

# Lattice

枫聆

2021 年 6 月 6 日

## 目录

<b>1</b>	<b>Ordered Sets</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Semilattices, Lattices and Complete Lattices</b>	<b>6</b>
2.1	Semilattice . . . . .	6
2.2	Lattice . . . . .	8
2.3	Complete Lattice . . . . .	10
2.4	Closure System . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Alegbraic Lattices</b>	<b>20</b>
3.1	Algebraic Closure Operators . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Representation by Equivalence Relations</b>	<b>29</b>

## Ordered Sets

**Definition 1.1.** **Partially ordered set** is a system  $\mathcal{P} = (P, \leq)$  where  $P$  is a nonempty set and  $\leq$  is a binary relation on  $P$  satisfying, for all  $x, y, z \in P$ ,

1.  $x \leq x$ , (reflexivity)
2. if  $x \leq y$  and  $y \leq x$ , then  $x = y$ , (antisymmetry)
3. if  $x \leq y$  and  $y \leq z$ , then  $x \leq z$ . (transitivity)

**Definition 1.2.**  $\mathcal{C}$  is a **chain** if for every  $x, y \in \mathcal{C}$ , either  $x \leq y$  or  $y \leq x$ .

chain 上的元素都可以相互比较, 所以它是 totally ordered 或者 linearly ordered.

**Definition 1.3.** We say that  $x$  is **covered** by  $y$  in  $\mathcal{P}$ , written  $x \prec y$ , if  $x \leq y$  and there is no  $z \in P$  with  $x \leq z \leq y$ .

**Definition 1.4.** **Hasse diagram** for a finite partially order set  $\mathcal{P}$ : the elements of  $P$  are represented by points in the plane, and a line is drawn from  $a$  up to  $b$  precisely when  $a \prec b$ .



**Definition 1.5.** Given a partially order set,  $f$  is a **order preserving map** satisfying the condition  $x \leq y$  implies  $f(x) \leq f(y)$ .

**Definition 1.6.** Given two posets  $(P, \leq_P)$  and  $(Q, \leq_Q)$ , an **order isomorphism** from  $(P, \leq_P)$  to  $(Q, \leq_Q)$  is a bijective order preserving map.

**Definition 1.7.** Given two posets  $(P, \leq_P)$  and  $(Q, \leq_Q)$ , an **order embedding** from  $(P, \leq_P)$  to  $(Q, \leq_Q)$  is a both order-preserving and order-reflecting map that  $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ .

相比 order isomorphism 而言稍微弱一点, 不需要是一个 surjective.

**Definition 1.8.** An **ideal**  $I$  of a partially ordered set  $\mathcal{P}$  is a subset of the elements of  $P$  which satisfy the property that if  $x \in \mathcal{P}$  and exists  $y \in I$  with  $x \leq y$ , then  $x \in I$ .

衍生自 the ideal of ring, 后面我们将会看见 the ideal of lattice.

**Definition 1.9.** Given an ordered set  $\mathcal{P} = (P, \leq)$ . The **dual of  $P$**  is another poset  $\mathcal{P}^d = (P, \leq^d)$  with the order relation defined by  $x \leq^d y \iff y \leq x$ .

**Definition 1.10.** The dual notion of an ideal is called a **filter** that  $F$  is a subset of  $P$  such  $x \geq y \in F$  implies  $x \in F$

类似的还有 principle ideal 和 principle filter. 就是通过一个元素生成的.

**Definition 1.11.** The poset  $\mathcal{P}$  has a **maximum**(element) if there exists  $x \in P$  such that  $y \leq x$  for all  $x \in P$ .

An element  $x \in P$  is **maximal** if there is no element  $y \in P$  with  $x \leq y$  and  $x \neq y$ .

maximum 是一个名词表示最大值 (greatest), maximal 是一个形容词表示极大的意思. 在 poset 中可能不只有一个 maximal element.

**Lemma 1.12.** The following are equivalent for an poset  $\mathcal{P}$ .

1. Every nonempty subset  $S \subseteq P$  contains an element minimal in  $S$ .
2.  $\mathcal{P}$  contains no infinite descending chain

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$$

这里去掉等号是指  $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq \cdots$

3. If

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$$

in  $\mathcal{P}$ , then there exists  $k$  such that  $a_n = a_k$  for all  $n \geq k$ .

这个 lemma 被称为 descending chain condition(DCC). 对偶地也有 ascending chain condition(ACC). original 'a partially ordered set  $\mathcal{P}$  requires that all decreasing sequences in  $\mathcal{P}$  become eventually constant'.

证明. (2)  $\Rightarrow$  (3). 前提只存在 finite descending chain. 假设 (3) 不成立, 且  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$  是 infinite chain. 则对于任意的  $k$ , 都能找到  $n \geq k$  使得  $a_n \neq a_k$  且  $a_k \geq a_n$ , 那么  $a_k > a_n$ . 这样从  $k = 0, 1, 2, \cdots$  开始我们每次都可以找到  $a_{n_0} > a_{n_1} > \cdots$ . 这样我们实际构造了一个 infinite descending chain, 这是和前提矛盾的. 若  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$  是一个 finite chain, 它的最后一个元素显然是满足 (3), 这和假设是矛盾的.

(3)  $\Rightarrow$  (2). 也是分 infinite chain 和 finite chain 来讨论, finite 是显然的, infinite 的时候可以把它变成 finite.

(1)  $\Rightarrow$  (2). (1) 前提满足下, 假设 (2) 不成立, 即  $\mathcal{P}$  存在 infinite descending chain. 把这个 chain 上的所有元素取出来组成一个 subset  $S$ , 那么任取  $a_k$  都有  $a_{k+1} \leq a_k$ . 即找不到 minimal.

(2)  $\Rightarrow$  (1). (2) 前提满足下, 假设 (1) 不成立. 这里需要用一下[选择公理](#)了, 定义  $S$  上一个选择函数  $f: S \rightarrow T$ , 其中  $T \subseteq S$ . 让  $a_0 = f(S)$ , 递归地定义对任意的  $i \in \omega$  有  $a_{i+1} = f(\{s \in S \mid s < a_i\})$ . 接下来让这个 definition make sense, (2) 前提下  $S$  是没有 minimal, 所以  $\{s \in S \mid s \leq a_i\}$  不是 empty set. 这样就找到了一个 infinite descending chain, 与假设矛盾.

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3).

(3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1).

done well!

□

**Lemma 1.13.** Let  $\mathcal{P}$  be an poset satisfyint the DCC. If  $\varphi(x)$  is statement such that

1.  $\varphi(x)$  holds for all minimal elements of  $P$ , and
2. whenever  $\varphi(y)$  holds for all  $y < x$ , then  $\varphi(x)$  holds,

then  $\varphi(x)$  is true for every element of  $P$ .

这个 lemma 有点意思, 如果对  $P$  上所有的 minimal element  $m$  都有命题  $\varphi(m)$  成立, 且  $\mathcal{P}$  满足 DCC. 那么再加上一个条件: 只要对任意元素  $x \in P$ , 满足  $y < x$  都有  $\varphi(y)$  成立. 则对任意元素  $x \in P$  都有  $\varphi(x)$  成立.

证明. 其实 (1) 是 (2) 的一个 special case. 在 (1)(2)hold 的情况下, 我们试想一下  $\varphi(x)$  没有被 hold 住的是哪些元素呢? 即对于某个  $x$ , 存在  $y < x$  使得  $\varphi(y)$  没有被 hold. 递归地, 我们再去考虑这个  $y$ . 那么这里就存在一条 descending chain 在这里, 由于  $\mathcal{P}$  是满足 DCC, 所以这个 descending chain 是 infinite 的. 这条 chain 的结尾显然是一个 minimal element, 但是它是满足  $\varphi(x)$ . 所以实际上是不存在这里的  $x$  不满足  $\varphi(x)$ . □

**Definition 1.14.** Let  $\mathcal{P}$  be poset. Two elements  $a$  and  $b$  of  $\mathcal{P}$  are called **comparable** if  $a \leq b$  or  $a \geq b$ . Otherwise, they are called **incomparable**.

元素的可比性.

**Definition 1.15.** An **antichain** in  $\mathcal{P}$  is a subset  $A$  of  $\mathcal{P}$  in which each pair of different element are incomparable.

**Definition 1.16.** Define the **width** of an poset  $\mathcal{P}$  by

$$w(\mathcal{P}) = \sup\{|A| \mid A \text{ is an antichain in } \mathcal{P}\}$$

where  $|A|$  denotes the cardinality(集合的势) of  $A$ .

**Definition 1.17.** We define the **chain-covering-number** CCN  $c(\mathcal{P})$  to be the least cardinal number  $k$ , such that  $P$  is a union of  $k$  chains(finite) of  $P$ , means  $P = \bigcup C_i$

另一种 covering number, 有趣.

**Lemma 1.18.** Suppose  $P = \bigcup C_i$  where  $i \in I$ , then  $w(\mathcal{P}) \leq |I|$ .

证明. 因为  $|A \cap C_i| \leq 1$  for  $i \in I$ . 也就是说你把  $A$  里面的元素分开塞到  $C_i$  上, 每次都只能塞一个. 那么最多你可以每个  $C_i$  上都塞一个.  $\square$

**Theorem 1.19.** (Dilworth, 1950) Let  $\mathcal{P}$  be a finite poset.  $w(\mathcal{P})$  is width. Then  $\mathcal{P}$  is a union of  $w(\mathcal{P})$ -chains.

证明. TODO.  $\square$

## Semilattices, Lattices and Complete Lattices

### Semilattice

**Definition 2.1.** A **semilattice** is an algebra  $\mathcal{S} = (S, *)$  satisfying, for all  $x, y, z \in \mathcal{S}$ ,

1.  $x * x = x$ ,
2.  $x * y = y * x$ ,
3.  $x * (y * z) = x * (y * z)$ .

where  $*$  is binary operator. 换句话说 **semilattice** 就是一个 **idempotent commutative semigroup**(幂等交换半群).

**Theorem 2.2.** In a semilattice  $\mathcal{S}$ , define  $x \leq y$  if  $x * y = x$ . Then  $(S, \leq)$  is a poset in which every pair of elements has a greater lower bound.

Conversely, given an poset  $P$  with that property, define  $x * y = g.l.b(x, y)$ . Then  $(P, *)$  is a semilattice.

证明. 先证明这个是一个 poset.

1.  $x * x = x$  implies  $x \leq x$ ,
2. if  $x \leq y$  and  $x \geq y$ , then  $x = x * y = y * x = y$ ,
3. if  $x \leq y$  and  $y \leq z$ . then  $x * z = (x * y) * z = x * (y * z) = x * y = x$ , so  $x \leq z$ .

这个 greater lower bound 就是  $x * y$ . 首先证明它是一个 lower bound,  $x * (x * y) = x * y$  and  $y * (x * y) = x * y$ , 所以  $x * y$  是一个 lower bound. 再来证明所有的 lower bound 都比它小, 假设  $z \leq x$  和  $z \leq y$ , 即  $z$  是  $\{x, y\}$  的一个 lower bound. 那么  $z * (x * y) = z * y = z$ , 所以  $z \leq (x * y)$ . 最后  $x * y$  的一个 greater lower bound.  $\square$

**semilattice** 上弄了一个特殊的 poset 出来, 它最好的性质就是任意两个元素都有一个下确界.

**Definition 2.3.** A semilattice with the above ordering is usually called **meet semilattice**. 对偶地, 使得  $x \geq y \iff x * y = y$ , 则称  $\mathcal{S}$  为是一个 **join semilattice**. 自然地在  $(S, \leq)$  下任意的 pair 都有一个 least upper bound  $x \vee y$ .

**Definition 2.4.** A **homomorphism** between two semilattice is a map  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  with the property that  $f(x * y) = f(x) * f(y)$ . An **isomorphism** is a homomorphism that injective and surjective.

一个 **semilattice homomorphism** 肯定是一个 **monotone function**(相对于 poset 来说), 但是一个 **monotone function** 并不一定是一个 **homomorphism**.

nothing new... has some!

