Lattice

枫聆

2021 年 10 月 9 日

目录

Ordered Sets

Definition 1.1. Partially ordered set is a system $\mathcal{P} = (P, \leq)$ where P is a nonempty set and $\leq$ is a binary relation on P satisfying，for all $x, y, z \in P$,

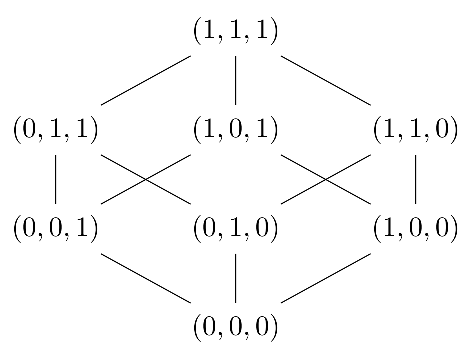
1. $x \leq x$, (reflexivity)
2. if $x \leq y$ and $y \leq x$,then $x = y$, (antisymmetry)
3. if $x \leq y$ and $y \leq z$,then $x \leq z$. (transitivity)

Definition 1.2. $\mathcal{C}$ is a chain if for every $x, y \in \mathcal{C}$，either $x \leq y$ or $y \leq x$.

chain 上的元素都可以相互比较，所以它是 totally ordered 或者 linearly ordered.

Definition 1.3. We say that x is covered by y in $\mathcal{P}$，written $x \prec y$，if $x \leq y$ and there is no $z \in P$ with $x \leq z \leq y$.

Definition 1.4. Hasse diagram for a finite partially order set $\mathcal{P}$: the elements of P are represented by points in the plane, and a line is drawn from a up to b precisely when $a \prec b$.



Definition 1.5. Given a partially order set，f is a order preserving map satisfying the condition $x \leq y$ implies $f(x) \leq f(y)$.

Definition 1.6. Given two posets $(P, \leq_S)$ and $(Q, \leq_Q)$，an order isomorphism from $(P, \leq_S)$ to $(Q, \leq_Q)$ is a bijective order preserving map.

Definition 1.7. Given two posets $(P, \leq_S)$ and $(Q, \leq_Q)$，an order embedding from $(P, \leq_S)$ to $(Q, \leq_Q)$ is a both order-preserving and order-reflecting map that $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.

相比 order isomorphism 而言稍微弱一点，不需要是一个 surjective.

Definition 1.8. An ideal I of a partially ordered set $\mathcal{P}$ is a subset of the elements of P which satisfy the property that if $x \in \mathcal{P}$ and exists $y \in I$ with $x \leq y$，then $x \in I$.

衍生自 the ideal of ring，后面我们将会看见 the ideal of lattice.

Definition 1.9. Given an ordered set $\mathcal{P} = (P, \leq)$. The dual of P is another poset $\mathcal{P}^d = (P, \leq^d)$ with the order relation defined by $x \leq^d y \iff y \leq x$.

Definition 1.10. The dual notion of an ideal is called a filter that F is a subset of P such $x \geq y \in F$ implies $x \in F$

类似的还有 principle ideal 和 principle filter. 就是通过一个元素生成的.

Definition 1.11. The poset $\mathcal{P}$ has a maximum(element) if there exists $x \in P$ such that $y \leq x$ for all $x \in P$.

An element $x \in P$ is maximal if there is no element $y \in P$ with $x \leq y$ and $x \neq y$.

maximum 是一个名词表示最大值 (greatest)，maximal 是一个形容词表示极大的意思. 在 poset 中可能不只有一个 maximal element.

Lemma 1.12. The following are equivalent for an poset $\mathcal{P}$.

1. Every nonempty subset $S \subseteq P$ contains an element minimal in S.
2. $\mathcal{P}$ contains no infinite descending chain
$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots.$$
这里去掉等号是指 $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq \cdots$
3. If
$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$$
in $\mathcal{P}$，then there exists k such that $a_n = a_k$ for all $n \geq k$.

这个 lemma 被称为 descending chain condition(DCC). 对偶地也有 ascending chain condition(ACC). original 'a partially ordered set $\mathcal{P}$ requires that all decreasing sequences in $\mathcal{P}$ become eventually constant'.

证明. (2) $\Rightarrow$ (3). 前提只存在 finite descending chain. 假设 (3) 不成立. 若 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ 是 infinite chain, 则对于任意的 k，都能找到 $n \geq k$ 使得 $a_n \neq a_k$ 且 $a_k \geq a_n$，那么 $a_k > a_n$. 这样从 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 开始我们每次都可以找到 $a_{n_0} > a_{n_1} > \cdots$. 这样我们实际构造了一个 infinite descending chain，这是和前提矛盾的. 若 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ 是一个 finite chain，它的最后一个元素显然是满足 (3)，这和假设是矛盾的.

(3) $\Rightarrow$ (2). 也是分 infinite chain 和 finite chain 来讨论, finite 是显然的, infinite 的时候可以把它变成 finite.

(1) $\Rightarrow$ (2). (1) 前提满足下，假设 (2) 不成立，即 $\mathcal{P}$ 存在 infinite descending chain. 把这个 chain 上的所有元素取出来组成一个 subset S，那么任取 a_k 都有 $a_{k+1} \leq a_k$. 即找不到 minimal.

(2) $\Rightarrow$ (1). (2) 前提满足下，假设 (1) 不成立. 这里需要用一下选择公理了，定义 S 上一个选择函数 $f\colon S \to T$，其中 $T \in S$. 让 $a_0 = f(S)$，递归地定义对任意的 $i \in \omega$ 有 $a_{i+1} = f(\{\, s \in S \mid s < a_i \,\})$. 接下来让这个 definition make sense，(2) 前提下 S 是没有 minimal, 所以 $\{\, s \in S \mid s \leq a_i \,\}$ 不是 empty set. 这样就找到了一个 infinite descending chain，与假设矛盾.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

done well! □

Lemma 1.13. Let $\mathcal{P}$ be an poset satisfyint the DCC. If $\varphi(x)$ is statement such that

1. $\varphi(x)$ holds for all minimal elements of P, and
2. whenever $\varphi(y)$ holds for all $y < x$, then $\varphi(x)$ holds,

then $\varphi(x)$ is true for every element of P.

这个 lemma 有点意思，如果对 P 上所有的 minimal element m 都有命题 $\varphi(m)$ 成立，且 $\mathcal{P}$ 满足 DCC. 那么再加上一个条件: 只要对任意元素 $x \in P$，满足 $y < x$ 都有 $\varphi(y)$ 成立. 则对任意元素 $x \in P$ 都有 $\varphi(x)$ 成立.

证明. 其实 (1) 是 (2) 的一个 special case. 在 (1)(2)hold 的情况下，我们试想一下 $\varphi(x)$ 没有被 hold 住的是哪些元素呢? 即对于某个 x，存在 $y < x$ 使得 $\varphi(y)$ 没有被 hold. 递归地，我们再去考虑这个 y. 那么这里就存在一条 descending chain 在这里，由于 $\mathcal{P}$ 是满足 DCC，所以这个 descending chain 是 infinite 的. 这条 chain 的结尾显然是一个 minimal element，但是它是满足 $\varphi(x)$. 所以实际上是不存在这里的 x 不满足 $\varphi(x)$. □

Definition 1.14. Let $\mathcal{P}$ be poset. Two elements a and b of $\mathcal{P}$ are called comparable if $a \leq b$ or $a \geq b$. Otherwise, they are called incomparable.

元素的可比性.

Definition 1.15. An antichain in $\mathcal{P}$ is a subset A of $\mathcal{P}$ in which each pair of different element are incomparable.

Definition 1.16. Define the width of an poset $\mathcal{P}$ by

$$w(\mathcal{P}) = \sup\{\, |A| \mid \text{A is an antichain in } \mathcal{P} \,\}$$

where $|A|$ denotes the cardinality(集合的势) of A.

Definition 1.17. We define the chain-covering-number CCN $c(\mathcal{P})$ to be the least cardinal number k, such that P is a union of k chains(finite) of P, means $P = \bigcup C_i$

另一种 covering number，有趣.

Lemma 1.18. *Suppose* $P = \bigcup C_i$ *where* $i \in I$，*then* $w(\mathcal{P}) \leq |I|$.

证明. 因为 $|A \cap C_i| \leq 1$ for $i \in I$. 也就是说你把 A 里面的元素分开塞到 C_i 上，每次都只能塞一个. 那么最多你可以每个 C_i 上都塞一个. □

Theorem 1.19. (Dilworth ,1950) Let $\mathcal{P}$ be a finite poset. $w(\mathcal{P})$ is width. Then $\mathcal{P}$ is a union of $w(\mathcal{P})$-chains.

证明. TODO. □

Semilattices, Lattices and Complete Lattices

Semilattice

Definition 2.1. A semilattice is an algebra $\mathcal{S}=(S,*)$ satisfying, for all $x,y,z\in\mathcal{S}$,

1. $x*x=x$,

2. $x*y=y*x$,

3. $x*(y*z)=x*(y*z)$.

where $*$ is binary operator. 换句话说 semilattice 就是一个 idempotent commutative semigroup(幂等交换半群).

Theorem 2.2. In a semilattice $\mathcal{S}$, define $x\le y$ if $x*y=x$. Then $(S,\le)$ is a poset in which every pair of elements has a greater lower bound.

Conversely, given an poset P with that property, define $x*y=g.l.b(x,y)$. Then $(P,*)$ is a semilattice.

证明. 先证明这个是一个 poset.

1. $x*x=x$ implies $x\le x$,

2. if $x\le y$ and $x\ge y$, then $x=x*y=y*x=y$,

3. if $x\le y$ and $y\le z$. then $x*z=(x*y)*z=x*(y*z)=x*y=x$, so $x\le z$.

这个 greater lower bound 就是 $x*y$. 首先证明它是一个 lower bound, $x*(x*y)=x*y$ and $y*(x*y)=x*y$, 所以 $x*y$ 是一个 lower bound. 再来证明所有的 lower bound 都比它小, 假设 $z\le x$ 和 $z\le y$, 即 z 是 $\{x,y\}$ 的一个 lower bound. 那么 $z*(x*y)=z*y=z$, 所以 $z\le(x*y)$. 最后 $x*y$ 的一个 greater lower bound. □

semilattice 上弄了一个特殊的 poset 出来, 它最好的性质就是任意两个元素都有一个下确界.

Definition 2.3. A semilattice with the above ordering is usually called meet semilattice. 对偶地, 使得 $x\ge y\iff x*y=x$, 则称 $\mathcal{S}$ 为是一个join semilattice. 自然地在 $(S,\le)$ 下任意的 pair 都有一个 least upper bound $x\vee y$.

Definition 2.4. A homomorphism between two semilattice is a map $f\colon\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ with the property that $f(x*y)=f(x)*f(y)$. An isomorphism is a homomorphism that injective and surjective.

一个 semilattice homomorphism 肯定是一个 monotone function(相对于 poset 来说), 但是一个 monotone function 并不一定是一个 homomorphism.

nothing new... has some!

Definition 2.5. A semilattice is bounded if there is a top/bottom element.

Theorem 2.6. Let $\mathcal{S}$ be a meet semilattice. Define $\phi\colon S \to \mathcal{O}(S)$ by

$$\phi(x) = \{\, y \in S \mid y \leq x \,\}$$

where $\mathcal{O}(S)$ is collection of all order ideals of $\mathcal{S}$. Then $\mathcal{S}$ is isomophic $(\mathcal{O}(S), \cap)$(注意这里是 $\mathcal{S}$ 的 image).

