里没有用到 basis 的概念...

Definition 2.6. $\mathcal{P}(F)$ 用来表示 polynomials over F(所有系数属于 F 的多项式集合).

Linear Independence

Definition 2.7. 给定 V 上一个 vector list $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 若要使得 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0$，只能唯一取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$. 则称 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ **linearly independent**. 从另一方面说就是在 $\text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 里面的所有 vector 都有唯一表示形式.

empty vector list 同样被定义为 linearly independent.

下面是关于 linearly dependent 的一个小性质.

Lemma 2.8. 给定 V 上一组 linearly dependent 的 vector list $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 则存在一个 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得下面两个命题成立.

1. $v_j \in \text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_{j-1})$;
2. 如果 j^{th} vector 从 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中被去掉，则剩下的 vectors 构成的 span 依然等于 $\text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

这个 lemma 本质就是在 linearly dependent vector list 里面可以挑一个 vector 出来, 它可以被其他的 vectors 表示.

证明. 因为 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ linear independent，所以存在某个 $a_k, k \in \{1, \cdots, m\}$ 不等于 0，使得

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdot + a_mv_m = 0.$$

让 j 表示最大值形如 $a_j \neq 0$. 则我们有

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \frac{a_2}{a_j}v_2 - \cdots - -\frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1}.$$

□

还有一个比较直观的判定给定 vector list 是不是 linearly independent 的方法.

Proposition 2.9. linearly independent vector list 长度是小于等于 spanning vector list(vector list spans V) 的长度.

证明. 给定 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ linearly independent 和 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ spans V. 我们的目标是证明 $m \leq n$. 整个证明过程非常的有趣，会用 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 替换部分 $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

首先我们考虑 $v_1, u_1, u_2, \cdots u_m$，现在这个 vector list 变成了 linearly dependent，因为 v_1 现在至少可以有两种表示方法了. 使用前面关于 linearly dependent 的 lemma 我们可以去掉某个 u_k，使得剩下的 vector list 还是 spans V. 我们称这个新的 vector list 为 B.

然后 by induction，我们可以把剩下的 $v_2, \cdots, v_m$ 也都加到 B 里面，同时每次 remove 一个 u_k. 我们必须考虑一下有没有足够多的 u_k 够我们 remove? 也就是说我们还剩下一些 v_i 放不进去 B. 假设存在这种情况，也

就是说现在 B 里面全是 v，所以 B 里面的 vectors 都是 linearly independent，并且 spans V，现在还剩下 v_i 还没放进去. 矛盾就来了，v_i 加上 B 里面的 vectors 就变成 linearly dependent 了. 所以是不存在这种情况的. 也就是说 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是完全可以一一替换部分 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的. 最后结论就是 $m \le n$. □

Proposition 2.10. finite-dimensional vector space 的 subspace 还是 finite-dimensional.

证明. 这里还是一个构造证明，用 U 表示 V 上的 subspace. 如果 $U = \{0\}$，clearly. 如果 $U \neq \{0\}$，则我们从里面挑一个非零 vector v_1 出来. 如果 $U = \mathrm{span}(v_1)$，we are done. 反之我们接着取非零 $v_2 \in U$，这里还有有一个条件就是 $v_2 \notin \mathrm{span}(v_1)$.

一般地, 如果 $U = \mathrm{span}(v_1, v_2, \cdots, v_{j-1})$, we are done. 反之我们接着取 $v_j \in U$, 且 $v_j \notin \mathrm{span}(v_1, v_2, \cdots, v_{j-1})$. 你可以观察到这样取出来的 vector list 都是 linearly independent. 根据前面的 lemma 我们知道它的长度应该是小于任何的 spanning list, V 现在是 finite-dimensional, 根据定义它可以被一些 vector list span. 所以最终我们这样的取法是会停下来的，因为长度被限制了，即 U 最终也会被一个 vector lists span，U 也是 finite-dimensional. 其实感觉有点找 basis 的感觉了. □

Bases

Definition 2.11. 若 V 上的一组 list of vectors 是 linearly independent 且 spans V，则称它是 V 上的一个 basis(基).

basis 更常见的另一种描述方式如下

Proposition 2.12. 若 V 上的一组 list $v_1, v_2, \cdots, v_m$ of vectors 是一个 basis 当且仅当任意的 $v \in V$ 都有唯一的表示 (linear combination)

$$v = a_1 v_1 + a_2 v2 + \cdots + a_m v_m.$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in F$.

还有一个比较显然的性质，就是任何一个 spanning list 都可以被 reduced 成一个 basis(同样一个 linearly independent vector list 也可以被 extended 成一个 basis). 继而 finite-dimensional vector space 中一定会有一个 basis.

Dimension

Definition 2.13. finite-dimensional vector space V 的 dimension 为 V 上的一个 basis 的长度，用 $\dim V$ 表示.

这个定义从侧面说明 basis 的长度取决于 V，而不取决于它本身.

Proposition 2.14. 给定 finite-dimensional V 上 subspace U. 则 $\dim U \leq \dim V$.

证明. 把 U 上的 basis 看做 V 中一个 linearly independent list. 而 V 上的 basis 看做 V 中一个 spanning list. 前面有 lemma 说明 linearly independent list 长度是小于 spanning list. □

快速根据长度来判断一个 list 是不是 basis 的方法

Proposition 2.15. 给定 finite-dimensional V.

1. linearly independent list with right length.
2. spanning list with right length.

其中 right length 表示 $\dim V$.

Proposition 2.16. 给定 finite-dimensional V 上的 subspace U_1 和 U_2.

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

证明. 首先给定 $U_1 \cap U_2$ 的 basis 为 $u_1, u_2, \cdots, u_m$，即 $\dim(U_1 \cap U_2) = m$. 在它的基础上分别 extend 到 U_1 和 U_2 的 basis 上. U_1 的 basis 为 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_j$，$U_2$ 的 basis 为 $u_1, u_2, \cdots, u_m, w_1, w_2, \cdots, w_k$. 很自然我们希望有下面等式

$$\begin{aligned}\dim(U_1 \cap U_2) &= m + j + k \\ &= (m + j) + (m + k) - m \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 + \dim(U_1 \cap U_2).\end{aligned}$$

这个等式成立的关键是要证明 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_j, w_1, w_2, \cdots, w_k$ 是 $U_1 + U_2$ 的一个 basis. 即 proof

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_jv_j + c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_kw_k = 0.$$

接下来就是把 w 移到一边，证明 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$(remove v)，接着证明 a 和 c 都等于 0(linearly independent). □

一般形式有

$$\begin{aligned}\dim\left(\sum_{i=1}^{k} V_i\right) &= \dim\left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) + \dim(V_k) + \dim\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1} V_i\right) \cap V_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \dim(V_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \dim\left(\left(\sum_{j=1}^{i} V_j\right) \cap V_{i+1}\right).\end{aligned}$$

Linear Maps

The Definition of Linear Map

Definition 3.1. 给定两个 vector space V 和 W，若存在一个映射 $T\colon V \to W$ 使得

1. additivity(可加性): $\forall u, v \in V, T(u+v) = Tu + Tv$.

