

# Lattice

枫聆

2021 年 10 月 18 日

## 目录

<b>1</b>	<b>The Elements of Universal Algebra</b>	<b>2</b>
1.1	Definition and Examples of Algebras . . . . .	2
1.2	Isomorphic Algebras and Subalgebras . . . . .	4
1.3	Algebraic Lattices and Subuniverses . . . . .	5
1.4	The Irredundant Basis Theorem . . . . .	9

# The Elements of Universal Algebra

## Definition and Examples of Algebras

One of the aims of universal algebra is to extract, whenever possible, the common elements of several seemingly different types of algebraic structures.

**Definition 1.1.** For  $A$  a nonempty set and  $n$  a nonnegative integer we define  $A^0 = \{\emptyset\}$ , and, for  $n > 0$ ,  $A^n$  is the set of  $n$ -tuples of elements from  $A$ . An **n-ary operation** (or function) on  $A$  is any function  $f$  from  $A^n$  to  $A$ ;  $n$  is the **arity** (or rank) of  $f$ . A **finitary operation** is an  $n$ -ary operation, for some  $n$ . The image of  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  under an  $n$ -ary operation  $f$  is denoted by  $f(a_1, \dots, a_n)$ . An operation  $f$  on  $A$  is called a **nullary operation** (or constant) if its arity is zero; it is completely determined by the image  $f(\emptyset)$  in  $A$  of the only element  $\emptyset$  in  $A^0$ , and as such it is convenient to identify it with the element  $f(\emptyset)$ . Thus a nullary operation is thought of as an element of  $A$ . An operation  $f$  on  $A$  is **unary, binary, or ternary** if its arity is 1, 2, or 3, respectively.

**Definition 1.2.** A **language** (or type) of algebras is a set  $\mathcal{F}$  of function symbols such a nonnegative integer  $n$  is assigned to each member  $f$  of  $\mathcal{F}$ . This integer is called the arity (or rank) of  $f$ , and  $f$  is said to be an  $n$ -ary function symbol. The subset of  $n$ -ary function symbols in  $\mathcal{F}$  is denoted by  $\mathcal{F}_n$ .

the language of algebra 就是一堆  $n$  元操作, 简称  $n$ -ary function.

**Definition 1.3.** If  $\mathcal{F}$  is a language of algebras then an **algebra**  $\mathbf{A}$  of type  $\mathcal{F}$  is an ordered pair  $\langle A, F \rangle$  where  $A$  is a **nonempty set** and  $F$  is a family of **finitary operations** on  $A$  indexed by the language  $\mathcal{F}$  such that corresponding to each  $n$ -ary function symbol  $f$  in  $\mathcal{F}$  there is an  $n$ -ary operation  $f^{\mathbf{A}}$  on  $A$ . The set  $A$  is called the **universe** (全域) (or underlying set) of  $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$ , and the  $f^{\mathbf{A}}$  's are called the **fundamental operations** (基本运算) of  $\mathbf{A}$ . (In practice we prefer to write just  $f$  for  $f^{\mathbf{A}}$ —this convention creates an ambiguity which seldom causes a problem. However, in this chapter we will be unusually careful.) If  $\mathcal{F}$  is finite, say  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ , we often write  $\langle A, f_1, \dots, f_k \rangle$  for  $\langle A, F \rangle$ , usually adopting the convention:

$$\text{arity } f_1 \geq \dots \geq \text{arity } f_k.$$

An algebra  $\mathbf{A}$  is **unary** if all of its operations are unary, and it is **mono-unary** if it has just one unary operation.

抽象来说一个 algebra 就是一个集合和一堆 finitary operations 构成的, 在目前已经学到的代数中 operation 的 arity 大多数不会超过 2(够 modern).

**Example 1.4.**  $\mathbf{A}$  is a **groupoid** if it has just one binary operation; this operation is usually denoted by  $+$  or  $\cdot$ , and we write  $a + b$  or  $a \cdot b$  for the image of  $\langle a, b \rangle$  under this operation, and call it the sum or product of  $a$  and  $b$ , respectively.