**Definition 2.5.** A semilattice is **bounded** if there is a top/bottom element.

**Theorem 2.6.** Let  $\mathcal{S}$  be a meet semilattice. Define  $\phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{S})$  by

$$\phi(x) = \{y \in \mathcal{S} \mid y \leq x\}$$

where  $\mathcal{O}(\mathcal{S})$  is collection of all order ideals of  $\mathcal{S}$ . Then  $\mathcal{S}$  is isomorphic to  $(\mathcal{O}(\mathcal{S}), \cap)$  (注意这里是  $\mathcal{S}$  的 image).

怎么感觉这些 ideal 都是 principle ideal.

证明.  $\cap$  表示 set inclusion,  $\phi$  是 order-preserving 和 order-reflecting 还是比较 obvious. 所以  $\phi$  是一个 order embedding of  $\mathcal{S}$  into  $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ . Moreover  $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \cap \phi(y)$  because  $x \wedge y$  is the greatest lower bound of  $\{x, y\}$ , so that  $z \leq x \wedge y$  if and only if  $z \leq x$  and  $z \leq y$ .  $\square$

## Lattice

**Definition 2.7.** A **lattice** is an algebra  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$  satisfying, for all  $x, y, z \in L$ ,

1.  $x \wedge x = x$  and  $x \vee x = x$ ,
2.  $x \wedge y = y \wedge x$  and  $x \vee y = y \vee x$ ,
3.  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  and  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ,
4.  $x \wedge (x \vee y) = x$  and  $x \vee (x \wedge y) = x$ .

就第四个在我们眼里似乎没有那么自然, 它叫 absorption laws(吸收律), 它在这里可以保证后面  $\wedge$  和  $\vee$  定义了相同的 partial order(虽然是 dual). 前三个我们知道 lattice 同时在两种 binary operator 都是 semilattice, 所以我们只要在 lattice 上定义前面合适的 partial order, 它就是 both meet and join semilattice.

**Theorem 2.8.** In a lattice  $\mathcal{L}$ , define  $x \leq y$  if and only if  $x \wedge y = x$ . Then  $(L, \leq)$  is a poset in which every pair of elements has a greatest lower bound and a least upper bound.

证明. 给定一个 pair  $(x, y)$ . 前面已经证明了  $x \wedge y$  是它的一个 greater lower bound. 再根据 lattice definition 的第四条的第一个式子,  $x \vee y$  是它的一个 upper bound, 第二式子说明当  $x \geq y$  时, 有  $x \vee y = x$ , 对偶地  $x \vee y$  是 least upper bound.

这里若  $x \wedge y = x$ , 则  $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ . 类似地  $x \vee y = y$ , 则  $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ . 所以有一个很重要的结论就是  $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$ .  $\square$

类似的我们可以通过一个 poset 构造 lattice.

**Theorem 2.9.** Given an poset  $\mathcal{P}$  with that above property, define  $x \wedge y = \sup\{x, y\}$  and  $x \vee y = \inf\{x, y\}$ . Then  $(P, \wedge, \vee)$  is a lattice.

所以实际上 lattice 可以有两种定义第一种是前面的代数定义, 第二种就是在 poset 上定义 join 和 meet 操作, 这一点要清楚.

the definitions of sublattice, homomorphism and isomorphism ).

**Definition 2.10.** Two lattice  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  are **isomorphic** if there is **bijective**  $\alpha$  from  $\mathcal{L}_1$  to  $\mathcal{L}_2$  such that for every  $a, b$  in  $\mathcal{L}_1$  the following two equations hold:  $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$  and  $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b)$ . Such an  $\alpha$  is called by an **isomorphism**.

在用 poset 基础上定义的 lattice 之间的 isomorphism 也可以用下述定理来描述.

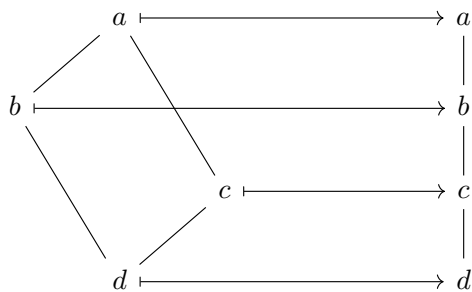
**Theorem 2.11.** Two lattices  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  are isomorphic iff there is a bijection  $\alpha$  from  $\mathcal{L}_1$  to  $\mathcal{L}_2$  such that both  $\alpha$  and  $\alpha^{-1}$  are **order-preserving**.



证明. 如果  $\alpha$  是  $\mathcal{L}_1$  到  $\mathcal{L}_2$  的一个 isomorphism 和  $a \leq b$  hold in  $\mathcal{L}_1$ .  $a \leq b$  hold means  $a = a \wedge b$ , 那么  $\alpha(a) = \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$ , 所以  $\alpha(a) \leq \alpha(b)$ . 反过来  $\alpha^{-1}$  也是一个 isomorphism, 所以  $\alpha^{-1}$  也是 order-preserving 的.

反过来如果  $\alpha$  是 bijective 的且  $\alpha$  和  $\alpha^{-1}$  都是 order-preserving 的. 给定  $a, b \in \mathcal{L}_1$ , 有  $a \leq a \vee b$ , 那么  $\alpha(a) \leq \alpha(a \vee b)$ . 同理对  $b$  也有  $\alpha(b) \leq \alpha(a \vee b)$ , 那么  $\alpha(a) \vee \alpha(b) \leq \alpha(a \vee b)$ . 我们要把这个小于等于换成等于, 就是要证明  $\alpha(a \vee b)$  确实是一个 greatest upper bound, 那么对应任意的 upper  $u$ , 即  $\alpha(a) \vee \alpha(b) \leq u$ , 分别有  $\alpha(a) \leq u$  和  $\alpha(b) \leq u$ . 由于  $\alpha^{-1}$  也是 order-preserving, 所以有  $a \leq \alpha^{-1}(u)$  和  $b \leq \alpha^{-1}(u)$ , 那么  $a \vee b \leq \alpha^{-1}(u)$ , 在用  $\alpha$  作用一遍  $\alpha(a \vee b) \leq u$ . 到这里证明了  $\alpha(a \vee b)$  确实是一个 greatest upper bound, 即  $\alpha(a) \vee \alpha(b) = \alpha(a \vee b)$ . 同理也可以证  $\alpha(b) \wedge \alpha(b) = \alpha(a \wedge b)$ .  $\square$

**Example 2.12.** 记录一个  $\alpha$  是 bijective 但只有  $\alpha$  order-preserving, 这样的  $\alpha$  可能不是一个 isomorphism. Hasse 图可能画的不标准!



**Definition 2.13.** If  $\mathcal{L}$  is lattice and  $L' \neq \emptyset$  is a subset of  $L$  such that for every pair of elements  $a, b \in L'$  both  $a \wedge b$  and  $a \vee b$  are in  $L'$ , where  $\wedge$  and  $\vee$  are the lattice operations of  $\mathcal{L}$ , then we say  $L'$  with the same operations of  $\mathcal{L}$  is a **sublattice** of  $\mathcal{L}$ .

## Complete Lattice

集合的 upper bound 和 lower bound.

**Definition 2.14.** For a subset  $A$  of a poset  $P$ , let  $A^u$  denote the set of all upper bounds of  $A$ ,

$$\begin{aligned} A^u &= \{x \in P \mid x \geq a \text{ for all } a \in A\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \uparrow a \end{aligned}$$

where  $\uparrow a = \{x \in P \mid x \geq a\}$ . Dually,  $A^l$  is the set of all lower bounds of  $A$ ,

$$\begin{aligned} A^l &= \{x \in P \mid x \leq a \text{ for all } a \in A\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \downarrow a \end{aligned}$$

where  $\downarrow a = \{x \in P \mid x \leq a\}$ .

思考一个问题 poset  $P$  的一个 subset  $A$  什么时候 least upper bound? 很显然  $A^u$  一定不是空的, 更确切地说  $A^u$  有一个 greatest lower upper  $z$ , 而且  $z \in A^u$ , 根据  $z$  的 definition 它是  $A$  的 least upper bound. 这种情况下我们就说 the join of  $A$  exists, and write  $z = \bigvee A$ . 对偶地, 考虑  $A$  的 greatest lower bound, 则  $A^l$  一定不为空, 那么  $A^l$  里面是有一个 lower upper bound 的  $w$ , 根据  $w$  的 definition 它是  $A$  的 greatest lower bound. 这种情况下我们就说 the meet of  $A$  exists, and write  $w = \bigwedge A$ .

**Theorem 2.15.** Let  $\mathcal{S}$  be a finite meet semilattice with greatest element 1. Then  $\mathcal{S}$  is a lattice with join operation defined by

$$x \vee y = \bigwedge \{x, y\}^u = \bigwedge (\uparrow x \cap \uparrow y).$$

证明.  $\mathcal{S}$  有 greatest element, 则  $A^u$  肯定不是空了, 至少这个 greatest element 里面.  $\bigwedge A^u$  就是要找  $A^u$  的 lower upper bound. 由于  $\mathcal{S}$  是一个 finite lattice, 所以  $A^u$  也是 finite.  $A^u$  里面的元素做有限次 meet 操作得到就是一个 lower upper bound, 但是你还得说明它在  $A^u$  里面. 这是很显然的,  $x \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_k = x$  其中  $z_i \in A^u$ , 所以  $\bigwedge A^u$  是它的一个 upper bound.

还得 proof 一下它是一个 lattice, 上面只是证明了这个东西是 well behaved. Lattice definition 中前三条还是比较明显的.

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

这也很显然, 因为  $x \vee y \in \{x, y\}^u$ .

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

因为  $x \wedge y$  是  $\{x, y\}$  的一个 greatest lower bound, 有  $x \geq x \wedge y$ , 那么  $\inf(x, x \wedge y) = x$ . □

这个 theorem 告诉我们: if a finite poset  $P$  has a greatest element and every pair of elements has a meet, then  $P$  is a lattice. 这就是 lattice 非代数形式的 definition.

**Theorem 2.16.** Every finite subset of a lattice has a greatest lower bound and a least upper bound.

证明.  $\mathcal{L}$  是 finite, 则它的 subset 也是 finite. 前面我们知道 lattice 中任意一个 pair 都有 greatest lower bound 和 least upper bound, 这是 meet 和 join 定义下的 partial order 所带来的性质. 在 finite subset 里面先挑两个出来做 meet 或者 join 可以得到 inf 和 sup 它们也是属于  $L$  的, 再从剩下的 subset 里面再挑一个出来做同样的操作, 这个操作只会做有限多次, 所以最终我可以得到这个 subset 的 greatest lower bound 和 least upper bound.  $\square$

这个性质在 infinite lattice 下可能就无法成立, 自然地 completely 就 arised.

**Definition 2.17.** Given poset  $\mathcal{L}$ . If every subset  $A$  of  $\mathcal{L}$  has a greatest lower bound  $\bigwedge A$  and a least upper bound  $\bigvee A$ , then  $\mathcal{L}$  is called complete lattice.

**Definition 2.18.** a complete meet semilattice is an poset  $\mathcal{S}$  with greatest element and the property that every nonempty subset  $A$  of  $S$  has a greatest lower bound  $\bigwedge A$ .

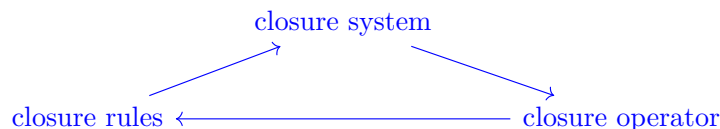
**Theorem 2.19.** If  $\mathcal{L}$  is a complete meet semilattice, then  $\mathcal{L}$  is a complete lattice with the join operation defined by

$$\bigvee A = \bigwedge A^u = \bigwedge (\bigcap_{a \in A} \uparrow a).$$

证明. 和前面在 finite meet semilattice 上构造 lattice 类似, 这里 finite 换成了 complete. 这里我们直接就可以知道在  $A^u$  非空时,  $\bigwedge A^u$  是有意义的, 并且这里有  $1 \in A^u$ . 那么  $\bigwedge A$  的 definition 是满足  $A$  的 least upper bound.  $\square$

# Closure System

这一章我们的主旋律.