怎么感觉这些 ideal 都是 principle ideal.

证明. $\cap$ 表示 set inclusion，ϕ 是 order-preserving 和 order-reflecting 还是比较 obvious. 所以 ϕ 是一个 order embedding of $\mathcal{S}$ into $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Moreover $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \cap \phi(y)$ because $x \wedge y$ is the greate lower bound of $\{x, y\}$, so that $z \leq x \wedge v$ if and only if $z \leq x$ and $z \leq y$. $\square$

Lattice

Definition 2.7. A lattice is an algebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ satisfying，for all $x, y, z \in L$,

1. $x \wedge x = x$ and $x \vee x = x$,
2. $x \wedge y = y \wedge x$ and $x \vee y = y \vee x$,
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ and $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
4. $x \wedge (x \vee y) = x$ and $x \vee (x \wedge y) = x$.

就第四个在我们眼里似乎没有那么自然，它叫 absorption laws(吸收律)，它在这里可以保证后面 $\wedge$ 和 $\vee$ 定义了相同的 partial order(虽然是 dual). 前三个我们知道 lattice 同时在两种 binary operator 都是 semilattice，所以我们只要在 lattice 上定义前面合适的 partial order，它就是 both meet and join semilattice.

Theorem 2.8. In a lattice $\mathcal{L}$，define $x \leq y$ if and only if $x \wedge y = x$. Then $(L, \leq)$ is a poset in which every pair of elements has a greatest lower bound and a least upper bound.

证明. 给定一个 pair (x, y). 前面已经证明了 $x \wedge y$ 是它的一个 greater lower bound. 再根据 lattice definition 的第四条的第一个式子，$x \vee y$ 是它的一个 upper bound，第二式子说明当 $x \geq y$ 时，有 $x \vee y = x$，对偶地 $x \vee y$ 是 least upper bound.

这里若 $x \wedge y = x$，则 $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$. 类似地 $x \vee y = y$，则 $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$. 所以有一个很重要的结论就是$x \wedge y = x \iff x \vee y = y$. □

类似的我们可以通过一个 poset 构造 lattice.

Theorem 2.9. Given an poset $\mathcal{P}$ with that above property，define $x \wedge y = \sup\{x, y\}$ and $x \vee y = \inf\{x, y\}$. Then $(P, \wedge, \vee)$ is a lattice.

所以实际上 lattice 可以有两种定义第一种是前面的代数定义，第二种就是在 poset 上定义 join 和 meet 操作，这一点要清楚.

the definitions of sublattice，homomorphism and isomorphism).

Definition 2.10. Two lattice $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ are isomorphic if there is bijective α from $\mathcal{L}_1$ to $\mathcal{L}_2$ such that for every a, b in $\mathcal{L}_1$ the following two equations hold: $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$ and $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b)$. Such an α is called by an isomorphism.

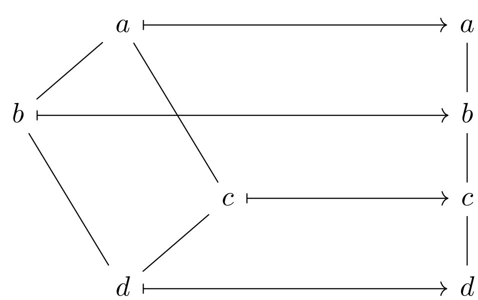
在用 poset 基础上定义的 lattice 之间的 isomorphism 也可以用下述定理来描述.

Theorem 2.11. Two lattices $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ are isomorphic iff there is a bijection α from $\mathcal{L}_1$ to $\mathcal{L}_2$ such that both α and α^{-1} are order-preserving.

证明. 如果 α 是 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的一个 isomorphism 和 $a \leq b$ hold in $\mathcal{L}_1$. $a \leq b$ hold means $a = a \wedge b$，那么 $\alpha(a) = \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$，所以 $\alpha(a) \leq \alpha(b)$. 反过来 α^{-1} 也是一个 isomorphism，所以 α^{-1} 也是 order-preserving 的.

反过来如果 α 是 bijective 的且 α 和 α^{-1} 都是 order-preserving 的. 给定 $a, b \in \mathcal{L}_1$，有 $a \leq a \vee b$，那么 $\alpha(a) \leq \alpha(a \vee b)$. 同理对 b 也有 $\alpha(b) \leq \alpha(a \vee b)$，那么 $\alpha(a) \vee \alpha(b) \leq \alpha(a \vee b)$. 我们要把这个小于等于换成等于，就是要证明 $\alpha(a \vee b)$ 确实是一个 greatest upper bound，那么对应任意的 upper u，即 $\alpha(a) \vee \alpha(b) \leq u$，分别有 $\alpha(a) \leq u$ 和 $\alpha(b) \leq u$. 由于 α^{-1} 也是 order-preserving，所以有 $a \leq \alpha^{-1}(u)$ 和 $b \leq \alpha^{-1}(u)$，那么 $a \vee b \leq \alpha^{-1}(u)$，在用 α 作用一遍 $\alpha(a \vee b) \leq u$. 到这里证明了 $\alpha(a \vee b)$ 确实是一个 greatest upper bound，即 $\alpha(a) \vee \alpha(b) = \alpha(a \vee b)$. 同理也可以证 $\alpha(b) \wedge \alpha(b) = \alpha(a \wedge b)$. $\square$

Example 2.12. 记录一个 α 是 bijective 但只有 α order-preserving，这样的 α 可能不是一个 isomorphism. Hasse 图可能画的不标准!



Definition 2.13. If $\mathcal{L}$ is lattice and $L' \neq \emptyset$ is a subset of L such that for every pair of elements $a, binL'$ both $a \wedge b$ and $a \vee b$ are in L', where $\wedge$ and $\vee$ are the lattice operations of $\mathcal{L}$, then we say L' with the same operations of $\mathcal{L}$ is a sublattice of $\mathcal{L}$.

Complete Lattice

集合的 upper bound 和 lower bound.

Definition 2.14. For a subset A of a poset P, let A^u denote the set of all upper bounds of A,

$$\begin{aligned} A^u &= \{\, x \in P \mid x \geq a \text{ for all } a \in A \,\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \uparrow a \end{aligned}$$

where $\uparrow a = \{\, x \in P \mid x \geq a \,\}$. Dually, A^l is the set of all lower bounds of A,

$$\begin{aligned} A^l &= \{\, x \in P \mid x \leq a \text{ for all } a \in A \,\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \downarrow a \end{aligned}$$

where $\downarrow a = \{\, x \in P \mid x \leq a \,\}$.

思考一个问题poset P 的一个 subset A 什么时候 least upper bound? 很显然 A^u 一定不是空的，更确切地说 A^u 有一个 greatest lower upper z，而且 $z \in A^u$，根据 z 的 definition 它是 A 的 least upper bound. 这种情况下我们就说the join of A exists，and write $z = \bigvee A$. 对偶地，考虑 A 的 greatest lower bound，则 A^l 一定不为空，那么 A^u 里面是有一个 lower upper bound 的 w，根据 w 的 definition 它是 A 的 greatest lower bound. 这种情况下我们就说the meet of A exists，and write $w = \bigwedge A$.

Theorem 2.15. Let $\mathcal{S}$ be a finite meet semilattice with greatest element 1. Then $\mathcal{S}$ is a lattice with join operation defined by

$$x \vee y = \bigwedge \{x, y\}^u = \bigwedge (\uparrow x \cap \uparrow y).$$

证明. $\mathcal{S}$ 有 greatest element，则 A^u 肯定不是空了，至少这个 greatest element 里面. $\bigwedge A^u$ 就是要找 A^u 的 lower upper bound. 由于 $\mathcal{S}$ 是一个 finite lattice，所以 A^u 也是 finite. A^u 里面的元素做有限次 meet 操作得到就是一个 lower upper bound，但是你还得说明它在 A^u 里面. 这是很显然的，$x \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_k = x$ 其中 $z_i \in A^u$，所以 $\bigwedge A^u$ 是它的一个 upper bound.

还得 proof 一下它是一个 lattice，上面只是证明了这个东西是 well behaved. Lattcie definition 中前三条还是比较明显的.

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

这也很显然，因为 $x \vee y \in \{x, y\}^u$.

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

因为 $x \wedge y$ 是 $\{x, y\}$ 的一个 greatest lower bound，有 $x \geq x \wedge y$，那么 $\inf(x, x \wedge y) = x$. □

这个 theorem 告诉我们: if a finite poset P has a greatest element and every pair of elements has a meet, then P is a lattice. 这就是 lattice 非代数形式的 definition.

Theorem 2.16. Every finite subset of a lattice has a greatest lower bound and a leaset upper bound.

证明. $\mathcal{L}$ 是 finite，则它的 subset 也是 finite. 前面我们知道 lattice 中任意一个 pair 都有 greatest lower bound 和 least upper bound，这是 meet 和 join 定义下的 partial order 所带来的性质. 在 finite subset 里面先挑两个出来做 meet 或者 join 可以得到 inf 和 sup 它们也是属于 L 的，再从剩下的 subset 里面再挑一个出来做同样的操作，这个操作只会做有限多次，所以最终我可以得到这个 subset 的 greatest lower bound 和 least upper bound. □

这个性质在 infinite lattice 下可能就无法成立，自然地 completely 就 arised.

Definition 2.17. Given poset $\mathcal{L}$. If every subset A of $\mathcal{L}$ has a greatest lower bound $\bigwedge A$ and a least upper bound $\bigvee A$, then $\mathcal{L}$ is called complete lattice.

Definition 2.18. a complete meet semilattice is an poset $\mathcal{S}$ with greatest element and the property that every nonempty subset A of S has a greatest lower bound $\bigwedge A$.

Theorem 2.19. If $\mathcal{L}$ is a complete meet semilattice, then $\mathcal{L}$ is a complete lattice with the join operation defined by

$$\bigvee A = \bigwedge A^u = \bigwedge(\bigcap_{a\in A} \uparrow a).$$

证明. 和前面在 finite meet semilattice 上构造 lattice 类似，这里 finite 换成了 complete. 这里我们直接就可以知道在 A^u 非空时，$\bigwedge A^u$ 是有意义的，并且这里有 $1 \in A^u$. 那么 $\bigwedge A$ 的 definition 是满足 A 的 least upper bound. □

Closure System

这一章我们的主旋律.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{closure system} \arrow[dr] & \\
\text{closure rules} \arrow[ur] & & \text{closure operator} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Definition 2.20. A closure system on a set X is a collection $\mathcal{C}$ of subsets of X thats is closed under arbitrary intersections(任意的交). The sets in $\mathcal{C}$ are called closed set.

Example 2.21. 有一些 closure system 的例子

1. closed subsets of topological space,
2. subgroups of group,
3. subspace of vector space.
4. convex subsets of euclidean space $\mathbb{R}^n$,
5. order ideals of an poset.

By convention，特殊地 $\bigcap \emptyset = X$ ($\bigwedge(A \cup \emptyset) = \bigwedge A \vee \bigwedge \emptyset = \bigwedge A$，这就是在说它 $\bigwedge \emptyset$ 比任意子集都大)，closure system 现在就是 complete meet semilattice with greatest element X，所以你按前面构造定义出 join，那么 closure system 就是一个 complete lattice 了.