**Definition 1.5.** An algebra  $\mathbf{A}$  is **finite** if  $|\mathbf{A}|$  is finite, and trivial if  $|\mathbf{A}| = 1$ .

**Example 1.6.** Some well-known algebras

- Group
- Semigroup (半群) and Monoid (么半群)
- ...

## Isomorphic Algebras and Subalgebras

**Definition 1.7.** Let  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  be two algebras of the same type  $\mathcal{F}$ . Then a function  $\alpha: A \rightarrow B$  is an **isomorphism** from  $\mathbf{A}$  to  $\mathbf{B}$  if  $\alpha$  is one-to-one and onto, and for every n-ary  $f \in \mathbf{F}$ , and for  $a_1, \dots, a_n \in A$ , we have

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

We say  $\mathbf{A}$  is isomorphic to  $B$ , if there is a isomorphism from  $\mathbf{A}$  to  $\mathbf{B}$ . i.e. suppose  $f$  is  $*$ ,  $\alpha(a * b) = \alpha(a) * \alpha(b)$ .

老样子元素上保持 bijective, 对应的运算结果也保持一致.

**Definition 1.8.** Let  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  be two algebras of the same type. Then  $\mathbf{B}$  is a **subalgebra** of  $A$  if  $B \subseteq A$  and every fundamental operation of  $\mathbf{B}$  is the restriction of the corresponding operation of  $\mathbf{A}$ , i.e., for each function symbol  $f$ ,  $f^{\mathbf{B}}$  is  $f^{\mathbf{A}}$  restricted to  $B$ ; we write simply  $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ .

A **subuniverse** of  $\mathbf{A}$  is a subset  $B$  of  $A$  which is closed under the fundamental operations of  $\mathbf{A}$ , i.e., if  $f$  is a fundamental n-ary operation of  $\mathbf{A}$  and  $a_1, \dots, a_n \in B$  we would required  $f(a_1, \dots, a_n) \in B$ .

这个 restriction 就是只对定义域做限制的意思, subalgebra 是一种构造新代数方法, 后面会学到另外几种. subalgebra 和 subuniverse 的联系是, subalgebra 一定是 subuniverse, 但是 subuniverse 不一定是 subalgebra, i.e 如果一个 algebra 有一个 nullary, 那么 empty set 是一个 subuniverse, 但是它是不是 subalgebra.

**Definition 1.9.** Let  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  be of the same type. A function  $\alpha: A \rightarrow B$  is an embedding of  $\mathbf{A}$  into  $\mathbf{B}$  if  $\alpha$  is one-to-one and satisfies

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

Such an  $\alpha$  is also called a monomorphism. We say  $\mathbf{A}$  can be embedded in  $\mathbf{B}$  if there is an embedding of  $\mathbf{A}$  into  $\mathbf{B}$ .

单纯地去掉 surjective.

**Theorem 1.10.** If  $\alpha: A \rightarrow B$  is an embedding, then  $\alpha(A)$  is a subuniverse of  $\mathbb{B}$ .

证明. 我们需要说明  $\alpha(A)$  在对应的 n-ary operation 下保持封闭. 因为  $\alpha$  是 embedding, 所以对应一个 n-ary operation  $f$  和  $a_1, \dots, a_n \in A$  有

$$f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) = \alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \alpha(A).$$

已经证毕. □

## Algebraic Lattices and Subuniverses

这一章阐述 algebraic lattice 是如何自然地出现在了 universe algebra 里面.

**Definition 1.11.** Given an algebra  $\mathbf{A}$  define, for every  $X \subseteq A$ ,

$$\text{Sg}(X) = \bigcap \{ B \mid X \subseteq B \text{ and } B \text{ is a subuniverse of } \mathbf{A} \}.$$

We read  $\text{Sg}(X)$  as "the subuniverse generated by  $X$ ".

**Definition 1.12.** A closure operator  $C$  on the set  $A$  is an algebraic closure operator if for  $X \subseteq A$

$$C(X) = \bigcup \{ C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ and } Y \text{ is finite} \}.$$

**Theorem 1.13.** If we are given an algebra  $\mathbf{A}$ , then  $\text{Sg}$  is an algebraic closure operator on  $A$ .