**Definition 2.20.** A **closure system** on a set  $X$  is a collection  $\mathcal{C}$  of subsets of  $X$  that is closed under arbitrary intersections(任意的交). The sets in  $\mathcal{C}$  are called closed set.

**Example 2.21.** 有一些 closure system 的例子

1. closed subsets of topological space,
2. subgroups of group,
3. subspace of vector space.
4. convex subsets of euclidean space  $\mathbb{R}^n$ ,
5. order ideals of an poset.

By convention, 特殊地  $\bigcap \emptyset = X$  ( $\bigwedge(A \cup \emptyset) = \bigwedge A \vee \bigwedge \emptyset = \bigwedge A$ , 这就是在说它  $\bigwedge \emptyset$  比任意子集都大), closure system 现在就是 complete meet semilattice with greatest element  $X$ , 所以你按前面构造定义出 join, 那么 closure system 就是一个 complete lattice 了.

**Definition 2.22.** A **closure operator** on a set  $X$  is a map  $\Gamma: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  satisfying, for all  $A, B \subseteq X$ ,

1.  $A \subseteq \Gamma(A)$ ,
2.  $A \subseteq B$  implies  $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$ ,
3.  $\Gamma(\Gamma(A)) = \Gamma(A)$ .

如何在  $X$  上利用已知的 closure system 构造一个 closure operator?

**Theorem 2.23.** If  $\mathcal{C}$  is a closure system on a set  $X$ , then the map  $\Gamma_{\mathcal{C}}: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  defined by

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap \{ D \in \mathcal{C} \mid A \subseteq D \}$$

is a closure operator. Moreover  $\Gamma_{\mathcal{C}}(A) = A$  if and only if  $A \in \mathcal{C}$

**Definition 2.24.** A set of **closure rules** on a set  $X$  is a collection  $\sum$  of properties  $\varphi(S)$  of subsets of  $X$ . where each  $\varphi(S)$  has one of the forms

$$x \in S$$

or

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with  $x, z \in X$  and  $Y \subseteq X$ . A subset  $D$  of  $X$  is said to be closed with respect to these rules if  $\varphi(D)$  is true for each  $\varphi \in \sum$ .

你看到这里一定会感觉非常的困惑，抽象的 closure rules 到底是个啥东西？不急接着往下看你终会明白的。

**Example 2.25.** 对应前面列举到的 closure system.

1. In topological space, all rules  $Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$  where  $z$  is an accumulation point of  $Y$ .
2. In subgroup, the rule  $1 \in S$  and all rules

$$x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S \{x, y\} \in S \Rightarrow xy \in S$$

3. In vector space,  $0 \in S$  and all rules  $\{x, y\} \subseteq S \Rightarrow ax + by \in S$  with  $a, b$  scalars.

closure rules 就是一系列判断 closed set 的命题.

**Theorem 2.26.** If  $\Gamma$  is a **closure operator on a set  $X$** ,  $\sum_\Gamma$  be the set of (1)all rules where  $c \in \Gamma(\emptyset)$ , and (2)all rules

$$Y \subseteq S \Rightarrow z \in S$$

with  $z \in \Gamma(Y)$ . Then a set  $D \subseteq X$  satisfies all the rules of  $\sum_\Gamma$  if and only if  $\Gamma(D) = D$ .

证明. (1) 是在说  $\emptyset$  的 image 非空? (2) 是在说取  $S$  上任意子集  $Y$ , 都有  $\Gamma(Y) \subseteq S$ . 直觉上就说这群规则是一个 closure rule, 满足它的只有 closed set, 自然地在 closure operator 上也是一个 closed set. 可这条件都 TM 都 abstract nonsense 了!!!

我尝试用 closure operator 的 definition 来推一下,  $Y \subset S$ , 结合前面那么有

$$Y \subseteq \Gamma(Y) \subseteq S.$$

特殊点, 把  $Y$  换成  $S$ , 有  $S \subseteq \Gamma(S) \subseteq S$ , 所以  $\Gamma(S) = S$ . 但是 (1) 在这里有啥用啊? 保证  $S$  非空?

反过来若  $\Gamma(D) = D$ . 自然地, 当  $Y \subseteq D$ , 则有  $Y \subseteq \Gamma(Y) \subseteq \Gamma(D) = D$ . □

当有一个 closure operator 之后, 最重要是我们知道了 closed set 在它的作用下是它本身.

**Theorem 2.27.** If  $\Sigma$  is a set of closure rules on set  $X$ , let  $\mathcal{C}_\Sigma$  be the collection all subsets of  $X$  that satisfy all the rules of  $\Sigma$ . Then a set  $\mathcal{C}_\Sigma$  is a closure system.

证明. 这个定理可以更形象地去理解 closure rule 到底是什么? 假设  $A, B$  是满足  $\Sigma$  里面所有 rules 的两个集合. 我们看它们的交, 对于第一类规则  $x \in S$ , 很显然在交下是保持的, 因为  $x \in A$  和  $x \in B$ , 则  $x \in A \cap B$ . 对于第二类的规则, 若  $C \subseteq A \cap B$ , 且它是某个规则里面对应的  $Y$ , 那么  $C \subseteq A$  和  $C \subseteq B$ , 对应地有某个  $z \in A$  和  $z \in B$ , 所以  $z \in A \cap B$ . 综上  $A \cap B$  也是属于  $\mathcal{C}_\Sigma$ .  $\square$

在这里我们才终于认识到这样 closure rules 这样抽象的东西, 它确实可以刻画一堆 closed set 组成了一个 closure system.

总结一下前面的所有东西, 前面提到过一个 closure system 其实是一个 complete lattice, 现在我们多了另外两个概念 closure operator 和 closure rules. 我们前面 3 个定理就是在说明它们之前是可以相互转换的, 例如给定一个 closure operator, 它  $\Gamma(D) = D$  可以对应上 closure rules, 然后用 closure rules 刻画的 sets 收集起来, 这些 sets 在交运算下也能保持封闭, 所以这些 sets 是一个 closure system, 最终也得到了 complete lattice. 后面我们用  $\mathcal{C}_\Gamma$  表示由 closure operator  $\Gamma$  生成的 closed sets ( $\Gamma(D) = D$ ) with set inclusion 构成 poset. 很自然地有下面的定理.

**Theorem 2.28.** If  $\Gamma$  is a closure operator on a set  $X$ , and the operations on  $\mathcal{C}_\Gamma$  are given by

$$\bigwedge_{i \in I} D_i = \bigcap_{i \in I} D_i$$

$$\bigvee_{i \in I} D_i = \Gamma\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right).$$

in where  $D_i \in \mathcal{C}_\Gamma$ . Then  $\mathcal{C}_\Gamma$  is complete lattice.

证明. 由 Theorem 2.25 和 Theorem 2.26 可以知道一族 closed set  $\mathcal{C}_\Gamma$  是一个 closure system. 自然地我们要用集合上 union 和 interestion. 先考虑 interestion  $\bigcap_{i \in I} D_i$ , 它确实是 greatest lower bound, 且在 closure system interestion 下有

$$\Gamma\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) = \bigcap_{i \in I} D_i.$$

所以  $\bigcap_{i \in I} D_i \in \mathcal{C}_\Gamma$ . 对于 union  $\bigcup_{i \in I} D_i$ , 它肯定是  $X$  上的 greatest upper bound, 但是它不一定在  $\mathcal{C}_\Gamma$  中, 所以我们要在  $\mathcal{C}_\Gamma$  中找所有包含它的 closed sets, 再交一下就可以得到  $\mathcal{C}_\Gamma$  上的 greatest upper bound. 这是我们的思路, 假设这样的 closed sets 为  $\{A_j\}_{j \in J}$ . 明显地,  $\bigcup_{i \in I} D_i \in \bigcap_{j \in J} A_j$ . 我们只要证明  $\Gamma\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) \subseteq A_j$  对任意地  $j \in J$  都成立即可, 即它是  $\mathcal{C}_\Gamma$  包含  $\bigcup_{i \in I} D_i$  最小的 closed set. 但是证明过于简单 2333, 直接用 closure operator 第二个定义即可. 因为  $\bigcup_{i \in I} D_i \subseteq A_j$ , 所以  $\Gamma\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) \subseteq \Gamma(A_j) \subseteq A_j$ .  $\square$

略 algebra 一般定义和 subalgebra 上的 closure operator.

下面是一个 representation theorem, 刚才是 closure operator 到 complete lattice, 现在是 complete lattice 到 closure.

下面的定理在说任意一个 complete lattice 和一些 closed set 构成 lattice 同构.

**Theorem 2.29.** If  $\mathcal{L}$  is a complete lattice, define a closure operator  $\Delta$  on  $L$  by

$$\Delta(A) = \{x \in L \mid x \leq \bigvee A\}.$$

Then  $\mathcal{L}$  is isomorphic to  $\mathcal{C}_\Delta$ . The isomorphism  $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_\Delta$  is just given by  $\varphi(x) = \downarrow x$ .

证明.  $\Delta$  是一个 closure operator 还是比较 obvious. 我们来回顾一下  $\downarrow x$  的 definition  $\downarrow x = \{y \in L \mid y \leq x\}$ , 所以  $\Delta(\downarrow x) = \downarrow x \in \mathcal{C}_\Delta$ .

先证 bijective, 若对于  $x, y \in L$  有  $\varphi(x) = \varphi(y)$ , 那么  $y \in \varphi(x)$  和  $x \in \varphi(y)$ , 就有  $y \leq x$  和  $x \leq y$ , 所以  $x = y$ , 即  $\varphi$  是 injective. 任意一个  $C \in \mathcal{C}_\Delta$ , 那么都有 least upper bound  $u \in C$ . 自然地  $\varphi(u) = C$ , 即  $\varphi$  是 surjective.

给定任意地  $x, y \in L$ , 那么

$$\varphi(x \wedge y) = \uparrow(x \wedge y) = \uparrow x \cap \uparrow y = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

同理

$$\varphi(x \vee y) = \uparrow(x \vee y) = \uparrow x \cap \uparrow y = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

综上  $\varphi$  是一个 isomorphism. □

换句话说就是  $q$  如果是 join irreducible, 则它不可能是其他某些元素的一个 join.

**Definition 2.30.** An element  $q$  of lattice  $\mathcal{L}$  is called **join irreducible** if  $q = \bigvee F$  for a finite set  $F$  implies  $q \in F$ . The set of all join irreducible elements in  $\mathcal{L}$  is denoted by  $J(\mathcal{L})$ .

如果  $\mathcal{L}$  有一个最小元素  $0$ , 那么  $0$  其实不是 join irreducible 的, 因为  $0 = \bigvee \emptyset$ . 如果想要把  $0$  含进来, 特殊地  $J_0(\mathcal{L}) = J(\mathcal{L}) \cap \{0\}$ . 当然还有一种定义如果  $q$  是 join irreducible, 那么当  $q = r \vee s$ , 则  $q = r$  或者  $q = s$ , 在这种定义下  $q$  已经是针对非空的集合来说的.

**Lemma 2.31.** If a lattice  $\mathcal{L}$  satisfies the DCC, then every element of  $\mathcal{L}$  is a join of finitely many join irreducible elements.

证明. 用反证法来证明: 假设存在  $\mathcal{L}$  上一些元素, 使得找不到 join irreducible elements 的 join 正好是它们. 我们把这些元素记为集合  $S$ , 根据 DCC  $S$  里面有一个最小值, 我们设为  $x$ . 那么  $x$  肯定也不是 join irreducible 的, 如果它是的话, 它就是它自己的一个 join, 那么  $x \notin S$ . 既然  $x$  不是一个 join irreducible, 那么有  $x = \bigvee F$

其中  $F$  是一个 finite set 且里面的元素都是严格小于  $x$  的, 由于  $x$  是最小元素这个概念, 所以比它小的元素都是 the join of finitely many join irreducible elements. 那么对于  $F$  而言, 任意的  $f \in F$  都有一个  $G_f \subseteq J(\mathcal{L})$  的 join 是  $f$ . 所以

$$x = \bigvee_{f \in F} \bigvee G_f.$$

这里  $f = \bigvee G_f$ , 所以  $x$  可以表示称有个多个 join irreducible elements 的 join, 这就矛盾了. 这里应该还要考虑一下  $x = 0$ , 但是讨论 0 确实没什么意义, 0 可以定义为 join irreducible 也可以不是, 这里还是避免这种情况吧...  $\square$

**Definition 2.32.** An element  $q$  of a complete lattice  $\mathcal{L}$  is said to be **completely join irreducible** if  $q = \bigvee X$  implies  $q \in X$  for arbitrary (possibly infinite) subsets  $X \subseteq L$ . Let  $J^*(\mathcal{L})$  denote the set of all completely join irreducible elements of  $\mathcal{L}$ .