2. homogeneity(齐次性): $\forall v \in V, T(\lambda v) = \lambda(Tv)$.

则称这个映射是一个 linear maps(linear transformation)(线性映射). 也就说这个映射保留了加法运算和数量乘法.

Definition 3.2. V 和 W 之间所有 linear map 构成的集合记为 $\mathcal{L}(V, W)$.

Example 3.3. 有几种特殊的 linear map.

1. zero map: $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ 定义

$$0(v) = 0$$

   (0 在这里表示特殊 T 下同).

2. identity map: $I \in \mathcal{L}(V, W)$ 定义为

$$I(v) = v.$$

3. differentiation map: $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 定义为

$$D(p) = p'.$$

   这里可以想一下导数的运算法则.

4. integration map: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(R), \mathbb{R})$ 定义为

$$T(p) = \int_0^1 p(x)dx.$$

5. from F^n to F^m(m, n 都是正整数): 定义 $A_{j,k} \in F, j = 1, \cdots, m, k = 1, \cdots, n$，然后使得 $T \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \cdots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n).$$

   basis 在经过 linear map 的作用会变得如何呢?

Proposition 3.4. 给定 V 上一个 basis $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 和 W 上一个 basis $w_1, w_2, \cdots, w_n$. 则存在一个唯一的 linear map $T\colon V \to W$ 使得

$$T(v_j) = w_j, j = 1, \cdots, n.$$

证明. 现在给定这样的 linear map T, 我们要证明要它是唯一的, 就是要说它当满足上述条件之后, 对任意 $v \in V$ 都有定义了. 让 $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, 那么

$$\begin{aligned} T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) &= T(a_1v_1) + T(a_2v_2) + \cdots + T(a_nv_n) \\ &= a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n) \\ &= a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n. \end{aligned}$$

Q.E.D. □

Algebraic Operations On $\mathcal{L}(V, W)$

Definition 3.5. 给定两个 linear map $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ 和 $\lambda \in F$. 其加法和数量乘法定义如下.

1. sum $S + T$: $(S + T)(v) = Sv + Tv$.
2. scalar product λT: $\lambda T(v) = \lambda(Tv)$.

其中 $v \in V$.

整个 $\mathcal{L}(V, W)$ 代数结构是一个 vector space, 这是一个比较重要的结论. 当然了你可能还需要验证一下其他的 axioms，例如乘法结合性，乘法单位元，分配律等等.

Definition 3.6. $\mathcal{L}(V, W)$ is a vector space

再引入一个 vector space U，讨论两个 linear maps 的 product 变得有意义了.

Definition 3.7. 给定 $T \in \mathcal{L}(U, V)$ 和 $S \in \mathcal{L}(V, W)$，则存在复合映射 (product) $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ 使得

$$(ST)(u) = S(T(u)).$$

其中 $u \in U$.

Null Spaces and Ranges

Definition 3.8. 给定 linear map $T \in \mathcal{L}(V,W)$. 集合 $\{\, v \in V \mid T(v) = 0 \,\}$ 表示 **null space** of T，记为 null T.

null space 就是 0 的 preimage 收集起来.

Proposition 3.9. The null space is subspace.

证明. 我们要证明它在加法和数量乘法下封闭，并且 0 在里面. 对任意的 $u, v \in \text{null } T$，有

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0,$$

所以 $u + v \in \text{null } T$. 同理 $T(\lambda u) = \lambda T(u), T(0) = T(0) + T(0) = 0$. □

现在我们可以用 null space 来说明 linear map 一些性质.

Proposition 3.10. 给定 linear map $T \in \mathcal{L}(V,W)$. T 是 injective 当且仅当 null $T = \{0\}$.

证明. 如果 T 是 injective，clearly null $T = \{0\}$. 反过来如果满足 null $T = \{0\}$，假设 T 不是 injective，则存在 $a \neq b \in F$，使得 $T(a) = T(b)$. 我们可以稍微变换一下 $T(a-b) = T(a) - T(b)$，此时有 $a - b \neq 0$ 且 $(a-b) \in \text{null } T$，这是和前提矛盾的，于是 T 是 injective 的. □

Definition 3.11. 给定映射 $T \colon V \to W$. 集合 $\{\, Tv \mid v \in V \,\}$ 表示 **range** of T，记为 range T.

Proposition 3.12. 若 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，则 range T 是一个 subspace.

证明. 设任意 $u', v' \in \text{range } T$，那么存在 u, v 使得 $T(u) = u'$ 及 $T(v) = v'$ 成立. 考虑向量加法 $u' + v' = T(u) + T(v) = T(u+v) \in \text{range } T$. 同理数量乘法 $\lambda u' = \lambda T(u) = T(\lambda u) \in \text{range } T$. 0 向量显然在 range T 里面 i.e. $T(0) = 0$. □

Foudamental Theorem of Linear Maps

Theorem 3.13. 给定 finite-dimensional V 和 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 则 range T 也是 finite-dimensional 且有下面等式成立.

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T.$$

证明. 在前面我们知道 null T 是一个 subspace，假设它的 basis 为 $u_1, u_2, \cdots, u_m$. 我们可以把这个 basis extend 到 V 的 basis，即 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$. 很显然我们想要证明 $\dim \operatorname{range} T = n$. 给定任意的 $v \in V$，那么

$$\begin{aligned} T(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m) + T(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) \\ &= 0 + T(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) \\ &= b_1T(v_1) + b_2T(v_2) + \cdots + b_nT(v_n). \end{aligned}$$

从上式我们可以知道 $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ spans range T，所以 range T 是 finite-dimensional 的. 但是我们还要证明它们是 range T 的一个 basis，即它们还要 linearly independent. 要证明当 $c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n) = 0$，$c_1, c_2, \cdots c_3$ 全为零. 那么考虑

$$c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n) = T(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n) = 0.$$

即有

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m &= c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \\ a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m - (c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n) &= 0. \end{aligned}$$

由于 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$, 线性无关的，所以 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. □

这个 theorem 说明了一个重要的性质就是不存在一个单射使得一个有限维的向量空间到映比它更低维的向量空间. 同样映射到一个比它更高维的向量空间不会是一个满射.

Homogeneous system of linear equations

Proposition 3.14. 齐次线性方程组未知数的个数大于等式的个数，则有非零解.

证明. 给定齐次线性方程组.

$$\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k = 0.$$

其中 A 表示对应齐次方程组的系数矩阵. 显然 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是这组方程组的解. 这是 trivial 的，我们要考虑的是有没有非零解的情况. 之前我们定义过一个 linear map $T\colon F^n \to F^m$.