证明. 很明显任意地 subuniverses 交还是一个 subuniverse, 所有的 subuniverses 构成了一个 closure system, 所以  $\text{Sg}$  是一个 closure operator. 对于任意的  $X \subseteq A$  我们定义

$$E(X) = X \cup \{ f(a_1, \dots, a_n) \mid f \text{ is a fundamental } n\text{-ary operation on } A \text{ and } a_1, \dots, a_n \in X \}.$$

然后定义它的  $n$  次复合  $E^n(X)$  为

$$E^0(X) = X$$

$$E^{n+1}(X) = E(E^n(X)).$$

由于  $A$  上所有 fundamental operation 都是 finitary, 且有

$$X \subseteq E(X) \subseteq \dots \subseteq E^n(X).$$

接下来我们来证明下面的式子

$$\text{Sg}(X) = X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \dots.$$

思路是 (1)  $\text{Sg}(X) \subseteq X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \dots$  和 (2)  $X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \dots \subseteq \text{Sg}(X)$ .

(1) 我们从  $X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \dots$  这种构造出发, 实际上这种构造得到的就是包含  $X$  的最小 subuniverse. 考虑它的 bound, 可能存在某个最小的  $k$  使得  $E^{k+1}(E^k(X)) = E^k(X)$ , 那么当  $i > k$  时都有  $E^i(X) = E^k(X)$ , 无疑现在  $E^k(X)$  是一个 subuniverse 并且包含  $X$ , 这其实就说明了  $\text{Sg}(X) \subseteq E^k(X)$ . 如果你不能找到这样的  $k$ , 那么会有若  $i > k$ , 那么  $E^k(X) \subset E^i(X)$ , 但是它是 bound by  $A$ , 且  $\text{Sg}(A) = A$ , 这是显然地.

(2) 任取  $x \in \text{Sg}(X)$ , 我们用  $\{Z_i\}_{i \in I}$  表示所有 such that  $X \subseteq Z$  且  $Z$  是  $\mathbf{A}$  的一个 subuniverse. 那么对任意的  $i$ , 有  $x \in Z_i$ . 那么我们更有

$$\text{Sg}(X) = E^n(Z_1) \cap E^n(Z_2) \cap \dots.$$

对任意的  $n$  成立. 并且我们还有

$$E^n(X) \subseteq E^n(Z_1) \cap E^n(Z_2) \cap \cdots.$$

这是因为每一项都有  $E^n(X) \subseteq E^n(Z_i)$ . 那么我们把  $n$  取遍, 就可以得到

$$X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \cdots \subseteq \text{Sg}(X).$$

综上  $\text{Sg}(X) = X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \cdots$ .

那么对于任意的  $a \in \text{Sg}(X)$ , 都有  $a \in E^n(X)$  其中  $n < \omega$  ( $\omega$  表示无穷远它比任何的自然数都大). 那么存在 finite  $Y \subseteq X$ , 使得  $a \in E^n(Y)$ . 这个过程就是把生成  $a$  的哪些元素在  $E^{n-1}(X)$  里面挑出来, 然后循环往复,  $n$  是 finite 的, 所以  $Y$  也是有限的. 这就说明了  $\text{Sg}(X) = \bigcap \text{Sg}(Y_i)$ , 因为每一个  $a$  都可以找到一个 finite  $Y$ .

还是写一下严格的归纳假设吧, 首先我们点出一个关系. 注意到  $E$  是单调的, 那么给定两个集合  $X, Y$ , 因为  $X \subseteq X \cup Y$  和  $Y \subseteq X \cup Y$ , 所以  $E^k(X) \cup E^k(Y) \subseteq E^k(X \cup Y)$ .

我们要证明 (1) 任意的  $x \in E^k(X)$  都有 finite set  $Y \subseteq X$  使得  $x \in E^k(Y)$ .

那么当  $k = 0$  时,

$$a \in E^0(X) = X \Rightarrow a \in E(\{a\}),$$

所以这里可以取  $Y = \{a\}$ .