**Proposition 2.33.** In general,  $J^*(L) \subseteq J(L)$ , but for lattices satisfying the ACC, equality holds.

证明. 每个 completely join irreducible element 肯定是 join irreducible element. 这是很自然地, 它是任意多个元素的 join, 那肯定可以挑出来有限多个元素 with  $q$  的 join 还是  $q$ . ACC 有了之后,  $\mathcal{L}$  上任意非空的子集都有一个最大元素, 那么我们现在假设一个 join irreducible element  $x$  它不是 complete 的, 即可以找到某个集合  $S$ , 有  $x = \bigvee S$  且  $x \notin S$ . 矛盾就来了, ACC 下 least upper bound 应该是在  $S$  里面, 所以现在又有每个 join irreducible element 是 completely join irreducible.  $\square$

满足 ACC 和 DCC 的 lattice 一个表示方法.

**Theorem 2.34.** Let  $\mathcal{L}$  be a lattice satisfying the ACC and DCC. Let  $\Sigma$  be the set of all closure rules on  $J(L)$  of the form

$$F \subseteq S \Rightarrow q \in S$$

where  $q$  is join irreducible,  $F$  is a finite subset of  $J(L)$ , and  $q \leq \bigvee F$ . (Include the degenerate cases  $p \in S \Rightarrow q \in S$  for  $q \leq p$  in  $J(\mathcal{L})$ .) Then  $\mathcal{L}$  is isomorphic to the lattice of  $\mathcal{C}_\Sigma$  of  $\Sigma$ -closed sets.

证明. 这里同构证明用 isomorphism definition 下面那个定律, 即 bijective 加两个 order-preserving. 那么先给出两个 order-preserving 的 map  $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_\Sigma$  和  $g: \mathcal{C}_\Sigma \rightarrow \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \downarrow x \cap J(\mathcal{L}) \\ g(S) &= \bigvee S. \end{aligned}$$

需要证明它们两个互为逆映射 (感觉好突兀啊, 虽然原文中说 straightforwad233333). 那么对于  $gf(x) = x$ , 前面那个 lemma 应该告诉我们了, 在 DCC 下  $\mathcal{L}$  每一个元素都是 a join of finitely many join irreducible elements 对应是  $f(x)$  的操作.



那么对于  $fg(S) = S$ , 在 ACC 下  $\bigvee S \in S$ , 也就是我们可以找到一些 finite set  $F \subseteq S$  使得  $\bigvee F = \bigvee S$ , 按照 closure rules, 所有 join irreducible  $q \leq \bigvee F$  都是属于  $S$  的,  $f(\bigvee F)$  就是在做这件事. 但是这样得到是不是全部的  $S$  呢? 考虑其他 finite set  $F'$ , 那么  $\bigvee F' \leq \bigvee S = \bigvee F$ ,  $f$  是 order-preserving 的, 所以有  $f(\bigvee F') \subseteq f(\bigvee F)$ , 所以  $f(\bigvee F)$  涵盖了整个  $S$ .  $\square$

按照下面定义  $x$  明显是一个 upper bound, 但是条件更强它还要是一个 least upper bound, dense 稠密在这里还是很形象,  $x$  就是一个划分.

**Definition 2.35.** A subset  $Q$  of a complete lattice  $\mathcal{L}$  is **join dense** if for every  $x \in L$ ,

$$x = \bigvee \{q \in Q \mid q \leq x\}.$$

fixed point 来表征 complete lattice.

**Theorem 2.36.** A lattice  $\mathcal{L}$  is complete if and only if every order-preserving map  $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  has a fixed point.

证明. ( $\Rightarrow$ ) 如果给定一个 complete lattice  $\mathcal{L}$  和一个 order-preserving map  $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ . 定义集合  $A = \{x \in L \mid f(x) \geq x\}$ . 注意到  $0 \in A$  ( $0$  表示 minimal element of  $L$ ). 再让  $a = \bigvee A$ , 那么对于任意的  $x \in A$  都有  $a \geq x$ , 结合  $f$  是 order-preserving 我们有

$$f(a) \geq \bigvee_{x \in A} f(x) \geq \bigvee_{x \in A} x = a.$$

所以  $a \in A$ , 即  $f(a) \geq a$ , 两边再作用一下  $f$  有  $f^2(a) \geq f(a)$ , 这说明  $f(a) \in A$ .  $a$  可是整个  $A$  的 join, 那么有  $a \geq f(a)$ . 综上  $f(a) = a$ ,  $a$  就是这个 fixed point.

( $\Leftarrow$ ) 这个方向的证明略微有些复杂, 故事主线是在 every order-preserving map has a fixed point 的前提下, 假设  $\mathcal{L}$  不是 complete, 然后构造出来一个 order-preserving map 没有 fixed point 造成矛盾.

假设  $\mathcal{L}$  不是 complete, 那么先给出第一个 claim.

**Claim 1:**  $\mathcal{L}$  没有最大元素 1 或者存在一个 chain  $C \subseteq L$  满足 ACC 且没有 meet (supremum).

证这个 claim, 我们还是用反证法, 假设  $\mathcal{L}$  有最大元素 1 和所有满足 ACC 的 chain  $C \subseteq L$  都有 meet. 我们仔细考虑一下这个假设, 先回顾一下我们前面关于 complete meet semilattice 的 definition, 是要有一个 poset 满足有 greatest element 并且所有非空的子集都有 meet, 然后我们可以通过这个 complete meet semilattice 构造出来一个 complete lattice, 我们的证明大体上也是这个思路, 但是使用其对偶的形式 (因为你可以观察到我们假设的第二个条件有些不一样), 即在 complete join semilattice 来构造, 从而制造了一个 contradiction.

考虑某个子集  $S$  的所有 upper bound  $S^u$ . 注意到  $1 \in S^u$ , 所以  $S^u$  不是 emptyset. 我们再来定义一个 poset  $\mathcal{P}$ , 它是  $S^u$  上所有满足 ACC 的 chains 的一个 collections.  $\mathcal{P}$  上的 partial-order 定义为若  $C_1 \leq C_2$  则  $C_1$  是  $C_2$  的一个 filter (我们回顾一下 filter 的定义, 它是 ideal 的对偶形式, 即首先有  $C_1 \subseteq C_2$ , 若  $x \geq y \in C_1$  则  $x \in C_1$  其中  $x \in C_2$ ).

我们再来考虑这个特殊的 poset  $\mathcal{P}$  上的 chain (chain of chains), 任取  $\mathcal{P}$  上的一个 chain  $\{C_i\}_{i \in I}$ , 那么  $\bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{P}$ , 根据上面定义的 partial order 这是显然的, 而且  $\bigcup_{i \in I} C_i$  它是这个 chain 的一个 upper bound. 根据 Zorn's lemma,  $\mathcal{P}$  上有一个 maximal element  $C_m$ . 根据我们的假设  $C_m$  满足 ACC 是有 meet 的, 这个 meet 我们用  $a$  来表示, 即  $\bigwedge C_m = a$ . 很明显  $a$  在是  $S$  的一个 upper bound, 所以  $a \in S^u$ . 我们现在来证明  $a = \bigwedge S^u$  (至于为什么后面你就知道了), 还是用反证法 (23333), 假设  $a$  不是  $S^u$  的 greatest lower bound, 那么存在  $t \in S^u$ , 使得  $a \not\leq t$ . 则有  $a \wedge t \in S^u$ , 为什么呢? 因为任取  $s \in S$ , 都有  $s \wedge (a \wedge t) = s$ . 自然地  $a > a \wedge t$  (严格大于没有等号), 那么 chain  $C_m \cup \{a \wedge t\}$  也是满足 ACC, 且大于  $C_m$ , 这就矛盾了, 所以  $a = \bigwedge S^u = \bigvee S$ .

所以我们证明了对于任意的  $S \subseteq L$  都有 join, 那么马上我们有

$$\bigwedge S = \bigvee S^l.$$

所以  $S$  的 meet 也有意义了, 但是这里  $S^l$  我们不知道是不是非空的啊? 注意最前面我们用 0 加上 complete join semilattice 来构造 complete lattice, 但是我们这里不需要构造因为 lattice 是给定了, 那么对于任意非空的  $S$ ,  $\bigwedge S \in S^l$  的, 所以  $S^l$  也是非空的, 这里没有问题. 综上  $\mathcal{L}$  是一个 complete lattice 与前提矛盾. **Claim 1** 证闭.

原谅我这个证明写不去了, 原文省略太多的东西了...

来另一个 1955 年给出的第一个证明.

**Lemma 2.37.** 如果  $\mathcal{L}$  是 incomplete, 那么存在两个 chain  $C$  和  $D$  满足下面条件,

1.  $C$  是一个 strictly ascending chain (严格大于),  $D$  是一个 strictly descending chain (严格小于).
2.  $D$  中的每个元素都严格大于  $C$  中的每个元素.
3. 不存在  $a \in L$  使得它同时是  $C$  的 upper bound 和  $D$  的 lower bound.

证明. Proof of above lemma.

证明. 这里我们还是证 if every preserving map  $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  has a fixed point then  $\mathcal{L}$  is complete. 还是假设  $\mathcal{L}$  是 incomplete, 然后我们构造一个 preserving map 没有 fixed point.

假设  $C, D$  是满足前面 lemma 的两个 chains. 然后我们来定义这个特殊的 preserving map  $f$ , 对于任意的  $x \in \mathcal{L}$ , 我们可以分两种情况来看,  $x$  是  $D$  的 lower upper 或者不是.

第一种情况若  $x$  是  $D$  的 lower upper, 反过来那么它肯定不是  $C$  的 upper bound, 那么肯定存在某些  $c \in C$  满足  $c \not\leq x$ . 我们把这些  $c$  记为

$$C(x) = \{c \in C \mid c \not\leq x\}.$$

这种情况下我们取  $f(x) = \min C(x)$ , 即  $C(x)$  中的最小值.

第二种情况  $x$  不是  $D$  的 lower upper, 那么肯定存在某些  $d \in D$  满足  $c \not\leq x$ . 我们把这些  $d$  记为

$$D(x) = \{d \in D \mid d \not\leq x\}.$$

这种情况下我们取  $f(x) = \max D(x)$ , 即  $D(x)$  中的最大值.

这种情况定义出来的  $f(x)$  都会满足  $f(x) \not\leq x$  或者  $f(x) \not\geq x$ , 所以是不存在  $f(x) = x$ , 即没有 fixed point 的.

接下来我们证明  $f$  是一个 preserving map, 取  $x \leq y$ . 我们分下面几种情况来分别说明:

1.  $x$  是  $D$  的 lower bound,  $y$  是  $D$  的 lower bound. 那么  $f(x) = \min C(x)$  和  $f(y) = \min C(y)$ . 若  $y \not\leq c$ , 则  $x \not\leq c$  (else  $y \geq x \geq c$ ), 所以  $C(y) \subseteq C(x)$ .



$C$  是一个升链, 那么  $C(x)$  可以想象成这条链上一堆点, 那么  $C(x)$  还是一个升链,  $C(y)$  是它的一个子集必然满足  $\min C(x) \leq \min C(y)$ , 则  $f(x) \leq f(y)$ .