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k).$$

上面方程组可以用 $T(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 来简洁的表示，注意这里的 0 是 F^m 中的加法单位元，即零向量. 我们想要非零解，在这里只需要保证 null T 不为 $\{0\}$. 由命题 3.10，null $T = \{0\}$ 充要条件是 T 是 injective 的. 这里由基本定理 3.13，当 $n > m$ 时，从的高维到低维的线性映射不可能是一个单射，所以 null $T \neq \{0\}$. 这就是基本定理的一个非常意思的应用. □

对于非齐次方程组也有类似的结论，但是有一些不一样.

Proposition 3.15. 对于非齐次方程组

$$\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k = c_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k = c_m.$$

当方程组的个数大于未知数的个数时，可以找到一些 $c_1, \cdots, c_m$ 使得方程无解.

证明. 这里就变成了 $T(x_1, \cdots, x_n) = (c_1, \cdots, c_m)$. 要使得它没有解，我们只需要让 range T 是 F^m 的一个子空间，且 range $T \neq F^m$，这样就有缝隙可以找了. 当 $n < m$ 时，由基本定理3.13，从低维到高维的线性映射不可能是满射，这种情况上当然是满足条件的. □

Matrices

Definition 3.16. 一个经典的 $m \times n$ matrix.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Definition 3.17. 给定一个 linear map $T \in \mathcal{L}(V,W)$，V 上的一个 basis $v_1, \cdots, v_n$ 和 W 上的一个 basis $w_1, \cdots, w_m$. 用 $\mathcal{M}(T)$ 表示 $m \times n$ matrix of T. 其中 $A_{j,k}$ 定义为

$$T(v_k) = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m.$$

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & \cdots & v_k & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & A_{1,k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & A_{n,k} & & \end{pmatrix} \end{array}$$

这个定义的直觉是什么呢？就是在分别确定两个空间的 basis 的之后，用矩阵的手法把 linear map 表示出来. 特别地我们在 3.4 证明过只要确定了 $T(v_1), \cdots, T(v_n)$，就确定了整个 T，所以这里 T 是 well-defined.

matrix 的加法和数量乘法定义. 直觉来源于下面两个命题.

Proposition 3.18. 给定两个 linear map $S, T \in \mathcal{L}(V,W)$，$\lambda \in F$.

1. $\mathcal{M}(S+T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.
2. $\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T)$.

在思考上面的命题时候，我们脑子里面必须有了一些 fixed base，例如 V 上一个 basis $v_1, \cdots, v_n$，和 W 上一个 basis $w_1, \cdots, w_m$. $S+T$ 还是一个 $\mathcal{L}(V,W)$ 中的 linear map，所以 $w_1, \cdots, w_m$ 也是它的一个 basis. 例如

$$\begin{aligned} (S+T)v_k &= Sv_k + Tv_k \\ &= \sum_{r=1}^{m} A_{r,k}w_r + \sum_{r=1}^{m} C_{r,k}w_r \\ &= \sum_{r=1}^{m} (A_{r,k} + C_{r,k})w_r. \end{aligned}$$

矩阵的乘法需要单独拿出来讲一下，在这里我们需要再额外定义 U 和它的一个 basis $u_1, \cdots, u_p$. 给定两个 linear maps $T: U \to V$ 和 $S: V \to W$，它们的复合 $ST: U \to W$ 也是一个 linear map. 那么现在有一个问题是

$\mathcal{M}(ST)$ 是否等于 $\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$? 所以实际上当矩阵是 linear map 的一个 representation 的时候，矩阵乘法就是 linear map 的复合.

但是在此之前，我们并没有定义矩阵乘法. 如果我们希望上面的问题有一个 positive answer，定义 $\mathcal{M}(S) = A$ 和 $\mathcal{M}(T) = C$，取 $1 \le k \le p$，那么

$$\begin{aligned}
(ST)u_k &= S(\sum_{r=1}^{n} C_{r,k} v_r) && \text{apply } Tu_k \\
&= S(C_{1,k}v_1) + S(C_{2,k}v_2) + \cdots + S(C_{n,k}v_n) && \text{利用线性函数的可加性} \\
&= C_{1,k}S(v_1) + C_{2,k}S(v_2) + \cdots + C_{n,k}S(v_n) && \text{利用线性函数的齐次性} \\
&= \sum_{r=1}^{n} C_{r,k} \sum_{j=1}^{m} A_{j,r} w_j && \text{apply } Sv_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{r=1}^{n} A_{j,r} C_{r,k}) w_j.
\end{aligned}$$

所以 ST 也是一个 $m \times p$ matrix，这个结果是非常自然的，描述 basis 在 linear map 之间传递. 所以我们由此给出一个正式的矩阵乘法的定义.

Definition 3.19. 矩阵乘法的标准定义 给定 $m \times n$ matrix A 和 $n \times p$ matrix C. 则 $m \times p$ product matrix AC 的第 j 行和第 k 列定义为

$$(AC)_{j,k} = \sum_{r=1}^{n} A_{j,r} C_{r,k}.$$

可以形象的记忆就是 A 的第 j 行的元素分别乘上 C 的第 k 列的元素.

$$(AC)_{j,k} = A_{j,\cdot} C_{\cdot,k}$$

其中 $A_{j,\cdot}$ 表示第 j 行 $1 \times n$ 矩阵，$C_{\cdot,k}$ 表示第 k 列 $n \times 1$ 矩阵. 还是刻画成了两个矩阵的乘法.

Proposition 3.20. 特别地，

$$(AC)_{\cdot,k} = AC_{\cdot,k}$$

表示 AC 的第 k 的列等于 A 乘上 C 的第 k 的列 (fixed k). 这是因为与 u_k 相关的只有 C 中第 k 行对应的 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的系数，所以可以直接把它取出来直接乘.

Proposition 3.21. 给定一个 $m \times n$ matrix A 和 $n \times 1$ matrix $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. 那么

$$Ac = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 A_{\cdot,1} + \cdots + c_n A_{\cdot,n}.$$

换句话说就是在刻画一个 linear combination ($Ax = b$).

把3.20和3.21 两个 propositions 结合起来就是说AC 的第 k 列等于 A 中所有列向量以 C 中第 k 列为系数的 linear combination. 同理 AC 的第 j 行等于 C 中所有行以 A 中第 j 行为系数的 linear combination,

$$\begin{pmatrix} a_{j1} \cdots a_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} Ac &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{r=1}^{n} A_{1,r} C_{r,1}\right) \\ \vdots \\ \left(\sum_{r=1}^{n} A_{n,r} C_{r,1}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,1}C_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,1}C_{1,1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1,n}C_{n,1} \\ \vdots \\ A_{n,n}C_{n,1} \end{pmatrix} \\ &= C_{1,1} \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + C_{n,1} \begin{pmatrix} A_{1,n} \\ \vdots \\ A_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

实际上上述就是按行或者按列展开矩阵乘法.