假设对任意  $k < n$ , 都有命题 (1) 成立, 那么当  $k = n$  时,

$$\begin{aligned} a \in E^n(X) &\Leftrightarrow a \in E(E^{n-1}(X)) \\ &= E^{n-1}(X) \cup \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \text{ is a fundamental } t\text{-ary operation on } A \text{ and } a_1, \dots, a_n \in X\} \\ &= E^{n-1}(X) \cup B_n, \end{aligned}$$

要么  $a \in E^{n-1}(X)$  或者  $a \in B_n$ . 如果  $a \in E^{n-1}(X)$ , 那么归纳假设就完成了. 如果  $a \in B_n$ , 则  $a \in E(\{a_1, \dots, a_t\})$ , 其中  $a_1, \dots, a_t \in E^{n-1}(X)$  (这里用  $t$  是不想和这个上标  $n$  弄混), 那么根据假设有  $a_i \in E^{n-1}(Y_i)$ , 其中 finite set  $Y_i \subseteq X$ , 再替换一下

$$a \in E(\{a_1, \dots, a_t\}) \subseteq E(\bigcup_1^t E^{n-1}(Y_i)) \subseteq E(E^{n-1}(\bigcup_1^t Y_i)) = E^n(\bigcup_1^t Y_i).$$

所以这里取  $Y = \bigcup_{i=1}^t Y_i$ , 它确实是一个 finite set.

□

**Corollary 1.14.** If  $\mathbf{A}$  is an algebra then  $\mathcal{L}_{\text{Sg}}$ , the lattice of subuniverses of  $\mathbf{A}$ , is an algebraic lattice.

**Definition 1.15.** Given an algebra  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Sub}(\mathbf{A})$  denotes the set of subuniverses of  $A$ , and  $\text{Sub}(\mathbf{A})$  is the corresponding algebraic lattice, the lattice of subuniverses of  $\mathbf{A}$ . For  $X \subseteq A$  we say  $X$  generates  $\mathbf{A}$  if  $\text{Sg}(X) = A$ . The algebra  $\mathbf{A}$  is finitely generated if it has a finite set of generators.

如果  $A$  有有限多个生成元, 那么就说 algebra  $\mathbf{A}$  是有限生成的.

**Theorem 1.16.** (closed sets 对应某个 algebra 的 universes) Let  $\Gamma$  be an algebraic closure operator on a set  $X$ . Then there is an  $\mathbf{A}$  on the set  $X$  such that the subuniverse of  $\mathbf{A}$  are precisely the closed sets of  $\Gamma$ .

证明. Basic: 我们要构造出来一个 algebra  $\mathbf{A}$ , 首先我们得确定在哪个集合上, 再给定它的 operations.

我们的目标: 当前的前提是给定  $X$  上的 algebraic closure operator  $\Gamma$ , 以  $X$  为 underlying set, 构造其上的 operations 使得对应的 algebra  $\mathbf{A}$  的 universes 都是  $\Gamma$  对应的 closed set.

对任意的 finite set  $B \subseteq X$  和任意的  $b \in \Gamma(B)$ , 我们定义  $n$ -ary operation 如下, 其中  $n = |B|$ .

$$f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} b & \text{if } B = \{a_1, \dots, a_n\} \\ a_1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

接下来我们证明  $\Gamma$  对应的 closed set  $A$  是一个在上面定义的 operations 下是封闭的. 这里明显地有

$$f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma(\{a_1, \dots, a_n\}).$$

这里我们再利用一个结论 (证明在 lattice note 里面), (1)  $\Gamma$  是 algebraic closure operation, 那么若  $A \subseteq X$  是一个 closed set 当且仅当  $\Gamma(F) \subseteq A$  对所有的 finite set  $F \subseteq A$  成立. 那么任取对任意上述的 operation, 我们取  $a_1, \dots, a_n \in A$ , 那么

$$f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma(\{a_1, \dots, a_n\}) \subseteq A$$

所以上述所有的 operations 在  $A$  下是封闭.