2.  $x$  是  $D$  的 lower bound,  $y$  不是  $D$  的 lower bound. 那么  $f(x) = \min C(x)$  和  $f(y) = \max D(y)$ , 显然  $f(x) \leq f(y)$ .
3.  $x$  不是  $D$  的 lower bound,  $y$  是  $D$  的 lower bound. 这是不可能的, 因为  $x \leq y$ , 那么当  $y$  是  $D$  的 lower bound 的时候,  $x$  也是  $D$  的 lower bound.
4.  $x$  不是  $D$  的 lower bound,  $y$  不是  $D$  的 lower bound. 那么  $f(x) = \max D(x)$  和  $f(y) = \max D(y)$ . 若  $x \not\leq d$ , 则  $y \not\leq d$  (else  $x \leq y \leq d$ ). 所以  $D(x) \subseteq D(y)$ . 由于  $D(y)$  是一个降链上点的集合, 这个集合还是一个降链, 你在降链上找子集  $D(x)$ , 肯定有  $\max D(x) \leq \max D(y)$ , 则  $f(x) \leq f(y)$ .

综上  $f(x) \leq f(y)$  总是成立, 所以  $f$  确实是一个 preserving map. □

## Alegbraic Lattices

### Algebraic Closure Operators



**Definition 3.1.** A closure operator  $\Gamma$  on a set  $X$  is said to be algebraic if for every  $B \subseteq X$ ,

$$\Gamma(B) = \bigcup \{ \Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } X \}.$$

**Definition 3.2.** Let  $\mathcal{L}$  be a complete lattice. An element  $x \in L$  is compact if whenever  $x \leq \bigvee A$ , then there exists a finite subset  $F \subseteq A$  such that  $x \leq \bigvee F$ . The set of all compact elements of  $\mathcal{L}$  is denoted by  $\mathcal{L}^c$

这里的 compact 就是在说如果  $x$  小于  $A$ , 则  $x$  小于  $A$  中的部分元素. 这个定义看起来还是比较自然的.

**Proposition 3.3.**  $\mathcal{L}^c$  is closed under finite joins and contains 0, so it is a join semilattice with a least element.

证明. 假设  $x$  和  $y$  是两个 compact 元素, 集合  $A$  表示 such  $x \vee y \leq A$ . 那么自然地有  $x \leq x \vee y \leq A$  和  $y \leq x \vee y \leq A$ , 所以各自都可以找到  $x \leq F_x \subseteq A$  和  $y \leq F_y \subseteq A$ . 从  $F_x$  和  $F_y$  各挑一个元素出来  $a$  和  $b$  出来, 那么  $x \vee y \leq a \vee b$ . 0 属于  $\mathcal{L}^c$  这是很自然的, 它比任何一个元素都小.  $\square$

**Definition 3.4.** A lattice  $\mathcal{L}$  is said to be algebraic, or compactly generated, if it is complete and  $\mathcal{L}^c$  is join dense in  $\mathcal{L}$ , i.e.,  $x = \bigvee (\downarrow x \cap \mathcal{L}^c)$  for every  $x \in L$ .

换句话说就是在  $\mathcal{L}^c$  中比  $x$  小的元素它们的 join 是  $x$ , 每一个  $x$  都可以划分  $\mathcal{L}^c$ . 另外一个理解就是任意  $x \in L$ , 都是某些 compact elements 的 join, 这就是为什么说 compactly generated.

**Example 3.5.** 自然地, finite lattice 都是 algebraic lattice, 首先 finite lattice 是 complete lattice, 其中每一个元素都是 compact, 所以有  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^c$ , 那么  $x = \bigvee (\downarrow x \cap L) = \bigvee (\downarrow x) = x$ , 即  $\mathcal{L}$  是 join dense 的.

**Example 3.6.** 一个 complete lattice 并不一定是一个 algebraic lattice:

1. 区间  $[0, 1]$  上所有的实数和自然序构成一个 complete lattice  $\mathcal{K}$ , 那么  $\mathcal{K}^c = 0$ , 但是它并不是 join dense 的.
2. 下面的 Hasse 图也是 complete lattice, 但是  $z$  并不是一些 complete element 的 join, 那么  $\mathcal{L}^c$  就不是 join dense 的.



**Definition 3.7.** A closure rule is said to be **finitary** if it is a rule of the form  $x \in S$  or the form  $F \subseteq S \Rightarrow z \in S$  with  $F$  a finite set.

**Theorem 3.8.** (**algebraic 和 finitary 的关系**) A closure operator  $\Gamma$  is algebraic if and only if  $\Gamma = \Gamma_\Sigma$  for some set  $\Sigma$  of finitary closure rules.

证明. 若  $\Gamma$  是一个  $X$  上的 algebraic closure operator, 我们要构造一组 finitary closure rules 来描述它的 closed sets. 那么我们规定若  $S \subseteq X$  是 closed 当且仅当对任意的 finite set  $F \subseteq S$  都有  $\Gamma(F) \subseteq S$ . 我们再来证明这个断言的正确性, 正向是比较明显的, 反过来要证明  $S$  是一个 closed set 即  $\Gamma(S) = S$ , 在  $\Gamma$  的作用下, 已经有  $S \subseteq \Gamma(S)$ , 所以我们只需要证明  $\Gamma(S) \subseteq S$ . 因为  $\Gamma$  是 algebraic 的, 所以对于 finite set  $F \subseteq S$ , 有  $\Gamma(S) = \bigcup \Gamma(F)$ , 结合前提有  $\bigcup \Gamma(F) \subseteq S$ , 那么  $\Gamma(S) \subseteq S$ . 我们由已经证明的结论构造出一族 closure rules 它们是 finitary: 对任意的 finite set  $F \subseteq S \Rightarrow z \in S$  其中  $z \in \Gamma(F)$ . 这族 closure rules 对应的 closed set 就是  $\Gamma$  上所决定的.

前面命题的正向是在描述一个 representation, 那么反过来  $\Gamma_\Sigma$  到底在这里是什么意思呢? 在确定 closure rules 情况下, 我们就确定了  $X$  上的 closed sets, 随即它们构成了一个 closure system, 在之前 closure system 那一章, 我们已经证明了, 那么我们再在这个 closure system 上构造一个 closure operator  $\Gamma_\Sigma$  定义如下

$$\Gamma_\Sigma(A) = \bigcap \{ S \in \mathcal{C}_\Sigma \mid A \subseteq S \}$$

其中  $\mathcal{C}_\Sigma$  表示 closure rules 确定的 closed set. 是不是感觉绕了一个大湾? 哈哈. whatever its done!

反过来如果  $\Sigma$  是一族 finitary closure rules, 可以得到上述定义的 closure operator  $\Gamma_\Sigma$ , 现在我们要来说明它是 algebraic. 你得证明  $\Gamma_\Sigma(B)$  是  $B$  靠着 closure rules 生成的. 这里的证明去看 universe algebra 中证明 Sg 是一个 algebraic closure operator 的方法.  $\square$

**Theorem 3.9.** (在 algebraic closure operator 上构造 algebraic lattice) Let  $\Gamma$  be an algebraic closure operator on set  $X$ . Then  $\mathcal{C}_\Gamma$  is an algebraic lattice whose compact elements are  $\{\Gamma(F) \mid F \text{ is a finite subset of } X\}$ .

证明. 首先我们得说明  $\mathcal{C}_\Gamma$  是一个 complete lattice. 给定一族  $\mathcal{C}_\Gamma$  上的元素  $B_{i \in I}$ , 我们定义  $\bigvee_{i \in I} B_i = \Gamma(\bigcup_{i \in I} B_i)$  和  $\bigwedge_{i \in I} B_i = \Gamma(\bigcap_{i \in I} B_i)$ , 其中最大元是  $\Gamma(X)$  和最小元是  $\Gamma(\emptyset)$ . 所以  $\mathcal{C}_\Gamma$  是一个 complete lattice.

给定  $X$  上的有限子集  $F$  和  $X$  上子集族  $A_{i \in I}$ . 若  $\Gamma(F) \leq \bigvee_{i \in I} \Gamma(A_i) = \Gamma(\bigcup_{i \in I} A_i)$ , 要证明  $\Gamma(F)$  是 compact 的, 就是要证明  $\Gamma(F) \subseteq \bigvee_{j \in J} \Gamma(A_j)$  其中  $J$  是有限的且  $J \subseteq I$ .

由于  $\Gamma$  是 algebraic 的, 那么

$$F \subseteq \Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup \{ \Gamma(G) \mid G \text{ is finite subset of } \bigcup_{i \in I} A_i \}.$$

对于任意的  $x \in F$ , 都存在  $x \in \Gamma(G_x)$ , 那么

$$\Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{x \in F} \Gamma(G_x)).$$

实际上若  $G$  是  $\bigcup_{i \in I} A_i$  的有限子集, 那么  $G \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ , 所以

$$\Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{x \in F} \Gamma(G_x)) \subseteq \Gamma(\bigcup_{x \in F} \Gamma(\bigcup_{j \in J_x} A_j)) = \bigvee_{x \in F} \bigvee_{j \in J_x} \Gamma(A_j) = \bigvee_{\substack{x \in F \\ j \in J_x}} \Gamma(A_j).$$

反过来, 若  $C$  是  $\mathcal{C}_\Gamma$  上的 compact element. 我们要证明  $C$  是  $X$  上某个有限子集的闭包. 因为  $C$  是 closed 的, 则  $\Gamma(C) = C$ . 再由  $\Gamma$  是 algebraic 的, 那么  $C = \bigcup \{ \Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } C \}$ . 又因为  $C$  是 compact 的, 所以存在有限多个  $\Gamma(F_1), \dots, \Gamma(F_n)$  使得  $C = \Gamma(F_1) \vee \dots \vee \Gamma(F_n) = \Gamma(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ . 命题得证.

最后证明  $\mathcal{C}_\Gamma^c$  是 join dense 的. 对于任意的  $B \in \mathcal{C}_\Gamma$ ,  $B$  是 closed, 那么  $B = \bigvee_{i \in I} \Gamma(F_i)$  其中 finite subset  $F \subseteq B$  (这里已经可以说明  $B$  是 compactly generated). 自然地有  $\bigvee (\downarrow B \cap \mathcal{C}_\Gamma^c) \leq B$  且  $\Gamma(F_i)_{i \in I} \in \mathcal{C}_\Gamma^c$ , 那么  $\bigvee (\downarrow B \cap \mathcal{C}_\Gamma^c) = B$ . 命题得证.

我们用 algebraic closure operator 生成了一个 algebraic lattice, 其上每一个元素都是 compact elements 的 join, 自然地联想到 closure operator 是 algebraic 的那个条件, 每一个 closed set 都可以用 finitely generated closed set 来表示.  $\square$

**Definition 3.10.** If  $\Gamma$  is a closure operator on  $X$  and  $B$  is closed subset of  $X$ , then we say a set  $A$  is a **generating set** for  $B$  if  $\Gamma(A) = B$ . The set  $B$  is **finitely generated** if there is a finite generating set for  $B$ . The set  $A$  is **minimal generating set** for  $B$  if  $A$  generates  $B$  and no proper subset of  $A$  generates  $B$ .

**Corollary 3.11.** Let  $\Gamma$  be an algebraic closure operator on  $X$ . Then the finitely generated subset of  $X$  are precisely the compact elements of  $\mathcal{C}_\Gamma$ .

**Example 3.12.** 若  $\mathcal{C}_\Gamma$  是 algebraic 的, 则  $\Gamma$  不一定是 algebraic, 也就是说  $\Gamma$  生成的 lattice 是 algebraic 的, 但是  $\Gamma$  本身不一定是 algebraic. 下面举一个例子.