Example 3.22. 先给出一个 classic 矩阵乘法.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 \\ 26 & 19 & 12 & 5 \\ 42 & 31 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

那么其中结果的第 2 列可以表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix}$$

还可以用 linear combination 的眼观来看

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Definition 3.23. 对于任意的正整数 m, n，所有 $m \times n$ *matrix* 构成的集合记为 $F^{m,n}$.

Proposition 3.24. $\dim F^{m,n} = mn$

证明. 显然 $F^{m,n}$ over F 是一个向量空间，其中零矩阵 (矩阵中所有元素均为 0) 为它的加法单位元. 我们让只有一个元素为 1 其余均为的 0 的矩阵构成一个集合，这个集合就是 $F^{m,n}$ 的一个 basis. □

Invertibility

Definition 3.25. 给定一个 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 若存在另外一个 linear map $S \in \mathcal{L}(W, V)$，使得 ST 和 TS 都是 identity map. 则称 T 是可逆的 (invertible)，S 是 T 的逆元.

Proposition 3.26. 一个可逆的 linear map 有唯一的逆元.

证明. 给定可逆 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 假设它有两个逆元 S_1 和 S_2，那么

$$S_1 = S_1 I = S_1 T S_2 = I S_2 = S_2.$$

□

自然地，我们需要思考一个 linear map 什么时候可逆?

Proposition 3.27. 一个 linear map 可逆当且仅当它是 injective 和 surjective.

证明. 给定 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

($\Leftarrow$) 若 T 是 injective 和 surjective，则 $T(v) = w$ 一一对应的且能取到所有的 $w \in W$，那么 S 直接把对应的 $T(v)$ 送到 v 即可.

($\Rightarrow$) 若 T 可逆，那么存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 $ST = I$ 和 $TS = I$. 从 $TS = I$ 可以知道 T 一个 surjective，注意这里的 I 是 $W \to W$，表示 $T(S(w))$ 可以取到任意的 $w \in W$. 若存在 v_1, v_2 使得 $T(v_1) = T(v_2)$，则 $S(T(v_1)) = S(T(v2))$，由于 $ST = I$，所以 $v_1 = v_2$，即 T 是一个 injective. □

Isomorphic Vector Spaces

Definition 3.28. 若两个 vector spaces 之间一个可逆的 linear map，则称这两个 vector space 是同构的 (isomorphic)，这个可逆的 linear map 称为isomorphism.

The Greek word **isos** means equal; the Greek word **morph** means shape. Thus isomorphic literally means equal shape.

Proposition 3.29. 两个 finite-dimensional vector spaces over F 同构当且仅当它们有相同的维数 (dimension).

证明. 设两个 vector spaces 分别为 V 和 W.

($\Rightarrow$) 若 V 和 W 同构. 因此 V 和 W 之间有一个 isomorphism. 前面我们知道可逆的 linear map 是 injective 和 surjective 的. 根据 linear map 的基本定理

$$\dim V = \dim \text{null } V + \dim \text{range } V.$$

这里有 null $V = 0$，同时 range $V = W$. 所以 $\dim V = \dim W$.

($\Leftarrow$) 若 V 和 W 拥有相同的 dimension，即它们的 basis 有相同的个数. 分别挑 V 上的 basis $v_1, \cdots, v_n$ 和 W 上的 basis $w_1, \cdots, w_n$. 我们定义一个 linear map T，使得

$$T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n.$$

我们需要说明 T 是 well-defined. $\forall v \in V$，都可以被 $v_1, \cdots, v_n$ 唯一表示，继而对应的 $T(v)$ 也是被 $w_1, \cdots, w_n$ 唯一表示的. 很显然这是一个 linear map. 同时 null $T = \{0\}$，所以 T 是一个 injective. 并且 T 的函数值可以 spans W，所以 T 是一个 surjective，于是由3.27可知 T 是一个 isomorphism. □

我们来思考一个有趣的 isomophism.

Proposition 3.30. 给定 V 上 basis $v_1, \cdots, c_n$ 和 W 上的 basis $w_1, \cdots, w_m$. 任意一个 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，都能确定一个 $\mathcal{M}(T) \in F^{m,n}$. 那么 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $F^{m,n}$ 同构，其中 $\mathcal{M}$ 是一个 isomorphism.

证明. 由3.18 已经可以表明 $\mathcal{M}$ 是一个 linear map 了. 我们需要证明它是可逆的，即它是 injective 和 surjective.

首先考虑 injective，自然地来探究一下 null $\mathcal{M}$ 的结构. $F^{m,n}$ 中的零向量对应零矩阵，我们用 $\mathbf{0}$ 表示. 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，且分别给定 V 和 W 上的 basis $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 和 $w_1, w_2, \cdots, w_m$. 那么当 $\mathcal{M}(T) = \mathbf{0}$ 时，对任意的 v_k，$k = 1, 2, \cdots, m$ 有 $T(v_k) = 0 \cdot w_i, i = 1, 2, \cdots, n$，所以 T 在这里是一个 zero linear map.

为了证明 srujective，设对于 $\forall A \in F^{m,n}$，我们可以构造一个 linear map 使得

$$T(v_k) = \sum_{r=1}^{m} A_{r,k} w_j, k = 1, 2, \cdots, m.$$

显然 $\mathcal{M}(T) = A$. 所以 $\mathcal{M}$ 是 surjective. □

如果能从它们的 dimension 去证明上面的命题就好了，但是 $\mathcal{L}(V, W)$ 的 dimension 并没有那么显然.

Proposition 3.31. 给定 V 和 W 都是 finite-dimensional. 则 $\mathcal{L}(V, W)$ 也是 finite-dimensional，其中

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \dim W.$$

证明. 由3.30,3.29,3.24可证. $\square$

Linear Maps Thought of as Matrix Multiplication

之前我们定义了matrix of a linear map，现在我们来定义matrix of a vector.

Definition 3.32. *给定 V 上的 basis $v_1,\cdots,v_n$ 和 $v\in V$. 那么 matrix of v 表示为*

$$\mathcal{M}(v)=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 使得

$$v=c_1v_1+\cdots+c_2v_n.$$

所以这里有一个很自然的式子把它们联系起来.

$$\mathcal{M}(T)_{\cdot,k}=\mathcal{M}(T(v_k)).$$

等式左边表示 T 的矩阵表示的第 k 行，而等式右边表示 $T(v_k)$ 的矩阵表示.