反过来我们还要证明一个 universe  $S$  是 closed set. 还是用 (1) 这个结论, 我们证明所有的 finite set  $B \subseteq S$ ,  $\Gamma(B) \subseteq S$ , 其中

$$\Gamma(B) = \{ f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) \mid B = \{a_1, \dots, a_n\}, b \in \Gamma(B) \}.$$

自然地, 因为  $f_{B,b}(a_1, \dots, a_n)$  在  $S$  下是封闭的, 这个 operation 的构造就巧到这里, 所以  $\Gamma(B) \subseteq S$ .  $\square$

**Theorem 1.17.** (algebraic lattice 同构于某个 algebra 的 universes 构成的 lattice) If  $\mathcal{L}$  is an algebraic lattice, then  $\mathcal{L} \cong \text{Sub}(\mathbf{A})$ , for some algebra  $A$ .

证明. 这个命题是上面命题的一个推论, 这里的  $\mathbf{A}$  的 underlying set 可以设为  $\mathcal{L}^c$  即  $\mathcal{L}$  上所有的 compact elements. 关于这一点去看 lattice note 里面  $\mathcal{L} \cong \mathcal{C}_\Delta$  部分. 那么接下来就是证明  $\text{Sub}(A) = \mathcal{C}_\Delta$ , 这里有更比上面更简单的 operations 的构造方式. 对任意的  $a \in \mathcal{C}_\Delta$ , 定义一个 unary operation

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{if } a \leq x \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

把这样的 unary operation 作用到某个  $x \subseteq \mathcal{L}^c$ , 它生成就是 principle ideal  $\downarrow x$ , 自然地到某个  $A \subseteq lattice^c$ , 它就是  $\Delta(A)$ .  $\square$



## The Irredundant Basis Theorem

**Definition 1.18.** Let  $C$  be a closure operator on  $A$ . For  $n < \omega$ , let  $C_n$  be the function defined on  $\text{Su}(A)$  (power set) by

$$C_n(X) = \bigcup \{ C(Y) \mid Y \subseteq X, |Y| \leq n \}.$$

We say that  $C$  is  $n$ -ary if

$$C(X) = C_n(X) \cup C_n^2(X) \cup \dots,$$

where

$$\begin{aligned} C_n^1(X) &= C_n(X), \\ C_n^{k+1}(X) &= C_n(C_n^k(X)). \end{aligned}$$

也可以用  $C(X) = C_n^\omega(X)$  来表示, 其中  $\omega$  表示基数最小 infinite set 的基数. Tarski 原本  $C_n$  的 definition 里面去掉了  $|Y| \leq n$  中的等号, 这个  $n$  也叫做 the rank of  $(A, C)$ .

**Lemma 1.19.** Let  $\mathbf{A}$  be an algebra all of whose fundamental operations have arity at most  $n$ . Then  $\text{Sg}$  is an  $n$ -ary closure operator on  $A$ .

证明. 从 Theorem 1.13 我们得到

$$E(X) \subseteq (\text{Sg})_n(X) \subseteq \text{Sg}(X),$$

第一个  $\subseteq$  由  $E(X)$  的 definition, 第二个  $\subseteq$  由  $\text{Sg}$  的 definition. 因此

$$\begin{aligned} \text{Sg}(X) &= X \cup E(X) \cup E^2(X) \cup \dots \\ &\subseteq (\text{Sg})_n(X) \cup (\text{Sg})_n^2(X) \cup \dots \\ &\subseteq \text{Sg}(X). \end{aligned}$$

所以  $\text{Sg}(x) = (\text{Sg})_n(X) \cup (\text{Sg})_n^2(X) \cup \dots$ . □

**Theorem 1.20.** Let  $C$  be a closure operator on  $A$ .  $A'$  is closed set such that  $C(A') = A'$  and  $C'$  is the restriction of  $C$  to the family of subsets of  $A'$ . Then  $C'$  is also a closure operator; if, moreover,  $C$  is  $n$ -ary, then so is  $C'$ .

证明.  $C'$  是 closure operator 这是显然的, 对于任意的  $B' \subseteq A'$ ,  $C'(B') = C(B')$ , 所以它们两个 rank 是相同的. □

**Definition 1.21.** The set  $X$  is a minimal generating set for  $Y$  if  $X$  generates  $Y$  and no proper subset of  $X$  generates  $Y$ .

