

# Lattice

枫聆

2021 年 3 月 4 日

## 目录

<b>1</b>	<b>Ordered Sets</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Semilattices, Lattices and Complete Lattices</b>	<b>6</b>
2.1	Semilattice . . . . .	6
2.2	Lattice . . . . .	8
2.3	Complete Lattice . . . . .	9
2.4	Closure System . . . . .	11

## Ordered Sets

**Definition 1.1.** **Partially ordered set** is a system  $\mathcal{P} = (P, \leq)$  where  $P$  is a nonempty set and  $\leq$  is a binary relation on  $P$  satisfying, for all  $x, y, z \in P$ ,

1.  $x \leq x$ , (reflexivity)
2. if  $x \leq y$  and  $y \leq x$ , then  $x = y$ , (antisymmetry)
3. if  $x \leq y$  and  $y \leq z$ , then  $x \leq z$ . (transitivity)

**Definition 1.2.**  $\mathcal{C}$  is a **chain** if for every  $x, y \in \mathcal{C}$ , either  $x \leq y$  or  $y \leq x$ .

chain 上的元素都可以相互比较, 所以它是 totally ordered.

**Definition 1.3.** We say that  $x$  is **covered** by  $y$  in  $\mathcal{P}$ , written  $x \prec y$ , if  $x \leq y$  and there is no  $z \in P$  with  $x \leq z \leq y$ .

**Definition 1.4.** **Hasse diagram** for a finite partially order set  $\mathcal{P}$ : the elements of  $P$  are represented by points in the plane, and a line is drawn from  $a$  up to  $b$  precisely when  $a \prec b$ .



**Definition 1.5.** Given a partially order set,  $f$  is a **order preserving map** satisfying the condition  $x \leq y$  implies  $f(x) \leq f(y)$ .

**Definition 1.6.** Given two posets  $(P, \leq_P)$  and  $(Q, \leq_Q)$ , an **order isomorphism** from  $(P, \leq_P)$  to  $(Q, \leq_Q)$  is a bijective order preserving map.

**Definition 1.7.** Given two posets  $(P, \leq_P)$  and  $(Q, \leq_Q)$ , an **order embedding** from  $(P, \leq_P)$  to  $(Q, \leq_Q)$  is a both order-preserving and order-reflecting map that  $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ .

相比 order isomorphism 而言稍微弱一点, 不需要是一个 surjective.

**Definition 1.8.** An **ideal**  $I$  of a partially ordered set  $\mathcal{P}$  is a subset of the elements of  $P$  which satisfy the property that if  $x \in \mathcal{P}$  and exists  $y \in I$  with  $x \leq y$ , then  $x \in I$ .

衍生自 the ideal of ring, 后面我们将会看见 the ideal of lattice.

**Definition 1.9.** Given an ordered set  $\mathcal{P} = (P, \leq)$ . The **dual of  $P$**  is another poset  $\mathcal{P}^d = (P, \leq^d)$  with the order relation defined by  $x \leq^d y \iff y \leq x$ .

**Definition 1.10.** The dual notion of an ideal is called a **filter** that  $F$  is a subset of  $P$  such  $x \geq y \in F$  implies  $x \in F$

类似的还有 principle ideal 和 principle filter. 就是通过一个元素生成的.

**Definition 1.11.** The poset  $\mathcal{P}$  has a **maximum**(element) if there exists  $x \in P$  such that  $y \leq x$  for all  $x \in P$ .

An element  $x \in P$  is **maximal** if there is no element  $y \in P$  with  $x \leq y$  and  $x \neq y$ .

maximum 是一个名词表示最大值 (greatest), maximal 是一个形容词表示极大的意思. 在 poset 中可能不只有一个 maximal element.