Proposition 3.33. 给定 linear map $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 和 $v\in V$. 给定 V 上的 basis $v_1,\cdots,v_n$, 和 W 上的 basis $w_1,\cdots,w_m$. 那么

$$\mathcal{M}(T(v))=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v).$$

证明. 假定 $v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$，其中 $c_1,\cdots,c_n\in F$. 那么

$$T(v)=c_1T(v_1)+\cdots c_nT(v_n).$$

继而

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(T(v))&=c_1\mathcal{M}(T(v_1))+\cdots+c_n\mathcal{M}(T(v_n))\\&=c_1\mathcal{M}(T)_{\cdot,1}+\cdots+c_n\mathcal{M}(T)_{\cdot,n}\\&=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v).\end{aligned}$$

这个命题的内蕴一个向量 v 在 T 下变换的结果等于 T 的表示矩阵左乘 v 的矩阵表示. □

这个命题到底有什么用呢？每一个 $m\times n$ matrix 都蕴含了一个 $F^{n,1}$ 到 $F^{m,1}$ 的 linear map.

$$x\in F^{n,1}, Ax\in F^{m,1}.$$

深入记录一下，实际上这里有一个交换图.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathcal{M}_{\{v_i\}}"'] & W \arrow[d, "\mathcal{M}_{\{w_i\}}"] \\ F^{n,1} \arrow[r, "T'"'] & F^{m,1} \end{tikzcd}$$

给定两个有限向量空间 V 和 W，它们 basis 分别为 $\{v_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ 和 $\{w_i : i = 1, 2, \cdots, m\}$，$\mathcal{M}_{\{v_i\}}$ 和 $\mathcal{M}_{\{w_i\}}$ 分别表示 $V \to F^{n,1}$ 和 $W \to F^{m,1}$ 的 isomorphism. 自然地 $\mathcal{M}_{\{v_i\}}$ 和 $\mathcal{M}_{\{w_i\}}$ 都是一个可逆的 linear map. 如果有上面的交换图，则 T' 是唯一确定的，即

$$T' = \mathcal{M}_{\{w_i\}} T \mathcal{M}_{\{v_i\}}^{-1}.$$

前面我们证明了 $\mathcal{M}(T(v)) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$，实际上是证明了

$$\mathcal{M}_{\{w_i\}} T = T' \mathcal{M}_{\{v_i\}},$$

其中 $T'(x) = \mathcal{M}(T) \cdot x = Ax$, $x \in F^{n,1}$. 这说明一个 $m \times n$ 也可以诱导出 $F^{n,1} \to F^{m,1}$ 的 linear map.

特别地思考一个问题 $\mathcal{M}(T') =$? 首先 V 与 $F^{n,1}$ 和 W 与 $F^{m,1}$ 在 $\mathcal{M}$ 都是分别同构的，那么 $v_1, \cdots, v_n$ 与 $w_1, \cdots, w_n$ 在 $\mathcal{M}$ 的作用下也分别确定了 $F^{n,1}$ 与 $F^{m,1}$ 的一个 basis，你会发现这两个 basis 都是 standard basis，而在交换图的意义之下

$$\begin{tikzcd} v_k \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix} w_1, \cdots, w_m \end{pmatrix} M(T)_{\cdot,k} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[r] & M(T)_{\cdot,k} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

明显地，T' 在两个 standard basis 下的 matrix representation 的第 k 列对应上了 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 列. 所以我们的结论是当 $F^{n,1}$ 与 $F^{m,1}$ 上都选择 standard basis 的时候，有 $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T')$. 那么 $T'(x)$ 也可以写作 $T'(x) = \mathcal{M}(T')x$，其中 $\mathcal{M}(T')$ 是在选择 standard basis 的意义下.

我们把这个特殊的 linear map T' 称为matrix multiplication map. 当然了你也可以想象每一个从 V 到 W(finite-dimensional) 的 linear map，都可以唯一确定上述的 matrix multiplication map.

Operators

Definition 3.34. 一个 vector sapce V 到自身的 linear map $V \to V$ 被称为 operator，V 上所有的 operators 构成的集合记为 $\mathcal{L}(V)$，即 $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$.

Example 3.35. *两个 operators 的例子.*

1. *multiplication by x^2: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$*

$$T(p(x)) = x^2 p(x).$$

2. *backward shift: $T \in \mathcal{L}(F^\infty, F^\infty)$*

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

operator 其实就是 endomorphism，可以把条件加强一点变成 automorphism(自同构). 也就是说需要把 operator 变成一个 isomorphism.

Proposition 3.36. 给定 finite-dimensional V 和 operator $T \in \mathcal{L}(V)$. 下面条件相互等价

1. T is invertible.
2. T is injective.
3. T is surjective.

注意这里必须是finitie-dimensional. 也就是说现在判定 operator 的 invertible 时不需要 injective 和 surjective 同时满足.

证明. 我们再写一遍 foundamental theorem

$$\dim V = \dim \operatorname{null} V + \dim \operatorname{range} V.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ 若 T 是 injective，上面的式子就变成了 $\dim V = \dim \operatorname{range} T$. range T 是 V 的一个 subspace. 若要上述式子成立，则 range $T = V$，所以 T 是一个 surjective.

$(3 \Rightarrow 2)$ 若 T 是 surjective，range $T = V$ 上面的式子就变成了 $0 = \dim \operatorname{null} T$. 所以 T 是一个 injective.

其他方向的推导都比较 clearly. □

Example 3.37. *证明对任意的多项式 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，存在 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 使得 $((x^2 + 5x + 7)p)'' = q$.*

证明. 这个题可以利用 q 和 p 的次数关系的初等方法来做，你会发现它们的次数应该是一样的才对，因为 p 乘上了一个 2 次多项式，两次求导之后整个式子次数会减少 2 次，总体保持不变就是 p 的次数. 然后你设 p 和 q

的次数为 m，再把它们换成对应的 $p_m(x)=c_mx^m+\cdots+c_0$. 左边去掉求导符合，即展开，对比系数，得到关系式.

这里也可以通过 operator 来做，考虑前面提到的 operator $T\colon \mathcal{P}(\mathbb{R})\to\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$T(p)=((x^2+5x+7)p)''.$$

那么我们就是想证明 T 是一个 surjective. 但是现在这里有一个问题，$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 这是一个 infinite vector space，如果我们想用 3.36来通过 injective 间接说明它是一个 surjective 是不行的. 但是给定任意一个多项式 q 都有一个最高次 m，所以我们可以限制 T 一下，把它限制到 $T_m\colon \mathcal{P}_m(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ 上，这样就是一个 infinite vector space 上的映射了. 再考虑 T_m 是不是一个 injective. 若要使得 $T(p)=0$，由于二次求导之后为 0 的多项式只能是形如 $ax+b$, 要满足条件这里只能使得 p 等于 0. 即 null $T=\{0\}$, 那么 T 是一个 injective, 即 T 是一个 surjective. $\square$

Products of Vector Spaces

Definition 3.38. 给定一些 vector spaces over F $V_1, \cdots, V_m$.