Definition 2.22. A closure operator on a set X is a map $\Gamma\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ satifying, for all $A, B \subseteq X$,

1. $A \subseteq \Gamma(A)$,
2. $A \subseteq B$ implies $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$,
3. $\Gamma(\Gamma(A)) = \Gamma(A)$.

如何在 X 上利用已知的 closure system 构造一个 closure operator?

Theorem 2.23. If $\mathcal{C}$ is a closure system on a set X, then the map $\Gamma_{\mathcal{C}}\colon \mathfrak{B}(X) \to \mathfrak{B}(X)$ defined by

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap \{ D \in \mathcal{C} \mid A \subseteq D \}$$

is a closure operator. Moreover $\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = A$ if and only if $A \in \mathcal{C}$

Definition 2.24. A set of closure rules on a set X is a collection $\sum$ of properties $\varphi(S)$ of subsets of X. where each $\varphi(S)$ has one of the forms

$$x \in S$$

or

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with $x, z \in X$ and $Y \subseteq X$. A subset D of X is said to be closed with respect to these rules if $\varphi(D)$ is true for each $\varphi \in \sum$.

你看到这里一定会感觉非常的困惑，抽象的 closure rules 到底是个啥东西？不急接着往下看你终会明白的.

Example 2.25. 对应前面列举到的 closure system.

1. In topological space, all rules $Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$ where z is an accumulation point of Y.
2. In subgroup, the rule $1 \in S$ and all rules

$$x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S\{x, y\} \in S \quad \Rightarrow xy \in S$$

3. In vector space，$0 \in S$ and all rules $\{x, y\} \subseteq S \Rightarrow ax + by \in S$ with a, b scalars.

closure rules 就是一系列判断 closed set 的命题.

Theorem 2.26. If Γ is a closure operator on a set X，$\sum_\Gamma$ be the set of (1)all rules where $c \in \Gamma(\emptyset)$，and (2)all rules

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with $z \in \Gamma(Y)$. Then a set $D \subseteq X$ satisfies all the rules of $\sum_\Gamma$ if and only if $\Gamma(D) = D$.

证明. (1) 是在说 $\emptyset$ 的 image 非空？(2) 是在说取 S 上任意子集 Y，都有 $\Gamma(Y) \subseteq S$. 直觉上就说这群规则是一个 closure rule，满足它的只有 closed set，自然地在 closure operator 上也是一个 closed set. 可这条件都 TM 都 abstract nosense 了!!!

我尝试用 closure operator 的 definition 来推一下，$Y \subset S$，结合前面那么有

$$Y \subseteq \Gamma(Y) \subseteq S.$$

特殊点，把 Y 换成 S，有 $S \subseteq \Gamma(S) \subseteq S$，所以 $\Gamma(S) = S$. 但是 (1) 在这里有啥用啊？保证 S 非空？

反过来若 $\Gamma(D) = D$. 自然地，当 $Y \subseteq D$，则有 $Y \subseteq \Gamma(Y) \subseteq \Gamma(D) = D$. □

当有一个 closure operator 之后，最重要是我们知道了 closed set 在它的作用下是它本身.

Theorem 2.27. If $\sum$ is a set of closure rules on set X, let $\mathcal{C}_{\sum}$ be the collection all subsets of X that satisfy all the rules of $\sum$. Then a set $\mathcal{C}_{\sum}$ is a closure system.

证明. 这个定理可以更形象地去理解 closure rule 到底是什么? 假设 A, B 是满足 $\sum$ 里面所有 rules 的两个集合. 我们看它们的交，对于第一类规则 $x \in S$，很显然在交下是保持的，因为 $x \in A$ 和 $x \in B$，则 $x \in A \cap B$. 对于第二类的规则，若 $C \subseteq A \cap B$，且它是某个规则里面对应的 Y，那么 $C \subseteq A$ 和 $C \subseteq B$，对应地有某个 $z \in A$ 和 $z \in B$，所以 $z \in A \cap B$. 综上 $A \cap B$ 也是属于 $\mathcal{C}_{\sum}$. □

在这里我们才终于认识到这样 closure rules 这样抽象的东西，它确实可以刻画一堆 closed set 组成了一个 closure system.

总结一下前面的所有东西，前面提到过一个 closure system 其实是一个 complete lattice，现在我们多了另外两个概念 closure operator 和 closure rules. 我们前面 3 个定理就是在说明它们之前是可以相互转换的，例如给定一个 closure operator，它 $\Gamma(D) = D$ 可以对应上 closure rules，然后我们用 closure rules 刻画的 sets 收集起来，这些 sets 在交运算下也能保持封闭，所以这些 sets 是一个 closure system，最终也得到了 complete lattice. 后面我们用 $\mathcal{C}_\Gamma$ 表示由 closure operator Γ 生成的 closed sets($\Gamma(D) = D$) with set inclusion 构成 poset. 很自然地有下面的定理.

Theorem 2.28. If Γ is a closure operator on a set X, and the operations on $\mathcal{C}_\Gamma$ are given by

$$\bigwedge_{i \in I} D_i = \bigcap_{i \in I} D_i$$
$$\bigvee_{i \in I} D_i = \Gamma(\bigcup_{i \in I} D_i).$$

in where $D_i \in \mathcal{C}_\Gamma$. Then $\mathcal{C}_\Gamma$ is complete lattice.

证明. 由 Theorem 2.25 和 Theorem 2.26 可以知道一族 closed set $\mathcal{C}_\Gamma$ 是一个 closure system. 自然地我们要用集合上 union 和 interestion. 先考虑 interestion $\bigcap\limits_{i \in I} D_i$，它确实是 greatest lower bound，且在 closure system interestion 下有

$$\Gamma(\bigcap_{i \in I} D_i) = \bigcap_{i \in I} D_i.$$

所以 $\bigcap\limits_{i \in I} D_i \in \mathcal{C}_\Gamma$. 对于 union $\bigcup\limits_{i \in I} D_i$，它肯定是 X 上的 greatest upper bound，但是它不一定在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中，所以我们要在 $\mathcal{C}_\Gamma$ 中找所有包含它的 closed sets，再交一下就可以得到 $\mathcal{C}_\Gamma$ 上的 greatest upper bound. 这是我们的思路，假设这样的 closed sets 为 $\{A_j\}_{i \in J}$. 明显地，$\bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \bigcap\{A_j\}_{i \in J}$. 我们只要证明 $\Gamma(\bigcup\limits_{i \in I} D_i) \subseteq A_j$ 对任意地 $j \in J$ 都成立即可，即它是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 包含 $\bigcup\limits_{i \in I} D_i$ 最小的 closed set. 但是证明过于简单 2333，直接用 closure operator 第二个定义即可. 因为 $\bigcup\limits_{i \in I} D_i \subseteq A_j$，所以 $\Gamma(\bigcup\limits_{i \in I} D_i) \subseteq \Gamma(A_j) \subseteq A_j$. □

略algebra 一般定义和 subalgebra 上的 closure operator.

下面是一个representation theorem，刚才是 closure operator 到 complete lattice，现在是 complete lattice 到 closuse.

下面的定理在说任意一个 complete lattice 和一些 closed set 构成 lattice 同构.

Theorem 2.29. If $\mathcal{L}$ is a complete lattice，define a closure operator Δ on L by

$$\Delta(A) = \{\, x \in L \mid x \le \bigvee A \,\}.$$

Then $\mathcal{L}$ is isomorphic to $\mathcal{C}_\Delta$. The isomorphism $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}_\Delta$ is just given by $\varphi(x) = \downarrow x$.

证明. Δ 是一个 closure operator 还是比较 obvious. 我们来回顾一下 $\downarrow x$ 的 definition $\downarrow x = \{\, y \in L \mid y \le x \,\}$，所以 $\Delta(\downarrow x) = \downarrow x \in \mathcal{C}_\Delta$.

先证 bijective，若对于 $x, y \in L$ 有 $\varphi(x) = \varphi(y)$，那么 $y \in \varphi(x)$ 和 $x \in \varphi(y)$，就有 $y \le x$ 和 $x \le y$，所以 $x = y$，即 φ 是 injective. 任意一个 $C \in \mathcal{C}_\Delta$，那么都有 least upper bound $u \in C$. 自然地 $\varphi(u) = C$，即 φ 是 surjective.

给定任意地 $x, y \in L$，那么

$$\varphi(x \wedge y) = \uparrow (x \wedge y) = \uparrow x \cap \uparrow y = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

同理

$$\varphi(x \vee y) = \uparrow (x \vee y) = \uparrow x \cap \uparrow y = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

综上 φ 是一个 isomorphism. □

换句话说就是 q 如果是 join irreducible，则它不可能是其他某些元素的一个 join.

Definition 2.30. An element q of lattice $\mathcal{L}$ is called join irreducible if $q = \bigvee F$ for a finite set F implies $q \in F$. The set of all join irreducible elements in $\mathcal{L}$ is denoted by $J(\mathcal{L})$.

如果 $\mathcal{L}$ 有一个最小元素 0，那么 0 其实不是 join irreducible 的，因为 $0 = \bigvee \emptyset$. 如果想要把 0 含进来，特殊地 $J_0(\mathcal{L}) = J(\mathcal{L}) \cap \{0\}$. 当然还有一种定义如果 q 是 join irreducible，那么当 $q = r \vee s$，则 $q = r$ 或者 $q = s$，在这种定义下 q 已经是针对非空的集合来说的.

Lemma 2.31. If a lattice $\mathcal{L}$ satisfies the DCC，then every element of $\mathcal{L}$ is a join of finitely many join irreducible elements.

证明. 用反证法来证明: 假设存在 $\mathcal{L}$ 上一些元素，使得找不到 join irreducible elements 的 join 正好是它们. 我们把这些元素记为集合 S，根据 DCC S 里面有一个最小值，我们设为 x. 那么 x 肯定也不是 join irreducible 的，如果它是的话，它就是它自己的一个 join，那么 $x \notin S$. 既然 x 不是一个 join irreducible，那么有 $x = \bigvee F$

其中 F 是一个 finite set 且里面的元素都是严格小于 x 的，由于 x 是最小元素这个概念，所以比它小的元素都是 the join of finitely many join irreducible elements. 那么对于 F 而言，任意的 $f \in F$ 都有一个 $G_f \subseteq J(\mathcal{L})$ 的 join 是 f. 所以

$$x = \bigvee_{f \in F} \bigvee G_f.$$

这里 $f = \bigvee G_f$，所以 x 可以表示称有个多个 join irreducible elements 的 join，这就矛盾了. 这里应该还要考虑一下 $x = 0$，但是讨论 0 确实没什么意义，0 可以定义为 join irreducible 也可以不是，这里还是避免这种情况吧... □

Definition 2.32. An element q of a complete lattice $\mathcal{L}$ is said to be completely join irreducible if $q = \bigvee X$ implies $q \in X$ for arbitrary (possibly infinite) subsets $X \subseteq L$. Let $J^*(\mathcal{L})$ denote the set of all completely join irreducible elements of $\mathcal{L}$.

Proposition 2.33. In general，$J^*(L) \subseteq J(L)$，but for lattices satisfying the ACC，equality holds.