**Lemma 1.12.** The following are equivalent for an poset  $\mathcal{P}$ .

1. Every nonempty subset  $S \subseteq P$  contains an element minimal in  $S$ .
2.  $\mathcal{P}$  contains no infinite descending chain

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$$

这里去掉等号是指  $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq \cdots$

3. If

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$$

in  $\mathcal{P}$ , then there exists  $k$  such that  $a_n = a_k$  for all  $n \geq k$ .

这个 lemma 被称为 descending chain condition(DCC). 对偶地也有 ascending chain condition(ACC). original 'a partially ordered set  $\mathcal{P}$  requires that all decreasing sequences in  $\mathcal{P}$  become eventually constant'.

证明. (2)  $\Rightarrow$  (3) 前提只存在 finite descending chain. 假设 (3) 不成立, 且  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$  是 infinite chain. 则对于任意的  $k$ , 都能找到  $n \geq k$  使得  $a_n \neq a_k$  且  $a_k \geq a_n$ , 那么  $a_k > a_n$ . 这样从  $k = 0, 1, 2, \cdots$  开始我们每次都可以找到  $a_{n_0} > a_{n_1} > \cdots$ . 这样我们实际构造了一个 infinite descending chain, 这是和前提矛盾的. 若  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$  是一个 finite chain, 它的最后一个元素显然是满足 (3), 这和假设是矛盾的.

(3)  $\Rightarrow$  (2) 也是分 infinite chain 和 finite chain 来讨论, finite 是显然的, infinite 的时候可以把它变成 finite.

(1)  $\Rightarrow$  (2) (1) 前提满足下, 假设 (2) 不成立, 即  $\mathcal{P}$  存在 infinite descending chain. 把这个 chain 上的元素取出来组成一个 subset  $S$ , 那么任取  $a_k$  都有  $a_{k+1} \leq a_k$ . 即找不到 minimal.

(2)  $\Rightarrow$  (1) (2) 前提满足下, 假设 (1) 不成立. 这里需要用一下[选择公理](#)了, 定义  $S$  上一个选择函数  $f: S \rightarrow T$ , 其中  $T \subseteq S$ . 让  $a_0 = f(S)$ , 递归地定义对任意的  $i \in \omega$  有  $a_{i+1} = f(\{s \in S \mid s < a_i\})$ . 接下来让这个 definition make sense, (2) 前提下  $S$  是没有 minimal, 所以  $\{s \in S \mid s \leq a_i\}$  不是 empty set. 这样就找到了一个 infinite descending chain, 与假设矛盾.

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)

(3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1)

done well!

□

**Lemma 1.13.** Let  $\mathcal{P}$  be an poset satisfyint the DCC. If  $\varphi(x)$  is statement such that

1.  $\varphi(x)$  holds for all minimal elements of  $P$ , and
2. whenever  $\varphi(y)$  holds for all  $y < x$ , then  $\varphi(x)$  holds,

then  $\varphi(x)$  is true for every element of  $P$ .

这个 lemma 有点意思, 如果对  $P$  上所有的 minimal element  $m$  都有命题  $\varphi(m)$  成立, 且  $\mathcal{P}$  满足 DCC. 那么再加上一个条件: 只要对任意元素  $x \in P$ , 满足  $y < x$  都有  $\varphi(y)$  成立. 则对任意元素  $x \in P$  都有  $\varphi(x)$  成立.

证明. 其实 (1) 是 (2) 的一个 special case. 在 (1)(2)hold 的情况下, 我们试想一下  $\varphi(x)$  没有被 hold 住的是哪些元素呢? 即对于某个  $x$ , 存在  $y < x$  使得  $\varphi(y)$  没有被 hold. 递归地, 我们再去考虑这个  $y$ . 那么这里就存在一条 descending chain 在这里, 由于  $\mathcal{P}$  是满足 DCC, 所以这个 descending chain 是 infinite 的. 这条 chain 的结尾显然是一个 minimal element, 但是它是满足  $\varphi(x)$ . 所以实际上是不存在这里的  $x$  不满足  $\varphi(x)$ . □

**Definition 1.14.** Let  $\mathcal{P}$  be poset. Two elements  $a$  and  $b$  of  $\mathcal{P}$  are called **comparable** if  $a \leq b$  or  $a \geq b$ . Otherwise, they are called **incomparable**.