例如定义  $X = Y \cup \{b\}$  其中  $Y$  是 finite set,  $X$  表示为它们的 disjoint union(不交并). 然后定义  $X$  上的 closure operator  $\Gamma$  为: 若  $A$  是  $Y$  的一个 proper set(真子集), 则  $\Gamma(A) = A$ ; 特别地  $\Gamma(Y) = X$ ; 若  $b \in B \subseteq X$ , 则  $\Gamma(B) = X$ .  $\Gamma$  一个 well defined closure operator, 可以验证一下. 那么  $\Gamma$  生成的 closed set 为  $Y$  的所有 proper set 和  $X$ , 它们构成的 lattice  $\mathcal{C}_\Gamma$  是和  $Y$  上所有子集构成的 lattice  $\mathcal{L}_{\mathfrak{P}(Y)}$  是 isomorphic, 这个 isomorphism 是比较明显的,  $Y$  上的 proper set 映到它本身,  $X$  映到  $Y$ .  $Y$  是一个 finite set, 所以  $\mathcal{L}_{\mathfrak{P}(Y)}$  是一个 algebraic lattice, 有个问题那么 isomorphism 是保持 algebraic 的? 这个是显然的, 想想就行. 考虑  $\Gamma(Y)$ , 其中  $b \in \Gamma(Y)$ , 但是对任意的  $F \subseteq Y$  都有  $b \notin \Gamma(F)$ , 所以  $\Gamma(Y)$  是不满足  $\Gamma$  是 algebraic 的.

**Definition 3.13.** Let  $\mathcal{S} = (S, \vee)$  be a join semilattice. A subset  $A$  of  $S$  is called an **ideal** if

1.  $x, y \in A$  implies  $x \vee y \in A$ .
2. if  $z \leq y \in A$  implies  $z \in A$ .

用自然语言来描述就是 ideal 首先是要在  $\vee$  的作用下封闭的. 若存在对任意一个元素  $z$ , 它小于等于 ideal 中的某个元素, 那么  $z$  也在 ideal 里面.

**Proposition 3.14.** (**ideal closure operator 的引入**) Ideals are defined by closure rules, so the intersection of a set of ideals of  $\mathcal{S}$  is again one. Since the closure rules are finitary, **the lattice of ideals is algebraic**.

The closure operator  $I$  on  $S$  such that  $I(B)$  is the ideal of  $\mathcal{S}$  generated by  $B$  is given by

$$I(B) = \{x \in S \mid x \leq \bigvee F \text{ for some finite } F \subseteq B\}.$$

The ideal lattice of a join semilattice is denoted by  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ . The ideal lattice of a lattice  $\mathcal{L}$  is likewise denoted by  $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ .

不得不说 closure rules 抽象却深刻, 扮演了一个很重要的角色.

证明. 我们来证明  $I$  是一个 closure operator 且  $I(B)$  是一个 ideal.

任取  $x, y \in I(B)$ , 那么分别对应存在  $x \leq F_x$  和  $y \leq F_y$ , 自然地  $x \vee y \leq \bigvee (F_x \cup F_y)$  其中  $F_x$  和  $F_y$  都是 finite 的, 所以  $x \vee y \in I(B)$ . 若  $z \leq y \in I(B)$ , 那么  $z \leq \bigvee F_y$ , 所以  $z \in I$ . 综上  $I(B)$  是一个 ideal.

$B \subseteq I(B)$ , 这是显然的, 取每个  $B$  上单点集. 自然地  $A \subseteq B$ , 也有  $I(A) \subseteq I(B)$ . 考虑  $x \in I(I(B))$ , 那么存在 finite set  $F$  对应  $x \leq \bigvee F \subseteq I(B)$ . 自然地有  $F \subseteq I(B)$ , 那么对于任意  $y \in F$ , 都对应一个  $y \leq \bigvee F_y \subseteq B$ . 所以

$$F \leq \bigvee F \leq \bigvee \bigcup_{y \in F} F_y.$$

自然地  $x \leq \bigvee \bigcup_{y \in F} F_y$ . 所以  $x \in I(B)$ , 即  $I(B) \supseteq I(I(B))$ , 前面已经保证了  $I(I(B)) \supseteq I(B)$ , 所以  $I(I(B)) = I(B)$ . □

**Theorem 3.15.** (**ideal closure operator 生成的 algebraic lattice 的性质**) If  $\mathcal{S}$  is a join semilattice with 0, then the ideal lattice  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  is algebraic. The **compact elements of  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  are the principal ideals  $\downarrow x$  with  $x \in S$** . Conversely, if  $\mathcal{L}$  is an algebraic lattice, then  $\mathcal{L}^c$  is a join semilattice with 0, and  $\mathcal{L} \cong \mathcal{I}(\mathcal{L}^c)$ .

证明. 先来证明  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  的 compact elements 是 principle ideals.  $I$  是一个 algebraic closure operator 在上面已经证明了. 由 Theorem 3.9 我们知道 compact element 是  $I(F)$  其中  $F$  是  $S$  上的 finite subset. 我们需要证明  $I(F)$  里面有一个 maximal element, 即  $\bigvee F \in I(F)$ . 由于  $F$  是 finite 的, 前面的结论是显然的, 所以  $I(F) = \downarrow \bigvee F$ .



如果  $\mathcal{L}$  是一个 algebraic lattice,  $\mathcal{L}^c$  是一个 join semilattice with 0 在 proposition 3.3 中已经证明了. 这里的  $I$  就是下面定理 Theorem 3.16 中  $\Delta$  更加朴素刻画, 因为  $I$  在定义上可以更直观地看出它是 algebraic 的.  $\square$

**Theorem 3.16. (第一同构定理?)** If  $\mathcal{L}$  is an algebraic lattice, define a algebraic closure operator  $\Delta$  on the  $\mathcal{L}^c$  by

$$\Delta(A) = \{x \in \mathcal{L}^c \mid x \leq \bigvee A\}$$

where  $A \subseteq \mathcal{L}^c$ . Then  $\mathcal{L}$  is isomorphic to  $\mathcal{C}_\Delta$ . Then isomorphism  $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_\Delta$  is just given by  $\varphi(a) = \{x \in \mathcal{L}^c \mid x \leq a\}$ .

证明.  $\Delta$  是一个 closure operator 前面已经证明过了. 考虑  $x \in \Delta(A)$ , 那么有  $x \leq \bigvee A$ . 由于  $x$  本身是  $L$  上的一个 compact element, 那么就可以找到一个有限子集  $F \subseteq A$ , 使得  $x \leq \bigvee F$ , 所以  $\Delta(A) = \bigcup_{x \in \Delta(A)} \Delta(F_x)$ . 即  $\Delta$  是 algebraic 的.

先证 bijective. 给定  $a, b \in L$ , 若  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , 那么  $a = \bigvee \varphi(a) = \bigvee \varphi(b) = b$ , 注意两边等号成立的条件是  $\mathcal{L}^c$  是 join dense (join dense 终于在这里起作用了), 所以  $\varphi$  是 injective. 对于任意的  $C \in \mathcal{C}_\Delta$ , 它对应一个子集  $A \subseteq \mathcal{L}^c$ , 使得  $\Delta(A) = C$ , 那么我们取  $a = \bigvee A$ , 我们知道 compact element 的 join 还是一个 compact element, 所以  $a \in \mathcal{L}^c$ , 那么  $\varphi(a) = C$ , 即  $\varphi$  是 surjective.

再证 homomorphism.

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$$

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

$\square$

**Definition 3.17.** A subset  $D$  of an ordered set  $\mathcal{P}$  is said to be *up-directed* if for every  $x, y \in D$  there exists  $z \in D$  with  $x \leq z$  and  $y \leq z$ .

**Example 3.18.** Every chain, or more generally every join semilattice, forms an up-directed set.

**Theorem 3.19.** Let  $\Gamma$  be a closure operator on a set  $X$ . The following are equivalent.

1.  $\Gamma$  is an algebraic closure operator.
2. The union of any up-directed set of  $\Gamma$ -closed sets is  $\Gamma$ -closed.
3. The union of any chain of  $\Gamma$ -closed sets is  $\Gamma$ -closed.

证明. (1)  $\Rightarrow$  (2). 给定  $\Gamma$  是一个 algebraic closure operator. 设  $D \subseteq \mathcal{C}_\Gamma$  上的一个 up-directed set, 那么若  $C_1, C_2 \in D$ , 则存在  $C_3 \in D$  使得  $C_1 \subseteq C_3$  和  $C_2 \subseteq C_3$ . (只有清楚了  $D$  的定义, 接下来的事情就好办了) 我们要证明  $\bigcup D$  也是一个 closed set, 那么自然地考虑  $\Gamma(\bigcup D)$ , 由于  $\Gamma$  是 algebraic 的, 所以

$$\Gamma(\bigcup D) = \bigcup \{ \Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } \bigcup D \}.$$

我再来考虑这个  $F$ , 换句话说  $F \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$ , 其中  $C_j \in D$  和  $J$  是 finite 的. 那么

$$\Gamma(F) \subseteq \Gamma(\bigcup_{j \in J} C_j).$$

由于  $D$  是一个 up-directed set, 所以存在某个  $C_m > C_j$  对任意的  $j \in J$  成立, 那么

$$\Gamma(\bigcup_{j \in J} C_j) \subseteq \Gamma(C_m) = C_m \subseteq \bigcup D.$$

所以对任意的  $F$ , 都有  $\Gamma(F) \subseteq \bigcup D$ , 那么  $\Gamma(\bigcup D) \subseteq \bigcup D$ , 所以  $\Gamma(\bigcup D) = \bigcup D$ , 即  $\bigcup D$  也是一个 closed set.

(2)  $\Rightarrow$  (3). 这个方向是 trivial 的, 因为 chain 是一种特殊的 up-directed set.

(3)  $\Rightarrow$  (1). 给定  $\Gamma$  是  $X$  上的一个 closure operator, 且任意一个 closed sets 组成的 chain 的交还是一个 closed set. 对于任意的  $S \in X$ , 我们对  $S$  的基数  $|S|$  进行归纳, 证明任意的  $|S|$  都有

$$\Gamma(S) = \bigcup \{ \Gamma(F) \mid F \text{ is finite subset of } S \}.$$

当  $|S| = 1$  时, 这是显然的  $F = S$ . 假设  $|S| = n$  时上述等式成立, 那么  $|S| = n + 1$  时, 让  $S = W \cup \{a\}$ , 其中  $|W| = n$ . 那么

$$\Gamma(S) = \Gamma(W \cup \{a\}) = \Gamma(W) \vee \Gamma(a) = \left( \bigcup_{\text{finite } F \subseteq W} \Gamma(F) \right) \vee \Gamma(a) = \left( \bigvee_{\text{finite } F \subseteq W} \Gamma(F) \right) \vee \Gamma(a)$$

(3) 在这里怎么用呢? 感觉有点弱啊, 似乎只能说明  $\mathcal{C}_\Gamma$  是 complete 的. □

**Definition 3.20.** The lattice  $\mathcal{L}$  is said to be **weakly atomic** if whenever  $a > b$  in  $\mathcal{L}$ , there exist elements  $u, v \in L$  such that  $a \geq u \succ v \geq b$ . ( $\succ$  means cover)

**Example 3.21.** 所有的 finite lattice 都是 weakly atomic 的; 闭区间  $[0, 1]$  上所有实数自然序构成的 lattice 不是 weakly atomic, 给定一个  $v$ , 你找不到它的 cover  $u$ .

**Theorem 3.22.** Every algebraic lattice is weakly atomic.

证明. 给定  $\mathcal{L}$  上任意两个元素  $a, b$ , 若  $a > b$ , 那么存在一个 compact element  $c$  使得  $a \geq c$  且,  $b \not\geq c$ . 这是因为  $\mathcal{L}$  是 compactly generated, 所以  $a$  和  $b$  都是一些 compact element 的 join,  $a > b$  则说明存在  $a$  对应的一些 compact element 是不小于等于  $b$  的. 接着我们考虑这样一个集合  $Q = \{x \in a/b \mid x \not\geq c\}$  (其中  $a/b$  表示  $b \leq x \leq a$  称之为 interval sublattice 或者 quotient sublattice). 注意到  $Q$  不是一个  $\emptyset$ , 因为  $b \in Q$ . 我们考虑  $\mathcal{L}$  上所有的 chains, 任意一个 chain 的 union 还是在  $Q$  里面, 假设这个 union 大于等于  $c$ , 然而如果出现这种情况, 这个 chain 肯定是 infinite 的, 那么  $c$  小于等于 finite subset of it, 这就矛盾了. 根据 Zorn's Lemma,  $Q$  存在一个 maximal element  $u$ , 然后我们取  $v = c \vee u$ ,  $u$  是 covered by  $v$ , 假设存在  $u \leq z \leq v$ , 那么  $z \not\geq c$ , 则  $z \in Q$ , 这与  $u$  是 maximal element 是矛盾的. 这样我们就构造出来了满足 weakly atomic 的  $u$  和  $v$ , 证毕.  $\square$

**Definition 3.23.** A lattice  $\mathcal{L}$  is said to be **upper continuous** if whenever  $D$  is an up-directed set having a least upper bound  $\bigvee D$ , then for any element  $x \in L$ , the join  $\bigvee_{d \in D} (x \wedge d)$  exists, and

$$x \wedge \bigvee D = \bigvee_{d \in D} (x \wedge d).$$

The property of being lower continuous is defined dually.