证明. 每个 completely join irreducible element 肯定是 join irreducible element. 这是很自然地，它是任意多个元素的 join，那肯定可以挑出来有限多个元素 with q 的 join 还是 q. ACC 有了之后，$\mathcal{L}$ 上任意非空的子集都有一个最大元素，那么我们现在假设一个 join irreducible element x 它不是 complete 的，即可以找到某个集合 S，有 $x = \bigvee S$ 且 $x \notin S$. 矛盾就来了，ACC 下 least upper bound 应该是在 S 里面，所以现在又有每个 join irreducible element 是 completely join irreducible. □

满足 ACC 和 DCC 的 lattice 一个表示方法.

Theorem 2.34. Let $\mathcal{L}$ be a lattice satisfying the ACC and DCC. Let $\sum$ be the set of all closure rules on $J(L)$ of the form

$$F \subseteq S \Rightarrow q \in S$$

where q is join irreducible, F is a finite subset of $J(L)$, and $q \leq \bigvee F$. (Include the degenerate cases $p \in S \Rightarrow q \in S$ for $q \leq p$ in $J(\mathcal{L})$.) Then $\mathcal{L}$ is isomorphic to the lattice of $\mathcal{C}_{\sum}$ of $\sum$-closed sets.

证明. 这里同构证明用 isomorphism definition 下面那个定律，即 bijective 加两个 order-preserving. 那么先给出两个 order-preserving 的 map $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}_{\sum}$ 和 $g\colon \mathcal{C}_{\sum} \to \mathcal{L}$

$$f(x) = \downarrow x \cap J(\mathcal{L})$$
$$g(S) = \bigvee S.$$

需要证明它们两个互为逆映射（感觉好突兀啊，虽然原文中说 straightforwrad233333). 那么对于 $gf(x) = x$，前面那个 lemma 应该告诉我们了，在 DCC 下 $\mathcal{L}$ 每一个元素都是 a join of finitely many join irreducible elements 对应是 $f(x)$ 的操作.

那么对于 $fg(S)=S$，在 ACC 下 $\bigvee S\in S$，也就是我们可以找到一些 finite set $F\subseteq S$ 使得 $\bigvee F=\bigvee S$，按照 closure rules，所有 join irreducible $q\le\bigvee F$ 都是属于 S 的，$f(\bigvee F)$ 就是在做这件事. 但是这样得到是不是全部的 S 呢? 考虑其他 finite set F', 那么 $\bigvee F'\le\bigvee S=\bigvee F$, f 是 order-preserving 的, 所以有 $f(\bigvee F')\subseteq f(\bigvee F)$, 所以 $f(\bigvee F)$ 涵盖了整个 S. □

按照下面定义 x 明显是一个 upper bound，但是条件更强它还要是一个 least upper bound，dense 稠密在这里还是很形象，x 就是一个划分.

Definition 2.35. A subset Q of a complete lattice $\mathcal{L}$ is join dense if for every $x\in L$,

$$x=\bigvee\{\,q\in Q\mid q\le x\,\}.$$

fixed point 来表征 complete lattice.

Theorem 2.36. A lattice $\mathcal{L}$ is complete of if and only if every order-preserving map $f\colon\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ has a fixed point.

证明. ($\Rightarrow$) 如果给定一个 complete lattice $\mathcal{L}$ 和一个 order-preserving map $f\colon\mathcal{L}\to\mathcal{L}$. 定义集合 $A=\{\,x\in L\mid f(x)\ge x\,\}$. 注意到 $0\in A$ (0 表示 minimal element of L). 再让 $a=\bigvee A$，那么对于任意的 $x\in A$ 都有 $a\ge x$，结合 f 是 order-preserving 我们有

$$f(a)\ge\bigvee_{x\in A}f(x)\ge\bigvee_{x\in A}x=a.$$

所以 $a\in A$，即 $f(a)\ge a$，两边再作用一下 f 有 $f^2(a)\ge f(a)$，这说明 $f(a)\in A$. a 可是整个 A 的 join，那么有 $a\ge f(a)$. 综上 $f(a)=a$，a 就是这个 fixed point.

($\Leftarrow$) 这个方向的证明略微有些复杂，故事主线是在 every order-preserving map has a fixed point 的前提下，假设 $\mathcal{L}$ 不是 complete，然后构造出来出来一个 order-preserving map 没有 fixed point 造成矛盾.

假设 $\mathcal{L}$ 不是 complete，那么先给出第一个 claim.

Claim 1: $\mathcal{L}$ 没有最大元素 1 或者存在一个 chain $C\subseteq L$ 满足 ACC 且没有 meet(supermum).

证这个 claim，我们还是用反证法，假设 $\mathcal{L}$ 有最大元素 1 和所有满足 ACC 的 chain $C\subseteq L$ 都有 meet. 我们仔细考虑一下这个假设，先回顾一下我们前面关于 complete meet semilattice 的 definition，是要有一个 poset 满足有 greatest element 并且所有非空的子集都有 meet，然后我们可以通过这个 complete meet semilattice 构造出来一个 complete lattice，我们的证明大体上也是这个思路，但是使用其对偶的形式 (因为你可以观察到我们假设的第二个条件有些不一样)，即在 complete join semilattice 来构造，从而制造了一个 contradiction.

考虑某个子集 S 的所有 upper bound S^u. 注意到 $1\in S^u$，所以 S^u 不是 emptyset. 我们再来定义一个 poset $\mathcal{P}$，它是 S^u 上所有满足 ACC 的 chains 的一个 collections. $\mathcal{P}$ 上的 partial-order 定义为若 $C_1\le C_2$ 则 C_1 是 C_2 的一个 filter(我们回顾一下 filter 的定义，它是 ideal 的对偶形式，即首先有 $C_1\subseteq C_2$，若 $x\ge y\in C_1$ 则 $x\in C_1$ 其中 $x\in C_2$).

我们再来考虑这个特殊的 poset $\mathcal{P}$ 上的 chain (chain of chains)，任取 $\mathcal{P}$ 上的一个 chain $\{C_i\}_{i\in I}$，那么 $\bigcup_{i\in I} C_i \in \mathcal{P}$，根据上面定义的 partial order 这是显然的，而且 $\bigcup_{i\in I} C_i$ 它是这个 chain 的一个 upper bound. 根据 Zorn's lemma，$\mathcal{P}$ 上有一个 maximal element C_m. 根据我们的假设 C_m 满足 ACC 是有 meet 的，这个 meet 我们用 a 来表示，即 $\bigwedge C_m = a$. 很明显 a 在是 S 的一个 upper bound，所以 $a \in S^u$. 我们现在来证明 $a = \bigwedge S^u$(至于为什么后面你就知道了)，还是用反证法 (23333)，假设 a 不是 S^u 的 greatest lower bound，那么存在 $t \in S^u$，使得 $a \not\leq t$. 则有 $a \wedge t \in S^u$，为什么呢? 因为任取 $s \in S$，都有 $s \wedge (a \wedge t) = s$. 自然地 $a > a \wedge t$(严格大于没有等号)，那么 chain $C_m \cup \{a \wedge t\}$ 也是满足 ACC，且大于 C_m，这就矛盾了，所以 $a = \bigwedge S^u = \bigvee S$.

所以我们证明了对于任意的 $S \subseteq L$ 都有 join，那么马上我们有

$$\bigwedge S = \bigvee S^l.$$

所以 S 的 meet 也有意义了，但是这里 S^l 我们不知道是不是非空的啊? 注意最前面我们用 0 加上 complete join semilattice 来构造 complete lattice，但是我们这里不需要构造因为 lattice 是给定了，那么对于任意非空的 S，$\bigwedge S \in S^l$ 的，所以 S^l 也是非空的，这里没有问题. 综上 $\mathcal{L}$ 是一个 complete lattice 与前提矛盾. **Claim 1** 证闭.

原谅我这个证明写不去了，原文省略太多的东西了... □

来另一个 1955 年给出的第一个证明.

Lemma 2.37. *如果 $\mathcal{L}$ 是 incomplete，那么存在两个 chain C 和 D 满足下面条件，*

1. *C 是一个 strictly ascending chain(严格大于)，D 是一个 strictly descending chain(严格小于).*
2. *D 中的每个元素都严格大于 C 中的每个元素.*
3. *不存在 $a \in L$ 使得它同时是 C 的 upper bound 和 D 的 lower bound.*

证明. Proof of above lemma. □

证明. 这里我们还是证 if every preserving map $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ has a fixed point then $\mathcal{L}$ is complete. 还是假设 $\mathcal{L}$ 是 incomplete，然后我们构造一个 preserving map 没有 fixed point.

假设 C, D 是满足前面 lemma 的两个 chains. 然后我们来定义这个特殊的 preserving map f，对于任意的 $x \in \mathcal{L}$，我们可以分两种情况来看，x 是 D 的 lower upper 或者不是.

第一种情况若 x 是 D 的 lower upper，反过来那么它肯定不是 C 的 upper bound，那么肯定存在某些 $c \in C$ 满足 $c \not\leq x$. 我们把这些 c 记为

$$C(x) = \{\, c \in C \mid c \not\leq x \,\}.$$

这种情况下我们取 $f(x) = \min C(x)$，即 $C(x)$ 中的最小值.

第二种情况 x 不是 D 的 lower upper，那么肯定存在某些 d D 满足 $c \not\geq x$. 我们把这些 d 记为

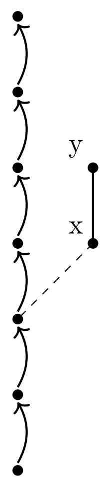
$$D(x) = \{\, d \in D \mid d \not\geq x \,\}.$$

这种情况下我们取 $f(x) = \max D(x)$，即 $D(x)$ 中的最大值.

这种情况定义出来的 $f(x)$ 都会满足 $f(x) \ngeq x$ 或者 $f(x) \nleq x$，所以是不存在 $f(x) = x$，即没有 fixed point 的.

接下来我们证明 f 是一个 preserving map，取 $x \leq y$. 我们分下面几种情况来分别说明:

1. x 是 D 的 lower bound，y 是 D 的 lower bound. 那么 $f(x) = \min C(x)$ 和 $f(y) = \min C(y)$. 若 $y \ngeq c$，则 $x \ngeq c$ (else $y \geq x \geq c$)，所以 $C(y) \subseteq C(x)$.



   C 是一个升链，那么 $C(x)$ 可以想象成这条链上一堆点，那么 $C(x)$ 还是一个升链，$C(y)$ 是它的一个子集必然满足 $\min C(x) \leq \min C(y)$，则 $f(x) \leq f(y)$.

2. x 是 D 的 lower bound，y 不是 D 的 lower bound. 那么 $f(x) = \min C(x)$ 和 $f(y) = \max D(y)$，显然 $f(x) \leq f(y)$.

3. x 不是 D 的 lower bound，y 是 D 的 lower bound. 这是不可能的，因为 $x \leq y$，那么当 y 是 D 的 lower bound 的时候，x 也是 D 的 lower bound.

4. x 不是 D 的 lower bound，y 不是 D 的 lower bound. 那么 $f(x) = \max D(x)$ 和 $f(y) = \max D(y)$. 若 $x \nleq d$，则 $y \nleq d$ (else $x \leq y \leq d$). 所以 $D(x) \subseteq D(y)$. 由于 $D(y)$ 是一个降链上点的集合，这个集合还是一个降链，你在降链上找子集 $D(x)$，肯定有 $\max D(x) \leq \max D(y)$，则 $f(x) \leq f(y)$.