[可比性](#).

**Definition 1.15.** An **antichain** in  $\mathcal{P}$  is a subset  $A$  of  $\mathcal{P}$  in which each pair of different element are incomparable.

**Definition 1.16.** Define the **width** of an poset  $\mathcal{P}$  by

$$w(\mathcal{P}) = \sup\{|A| \mid A \text{ is an antichain in } \mathcal{P}\}$$

where  $|A|$  denotes the cardinality(集合的势) of  $A$ .

**Definition 1.17.** We define the **chain-covering-number** CCN  $c(\mathcal{P})$  to be the least cardinal number  $k$ , such that  $P$  is a union of  $k$  chains(finite) of  $P$ , means  $P = \bigcup C_i$

另一种 covering number, 有趣.

**Lemma 1.18.** Suppose  $P = \bigcup C_i$  where  $i \in I$ , then  $w(\mathcal{P}) \leq |I|$ .

证明. 因为  $|A \cap C_i| \leq 1$  for  $i \in I$ . 也就是说你把  $A$  里面的元素分开塞到  $C_i$  上, 每次都只能塞一个. 那么最多你可以每个  $C_i$  上都塞一个.  $\square$

**Theorem 1.19.** (Dilworth, 1950) Let  $\mathcal{P}$  be a finite poset.  $w(\mathcal{P})$  is width. Then  $\mathcal{P}$  is a union of  $w(\mathcal{P})$ -chains.

证明. TODO.  $\square$

## Semilattices, Lattices and Complete Lattices

### Semilattice

**Definition 2.1.** A **semilattice** is an algebra  $\mathcal{S} = (S, *)$  satisfying, for all  $x, y, z \in \mathcal{S}$ ,

1.  $x * x = x$ ,
2.  $x * y = y * x$ ,
3.  $x * (y * z) = x * (y * z)$ .

where  $*$  is binary operator. 换句话说 **semilattice** 就是一个 **idempotent commutative semigroup**(幂等交换半群).

**Theorem 2.2.** In a semilattice  $\mathcal{S}$ , define  $x \leq y$  if  $x * y = x$ . Then  $(S, \leq)$  is a poset in which every pair of elements has a greater lower bound.

Conversely, given an poset  $P$  with that property, define  $x * y = g.l.b(x, y)$ . Then  $(P, *)$  is a semilattice.

**semilattice** 上弄了一个特殊的 **poset** 出来, 它最好的性质就是任意两个元素都有一个下确界. 把  $*$  换成  $\cap$ , 然后把  $\leq$  换成  $\subseteq$ , 可能就很熟悉了. A semilattice with the above ordering is usually called **meet semilattice**.

证明. 先证明这个是一个 poset.

1.  $x * x = x$  implies  $x \leq x$ ,
2. if  $x \leq y$  and  $x \geq y$ , then  $x = x * y = y * x = y$ ,
3. if  $x \leq y$  and  $y \leq z$ . then  $x * z = (x * y) * z = x * (y * z) = x * y = x$ , so  $x \leq z$ .

这个 greater lower bound 就是  $x * y$ . 首先证明它是一个 lower bound,  $x * (x * y) = x * y$  and  $y * (x * y) = x * y$ , 所以  $x * y$  是一个 lower bound. 再来证明所有的 lower bound 都比它小, 假设  $z \leq x$  和  $z \leq y$ , 即  $z$  是  $\{x, y\}$  的一个 lower bound. 那么  $z * (x * y) = z * y = z$ , 所以  $z \leq (x * y)$ . 最后  $x * y$  的一个 greater lower bound.