**Definition 1.22.** Let  $C$  be a closure operator on  $S$ . A set  $X \subseteq S$  is called irredundant if  $y \notin C(X - \{y\})$  for every  $y \in X$ .

**Definition 1.23.** Suppose  $C$  is a  $n$ -ary closure operator on  $S$ . A minimal generating set of  $S$  is called an **irredundant basis**. Let  $\text{IrB}(C) = \{n \leq \omega \mid S \text{ has an irredundant basis of } n \text{ elements}\}$ .

**Proposition 1.24.** If  $S$  has a finite basis  $B$ , then it also has a finite irredundant basis  $B'$ , so  $\text{IrB}(S)$  is not empty.

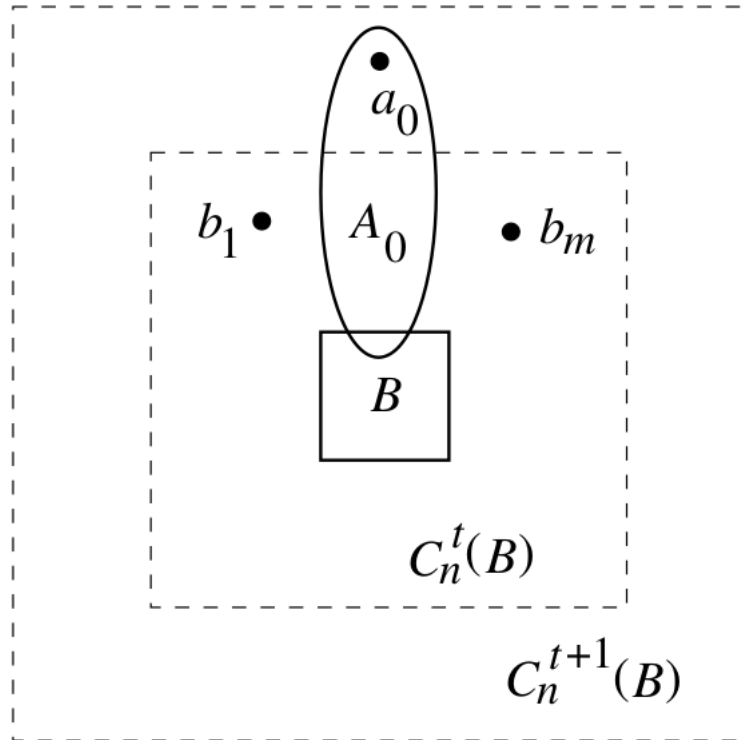
**Proposition 1.25.** If  $C$  is finite ary, then every basis for  $S$  includes a finite irredundant basis. So that no infinite basis of  $S$  is irredundant. Thus  $\text{IrB}(S)$  is the set of cardinalities of all irredundant basis for  $S$ .

**Theorem 1.26.** If  $C$  is an  $n$ -ary closure operator on  $S$  with  $n \geq 2$ , and if  $i < j$  with  $i, j \in \text{IrB}(C)$  such that

$$\{i+1, \dots, j-1\} \cap \text{IrB}(C) = \emptyset,$$

then  $j-i \leq n-1$ . In particular, if  $n=2$  then  $\text{IrB}(C)$  is a convex subset of  $\omega$ , i.e., a sequence of consecutive numbers.

证明. 让  $B$  是一个 irreducible basis 且  $|B| = j$ . 让  $K$  表示那些 irreducible basis  $A$  且  $|A| \leq i$  构成的集合. 我们的策略是从  $K$  里面挑一个  $A_0$  出来, 让这个  $A_0 \subseteq C_n^{t+1}(B)$  但是  $A_0 \not\subseteq C_n^t(B)$ , 那么再取一点  $a_0 \in C_n^{t+1}(B) - C_n^t(B)$ , 把这个  $a_0$  替换成  $c_1, \dots, c_m \in C_n^t(B)$ , 这样构成了一个新的 base  $A_1$ , 它里面是有一个 irredundant basis  $A_2$  的, 我们来探讨  $A_2$  存在性. 这是基本的想法, 下面来阐述一下这个想法的细节。