综上 $f(x) \leq f(y)$ 总是成立，所以 f 确实是一个 preserving map. $\square$

Alegbraic Lattices

Algebraic Closure Operators

$$
\begin{tikzcd}
\text{closure operator} \arrow[r, "\Gamma(A)=\bigcup\Gamma(F)"] \arrow[d, "{\begin{array}{ll}\Gamma(A)\wedge\Gamma(B) & =\Gamma(A)\cap\Gamma(B)\\ \Gamma(A)\vee\Gamma(B) & =\Gamma(A\cup B)\end{array}}"'] & \text{algebraic closure operator} \arrow[d, "{\begin{array}{ll}\Gamma(A)\wedge\Gamma(B) & =\Gamma(A)\cap\Gamma(B)\\ \Gamma(A)\vee\Gamma(B) & =\Gamma(A\cup B)\end{array}}"] \\
\text{complete lattice} \arrow[r, "\text{the set of compact elements is join dense}"] \arrow[d, "\text{ideal closure operator(algebraic) based on } \mathcal{L}"'] & \text{algebraic lattice} \arrow[d, "\text{ideal closure operator(algebraic) based on } \mathcal{L}^c"] \\
\text{the lattice of closed set} \arrow[r, "\Gamma(A)=\bigcup\Gamma(F)"'] & \text{the lattice of closed set}
\end{tikzcd}
$$

Definition 3.1. A closure operator Γ on a set X is said to be algebraic if for every $B \subseteq X$,

$$\Gamma(B) = \bigcup\{\,\Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } X\,\}.$$

Definition 3.2. Let $\mathcal{L}$ be a complete lattice. An element $x \in L$ is compact if whenever $x \leq \bigvee A$, then there exists a finite subset $F \subseteq A$ such that $x \leq \bigvee F$. The set of all compact elements of $\mathcal{L}$ is denoted by $\mathcal{L}^c$

这里的 compact 就是在说如果 x 小于 A，则 x 小于 A 中的部分元素. 这个定义看起来还是比较自然的.

Proposition 3.3. $\mathcal{L}^c$ is closed under finite joins and contains 0, so it is a join semilattice with a least element.

证明. 假设 x 和 y 是两个 compact 元素，集合 A 表示 such $x \vee y \leq A$. 那么自然地有 $x \leq x \vee y \leq A$ 和 $y \leq x \vee y \leq A$，所以各自都可以找到 $x \leq F_x \subseteq A$ 和 $y \leq F_y \subseteq A$. 从 F_x 和 F_y 各挑一个元素出来 a 和 b 出来，那么 $x \vee y \leq a \vee b$. 0 属于 $\mathcal{L}^c$ 这是很自然的，它比任何一个元素都小. $\square$

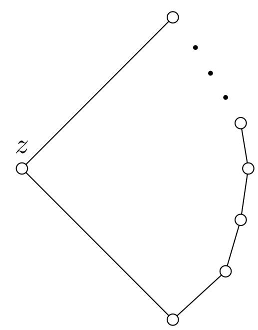
Definition 3.4. A lattice $\mathcal{L}$ is said to be algebraic, or compactly generated, if it is complete and $\mathcal{L}^c$ is join dense in $\mathcal{L}$, i.e., $x = \bigvee(\downarrow x \cap L^c)$ for every $x \in L$.

换句话说就是在 $\mathcal{L}^c$ 中比 x 小的元素它们的 join 是 x，每一个 x 都可以划分 $\mathcal{L}^c$. 另外一个理解就是任意 $x \in L$，都是某些 compact elements 的 join，这就是为什么说 compactly generated.

Example 3.5. 自然地，finite lattice 都是 algebraic lattice，首先 finite lattice 是 complete lattice，其中每一个元素都是 compact，所以有 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^c$，那么 $x = \bigvee(\downarrow x \cap L) = \bigvee(\downarrow x) = x$，即 $\mathcal{L}$ 是 join dense 的.

Example 3.6. 一个 complete lattice 并一定是一个 algebraic lattice:

1. 区间 [0 1] 上所有的实数和自然序构成一个 complete lattice $\mathcal{K}$，那么 $\mathcal{K}^c = 0$，但是它并不是 join dense 的.
2. 下面的 Hasse 图也是 complete lattice，但是 z 并不是一些 complete element 的 join，那么 $\mathcal{L}^c$ 就不是 join dense 的.



Definition 3.7. A closure rule is said to be finitary if it is a rule of the form $x \in S$ or the form $F \subseteq S \Rightarrow z \in S$ with F a finite set.

Theorem 3.8. (algebraic 和 finitary 的关系) A closure operator Γ is algebraic if and only if $\Gamma = \Gamma_{\sum}$ for some set $\sum$ of finitary closure rules.

证明. 若 Γ 是一个 X 上的 algebraic closure operator，我们要构造一组 finitary closure rules 来描述它的 closed sets. 那么我们规定若 $S \subseteq X$ 是 closed 当且仅当对任意的 finite set $F \subseteq S$ 都有 $\Gamma(F) \subseteq S$. 我们再来证明这个断言的正确性，正向是比较明显的，反过来要证明 S 是一个 closet set 即 $\Gamma(S) = S$，在 Γ 的作用下，已经有 $S \subseteq \Gamma(S)$，所以我们只需要证明 $\Gamma(S) \subseteq S$. 因为 Γ 是 algebraic 的，所以对于 finite set $F \subseteq S$，有 $\Gamma(S) = \bigcup \Gamma(F)$，结合前提有 $\bigcup \Gamma(F) \subseteq S$，那么 $\Gamma(S) \subseteq S$. 我们由已经证明的结论构造出一族 closure rules 它们是 finitary: 对任意的 finite set $F \subseteq S \Rightarrow z \in S$ 其中 $z \in \Gamma(F)$. 这族 closure rules 对应的 closed set 就是 Γ 上所决定的.

前面命题的正向是在描述一个 represention，那么反过来 $\Gamma_{\sum}$ 到底在这里是什么意思呢? 在确定 closure rules 情况下，我们就确定了 X 上的 closed sets，随即它们构成了一个 closure system，在之前 closure system 那一章，我们已经证明了，那么我们再在这个 closure system 上构造一个 closure operator $\Gamma_{\sum}$ 定义如下

$$\Gamma_{\sum}(A) = \bigcap \{ S \in \mathcal{C}_{\sum} \mid A \subseteq S \}$$

其中 $\mathcal{C}_{\sum}$ 表示 closure rules 确定的 closed set. 是不是感觉绕了一个大湾? 哈哈. whatever its done!

反过来如果 $\sum$ 是一族 finitary closure rules，可以得到上述定义的 closure operator $\Gamma_{\sum}$，现在我们要来说明它是 algebraic. 你得证明 $\Gamma_{\sum}(B)$ 是 B 靠着 closure rules 生成的. 这里的证明去看 universe alegbra 中证明 Sg 是一个 algebraic closure operator 的方法. $\square$

Theorem 3.9. (在 algebraic closure operator 上构造 algebraic lattice) Let Γ be an algebraic closure operator on set X. Then $\mathcal{C}_\Gamma$ is an algebraic lattice whose compact elements are $\{\,\Gamma(F) \mid F \text{ is a finite subset of } X\,\}$.

证明. 首先我们得说明 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是一个 complete lattice. 给定一族 $\mathcal{C}_\Gamma$ 上的元素 $B_{i\in I}$，我们定义 $\bigvee\limits_{i\in I} B_i = \Gamma(\bigcup\limits_{i\in I} B_i)$ 和 $\bigwedge_{i\in I} B_i = \Gamma(\bigcap_{i\in I} B_i)$，其中最大元是 $\Gamma(X)$ 和最小元是 $\Gamma(\emptyset)$. 所以 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是一个 complete lattice.

给定 X 上的有限子集 F 和 X 上子集族 $A_{i\in I}$. 若 $\Gamma(F) \leq \bigvee\limits_{i\in I} \Gamma(A_i) = \Gamma(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)$，要证明 $\Gamma(F)$ 是 compact 的，就是要证明 $\Gamma(F) \subseteq \bigvee\limits_{j\in J} \Gamma(A_j)$ 其中 J 是有限的且 $J \subseteq I$.

由于 Γ 是 algebraic 的，那么

$$F \subseteq \Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup\{\,\Gamma(G) \mid G \text{ is finite subset of } \bigcup_{i\in I} A_i\,\}.$$

对于任意的 $x \in F$，都存在 $x \in \Gamma(G_x)$，那么

$$\Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{x\in F} \Gamma(G_x)).$$

实际上若 G 是 $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ 的有限子集，那么 $G \subseteq \bigcup\limits_{j\in J} A_j$，所以

$$\Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{x\in F} \Gamma(G_x)) \subseteq \Gamma(\bigcup_{x\in F} \Gamma(\bigcup_{j\in J_x} A_j)) = \bigvee_{x\in F} \bigvee_{j\in J_x} \Gamma(A_j) = \bigvee_{\substack{x\in F \\ j\in J_x}} \Gamma(A_j).$$

反过来，若 C 是 $\mathcal{C}_\Gamma$ 上的 compact element. 我们要证明 C 是 X 上某个有限子集的闭包. 因为 C 是 closed 的，则 $\Gamma(C) = C$. 再由 Γ 是 algebraic 的，那么 $C = \bigcup\{\,\Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } C\,\}$. 又因为 C 是 compact 的，所以存在有限多个 $\Gamma(F_1), \cdots, \Gamma(F_n)$ 使得 $C = \Gamma(F_1) \vee \cdots \vee \Gamma(F_n) = \Gamma(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$. 命题得证.

最后证明 $\mathcal{C}_\Gamma^c$ 是 join dense 的. 对于任意的 $B \in \mathcal{C}_\Gamma$，B 是 closed，那么 $B = \bigvee\limits_{i\in I} \Gamma(F_i)$ 其中 finite subset $F \subseteq B$ (这里已经可以说明 B 是 compactly generated). 自然地有 $\bigvee(\downarrow B \cap \mathcal{C}_\Gamma^c) \leq A$ 且 $\Gamma(F_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}_\Gamma^c$，那么 $\bigvee(\downarrow B \cap \mathcal{C}_\Gamma^c) = B$. 命题得证.

我们用 algebraic closure operator 生成了一个 algebraic lattice，其上每一个元素都是 compact elements 的 join，自然地联想到 closure operator 是 algebraic 的那个条件，每一个 closed set 都可以用 finitely generated closed set 来表示. □

Definition 3.10. If Γ is a closure operator on X and B is closed subset of X, then we way a set A is a generating set for B if $\Gamma(A) = B$. The Set B is finitely generated if there is a finite generating set for B. The set A is minimal generating set for B if A generates B and no proper subset of A generates B.

Corollary 3.11. Let Γ be an algebraic closure operator on X. Then the finitely generated subset of X are precisely the compact elements of $\mathcal{C}_\Gamma$.

Example 3.12. 若 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是 algebraic 的，则 Γ 不一定是 algebraic，也就是说 Γ 生成的 lattice 是 algebraic 的，但是 Γ 本身不一定是 algebraic. 下面举一个列子.