□

对偶地, 使得  $x \geq y \iff x * y = x$ , 则称  $\mathcal{S}$  为是一个 **join semilattice**. 自然地在  $(S, \leq)$  下任意的 pair 都有一个 least upper bound  $x \vee y$ .

**Definition 2.3.** A **homomorphism** between two semilattice is a map  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  with the property that  $f(x * y) = f(x) * f(y)$ . An **isomorphism** is a homomorphism that injective and surjective.

nothing new...

**Theorem 2.4.** Let  $\mathcal{S}$  be a meet semilattice. Define  $\phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{S})$  by

$$\phi(x) = \{y \in \mathcal{S} \mid y \leq x\}$$

where  $\mathcal{O}(\mathcal{S})$  is collection of all order ideals of  $\mathcal{S}$ . Then  $\mathcal{S}$  is isomorphic  $(\mathcal{O}(\mathcal{S}), \cap)$  (注意这里是  $\mathcal{S}$  的 image).

怎么感觉这些 ideal 都是 principle ideal.

证明.  $\cap$  表示 set inclusion,  $\phi$  是 order-preserving 和 order-reflecting 还是比较 obvious. 所以  $\phi$  是一个 order embedding of  $\mathcal{S}$  into  $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ . Moreover  $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \cap \phi(y)$  because  $x \wedge y$  is the greatest lower bound of  $\{x, y\}$ , so that  $z \leq x \wedge y$  if and only if  $z \leq x$  and  $z \leq y$ .  $\square$

## Lattice

**Definition 2.5.** A **lattice** is an algebra  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$  satisfying, for all  $x, y, z \in L$ ,

1.  $x \wedge x = x$  and  $x \vee x = x$ ,
2.  $x \wedge y = y \wedge x$  and  $x \vee y = y \vee x$ ,
3.  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  and  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ,
4.  $x \wedge (x \vee y) = x$  and  $x \vee (x \wedge y) = x$ .

就第四个在我们眼里似乎没有那么自然, 它叫 absorption laws(吸收律), 它在这里可以保证后面  $\wedge$  和  $\vee$  定义了相同的 partial order(虽然是 dual). 前三个我们知道 lattice 同时在两种 binary operator 都是 semilattice, 所以我们只要在 lattice 上定义前面合适的 partial order, 它就是 both meet and join semilattice.

**Theorem 2.6.** In a lattice  $\mathcal{L}$ , define  $x \leq y$  if and only if  $x \wedge y = x$ . Then  $(L, \leq)$  is a poset in which every pair of elements has a greatest lower bound and a least upper bound.

证明. 给定一个 pair  $(x, y)$ . 前面已经证明了  $x \wedge y$  是它的一个 greater lower bound. 再根据 lattice definition 的第四条的第一个式子,  $x \vee y$  是它的一个 upper bound, 第二式子说明当  $x \geq y$  时, 有  $x \vee y = x$ , 对偶地  $x \vee y$  是 least upper bound.

这里若  $x \wedge y = x$ , 则  $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ . 类似地  $x \vee y = y$ , 则  $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ . 所以有一个很重要的结论就是  $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$ .  $\square$

类似的我们可以通过一个 poset 构造 lattice.

**Theorem 2.7.** Given an poset  $\mathcal{P}$  with that above property, define  $x \wedge y = \sup\{x, y\}$  and  $x \vee y = \inf\{x, y\}$ . Then  $(P, \wedge, \vee)$  is a lattice.

所以实际上 lattice 可以有两种定义第一种是前面的代数定义, 第二种就是在 poset 上定义 join 和 meet 操作, 这一点要清楚.

the definitions of sublattice, homomorphism and isomorphism ).