**Theorem 3.24.** Every algebraic lattice is upper continuous.

证明. 给定  $\mathcal{L}$  是一个 algebraic lattice 和  $D$  是  $\mathcal{L}$  上一个 up-directed subset. 显然地  $\bigvee_{d \in D} (x \wedge d) \leq x \wedge \bigvee D$ . 我们用  $r = x \wedge \bigvee D$ . 考虑  $c \in \downarrow r \cap L^c$ , 自然地  $c \leq r$ , 那么  $c \leq x$  和  $c \leq \bigvee D$ . 由于  $c$  是 compact 的, 所以存在 finite set  $F \subseteq \bigvee D$  使得  $c \leq \bigvee F$ ,  $D$  又是 up-directed, 所以存在  $e \in D$  使得  $\bigvee F \leq e$ , 那么  $c \leq e$ . 前面也有  $c \leq x$ , 所以  $c \leq x \wedge e$ . 因此

$$r = \bigvee (\downarrow r \cap L^c) \leq \bigvee_{d \in D} (x \wedge d).$$

所以有  $x \wedge \bigvee D \leq \bigvee_{d \in D} (x \wedge d)$ , 综上  $x \wedge \bigvee D = \bigvee_{d \in D} (x \wedge d)$ .  $\square$

**Definition 3.25.** An element  $a \in L$  is called an **atom** if  $a \succ 0$ , and a **coatom** if  $1 \succ a$ .

**Definition 3.26.** An element  $q$  in a complete lattice  $\mathcal{L}$  is **completely meet irreducible** if, for every subset  $S$  of  $L$ ,  $q = \bigwedge S$  implies  $q \in S$ .

**Definition 3.27.** A **decomposition** of an element  $a \in L$  is a representation  $a = \bigwedge Q$  where  $Q$  is set of completely meet irreducible elements of  $\mathcal{L}$

**Definition 3.28.** A lattice is **strongly atomic** if  $a > b$  in  $\mathcal{L}$  implies there exists  $u \in L$  such that  $a \geq u \succ b$ .

## Representation by Equivalence Relations

这章目的是像在群论里面那样每一个 group 都能找到和它同构的 permutation group, 同样每一个 lattice 也都能找到和它同构的 equivalence relation lattice.

等价关系的定义, 等价类这是你必须已经提前掌握的东西! 为了后面好说明一些东西, 我还是把等价关系的定义再写一遍.

**Definition 4.1.** An equivalence relation on a set  $X$  is a binary relation  $E$  satisfying, for all  $x, y, z \in X$ ,

1.  $x E x$ .
2.  $x E y$  implies  $y E x$ .
3. if  $x E y$  and  $y E z$ , then  $x E z$ .

**Definition 4.2.** Given two sets  $X$  and  $Y$ , and  $f: X \rightarrow Y$  is any function, then

$$\ker f = \{ (x, y) \in X^2 \mid f(x) = f(y) \}$$

is an equivalence relation (the subset of  $X^2$ ), called the kernel of  $f$ .

这里的 kernel 和 abstract algebra 那里面的 kernel 似乎有点不太一样...

**Definition 4.3.** (同余关系) If  $X$  and  $Y$  are algebras and  $f: X \rightarrow Y$  is a homomorphism, then  $\ker f$  is a congruence relation.

**Definition 4.4.** (等价关系代数格) Thinking of binary relations as subsets of  $X^2$ , the axioms (1)-(3) for an equivalence relation are finitary closure rules. Thus the collection of all equivalence relations on  $X$  forms an algebraic lattice  $\mathbf{Eq} X$ . The order on  $\mathbf{Eq} X$  is given by set cotainment, i.e.,

$$\begin{aligned} R \leq S \text{ iff } R \subseteq S \in \mathfrak{P}(X^2) \\ \text{iff } (x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in S. \end{aligned}$$

等价关系的几个关系很自然的联想到了 finitary closure rules.

**Definition 4.5.** The greatest element of  $\mathbf{Eq} X$  is the universal relation  $X^2$ , and its least element is the equality relation  $= ((a, a))$ . The meet operation in  $\mathbf{Eq} X$  is of course set intersection, which means that  $(x, y) \in \bigwedge_{i \in I} E_i$  if and only if  $x E_i y$  for all  $i \in I$ . The join  $\bigvee_{i \in I} E_i$  is the transitive closure of the set union  $\bigcup_{i \in I} E_i$ . Thus  $(x, y) \in \bigvee_{i \in I} E_i$  if and only if there exists a finite sequence of element  $x_i$  and  $i_j$  such that

$$x = x_0 E_{i_1} x_1 E_{i_2} x_2 \cdots x_{k-1} E_{i_k} x_k = y.$$

这些都是很自然衍生出来的概念, 等价关系的交还是一个等价关系, 等价关系的并并不一定构成一个等价关系, 所以需要取一下它的传递闭包.

**Definition 4.6.** (积关系) If  $R$  and  $S$  are relations on  $X$ , defined the relative product  $R \circ S$  to be the set of all pairs  $(x, y) \in X^2$  for which there exists a  $z \in X$  with  $x R z$  and  $z S y$ .

**Lemma 4.7.** 构造传递闭包的方法 If  $R$  and  $S$  are equivalence relations, then we have  $S \subseteq R \circ S$  and  $R \subseteq R \circ S$ . Thus

$$R \circ S \subseteq R \circ S \circ R \subseteq R \circ S \circ R \circ S \subseteq \dots$$

And  $R \vee S$  is the union of this chain.

证明. 对任意的  $(x, y) \in S$ , 由于  $R$  是一个等价关系, 因此存在  $(y, y) \in R$ , 即  $(x, y) \in R \circ S$ , 所以  $S \subseteq R \circ S$ . 同理可以证明  $R \subseteq R \circ S$ .  $\square$

**Definition 4.8.** A representation of  $\mathcal{L}$  is an ordered pair  $(X, F)$  where  $X$  is a set and  $F: \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Eq} X$  is a lattice embedding. We say that the representation is

1. of **type 1** if  $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y)$  for all  $x, y \in L$ ,
2. of **type 2** if  $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y) \circ F(x)$  for all  $x, y \in L$ ,
3. of **type 3** if  $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y) \circ F(x) \circ F(y)$  for all  $x, y \in L$ .

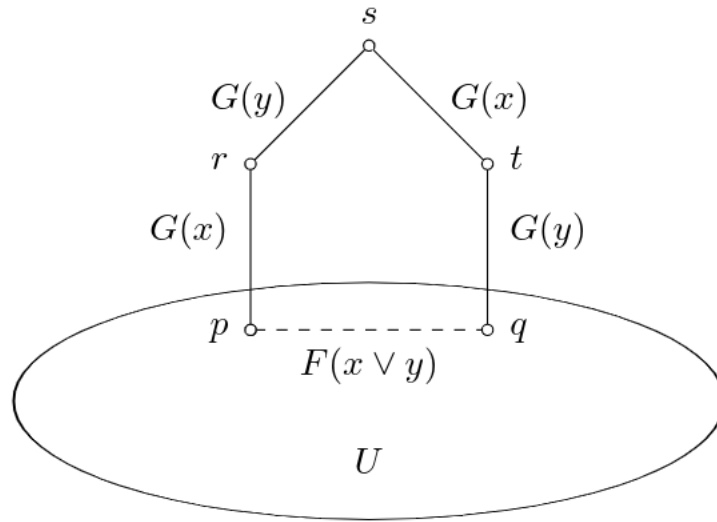
**Definition 4.9.** A **weak representation** of  $\mathcal{L}$  is a pair  $(U, F)$  where  $U$  is a set and  $F: \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Eq} U$  is a one-to-one meet homomorphism. Let us order the weak representation of  $\mathcal{L}$  by

$$(U, F) \sqsubseteq (V, G) \text{ if } U \subseteq V \text{ and } G(x) \cap U^2 = F(x) \text{ for all } x \in L.$$

**Lemma 4.10.** If  $(U, F)$  is a weak representation of  $\mathcal{L}$  and  $(p, q) \in F(x \vee y)$ , then there exists  $(V, G) \supseteq (U, F)$  with  $(p, q) \in G(x) \circ G(y) \circ G(x) \circ G(y)$ .

证明. 往  $U$  里面加 3 个新的 distinct 元素, 使得  $V = U \cup \{r, s, t\}$ . 我们想让

$$p \ G(x) \ r \ G(y) \ s \ G(x) \ t \ G(y) \ q.$$



于是我们定义对任意的  $z \in L$  和  $u, v \in U$ , 使得  $G(z)$  满足下述条件

1.  $u \ G(z) \ v$  iff  $u \ F(z) \ v$ ,
2.  $u \ G(z) \ r$  iff  $z \geq x$  and  $u \ F(z) \ p$ ,
3.  $u \ G(z) \ s$  iff  $z \geq x \vee y$  and  $u \ F(z) \ p$ ,
4.  $u \ G(z) \ r$  iff  $z \geq y$  and  $u \ F(z) \ p$ ,
5.  $r \ G(z) \ s$  iff  $z \geq y$ ,
6.  $s \ G(z) \ t$  iff  $z \geq x$ ,
7.  $r \ G(z) \ t$  iff  $z \geq x \vee y$ .

注意到  $G(z)$  由于 (1) 是满足自反性的, 并且满足了 weak representation 上 order 关系, 即  $G(z) \cap U^2 = F(z)$ . 同时观察到条件 (2-7) 都和  $r, s, t$  的位置无关, 所以它们也都是满足对称性的. 传递性也是很显然的, i.e., (2)(4)  $\Rightarrow$  (3) 和 (5)(6)  $\Rightarrow$  7. 所以  $G(z)$  是一个等价关系. 还必须要说明  $G$  是单射和满足 meet homomorphism. 由于  $F$  是单调, 那么  $G$  肯定是单调, 新加入的元素造成的 relations 不会对  $G(x) \cap U^2 = F(x)$  造成影响. 考虑  $z, z' \in L$ , 我们想要说明  $G(z \wedge z') = G(z) \wedge G(z')$ , 其实就是要考虑  $z, z'$  和  $x, y$  的关系, 记住若  $z \wedge z' \geq x$  当且仅当  $z \geq x$  和  $z' \geq x$  再结合上述条件, 应该很容易证明, 这过程太 routine 了! 我放弃了.

我们再来观察是否满足上述图里面的关系, 首先来看  $p G(x) r$ , 把 (2) 中的  $u$  换成  $p$  和  $z$  换成  $x$ , 那么再看条件  $x \geq x$  and  $p F(z) p$ , 这是显然满足的. 再来试一个  $r G(y) s$ , 把 (5) 中的  $z$  换成  $y$ , 那么条件变为  $y \leq y$ , 这也是满足的. 回过头来看这个构造比较巧妙, 注意到 (2-4) 必须带一个  $u F(x) p$ , 这是要使得它们和 1 构成传递关系的时候是满足条件的.  $\square$

**Lemma 4.11.** Let  $\lambda$  be limit ordinal, and for  $\xi < \lambda$  let  $(U_\xi, F_\xi)$  be weak representations of  $\mathcal{L}$  such that  $\alpha < \beta < \lambda$  implies  $(U_\alpha, F_\alpha) \sqsubseteq (U_\beta, F_\beta)$ . Let  $V = \bigcup_{\xi < \lambda} U_\xi$  and  $G(x) = \bigcup_{\xi < \lambda} F_\xi(x)$  for all  $x \in L$ . Then  $(V, G)$  is a weak representation of  $\mathcal{L}$  with  $(U_\xi, F_\xi) \sqsubseteq (V, G)$  for each  $\xi < \lambda$ .