例如定义 $X = Y \cup \{b\}$ 其中 Y 是 finite set，X 表示为它们的 disjoint union(不交并). 然后定义 X 上的 closure operator Γ 为: 若 A 是 Y 的一个 proper set(真子集)，则 $\Gamma(A) = A$; 特别地 $\Gamma(Y) = X$; 若 $b \in B \subseteq X$，则 $\Gamma(B) = X$. Γ 一个 well defined closure operator，可以验证一下. 那么 Γ 生成的 closed set 为 Y 的所有 proper set 和 X，它们构成的 lattice $\mathcal{C}_\Gamma$ 是和 Y 上所有子集构成的 lattice $\mathcal{L}_{\mathfrak{P}(Y)}$ 是 isomorphic，这个 isomorphism 是比较明显的，Y 上的 proper set 映到它本身，X 映到 Y. Y 是一个 finite set，所以 $\mathcal{L}_{\mathfrak{P}(Y)}$ 是一个 algebraic lattice，有个问题那么 isomorphism 是保持 algebraic 的？这个是显然的，想想就行. 考虑 $\Gamma(Y)$，其中 $b \in \Gamma(Y)$，但是对任意的 $F \subseteq Y$ 都有 $b \notin \Gamma(F)$，所以 $\Gamma(Y)$ 是不满足 Γ 是 algebraic 的.

Definition 3.13. Let $\mathcal{S} = (S, \vee)$ be a join semilattice. A subset A of S is called an ideal if

1. $x, y \in A$ implies $x \vee y \in A$.
2. if $z \leq y \in A$ impiles $z \in A$.

用自然语言来描述就是 ideal 首先是要在 $\vee$ 的作用下封闭的. 若存在对任意一个元素 z，它小于等于 ideal 中的某个元素，那么 z 也在 ideal 里面.

Proposition 3.14. (ideal closure operator 的引入) Ideals are defined by closure rules，so the intersection of a set of ideals of $\mathcal{S}$ is again one. Since the closure rules are finitary, the lattice of ideals is algebraic.

The closure operator I on S such that $I(B)$ is the ideal of $\mathcal{S}$ generated by B is given by

$$I(B) = \{\, x \in S \mid x \leq \bigvee F \text{ for some finite } F \subseteq B \,\}.$$

The ideal lattice of a join semilattice is denoted by $\mathcal{I}(\mathcal{S})$. The ideal lattice of a lattice $\mathcal{L}$ is likewise denoted by $\mathcal{I}(\mathcal{L})$.

不得不说 closure rules 抽象却深刻，扮演了一个很重要的角色.

证明. 我们来证明 I 是一个 closure operator 且 $I(B)$ 是一个 ideal.

任取 $x, y \in I(B)$，那么分别对应存在 $x \leq F_x$ 和 $y \leq F_y$，自然地 $x \vee y \leq \bigvee(F_x \cup F_y)$ 其中 F_x 和 F_y 都是 finite 的，所以 $x \vee y \in I(B)$. 若 $z \leq y \in I(B)$，那么 $z \leq \bigvee F_y$，所以 $z \in I$. 综上 $I(B)$ 是一个 ideal.

$B \subseteq I(B)$，这是显然的，取每个 B 上单点集. 自然地 $A \subseteq B$，也有 $I(A) \subseteq I(B)$. 考虑 $x \in I(I(B))$，那么存在 finte set F 对应 $x \leq \bigvee F \subseteq I(B)$. 自然地有 $F \subseteq I(B)$，那么对于任意 $y \in F$，都对应一个 $y \leq \bigvee F_y \subseteq B$. 所以

$$F \leq \bigvee F \leq \bigvee \bigcup_{y \in F} F_y.$$

自然地 $x \leq \bigvee \bigcup\limits_{y \in F} F_y$. 所以 $x \in I(B)$, 即 $I(B) \supseteq I(I(B))$, 前面已经保证了 $I(I(B)) \supseteq I(B)$, 所以 $I(I(B)) = I(B)$.

□

Theorem 3.15. (ideal closure operator 生成的 algebraic lattice 的性质) If $\mathcal{S}$ is a join semilattice with 0, then the ideal lattice $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ is algebraic. The compact elements of $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ are the principal ideals $\downarrow x$ with $x \in S$. Conversely, if $\mathcal{L}$ is an algebraic lattice, then $\mathcal{L}^c$ is a join semilattice with 0, and $\mathcal{L} \cong \mathcal{I}(\mathcal{L}^c)$.

证明. 先来证明 $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ 的 compact elements 是 principle ideals. I 是一个 algebraic closure operator 在上面已经证明了. 由 Theorem 3.9 我们知道 compact element 是 $I(F)$ 其中 F 是 S 上的 finite subset. 我们需要证明 $I(F)$ 里面有一个 maximal element，即 $\bigvee F \in I(F)$. 由于 F 是 finite 的，前面的结论是显然的，所以 $I(F) = \downarrow \bigvee F$.

如果 $\mathcal{L}$ 是一个 algebraic lattice，$\mathcal{L}^c$ 是一个 join semilattice with 0 在 proposition 3.3 中已经证明了. 这里的 I 就是下面定理 Theorem 3.16 中 Δ 更加朴素刻画，因为 I 在定义上可以更直观地看出它是 algebraic 的.

$\square$

Theorem 3.16. (第一同构定理？) If $\mathcal{L}$ is an algebraic lattice, define a algebraic closure operator Δ on the $\mathcal{L}^c$ by

$$\Delta(A) = \{\, x \in \mathcal{L}^c \mid x \leq \bigvee A \,\}$$

where $A \subseteq \mathcal{L}^c$. Then $\mathcal{L}$ is isomorphic to $\mathcal{C}_\Delta$. Then isomorphism $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}_\Delta$ is just given by $\varphi(a) = \{\, x \in \mathcal{L}^c \mid x \leq a \,\}$.

证明. Δ 是一个 closure operator 前面已经证明过了. 考虑 $x \in \Delta(A)$，那么有 $x \leq \bigvee A$. 由于 x 本身是 L 上的一个 compact element，那么就可以找到一个有限子集 $F \subseteq A$，使得 $x \leq \bigvee F$，所以 $\Delta(A) = \bigcup\limits_{x \in \Delta(A)} \Delta(F_x)$. 即 Δ 是 algebraic 的.

先证 bijective. 给定 $a, b \in L$，若 $\varphi(a) = \varphi(b)$，那么 $a = \bigvee \varphi(a) = \bigvee \varphi(b) = b$，注意两边等号成立的条件是 $\mathcal{L}^c$ 是 join dense(join dense 终于在这里起作用了)，所以 φ 是 injective. 对于任意的 $C \in \mathcal{C}_\Delta$，它对应一个子集 $A \subseteq \mathcal{L}^c$，使得 $\Delta(A) = C$，那么我们取 $a = \bigvee A$，我们知道 compact element 的 join 还是一个 compact element，所以 $a \in \mathcal{L}^c$，那么 $\varphi(a) = C$，即 φ 是 surjective.

再证 homomorphism.

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$$
$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

$\square$

Definition 3.17. A subset D of an ordered set $\mathcal{P}$ is said to be *up-directed* if for every $x, y \in D$ there exists $z \in D$ with $x \leq z$ and $y \leq z$.

Example 3.18. Every chain, or more generally every join semilattice, forms an up-directed set.

Theorem 3.19. Let Γ be a closure operator on a set X. The following are equivalent.

1. Γ is an algebraic closure operator.

2. The union of any up-directed set of Γ-closed sets is Γ-closed.

3. The union of any chain of Γ-clsoed sets is Γ-clsoed.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 给定 Γ 是一个 algebraic closure operator. 设 $D \subseteq \mathcal{C}_\Gamma$ 上的一个 up-directed set, 那么若 $C_1, C_2 \in D$, 则存在 $C_3 \in D$ 使得 $C_1 \subseteq C_3$ 和 $C_2 \subseteq C_3$. (只有清楚了 D 的定义, 接下来的事情就好办了) 我们要证明 $\bigcup D$ 也是一个 closed set, 那么自然地考虑 $\Gamma(\bigcup D)$, 由于 Γ 是 algebraic 的, 所以

$$\Gamma(\bigcup D) = \bigcup \{ \Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } \bigcup D \}.$$

我再来考虑这个 F, 换句话说 $F \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$, 其中 $C_j \in D$ 和 J 是 finite 的. 那么

$$\Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{j \in J} C_j).$$

由于 D 是一个 up-directed set, 所以存在某个 $C_m > C_j$ 对任意的 $j \in J$ 成立, 那么

$$\Gamma(\bigcup_{j \in J} C_j) \subseteq \Gamma(C_m) = C_m \subseteq \bigcup D.$$

所以对任意的 F, 都有 $\Gamma(F) \subseteq \bigcup D$, 那么 $\Gamma(\bigcup D) \subseteq \bigcup D$, 所以 $\Gamma(\bigcup D) = \bigcup D$, 即 $\bigcup D$ 也是一个 closed set.

(2) $\Rightarrow$ (3). 这个方向是 trivial 的, 因为 chain 是一种特殊的 up-directed set.

(3) $\Rightarrow$ (1). 给定 Γ 是 X 上的一个 closure operator, 且任意一个 closed sets 组成的 chain 的交还是一个 closed set. 对于任意的 $S \in X$, 我们对 S 的基数 $|S|$ 进行归纳, 证明任意的 $|S|$ 都有

$$\Gamma(S) = \bigcup \{ \Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } \bigcup S \}.$$

当 $|S| = 1$ 时, 这是显然的 $F = S$. 假设 $|S| = n$ 时上述等式成立, 那么 $|S| = n + 1$ 时, 让 $S = W \cup \{a\}$, 其中 $|W| = n$. 那么

$$\Gamma(S) = \Gamma(W \cup \{a\}) = \Gamma(W) \vee \Gamma(a) = \left(\bigcup_{\text{finite } F \subseteq W} \Gamma(F) \right) \vee \Gamma(a) = \left(\bigvee_{\text{finite } F \subseteq W} \Gamma(F) \right) \vee \Gamma(a)$$

(3) 在这里怎么用呢? 感觉有点弱啊, 似乎只能说明 $\mathcal{C}_\Gamma$ 是 complete 的. $\square$

Definition 3.20. The lattice $\mathcal{L}$ is said to be weakly atomic if whenever $a > b$ in $\mathcal{L}$, there exist elements $u, v \in L$ such that $a \geq u \succ v \geq b$. ($\succ$ means cover)

Example 3.21. 所有的 finite lattice 都是 weakly atomic 的；闭区间 $[0,1]$ 上所有实数自然序构成的 lattice 不是 weakly atomic，给定一个 v，你找不到它的 cover u.

Theorem 3.22. Every algebraic lattice is weakly atomic.

证明. 给定 $\mathcal{L}$ 上任意两个元素 a, b，若 $a > b$，那么存在一个 compact element c 使得 $a \geq c$ 且，$b \nleq c$. 这是因为 $\mathcal{L}$ 是 compactly generated，所以 a 和 b 都是一些 compact element 的 join，$a > b$ 则说明存在 a 对应的一些 compact element 是不小于等于 b 的. 接着我们考虑这样一个集合 $Q = \{x \in a/b \mid x \ngeq c\}$ (其中 a/b 表示 $b \leq x \leq a$ 称之为 interval sublattice 或者 quotient sublattice). 注意到 Q 不是一个 $\emptyset$，因为 $b \in Q$. 我们考虑 $\mathcal{L}$ 上所有的 chains，任意一个 chain 的 union 还是在 Q 里面，假设这个 union 大于等于 c，然而如果出现这种情况，这个 chain 肯定是 infinite 的，那么 c 小于等于 finite subset of it，这就矛盾了. 根据 Zorn's Lemma，Q 存在一个 maximal element u, 然后我们取 $v = c \vee u$, u 是 covered by v，假设存在 $u \leq z \leq v$，那么 $z \ngeq c$，则 $z \in Q$，这与 u 是 maximal element 是矛盾的. 这样我们就构造出来了满足 weakly atomic 的 u 和 v，证毕. □

Definition 3.23. A lattice $\mathcal{L}$ is said to be upper continuous if whenever D is an up-directed set having a least upper bound $\bigvee D$, then for any element $x \in L$, the join $\bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$ exists, and

$$a \wedge \bigvee D = \bigvee_{d \in D} (a \wedge d).$$

The property of being lower continuous is defined dually.