## Complete Lattice

**Definition 2.8.** For a subset  $A$  of a poset  $P$ , let  $A^u$  denote the set of all upper bounds of  $A$ ,

$$\begin{aligned} A^u &= \{x \in P \mid x \geq a \text{ for all } a \in A\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \uparrow a \end{aligned}$$

where  $\uparrow a = \{x \in P \mid x \geq a\}$ . Dually,  $A^l$  is the set of all lower bounds of  $A$ ,

$$\begin{aligned} A^l &= \{x \in P \mid x \leq a \text{ for all } a \in A\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \downarrow a \end{aligned}$$

where  $\downarrow a = \{x \in P \mid x \leq a\}$ .

思考一个问题 poset  $P$  的一个 subset  $A$  什么时候 least upper bound? 很显然  $A^u$  一定不是空的, 更确切地说  $A^u$  有一个 greatest lower upper  $z$ , 而且  $z \in A^u$ , 根据  $z$  的 definition 它是  $A$  的 least upper bound. 这种情况下我们就说 the join of  $A$  exists, and write  $z = \bigvee A$ . 对偶地, 考虑  $A$  的 greatest lower bound, 则  $A^l$  一定不为空, 那么  $A^l$  里面是有一个 lower upper bound 的  $w$ , 根据  $w$  的 definition 它是  $A$  的 greatest lower bound. 这种情况下我们就说 the meet of  $A$  exists, and write  $w = \bigwedge A$ .

这样我们 define 两个特殊的 meet 和 join 作用在一个集合上.

**Theorem 2.9.** Let  $\mathcal{S}$  be a finite meet semilattice with greatest element 1. Then  $\mathcal{S}$  is a lattice with join operation defined by

$$x \vee y = \bigwedge \{x, y\}^u = \bigwedge (\uparrow x \cap \uparrow y).$$

证明.  $\mathcal{S}$  有 greatest element, 则  $A^u$  肯定不是空了, 至少这个 greatest element 里面.  $\bigwedge A^u$  就是要找  $A^u$  的 lower upper bound. 由于  $\mathcal{S}$  是一个 finite lattice, 所以  $A^u$  也是 finite.  $A^u$  里面的元素做有限次 meet 操作得到就是一个 lower upper bound, 但是你还得说明它在  $A^u$  里面. 这是很显然的,  $x \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_k = x$  其中  $z_i \in A^u$ , 所以  $\bigwedge A^u$  是它的一个 upper bound.

还得 proof 一下它是一个 lattice, 上面只是证明了这个东西是 well behaved. Lattice definition 中前三条还是比较明显的.

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

这也很显然, 因为  $x \vee y \in \{x, y\}^u$ .

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

因为  $x \wedge y$  是  $\{x, y\}$  的一个 greatest lower bound, 有  $x \geq x \wedge y$ , 那么  $\inf(x, x \wedge y) = x$ . □

这个 theorem 告诉我们: if a finite poset  $P$  has a greatest element and every pair of elements has a meet, then  $P$  is a lattice.

**Theorem 2.10.** Every finite subset of a lattice has a greatest lower bound and a least upper bound.

证明.  $\mathcal{L}$  是 finite, 则它的 subset 也是 finite. 前面我们知道 lattice 中任意一个 pair 都有 greatest lower bound 和 least upper bound, 这是 meet 和 join 定义下的 partial order 所带来的性质. 在 finite subset 里面先挑两个出来做 meet 或者 join 可以得到 inf 和 sup 它们也是属于  $L$  的, 再从剩下的 subset 里面再挑一个出来做同样的操作, 这个操作只会做有限多次, 所以最终我可以得到这个 subset 的 greatest lower bound 和 least upper bound.  $\square$

这个性质在 infinite lattice 下可能就无法成立. 例如 infinite subset 上述操作可能根本就停不下. 由此我们定义另外一个概念.

**Definition 2.11.** Given poset  $\mathcal{L}$ . If every subset  $A$  of  $\mathcal{L}$  has a greatest lower bound  $\bigwedge A$  and a least upper bound  $\bigvee A$ , then  $\mathcal{L}$  is called complete lattice.

subset 其中就包含了 pair, 所以它是一个 lattice 还是比较明显的. 此外, finite lattice 是 complete 的, 并且所有 complete lattice 都包含 greatest element 和 least element.