- The product $V_1 \times \cdots \times V_m$ 定义为

$$V_1 \times \cdots \times V_m = \{ (v_1, \cdots, v_m) \mid v_1 \in V_1, \cdots, v_m \in V_m \}.$$

- Addition on $V_1 \times \cdots \times V_m$ 定义为

$$(u_1, \cdots, u_m) + (v_1, \cdots, v_m) = (u_1 + v_1, \cdots, u_m + v_m).$$

- Scalar multiplication on $V_1 \times \cdots \times V_m$ 定义为

$$\lambda(v_1, \cdots, v_m) = (\lambda v_1, \cdots, \lambda v_m).$$

Example 3.39. $R^2 \times R^3$ 和 R^5 同构. $((x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5)) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

那么 product of vector space 的 dimension 取决于什么呢?

Proposition 3.40. 给定一系列 finite-dimensional $V_1, \cdots, V_m$. 则 $V_1 \times \cdots \times V_m$ 也是 finite-dimensional，且

$$\dim(V_1 \times \cdots \times V_m) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_m.$$

证明. 最直观的理解就是，各自取 basis. 例如先对 V_1 取 basis $(v_{1_1}, 0, \cdots, 0), \cdots, (v_{1_n}, 0, \cdots, 0)$. 再类似的对其他 V_k 做同样的操作，这样取出来的 list 都是 linearly independent 且 spans $V_1 \times \cdots \times V_m$. 所以它是一个 basis. □

Products and Direct Sums

Product 和 subset sum 之间有一种天然的 linear map.

Proposition 3.41. 给定一些 V 上的 subspaces $U_1, \cdots, U_m$. 定义 linear map $\Gamma\colon U_1 \times \cdots U_m \to U_1 + \cdots + U_m$

$$\Gamma(u_1, \cdots, u_m) = u_1 + \cdots + u_2.$$

若 Γ 是 injective 的，则 $U_1 + \cdots + U_m$ 是一个 direct sum.

证明. 试想若 $U_1 + \cdots + U_m$ 是一个 direct sum. 则 $u_1 + \cdots u_m = 0$，只能是 $u_1 = \cdots = u_m$，这说明 Γ 是一个 injective. □

Corollary 3.42. 给定一些 V 上的 subspaces $U_1, \cdots, U_m$. 若 $U_1 + \cdots + U_m$ 是一个 direct sum 当且仅当

$$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m.$$

证明. 上面的 proposition 和前一章的关于 dimension of product 的 proposition 结合起来即可. □

Quotients of Vector Spaces

vector 和 vector space 的 addition.

Definition 3.43. 给定 V 上 subspace U 和 vector $v \in V$. 集合

$$\{v + u \mid u \in U\}$$

记为 $v + U$. 这个集合被称为 affine subset(仿射子集)，affine subset 和 U 是 parallel.

Definition 3.44. 给定 V 上一个 subspace U. 集合

$$\{v + U \mid v \in V\}$$

表示 V 的一个 quotient space，记为 $V \setminus U$. 它是所有 V 上所有和 U 平行的 affine subset.

下一步是把 quotient space 变成一个 vector space. 如何区别两个和 U 平行的 affine subset 是相等的呢?

Proposition 3.45. 给定 V 上一个 subspace U 和 $v, w \in V$. 下面条件相互等价

1. $v - w \in U$.
2. $v + U = w + U$.
3. $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$.

证明. $(1 \Rightarrow 2)$ 若 $v - w \in U$，取 $u \in U$. 那么

$$v + u = w + (v - w + u) \in w + U.$$

所以 $v + U \subset w + U$. 反过来 $w + u$ 类似，有 $w + U \subset v + U$. 最后 $v + U = w + U$.

$(2 \Rightarrow 1)$ 若 $v + U = w + u$，取 $u_1, u_2 \in U$，使得 $v + u_1 = w + u_2$. 那么

$$v - w = u_2 - u_1 \in U.$$

$(3 \Rightarrow 1)$ same with above. □

Definition 3.46. 给定 V 上 subspace U. $V \setminus U$ 上的两种运算定义如下:

1. Addition: $(v + U) + (u + W) = (v + w) + U$.
2. Scalar multiplication: $\lambda(v + U) = (\lambda v) + U$.

其中 $v, u \in V$，$\lambda \in F$.

我们必须得说明 quotient space 是一个 vector space，才能引入重要的 quotient map.

Proposition 3.47. Quotient space 是一个 vector space.

证明. 如果我们要证明 quotient space 是一个 vector space 我们需要让上述的 addition 和 scalar multiplication 满足 vector space axioms.

在此之前我们需要让上面的 addition 和 scalar multiplication make sense. 就 addition 而言, 如果有 $v+U=\widehat{v}+U$，那么 $(v+w)+U=(\widehat{v}+w)+U$. 如何证明呢？根据前面的 proposition 我们有

$$(v-\widehat{v})\in U,(w-w)\in U.$$

U 是一个 subspace 在 addition 下封闭. 那么

$$(v+w)-(\widehat{v}+w)\in U.$$

再用一下前面的 proposition 就有 $(v+w)+U=(\widehat{v}+w)+U$. 相似的, 要使得 scalar multiplication make sense, 那么 $(\lambda v)+U=(\lambda\widehat{v})+U$. 根据前面的 proposition.

$$v-\widehat{v}\in U.$$

U 在 scalar multiplication 下封闭. 那么

$$\lambda(v-\widehat{v})\in U,$$

即 $(\lambda v)-(\lambda\widehat{v})\in U$. 用一下前面的 proposition 最后就有 $(\lambda v)+U=(\lambda\widehat{v})+U$.

$V\setminus U$ 的加法单位元是 $0+U$. □

下面要引入最重要的 quotient map.

Definition 3.48. 给定 V 上的 subspace U. 存在一个 linear map $\pi\colon V\to V\setminus U$ 定义为

$$\pi(v)=v+U.$$

称这个 linear map 是一个 quotient map.

有了具体的 quotient map 之后我们来尝试计算 quotient space 的 dimension.

Proposition 3.49. $\dim V\setminus U=\dim V-\dim U$.

证明. The fundamental theorem linear map

$$\dim V=\dim \operatorname{null} T+\dim \operatorname{range} T.$$

我们考虑 null T，即 $\pi(v)=0+U$. 那么 $v\in U$，则 $\pi(v)=0+U$. 所以 null $T=U$. T 的值域就是整个 quotient space，所以 range $T=V\setminus U$. 两个小结论合起来就是 $\dim V\setminus U=\dim V-\dim U$. □

quotient map 必不可少的是 universal property.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\ & \text{V} \setminus \text{null(T)} \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 3.50. 上图的 $\tilde{T}$ 是一个 unique linear map，使得

$$\tilde{T}(\pi(v)) = Tv$$

证明. 首先我们让这个 linear map make sense. 若 $v + \text{null } V = u + \text{null } V$，则 $v - u \in \text{null } V$. 进一步有 $T(v-u) = 0$，即 $T(v) = T(u)$. 这就是说一个等价类里面的元素，经过 T 之后的函数值都是相等的，这也是 $\tilde{T}$ 的定义. □

Proposition 3.51. 这里面还有一些性质.