Theorem 3.24. Every algebraic lattice is upper continuous.

证明. 给定 $\mathcal{L}$ 是一个 algebraic lattice 和 D 是 $\mathcal{L}$ 上一个 up-directed subset. 显然地 $\bigvee_{d \in D}(a \wedge d) \leq a \wedge \bigvee D$. 我们用 $r = a \wedge \bigvee D$. 考虑 $c \in \downarrow r \cap L^c$，自然地 $c \leq r$，那么 $c \leq a$ 和 $c \leq \bigvee D$. 由于 c 是 compact 的，所以存在 finite set $F \subseteq \bigvee D$ 使得 $c \leq \bigvee F$，D 又是 up-directed，所以存在 $e \in D$ 使得 $\bigvee F \leq e$，那么 $c \leq e$. 前面也有 $c \leq a$，所以 $c \leq a \wedge e$. 因此

$$r = \bigvee(\downarrow \cap L^c) \leq \bigvee_{d \in D} (a \wedge d).$$

所以有 $a \wedge \bigvee D \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$，综上 $a \wedge \bigvee D = \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$. □

Definition 3.25. An element $a \in L$ is called an atom if $a \succ 0$, and a coatom if $1 \succ a$.

Definition 3.26. An element q in a complete lattice $\mathcal{L}$ is completely meet irreducible if, for every subset S of L, $q = \bigwedge S$ implies $q \in S$.

Definition 3.27. A decomposition of an element $a \in L$ is a representation $a = \bigwedge Q$ where Q is set of completely meet irreducible elements of $\mathcal{L}$

Definition 3.28. A lattice is strongly atomic if $a > b$ in $\mathcal{L}$ implies there exists $u \in L$ such that $a \geq u \succ b$.

Representation by Equivalence Relations

这章目的是像在群论里面那样每一个 group 都能找到和它同构的 permutation group，同样每一个 lattice 也都能找到和它同构的 equivalence relation lattice.

等价关系的定义，等价类这是你必须已经提前掌握的东西！为了后面好说明一些东西，我还是把等价关系的定义再写一遍.

Definition 4.1. An equivalence relation on a set X is a binary relation E satisfying, for all $x, y, z \in X$,

1. $x\ E\ x$.
2. $x\ E\ y$ implies $y\ E\ x$.
3. if $x\ E\ y$ and $y\ E\ z$, then $x\ E\ z$.

Definition 4.2. Given two sets X and Y, and $f\colon X \to Y$ is any function, then

$$\ker f = \{\, (x, y) \in X^2 \mid f(x) = f(y) \,\}$$

is an equivalence relation(the subset of X^2), called the kernel of f.

这里的 kernel 和 abstract algebra 那里面的 kernel 似乎有点不太一样...

Definition 4.3. (同余关系) If X and Y are algebras and $f\colon X \to Y$ is a homomorphism, then $\ker f$ is a congruence relation.

Definition 4.4. (等价关系代数格) Thinking of binary relations as subsets of X^2, the axioms (1)-(3) for an equivalence relation are finitary closure rules. Thus the collection of all equivalence relations on X forms an algebraic lattice $\mathbf{Eq}\ X$. The order on $\mathbf{Eq}\ X$ is given by set cotainment, i.e.,

$$\begin{aligned} R \le S &\text{ iff } R \subseteq S \in \mathfrak{P}(X^2) \\ &\text{ iff } (x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in S. \end{aligned}$$

等价关系的几个关系很自然的联想到了 finitary closure rules.

Definition 4.5. The greatest element of $\mathbf{Eq}\ X$ is the universal relation X^2, and its least element is the equality relation $= ((a, a))$. The meet operation in $\mathbf{Eq}\ X$ is of course set intersection, which means that $(x, y) \in \bigwedge_{i \in I} E_i$ if and only if $x\ E_i\ y$ for all $i \in I$. The join $\bigvee_{i \in I} E_i$ is the transitive closure of the set union $\bigcup_{i \in I} E_i$. Thus $(x, y) \in \bigvee_{i \in I} E_i$ if and only if there exists a finite sequence of element x_i and i_j such that

$$x = x_0\ E_{i_1}\ x_1\ E_{i_2}\ x_2\ \cdots x_{k-1}\ E_{i_k}\ x_k = y.$$

这些都是很自然衍生出来的概念，等价关系的交还是一个等价关系，等价关系的并并不一定构成一个等价关系，所以需要取一下它的传递闭包.

Definition 4.6. (积关系) If R and S are relations on X, defined the relative product $R \circ S$ to be the set of all pairs $(x, y) \in X^2$ for which there exists a $z \in X$ with $x\ R\ z$ and $z\ S\ y$.

Lemma 4.7. 构造传递闭包的方法 If R and S are equivalence relations, then we have $S \subseteq R \circ S$ and $R \subseteq R \circ S$. Thus

$$R \circ S \subseteq R \circ S \circ R \subseteq R \circ S \circ R \circ S \subseteq \cdots.$$

And $R \vee S$ is the union of this chain.

证明. 对任意的 $(x, y) \in S$，由于 R 是一个等价关系，因此存在 $(y, y) \in R$，即 $(x, y) \in R \circ S$，所以 $S \subseteq R \circ S$. 同理可以证明 $R \subseteq R \circ S$. $\square$

Definition 4.8. A representation of $\mathcal{L}$ is an ordered pair (X, F) where X is a set and $F \colon \mathcal{L} \to \mathbf{Eq}\ X$ is a lattice embedding. We say that the representation is

1. of type 1 if $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y)$ for all $x, y \in L$,
2. of type 2 if $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y) \circ F(x)$ for all $x, y \in L$,
3. of type 3 if $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y) \circ F(x) \circ F(y)$ for all $x, y \in L$.

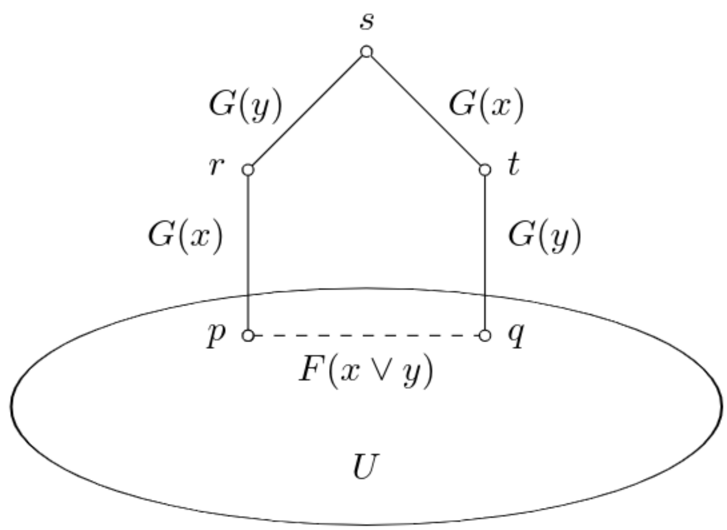
Definition 4.9. A weak representation of $\mathcal{L}$ is a pair (U, F) where U is a set and $F\colon \mathcal{L} \to \mathbf{Eq}\, U$ is a one-to-one meet homomorphism. Let us order the weak representation of $\mathcal{L}$ by

$$(U, F) \sqsubseteq (V, G) \text{ if } U \subseteq V \text{ and } G(x) \cap U^2 = F(x) \text{ for all } x \in L.$$

Lemma 4.10. If (U, F) is a weak representation of $\mathcal{L}$ and $(p, q) \in F(x \vee y)$, then there exists $(V, G) \sqsupseteq (U, F)$ with $(p, q) \in G(x) \circ G(y) \circ G(x) \circ G(y)$.

证明. 往 U 里面加 3 个新的 distinct 元素，使得 $V = U \cup \{r, s, t\}$. 我们想让

$$p\ G(x)\ r\ G(y)\ s\ G(x)\ t\ G(y)\ q.$$



于是我们定义对任意的 $z \in L$ 和 $u, v \in U$, 使得 $G(z)$ 满足下述条件

1. $u\ G(z)\ v$ iff $u\ F(z)\ v$,
2. $u\ G(z)\ r$ iff $z \geq x$ and $u\ F(z)\ p$,
3. $u\ G(z)\ s$ iff $z \geq x \vee y$ and $u\ F(z)\ p$,
4. $u\ G(z)\ r$ iff $z \geq y$ and $u\ F(z)\ p$,
5. $r\ G(z)\ s$ iff $z \geq y$,
6. $s\ G(z)\ t$ iff $z \geq x$,
7. $r\ G(z)\ t$ iff $z \geq x \vee y$.

注意到 $G(z)$ 由于 (1) 是满足自反性的，并且满足了 weak representtation 上 order 关系，即 $G(z)\cap U^2=F(z)$. 同时观察到条件 (2-7) 都和 r,s,t 的位置无关，所以它们也都是满足对称性的. 传递性也是很显然的，i.e.,(2)(4) => (3) 和 (5)(6) => 7. 所以 $G(z)$ 是一个等价关系. 还必须要说明 G 是单射和满足 meet homomorphism. 由于 F 是单调，那么 G 肯定是单调，新加入的元素造成的 relations 不会对 $G(x)\cap U^2=F(x)$ 造成影响. 考虑 $z,z'\in L$, 我们想要说明 $G(z\wedge z')=G(z)\wedge G(z')$，其实就是要考虑 z,z' 和 x,y 的关系，记住若 $z\wedge z'\geq x$ 当且仅当 $z\geq x$ 和 $z'\geq x$ 再结合上述条件，应该很容易证明，这过程太 routine 了！我放弃了.

我们再来观察是否满足上述图里面的关系，首先来看 $p\ G(x)\ r$, 把 (2) 中的 u 换成 p 和 z 换成 x，那么再看条件 $x\geq x$ and $p\ F(z)\ p$，这是显然满足的. 再来试一个 $r\ G(y)\ s$，把 (5) 中的 z 换成 y，那么条件变为 $y\leq y$, 这也是满足的. 回过头来看这个构造比较巧妙，注意到 (2-4) 必须带一个 $u\ F(x)\ p$，这是要使得它们和 1 构成传递关系的时候是满足条件的. □

Lemma 4.11. Let λ be limit ordinal, and for $\xi<\lambda$ let (U_ξ,F_ξ) be weak reprensentations of $\mathcal{L}$ such that $\alpha<\beta<\lambda$ implies $(U_\alpha,F_\alpha)\sqsubseteq(U_\beta,F_\beta)$. Let $V=\bigcup\limits_{\xi<\lambda}U_\xi$ and $G(x)=\bigcup\limits_{\xi<\lambda}F_\xi(x)$ for all $x\in L$. Then (V,G) is a weak representation of $\mathcal{L}$ with $(U_\xi,F_\xi)\sqsubseteq(V,G)$ for each $\xi<\lambda$.

