Linear Algebra

枫聆

2021 年 2 月 12 日

目录

Group

Ring

Definition 2.1. 在集合 R 上定义两种二元运算操作 $+$ 和 $\cdot$，并且满足以下条件

1. R 在 $+$ 下是一个 abelian group:
   - 加法结合律: $\forall a, b, c \in R, (a+b)+c = a+(b+c)$.
   - 加法交换律: $\forall a, b \in R, a+b = b+a$.
   - 加法零元: $\forall a \in R, a+0 = a$.
   - 加法逆元: $\forall a \in R, \exists -a \in R, a+(-a) = 0$.
2. R 在 $\cdot$ 下是一个 monoid:
   - 乘法结合律: $\forall a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   - 乘法单位元: $\forall a \in R, 1 \cdot a = a, a \cdot 1 = a$.
3. 乘法分配率
   - 左分配: $\forall a, b, c \in R, a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
   - 右分配: $\forall a, b, c \in R, (b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

则称 R 是一个 **ring**，上面条件称为 **ring axioms**.

Module

Definition 3.1. 给定一个带乘法单位元的 ring R. 一个 **left** R **-module** M 由一个 abelian group $(M,+)$ 和一个操作 $\cdot: R\times M\to M$ 组成，并且对于任意的 $r,s\in R$ 和任意的 $x,y\in M$ 满足以下条件:

1. $r\cdot(x+y)=r\cdot x+r\cdot y$.
2. $(r+s)\cdot x=r\cdot x+s\cdot x$.
3. $(rs)\cdot x=r\cdot(s\cdot x)$.
4. $1\cdot x=x$.

类似也有 **right** R**-module**.

关于 module 更形象的理解可以去看看写在 linear algebra 最前面的东西.

If M is a left R-module, then the action of an element r in R is defined to be the map $M\to M$ that sends each x to rx (or xr in the case of a right module), and is necessarily a group endomorphism of the abelian group $(M,+)$. The set of all group endomorphisms of M is denoted $End_Z(M)$ and forms a ring under addition and composition, and sending a ring element r of R to its action actually defines a ring homomorphism from R to $End_Z(M)$.

注意这里的环同态是在确定 M 是一个 module 的情况下反过来推.