首先  $B$  是一个 irreducible basis 且  $C$  是一个  $n$ -ary closure operator, 那么

$$A \subseteq S = C(B) = C_n^\omega(B).$$

我们由前面的命题可以知道  $A$  是一个 finite set 且是一个 base, 那么  $A \not\subseteq B$ . 且  $C_n^{k+1} \supseteq C_n^k$ , 那么是可以找到某个  $t$  使得  $A \subseteq C_n^{t+1}(B)$  且  $A \not\subseteq C_n^t(B)$  的, 这就是为什么可以找到上面  $A_0$  的原因. 并且如果我们找到这样的  $A_0 \in K$ , 那么

$$A_0 \not\subseteq C_n^t(B) \text{ implies } A \not\subseteq C_n^t(B),$$

对任意的  $A \in K$  成立. 假设不成立, 会得到  $A$  不是 irreducible 的, 这是矛盾的. 我们再考虑对于  $A \in K$  且  $A \subseteq C_n^{t+1}(B)$ , 我们假设

$$|A_0 \cap (C_n^{t+1}(B) - C_n^t(B))| \leq |A \cap (C_n^{t+1}(B) - C_n^t(B))|,$$

我们让  $A_0$  更靠近  $B$  一点, 就是指  $C_n^{t+1}(B)$  和  $C_n^t(B)$  中间这个环, 包含更少一点  $A_0$  中的点. 这样做的目的就是让后面得到的新 base 的基数尽可能的小. 然后我们选择一点  $a_0 A_0 \cap (C_n^{t+1}(B) - C_n^t(B))$ . 那么肯定是存在  $b_1, \dots, b_m \in C_n^t(B)$ , 其中  $m \leq n$ , 使得

$$a_0 \in C_n(b_1, \dots, b_m).$$

然后把  $a_0$  替换掉得到的新 base  $A_1 = (A - \{a_0\}) \cup \{b_1, \dots, b_m\}$ , 那么  $A_0 \subseteq C(A_1)$ , 所以

$$C(A_0) \subseteq C(A_1).$$

那么在  $A_1$  上我们是找到一个 irredundant basis  $A_2 \subseteq A_1$ . 现在我们有  $|A_2| < |A_0| + n$ . 如果  $|A_0| + n \leq j$ , 那么这个  $A_2$  会和我们选择的  $A_0$  造成矛盾, 为什么呢? 因为我们前提是  $i$  和  $j$  之间是没有 irreducible basis 的, 那么  $|A_2| \in K$ , 同时  $A_2 \subseteq C_n^{t+1}(B)$ , 就会造成

$$|A_2 \cap (C_n^{t+1}(B) - C_n^t(B))| < |A_0 \cap (C_n^{t+1}(B) - C_n^t(B))|.$$

所以这里  $|A_0| + n \geq j$ , 其中  $|A_0| \leq i$ , 那么就可以得到  $j - i \leq n$ .

我们来理一下关系, 这个命题在讲如果两个 irredundant basis 的基数之间距离小到一定程度, 你找不到一个 irreducible basis 的基数在它们之间. 这个距离如何描述呢?  $j - i < n$ . 上面证明的方法是尝试在 irreducible basis 基数小于  $i$  的 basis 的基础上构造一个新的 irreducible basis 出来, 看它落在哪里.

现在我们构造出来了这个新的 irreducible basis  $A_2$ , 我们只知道  $|A_2| < i + n$ , 并不知道它和  $i$  和  $j$  有什么关系.

我们先来思考一下  $|A_2|$  和  $i$  的关系, 我们先得思考一下  $A_0$  取法的特殊性,  $A_0$  minimal condition 这个性质可以让我们取出来  $A_2$  它不在  $K$  里面的, 因为  $A_0$  minimal condition 是相对于整个  $A \in K$  且  $A \subseteq C_n^{t+1}(B)$  而言的, 这是我们的假设. 所以  $|A_2| > i$ .

那么  $|A_2|$  和  $j$  的关系如何呢? 我们来比较  $|A_2|$  的 upper bound 和  $j$  的关系. 然后我们知道了这个 upper bound 不能小于等于  $j$  的, 所以最后得到了我们想要的结论.  $\square$