证明. 先来证明满足的 order 关系，考虑 $\xi<\lambda, U_\xi\subseteq V$ 这是显然的. 对任意的 $\alpha<\xi$ 有 $F_\alpha(x)=F_\xi\cap U_\alpha^2\leq F_\xi(x)$ 和对任意的 $\beta>\xi$ 有 $F_\xi(x)=F_\beta(x)\cap U_\xi^2$，这两个东西就说明比你小的序数交出来的结果不会比你大，比你大的序数交出来的结果等于你是自身，所以有

$$G(x)\cap U_\xi^2=\left(\bigcup_{\gamma\leq\lambda}F_\gamma(x)\right)\cap U_\xi^2=\bigcup_{\gamma\leq\lambda}(F_\gamma(x)\cap U_\xi^2)=F_\xi(x).$$

再来证明单调和 meet homomorphism，单调是因为 F_ξ 都是单调的，且满足对任意的 $\alpha<\xi$ 有 $F_\alpha(x)=F_\xi\cap U_\alpha^2\leq F_\xi(x)$，这说明不会相互干扰，所以 G 是单调的. 最后只剩下 meet homomorphism，单调即 order-preserving，所以有 $G(x\wedge y)\leq G(x)\wedge G(y)$. 考虑 $(u,v)\in G(x)\wedge G(y)$，那么存在 $\alpha<\lambda$ 使得 $(u,v)\in F_\alpha(x)$ 和 $\beta<\lambda$ 使得 $(u,v)\in F_\beta(y)$. 让 $\gamma=\max(\alpha,\beta)$,那么 $(u,v)\in F_\gamma(x)\wedge F_\gamma(y)=F_\gamma(x\wedge y)\leq G(x\wedge y)$. 所以 $G(x)\wedge G(y)\leq G(x\wedge y)$. 综上即有 $G(x\wedge y)=G(x)\wedge G(y)$.

还有一个问题是 $G(x)$ 是一个等价关系吗？考虑任意的 $(u,v)\in G(x)$, 那么存在 $\alpha<\lambda$ 使得 $(u,v)\in F_\alpha(x)$, 那么也有 $(v,u)\in F_\alpha$，对称性满足了，自反性是 trivial 的，那么传递性呢？若还有 $(v,w)\in G(x)$，那么存在 β 使得 $(v,w)\in F_\beta(x)$. 让 $\gamma=\max(\alpha,\beta)$，那么 $(v,u),(u,w)\in F_\gamma(x)$，所以有 $(v,w)\in F_\gamma(x)$. 好家伙似乎又把前面的东西写了一遍... □

Theorem 4.12. Every lattice has a type 3 representation.

证明. 前面我们已经证明 $G(x)$ 是一个 meet homomorphism 且单调，现在我们的目标是证明 $G(x\vee y)=G(x)\circ G(y)\circ G(x)\circ G(y)\leq G(x)\vee G(y)$, 显然 G 就是一个 lattice embedding (G 单调可以得到 $G(x\vee y)\geq G(x)\vee G(x)$).

现在我们从任意一个 $\mathcal{L}$ 的 weak representation (U_0, F_0) 开始，在此之前所有的 lattice 都有一个 weak representation 存在. 其实这算一个 lemma，但是证明没有新意，都是构造性的. 我们让 $U_0 = L$，若 $(y,z) \in F_0(x)$ 当且仅当 $y = z$ 或者 $y \vee z \leq x$. 然后考虑所有这样的四元组 (p,q,x,y)，它是满足 $(p,q) \in F_0(x \vee y)$，每次拿一个出来用下第一个 lemma 构造一个新的 weak representation，让它们作为 order $(p_\xi, q_\xi, x_\xi, y_\xi)$ 使得 (U_ξ, F_ξ)，其中 $\xi < \eta$，它们是满足如下条件

1. 若 $\xi < \eta$, 则 $(U_\xi, F_\xi) \sqsubseteq (U_{\xi+1}, F_{\xi+1})$ 且 $(p_\xi, q_\xi) \in F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y) \circ F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y)$;
2. 若 $\lambda < \eta$ 是一个 limit original，则 $U_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi$ 和对任意的 $x \in L$ 有 $F_\lambda(x) = \bigcup_{\xi<\lambda} F_\xi$.

其中 $(p_\xi, q_\xi) \in F_\xi(x \vee y)$. 现在我们是用 ordinal number 来描述的，所以你要分别对 0 或者 successor ordinal 和 limit ordinal 来说明.

我们让 $V_1 = U_\eta$ 和 $G_1 = F_\eta$. 若对任意的 $(p,q) \in U_0$ 和 $x, y \in L$ 且 $(p,q) \in F(x \vee y)$，那么存在 $(p,q,x,y) = (p_\xi, q_\xi, x_\xi, y_\xi)$，使得 $(p,q) = (p_\xi, q_\xi) \in F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y) \circ F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y)$，即

$$F_0(x \vee y) \subseteq G_1(x) \circ G_1(y) \circ G_1(x) \circ G_1(y).$$

注意到有 $(U_0, F_0) \sqsubseteq (V_1, G_1)$. 我们定义 $(V_0, G_0) = (U_0, F_0)$，然后用 (V_1, G_1) 代替 (U_0, F_0) 重复上面整个过程，我们又可以得到一个 pair (V_2, G_2)，类似我们重复 ω 次，就可以得到

$$(U_0, F_0) = (V_0, G_0) \sqsubseteq (V_1, G_1) \sqsubseteq (V_2, G_2) \sqsubseteq \cdots.$$

其中对任意的 $n \in \omega$ 和 $x, y \in L$ 有 $G_n(x \vee y) \subseteq G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \circ G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y)$.

最后我们让 $W = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ 和 $H(x) = \bigcup_{n\in\omega} G_n(x)$，为什么会有

$$H(x \vee y) = H(x) \circ H(y) \circ H(x) \circ H(y).$$

我的理解实际第一步并不能直接得到上面的等式，只能得到

$$H(x \vee y) = \bigcup_{n\in\omega} G_n(x \vee y) \subseteq \bigcup_{n+1\in\omega} G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \circ G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \leq H(x) \circ H(y) \circ H(x) \circ H(y).$$

再用一下单调性就能得到上面的等式. □

前面的证明过程用到了 transfinite recurison，最后得到 $\mathcal{L}$ 的 representation (X, F) 其中 X 是 infinite 的，尽管 $\mathcal{L}$ 有可能是 finite 的. 自然地，你可能会想如果 $\mathcal{L}$ 是 finite 的，那么是否存在一个有限的等价关系构成的 lattice 与之对应呢?

Definition 4.13. Every finite lattice has a representation (Y, G) with Y finite.

证明. 这个命题在 1980 年被 Pavel Pavel Pudlák and Jíři Tůma 证明了，but the proof is quite difficult，若是未来机会再去看看吧. □

Theorem 4.14. Every lattice can be embedded into the lattice of subgroups of a group

证明. Whitman 在 1946 年证明了"every lattice can be embedded into the lattice of equivalence relations on same set"，在此之初这个问题的 motivation 源自 1930 年的 Birkhoff's observation "a representation of a lattice $\mathcal{L}$ by equivalence relations induces an embedding of $\mathcal{L}$ into the lattice of subgroups of a group". 所以当前这个定理是和 Whitman's theorem 是等价的，我们来尝试构造性的证明它.

给定一个 representation (X, F) of $\mathcal{L}$，让 $\mathcal{G}$ 表示 X 上所有限置换群 (move only finitely many elements 即只有有限多个 $f(s) \neq s$) 构成的群. 再让 **Sub** $\mathcal{G}$ 表示 the lattice of subgroups of $\mathcal{G}$. 让 $h\colon \mathcal{L} \to$ **Sub** $\mathcal{G}$ 定义如下

$$h(a) = \{ \pi \in G \mid x\ F(a)\ \pi(x) \text{ for all } x \in X \}.$$

首先我们想证明 $h(a)$ 是一个 subgroup of $\mathcal{G}$. 若存在 $\pi_1, \pi_2 \in h(a)$ 和任意的 $x \in X$，考虑 $\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$，那么 $x\ F(a)\ \pi_2(x)\ F(a)\ \pi_1(\pi_2(x))$，所以 $\pi_1 \circ \pi_2 \in h(x)$. h 是 monotone 还是比较显然的.

最后的 lattice homomorphism 证明，在此之前我们得说明一下 the lattice of subgroups 的结构是怎样的. 在 the lattice of subgroups 上的 element order 关系是 set inclusion，两个 subgroup 的交还是一个 subgroup，所以 lattice 上 meet 操作自然就是集合的交. 但是两个 subgroup 的并可能并不是一个 subgroup，所以我们定义 lattice 上的 join 操作是 new subgroup is generated by two subgroup，join 产生的 new subgroups 是包含原来两个 subgroup 的最小的 subgroup. 这里相当于把 closure system 又重新回忆了一遍. 若 $a, b \in L$, 考虑 meet homomorphism，在 monotone 的条件下我们只需要证明 $h(a \wedge b) \geq h(a) \wedge h(b) = h(a) \cap h(b)$. 若 $\pi \in h(a) \cap h(p)$，即 $(x, \pi(x)) \in F(a)$ 和 $(x, \pi(x)) \in F(b)$，那么 $(x, \pi(x)) \in F(a) \wedge F(b)$，所以 $h(a) \cap h(b) \in h(a \wedge b)$. 再来考虑 join homomorphism，同理在 monotone 的条件下我们只需要证明 $h(a \vee b) \leq h(a) \vee h(b)$，若 $\pi \in h(a \vee b)$，即 $(x, \pi(x)) \in F(a \vee b)$，现在要证明 $(x, \pi(x)) \in h(a) \vee h(b)$ 似乎略微有些不是那么直接. 怎么办呢? 那只能去拆解 $F(a \vee b) = F(a) \circ F(b) \circ F(a) \circ F(b)$，自然地我们也可以定义 subgroups 之间的 product

$$h(a) \circ h(b) = \{ \pi_a \circ \pi_b \mid \pi_a \in h(a), \pi_b \in h(b) \}.$$

那么也有 $h(a) \subseteq h(a) \circ h(b)$ 和 $h(b) \subseteq h(a) \circ h(b)$. 我们现在想让

$$h(a) \vee h(b) \supseteq h(a) \circ h(b) \circ h(a) \circ h(b) \circ \cdots \supseteq h(a \vee q) = \{ \pi \in G \mid x\ F(a) \circ F(b) \circ F(a) \circ F(b)\ \pi(x) \text{ for all } x \in X \}.$$

这里我直觉的告诉我 $\pi \in h(a) \circ h(b) \circ h(a) \circ h(b)$. 事实上确实如此吗?

$$x\ F(a)\ \pi_1(x)\ F(b)\ \pi_2(\pi_1(x))\ F(a)\ \pi_3(\pi_2(\pi_1(x)))\ F(b)\ \pi(x)$$

那么存在一个 $\pi_4 \in h(b)$ 使得 $\pi_4(\pi_3(\pi_2(\pi_1(x)))) = \pi(x)$，即 $\pi \in h(a) \circ h(b) \circ h(a) \circ h(b)$ 印证了我们的猜测. 这 product of subgroup 性质和 type3 representation 有那么一点相似了，也是在说明它们其实是等价的. ☐

Lemma 4.15. Let $\mathcal{L}$ be a sublattice of **Eq** X with the property that $R \vee S = R \circ S \circ R$ for all $R, S \in L$. Then $\mathcal{L}$ statifies

$$x \leq y \text{ implies } x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z).$$

The implication is known as the modular law.

证明. □