1. $\tilde{T}$ is injective.
2. range $\tilde{T} =$ range T.
3. $V \setminus \text{null } T$ 和 range T 同构.

证明. (1) 前面已经证明了. (2) 交换图 clearly. (3) injective and surjective! then iosmophic. □

The Dual Space and the Dual Map

Definition 3.52. 从 V 到 F 的 linear map 被称为 linear functional(线性泛函).

Example 3.53. *linear functional 的例子*

1. *fix* $c_1, \cdots, c_n$，定义 $\varphi \colon F^n \to F$
$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n.$$

Definition 3.54. 对偶空间的定义 V 上所有的 linear functional 构成的集合是一个 vector space，其被称为 **dual space**，记为 V'. 换句话说就是 $V' = \mathcal{L}(V, F)$.

Proposition 3.55. $\dim V' = \dim V$.

证明. 由3.31 F over F 的 dimension 是 1???? haha □

Definition 3.56. 给定 V 上的 basis $v_1, \cdots, v_n$，定义 V' 上的 list $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 如下

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & k = j, \\ 0 & k \neq j. \end{cases}$$

称其为 $v_1, \cdots, v_n$ 的 **dual basis**.

Proposition 3.57. dual basis 是 V' 上的 basis.

证明. 这里我们只需要证明 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 linearly independent，配合 the right length. 假设 $a_1, \cdots, a_n$ 使得

$$a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n = 0.$$

这里的 0 表示一个 zero map. 已知 $(a_1\varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n)(v_j) = a_j$ for $j = 1, \cdots, n$. 所以这里只能 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 linearly independent. □

Definition 3.58. 给定 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. T 的 **dual map** $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ 定义为

$$T'(\varphi) = \varphi \circ T,$$

其中 $\varphi \in W'$.

> 为什么它 T' 是一个 linear map 呢? 因为两个 linear map 的复合还是一个 linear map.
> dual map 上的一些代数性质.

Proposition 3.59. *给定* $S, T \in \mathcal{L}(V, W), G \in \mathcal{L}(U, V)$ *和* $\lambda \in F$.

- $(S+T)' = S' + T'$.
- $(\lambda T)' = \lambda T'$.
- $(SG)' = G'T'$.

证明. (1),(2) clearly

(3) 设 $\varphi \in W'$

$$(SG)'(\varphi) = \varphi \circ (SG) = (\varphi \circ S) \circ G = G'(\varphi \circ S) = G'S'(\varphi).$$

$\square$

annihilator

Definition 3.60. 给定集合 $U \subset V$. 集合

$$\{ \varphi \in V' \mid \forall u \in U, \phi(u) = 0 \}$$

表示 the **annihilator** of U(零化子)，记为 U^0.

很自然地可能想问 annihilator 是不是一个 subspace.

Proposition 3.61. 给定集合 $U \subset V$. 则 U^0 是 V' 的一个 subspace.

证明. 按三部走.

clearly $0 \in U^0$.

设 $v, w \in U^0$. 我们考虑 $(v+w)(u) = v(u) + w(u) = 0$ 其中 $u \in U$. clearly $v(u) + w(u) \in U^0$.

相似的，取 $\lambda \in F$. 考虑 $(\lambda v)(u) = \lambda v(u) = 0$. clearly $\lambda v(u) \in U^0$. □

那么我们现在就可以问 annihilator 的 dimension 是多少?

Lemma 3.62. 给定 finite-dimensional V 和其上一个 subspace U. 若 $S \in \mathcal{U}, \mathcal{V}$，则存在 $T \in \mathcal{V}, \mathcal{U}$ 使得对任意的 $u \in U$ 有 $Tu = Su$.

证明. 直接尝试构造即可. 设 U 上一组 basis $u_1, \cdots, u_m$. 它可以 extend 到 V 上一组 basis $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$. 使得 $T(w_k) = w_k$ 对 $1 \le k \le m$ 和 $T(v_j) = 0$ 对 $1 \le j \le n$. T 是符合上述条件一个 linear map.

之前我想这样的构造

$$T(v) = \begin{cases} Sv & v \in U, \\ 0 & v \notin U. \end{cases}$$

这是有问题的，addition axiom 是不满足的. 从而造就了前面的构造. □

Proposition 3.63. 给定 finite-dimensional V 和它的 subspace U. 则

$$\dim U + \dim U^0 = \dim V.$$

证明. RHS 可以换成 $\dim V'$. 如果我们想用 fundamental theorem of linear map. 要把 U 弄进来，必须要 linear map 的一端是 U. 所以这里引入 inclusion map $i \in (L)(U, V)$，定义为

$$i(u) = u.$$

那么它的 dual map $i' \colon V' \to U'$(这样就有 $\dim V'$). 我们把 fundamental theorem 用在 dual map 上有

$$\dim V' = \dim \operatorname{null} i' + \dim \operatorname{range} i'.$$

这里 null $i' = U^0$. 为什么呢? 根据 dual map 的定义 $0 = \varphi i$ 其中 $\varphi \in V'$. 这就是 innihilator 的定义 $U \to F = 0$(zero map). 那么下一步就确定了，我们只需要说明 $\dim \operatorname{range} i' = \dim U$. 把 RHS 的 $\dim U$ 再换成 $\dim U'$，这就是在说 i' 值域是整个 U'，那么我们只要证明 i' 是一个 surjective 即可. 即取任意的 $\varphi_U \in U'$，存在 $\varphi_V \in V, \varphi_U = \varphi_V i$. 我们需要想办法把 RHS 的 i 消掉，根据前面的 lemma 我们是可以找到这样的一个 i^{-1} 使得 $i^{-1}(u) = i(u), u \in U$，这里又因为 inclusion 是一个 injective map, 有 $ii^{-1} = 1$. 所以 i' 是一个 surjective. 综上整个命题得证. □

T' 的 null space.

Proposition 3.64. 给定两个 finite-dimensional vector space V, W 和 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 则

1. null $(T') = (\text{range } T)^0$.
2. $\dim \operatorname{null} T' = \dim \operatorname{null} T + \dim W - \dim V$.

证明. (1) T' 表示 $W' \to V'$，那么 $0 = \varphi T$ 其中 0 是 zero map，$\varphi \in W'$. 即 $\varphi T(v) = 0$ 对任意的 $v \in V$. 换句话就是 range T 的 annihilator. □

T 和 T' 两者 injective 和 surjective 的关系.