证明. 先来证明满足的 order 关系, 考虑  $\xi < \lambda$ ,  $U_\xi \subseteq V$  这是显然的. 对任意的  $\alpha < \xi$  有  $F_\alpha(x) = F_\xi \cap U_\alpha^2 \leq F_\xi(x)$  和对任意的  $\beta > \xi$  有  $F_\xi(x) = F_\beta(x) \cap U_\xi^2$ , 这两个东西就说明比你小的序数交出来的结果不会比你大, 比你大的序数交出来的结果等于你是自身, 所以有

$$G(x) \cap U_\xi^2 = \left( \bigcup_{\gamma \leq \lambda} F_\gamma(x) \right) \cap U_\xi^2 = \bigcup_{\gamma \leq \lambda} (F_\gamma(x) \cap U_\xi^2) = F_\xi(x).$$

再来证明单调和 meet homomorphism, 单调是因为  $F_\xi$  都是单调的, 且满足对任意的  $\alpha < \xi$  有  $F_\alpha(x) = F_\xi \cap U_\alpha^2 \leq F_\xi(x)$ , 这说明不会相互干扰, 所以  $G$  是单调的. 最后只剩下 meet homomorphism, 单调即 order-preserving, 所以有  $G(x \wedge y) \leq G(x) \wedge G(y)$ . 考虑  $(u, v) \in G(x) \wedge G(y)$ , 那么存在  $\alpha < \lambda$  使得  $(u, v) \in F_\alpha(x)$  和  $\beta < \lambda$  使得  $(u, v) \in F_\beta(y)$ . 让  $\gamma = \max(\alpha, \beta)$ , 那么  $(u, v) \in F_\gamma(x) \wedge F_\gamma(y) = F_\gamma(x \wedge y) \leq G(x \wedge y)$ . 所以  $G(x) \wedge G(y) \leq G(x \wedge y)$ . 综上即有  $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$ .

还有一个问题是  $G(x)$  是一个等价关系吗? 考虑任意的  $(u, v) \in G(x)$ , 那么存在  $\alpha < \lambda$  使得  $(u, v) \in F_\alpha(x)$ , 那么也有  $(v, u) \in F_\alpha$ , 对称性满足了, 自反性是 trivial 的, 那么传递性呢? 若还有  $(v, w) \in G(x)$ , 那么存在  $\beta$  使得  $(v, w) \in F_\beta(x)$ . 让  $\gamma = \max(\alpha, \beta)$ , 那么  $(v, u), (u, w) \in F_\gamma(x)$ , 所以有  $(v, w) \in F_\gamma(x)$ . 好家伙似乎又把前面的东西写了一遍...  $\square$

**Theorem 4.12.** Every lattice has a type 3 representation.

证明. 前面我们已经证明  $G(x)$  是一个 meet homomorphism 且单调, 现在我们的目标是证明  $G(x \vee y) = G(x) \circ G(y) \circ G(x) \circ G(y) \leq G(x) \vee G(y)$ , 显然  $G$  就是一个 lattice embedding ( $G$  单调可以得到  $G(x \vee y) \geq G(x) \vee G(y)$ ).



现在我们从任意一个  $\mathcal{L}$  的 weak representation  $(U_0, F_0)$  开始, 在此之前所有的 lattice 都有一个 weak representation 存在. 其实这算一个 lemma, 但是证明没有新意, 都是构造性的. 我们让  $U_0 = L$ , 若  $(y, z) \in F_0(x)$  当且仅当  $y = z$  或者  $y \vee z \leq x$ . 然后考虑所有这样的四元组  $(p, q, x, y)$ , 它是满足  $(p, q) \in F_0(x \vee y)$ , 每次拿一个出来用下第一个 lemma 构造一个新的 weak representation, 让它们作为 order  $(p_\xi, q_\xi, x_\xi, y_\xi)$  使得  $(U_\xi, F_\xi)$ , 其中  $\xi < \eta$ , 它们是满足如下条件

1. 若  $\xi < \eta$ , 则  $(U_\xi, F_\xi) \subseteq (U_{\xi+1}, F_{\xi+1})$  且  $(p_\xi, q_\xi) \in F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y) \circ F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y)$ ;
2. 若  $\lambda < \eta$  是一个 limit ordinal, 则  $U_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} U_\xi$  和对任意的  $x \in L$  有  $F_\lambda(x) = \bigcup_{\xi < \lambda} F_\xi$ .

其中  $(p_\xi, q_\xi) \in F_\xi(x \vee y)$ . 现在我们是用 ordinal number 来描述的, 所以你要分别对 0 或者 successor ordinal 和 limit ordinal 来说明.

我们让  $V_1 = U_\eta$  和  $G_1 = F_\eta$ . 若对任意的  $(p, q) \in U_0$  和  $x, y \in L$  且  $(p, q) \in F(x \vee y)$ , 那么存在  $(p, q, x, y) = (p_\xi, q_\xi, x_\xi, y_\xi)$ , 使得  $(p, q) = (p_\xi, q_\xi) \in F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y) \circ F_{\xi+1}(x) \circ F_{\xi+1}(y)$ , 即

$$F_0(x \vee y) \subseteq G_1(x) \circ G_1(y) \circ G_1(x) \circ G_1(y).$$

注意到有  $(U_0, F_0) \subseteq (V_1, G_1)$ . 我们定义  $(V_0, G_0) = (U_0, F_0)$ , 然后用  $(V_1, G_1)$  代替  $(U_0, F_0)$  重复上面整个过程, 我们又可以得到一个 pair  $(V_2, G_2)$ , 类似我们重复  $\omega$  次, 就可以得到

$$(U_0, F_0) = (V_0, G_0) \subseteq (V_1, G_1) \subseteq (V_2, G_2) \subseteq \cdots$$

其中对任意的  $n \in \omega$  和  $x, y \in L$  有  $G_n(x \vee y) \subseteq G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \circ G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y)$ .

最后我们让  $W = \bigcup_{n \in \omega} V_n$  和  $H(x) = \bigcup_{n \in \omega} G_n(x)$ , 为什么会有

$$H(x \vee y) = H(x) \circ H(y) \circ H(x) \circ H(y).$$

我的理解实际第一步并不能直接得到上面的等式, 只能得到

$$H(x \vee y) = \bigcup_{n \in \omega} G_n(x \vee y) \subseteq \bigcup_{n+1 \in \omega} G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \circ G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \leq H(x) \circ H(y) \circ H(x) \circ H(y).$$

再用一下单调性就能得到上面的等式. □

前面的证明过程用到了 transfinite recursion, 最后得到  $\mathcal{L}$  的 representation  $(X, F)$  其中  $X$  是 infinite 的, 尽管  $\mathcal{L}$  有可能是 finite 的. 自然地, 你可能会想如果  $\mathcal{L}$  是 finite 的, 那么是否存在一个有限的等价关系构成的 lattice 与之对应呢?

**Definition 4.13.** Every finite lattice has a representation  $(Y, G)$  with  $Y$  finite.

证明. 这个命题在 1980 年被 Pavel Pudlák and Jiří Tůma 证明了, but the proof is quite difficult, 若是未来机会再去看看吧. □

**Theorem 4.14.** Every lattice can be embedded into the lattice of subgroups of a group

证明. Whitman 在 1946 年证明了”every lattice can be embedded into the lattice of equivalence relations on same set”, 在此之初这个问题的 motivation 源自 1930 年的 Birkhoff’s observation ”a representation of a lattice  $\mathcal{L}$  by equivalence relations induces an embedding of  $\mathcal{L}$  into the lattice of subgroups of a group”. 所以当前这个定理是和 Whitman’s theorem 是等价的, 我们来尝试构造性的证明它.

给定一个 representation  $(X, F)$  of  $\mathcal{L}$ , 让  $\mathcal{G}$  表示  $X$  上所有有限置换群 (move only finitely many elements 即只有有限多个  $f(s) \neq s$ ) 构成的群. 再让  $\mathbf{Sub} \mathcal{G}$  表示 the lattice of subgroups of  $\mathcal{G}$ . 让  $h: \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Sub} \mathcal{G}$  定义如下

$$h(a) = \{ \pi \in G \mid x F(a) \pi(x) \text{ for all } x \in X \}.$$

首先我们想证明  $h(a)$  是一个 subgroup of  $\mathcal{G}$ . 若存在  $\pi_1, \pi_2 \in h(a)$  和任意的  $x \in X$ , 考虑  $\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$ , 那么  $x F(a) \pi_2(x) F(a) \pi_1(\pi_2(x))$ , 所以  $\pi_1 \circ \pi_2 \in h(a)$ .  $h$  是 monotone 还是比较显然的.

最后的 lattice homomorphism 证明, 在此之前我们得说明一下 the lattice of subgroups 的结构是怎样的. 在 the lattice of subgroups 上的 element order 关系是 set inclusion, 两个 subgroup 的交还是一个 subgroup, 所以 lattice 上 meet 操作自然就是集合的交. 但是两个 subgroup 的并可能并不是一个 subgroup, 所以我们定义 lattice 上的 join 操作是 new subgroup is generated by two subgroup, join 产生的 new subgroups 是包含原来两个 subgroup 的最小的 subgroup. 这里相当于把 closure system 又重新回忆了一遍. 若  $a, b \in L$ , 考虑 meet homomorphism, 在 monotone 的条件下我们只需要证明  $h(a \wedge b) \geq h(a) \wedge h(b) = h(a) \cap h(b)$ . 若  $\pi \in h(a) \cap h(b)$ , 即  $(x, \pi(x)) \in F(a)$  和  $(x, \pi(x)) \in F(b)$ , 那么  $(x, \pi(x)) \in F(a) \wedge F(b)$ , 所以  $h(a) \cap h(b) \in h(a \wedge b)$ . 再来考虑 join homomorphism, 同理在 monotone 的条件下我们只需要证明  $h(a \vee b) \leq h(a) \vee h(b)$ , 若  $\pi \in h(a \vee b)$ , 即  $(x, \pi(x)) \in F(a \vee b)$ , 现在要证明  $(x, \pi(x)) \in h(a) \vee h(b)$  似乎略微有些不是那么直接. 怎么办呢? 那只能去拆解  $F(a \vee b) = F(a) \circ F(b) \circ F(a) \circ F(b)$ , 自然地我们也可以定义 subgroups 之间的 product

$$h(a) \circ h(b) = \{ \pi_a \circ \pi_b \mid \pi_a \in h(a), \pi_b \in h(b) \}.$$

那么也有  $h(a) \subseteq h(a) \circ h(b)$  和  $h(b) \subseteq h(a) \circ h(b)$ . 我们现在想让

$$h(a) \vee h(b) \supseteq h(a) \circ h(b) \circ h(a) \circ h(b) \circ \dots \supseteq h(a \vee b) = \{ \pi \in G \mid x F(a) \circ F(b) \circ F(a) \circ F(b) \pi(x) \text{ for all } x \in X \}.$$

这里我直觉的告诉我  $\pi \in h(a) \circ h(b) \circ h(a) \circ h(b)$ . 事实上确实如此吗?

$$x F(a) \pi_1(x) F(b) \pi_2(\pi_1(x)) F(a) \pi_3(\pi_2(\pi_1(x))) F(b) \pi(x)$$

那么存在一个  $\pi_4 \in h(b)$  使得  $\pi_4(\pi_3(\pi_2(\pi_1(x)))) = \pi(x)$ , 即  $\pi \in h(a) \circ h(b) \circ h(a) \circ h(b)$  印证了我们的猜测. 这 product of subgroup 性质和 type3 representation 有那么一点相似了, 也是在说明它们其实是等价的.  $\square$

**Lemma 4.15.** Let  $\mathcal{L}$  be a sublattice of  $\mathbf{Eq} X$  with the property that  $R \vee S = R \circ S \circ R$  for all  $R, S \in L$ . Then  $\mathcal{L}$  statifies

$$x \leq y \text{ implies } x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z).$$

The implication is known as the modular law.

证明.

□