**Definition 2.12.** a complete meet semilattice is an poset  $\mathcal{S}$  with greatest element and the property that every nonempty subset  $A$  of  $S$  has a greatest lower bound  $\bigwedge A$ .

下面这个 theorem 让我们抛弃了更强的 finite, 只需要 complete 就可以在 meet semilattice 上构造一个 lattice 出来.

**Theorem 2.13.** If  $\mathcal{L}$  is a complete meet semilattice, then  $\mathcal{L}$  is a complete lattice with the join operation defined by

$$\bigvee A = \bigwedge A^u = \bigwedge (\bigcap_{a \in A} \uparrow a).$$

证明. 和前面在 finite meet semilattice 上构造 lattice 类似, 这里 finite 换成了 complete. 这里我们直接就可以知道  $\bigwedge A^u$  是有意义的, 前面也证明了它还是一个  $A$  的 upper bound. 那么  $\bigwedge A$  的 definition 是满足  $A$  的 least upper bound.  $\square$

## Closure System

**Definition 2.14.** A **closure system** on a set  $X$  is a collection  $\mathcal{C}$  of subsets of  $X$  that is closed under arbitrary intersections(任意的交). The sets in  $\mathcal{C}$  are called closed set.

**Example 2.15.** 有一些 *closure system* 的例子

1. *closed subsets of topological space,*
2. *subgroups of group,*
3. *subspace of vector space.*
4. *convex subsets of euclidean space  $\mathbb{R}^n$ ,*
5. *order ideals of an poset.*

By convention, 把  $\bigcap \emptyset = X$  的话, **closure system** 就是一个 **complete lattice**.

**Definition 2.16.** A **closure operator** on a set  $X$  is a map  $\Gamma: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  satisfying, for all  $A, B \subseteq X$ ,

1.  $A \subseteq \Gamma(A)$ ,
2.  $A \subseteq B$  implies  $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$ ,
3.  $\Gamma(\Gamma(A)) = \Gamma(A)$ .

**closure** 的 **general definition** 有点意思. 简单地来说, 就是 (1) 集合的闭包包含集合本身; (2) 如果两个集合有包含关系, 则它们的闭包也有相同的包含关系; (3) 闭包的闭包是其本身.

**Theorem 2.17.** If  $\mathcal{C}$  is a closure system on a set  $X$ , then the map  $\Gamma_{\mathcal{C}}: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  defined by

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap \{ D \in \mathcal{C} \mid A \subseteq D \}$$

is a closure operator. Moreover  $\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = A$  if and only if  $A \in \mathcal{C}$

所有包含这个集合的 **closed set** 的交是这个集合的 **closure**. 在 **topology** 里面 **closure** 是包含这个集合最小的 **closed set**.

**Definition 2.18.** A set of **closure rules** on a set  $X$  is a collection  $\Sigma$  of properties  $\varphi(S)$  of subsets of  $X$ . where each  $\varphi(S)$  has one of the forms

$$x \in S$$

or

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with  $x, z \in X$  and  $Y \subseteq X$ . A subset  $D$  of  $X$  is said to be closed with respect to these rules if  $\varphi(D)$  is true for each  $\varphi \in \Sigma$ .

你看到这里一定会感觉非常的困惑，closure rules 到底是个啥东西？

**Example 2.19.** 对应前面列举到的 closure system.

1. In topological space, all rules  $Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$  where  $z$  is an accumulation point of  $Y$ .
2. In subgroup, the rule  $1 \in S$  and all rules

$$x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S \quad \{x, y\} \in S \Rightarrow xy \in S$$

3. In vector space,  $0 \in S$  and all rules  $\{x, y\} \subseteq S \Rightarrow ax + by \in S$  with  $a, b$  scalars.