Proposition 3.65. 给定两个 finite-dimensional vector space V, W 和 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

1. T 是 surjective 当且仅当 T' 是 injective.
2. T 是 injective 当且仅当 T' 是 surjective.

证明. T' 的 definition 为 $T'(\varphi) = \varphi T, \varphi \in W'$. 若 T 是 surjective，取 $\varphi_1, \varphi_2 \in W'$，那么当 $T'(\varphi_1) = T'(\varphi_2)$，意味着取遍了所有 $w \in W$，都有 $\varphi_1(w) = \varphi_2(w)$. 所以 $\varphi_1 = \varphi_2$，即 T 是一个 injective.

若 T 是一个 injective，取任意的 $\phi \in V'$. 是否存在 $\varphi \in W'$ 使得 $\phi = \varphi T$ 呢? 跟前面一样需要消掉 RHS 的 T，因为 T 是 injective 的，我们可以构造 S

$$Sw = T^{-1}(w).$$

其中 T^{-1} 表示取 preimage. 这样 $TS = 1$，单位映射。所以 T' 是 surjective 的. □

Proposition 3.66. 给定两个 finite-dimensional vector space V, W 和 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 则

1. $\dim \operatorname{range} T' = \dim \operatorname{range} T$;
2. range $T' = (\text{null } T)^0$.

The Matrix of the Dual of a Linear Map

Definition 3.67. 给定一个 $m \times n$ matrix A. 它的 transpose 记为 A^t，定义为

$$(A^t)_{k,j} = A_{j,k}.$$

同样它有一些简单的代数性质.

1. $(A+C)^t = A^t + C^t$.
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Proposition 3.68. 给定 $m \times n$ matrix A 和 $n \times p$ matrix C. 则

$$(AC)^t = C^t A^t.$$

证明. 直觉上 C^t 是 $p \times n$，A^t 是 $n \times m$，$C^t A^t$ 乘起来是一个 $p \times m$ matrix 才有意义.

$$\begin{aligned}
(C^t A^t)_{j,k} &= \sum_{r=1}^{p} {C^t}_{j,r} {A^t}_{r,k} \\
&= \sum_{r=1}^{n} C_{r,j} A_{k,r} \\
&= \sum_{r=1}^{n} A_{k,r} C_{r,j} \\
&= AC_{k,j} \\
&= (AC)^t_{j,k}.
\end{aligned}$$

□

T' 对应 matrix 是 T 对应 matrix 的转置

Proposition 3.69. 给定 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 则

$$\mathcal{M}(T') = (\mathcal{M}(T))^t.$$

证明. 给定 V 上的 basis $v_1, \cdots, v_n)$ 和其 dual space V' 上的 basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, 同时给定 W 上的 basis $w_1, \cdots, w_m$ 和其 dual space W' 上的 basis $\psi_1, \cdots, \psi_m$. 这里的 $\mathcal{M}(T)$ 就是在前面定义的 basis 上构造出来的. 为了方便我们定义 $A = \mathcal{M}(T)$ 和 $C = \mathcal{M}(T')$.

T' 的 definition 告诉我们 $T'(\psi_k) = \psi_k T$. 直接看 $\mathcal{M}(T')$definition.

$$T'(\psi_k) = C_{1,k}\varphi_k + \cdots + C_{n,k}\varphi_n.$$

LHS 换成 $\psi_k T$，同时 applying v_j.

$$\begin{aligned}(\psi_k \circ T)(v_j) &= (C_{1,k}\varphi_k)(v_j) + \cdots + (C_{n,k}\varphi_n)(v_j). \\ &= C_{j,k}.\end{aligned} \tag{1}$$

注意这里为什么直接等于 $C_{j,k}$ 了呢？这是 dual basis，只有 $\phi_j v_j = 1$，其余项均为零.

$\mathcal{M}(T)$definition.

$$Tv_j = A_{1,j}w_1 + \cdots + A_{m,j}w_m.$$

把 A 换成 A^t 有

$$Tv_j = A^t_{j,1}w_1 + \cdot + A^t_{j,m}w_m.$$

代入 (1) 式中 LHS.

$$(\psi_k \circ T)(v_j) = A^t_{j,1}\psi_k w_1 + \cdots A^t_{j,m}\psi_k w_m \quad = A^t_{j,k}.$$

$\square$

The Rank of a Matrix

Definition 3.70. 给定 $m \times n$ matrix A，其中元素均属于 F.

- A 的 row rank(行秩): the dimension of the span of the rows of A in $F^{1,n}$.
- A 的 column rank(列秩): the dimension of the span of the columns of A in $F^{m,1}$.

通俗的来讲，就是把每行 $1 \times n$ 的 matrix 拿出来构造一个 span, 然后得到的这个 span 的 dimension 就是 row rank，column rank 同理.

Example 3.71. 给定 matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

它的 row rank 是

$$\operatorname{span}((4\ 7\ 1\ 8), (3\ 5\ 2\ 9))$$

的 dimension. 观察到这个两个 vector 都不是另一个的 scalar multiple，所以它们是 linearly independent 的，这个 span 的 dimension 也是 2.

它的 column rank 是

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right).$$

的 dimension. 观察到最前面两个 vectors 是 linearly independent. 所以 span 的 dimension 最少是 2，但是这个 span 是 $F^{2,1}$ 的 subspace，所以最多也是 2. 最终 column rank 是 2.

$\mathcal{M}(T)$ 的 column rank.

Proposition 3.72. 给定两个 finite-dimensional vector space V, W 和 linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 则 range T 的 dimension 等于 $\mathcal{M}(T)$ 的 column rank.

这是很显然的，$\mathcal{M}$ 的每一列对应 $T(v_1), \cdots, T(v_n)$ 是可以确定 range T 上任意一个 vector 的.

row rank 和 column rank 的关系.

Proposition 3.73. 给定 $A \in F^{m,n}$. 则 A 的 row rank 和 column rank 是相等的.

证明. 由3.33 定义 matric multiplication map $T' \colon F^{n,1} \to F^{m,1}$

$$T'(x) = Ax.$$

则 $A = \mathcal{M}(T)$，其中 $\mathcal{M}^{-1}_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)} \colon F^{n,1} \to V$ 定义为 $\mathcal{M}^{-1}_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)x$，$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 为标准基，同理 $\mathcal{M}^{-1}_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=m)} \colon F^{m,1} \to W$ 定义为 $\mathcal{M}^{-1}_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)x$，$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$ 为标准基. (改定义需仔细体会一

下3.33中的交换图)

$$\begin{aligned}
\text{column rank of } A &= \text{column rank of } \mathcal{M}(T) \\
&= \dim \operatorname{range} T && 3.72 \\
&= \dim \operatorname{range} T' && 3.66 \\
&= \text{column rank of } \mathcal{M}(T') && 3.72 \\
&= \text{column rank of } A^t && 3.69 \\
&= \text{row rank of } A
\end{aligned}$$

淦! $\square$

至此 column rank 和 row rank 统称为 rank!