Linear Algebra

枫聆

2021 年 2 月 14 日

目录

Vector Space

Definition of Vector Space

Definition 1.1. vector spaces 是一个具有加法 (addition) 和数量乘法 (salar multiplication) 的集合 V

- 加法是指对任意的元素 $u, v \in V$, 有 $u + v \in V$
- 数量乘法是指对任意的元素 $\lambda \in F$ 和 $v \in V$，有 $\lambda v \in V$

  同时它们存在下面的属性:

- 加法交换律 $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
- 加法结合律 $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ 和 $\forall a, b \in F, (ab)v = a(bv)$
- 加法单位元 $\forall v \in V, v + 0 = v$
- 加法逆元 $\forall v \in V, \exists v^{-1}, v + v^{-1} = 0$
- 数量乘法的单位元 $\forall v \in V, 1v = v$
- 分配律 $\forall v, w \in V, \forall a, b \in F, a(u + v) = au + av, (a + b)v = av + bv$

vector spaces 背后的直觉是什么？《linear algebra done right》上说来自于 F^n 上的 addition 和 scalar multiplication. 很明显 addition 包含了 abelian group 的所有性质，vector space 是 R-module 的特殊化，R-module 从结构上来说，要比 Ring(带单位元) 的性质要弱一些，主要体现在乘法上，弱化为数量乘法，表示把一个环作用在一个 abelian group 上，而不是环上的乘法. 这样做的好处是可以让可以把环上一些看起来不那么好性质都变得好一点，例如 ideal 在一般情况下并不一定还是是一个环，商环类似. 不那么好是相对于群的一些性质来说的，例如正规子群. 在定义了 module 之后，你会发现 ideal 就是一个 module 了，我们的操作终于都在一个东西下面了，不会轻易的跑出去了.

我想这里多记录一些 R-module 的东西，如何把一个环弱化成一个模结构呢？首先我们需要一个 abelian group M，定义 “the left-action of a ring R on M” 为

$$\sigma\colon R \to \mathsf{End}_{Ab}(M)$$

是一个环同态. 可能这里有一个小疑问为什么 $\mathsf{End}_{Ab}(M)$ 是一个环结构？首先这个环里面的元素都是关于 M 的 endomorphisms, 乘法定义为 endomorphisms 之间的复合，加法定义为 $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$，其中 $f, g \in \mathsf{End}_{Ab}(M)$. 我们说 σ 把 M 变成了一个 left-R-module，σ 这个映射可以理解为 left-R-module structure(算子)，

$$\sigma(r)(m) \in_R M$$

间接的定义了数量乘法，并且有一些有趣的性质:

- 分配律 $\sigma(r)(m_1+m_2)=\sigma(r)(m_1)+\sigma(r)(m_2)$
- 分配律 $\sigma(r_1+r_2)(m)=\sigma(r_1)(m)+\sigma(r_2)(m)$ (环同态下可以保证)
- 结合性 $\sigma(r_1r_2)(m)=\sigma(r_1)(\sigma(r_2)(m))$ (环同态下可以保证)
- 单位元 $\sigma(1)(m)=m$

如果要定义更清楚一点，可以这样

$$\rho\colon R\times M\to M$$

,ρ 和 σ 的关系为

$$\rho(r,m)=\sigma(r)(m)$$

, 但是这里不是环同态无法保证上面的一些性质，所以需要额外规定一些东西

- $\rho(r_1+r_2,m)=\rho(r_1,m)+\rho(r_2,m)$（分配律）
- $\rho(r,m_1+m_2)=\rho(r,m_1)+\rho(r,m_2)$（分配律）
- $\rho(r_1r_2,m)=\rho(r_1,\rho(r_2,m))$（结合率）
- $\rho(1,m)=m$ （单位元）

把 vector space 一般化的感觉是不是很爽？其实 R-module 在一定程度要比 vector space 更复杂，当用更抽象方式去理解 vector space，我们定义了一个 σ 环同态，这个环同态很精妙的把环作用在 abelian group 的 action 表示出来，所以我们用理解 R-module 的方式去理解 vector space，就是首先我们要有一个 abelian group 定义了加法，然后把一个 field 作用在了它之上，定义为数量乘法，最后我们就得到了这样的一个结构。

这篇 note 既然是在《linear algebra done right》的基础上记录的，我会尽可能的记录一些抽象的延伸的东西，让自己对 linear algebra 有一个不同于大学的颠覆性的认知。

Subspace

Definition 1.2. *如果 V 中的子集 U 是一个子空间，当且仅当满足一下条件:*

1. $0 \in U$
2. $u, w \in U$ 蕴含 $u + w \in U$
3. $a \in F$,$u \in U$ 蕴含 $au \in U$

也就是说，V 下子空间一定是子集，包含加法单位元，且在加法和数量乘法下封闭。

Definition 1.3. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 是 V 的子集. 这些子集的和表示为*

$$U_1 + \cdots + U_m = \{ u_1 + \cdots + u_m \mid u_1 \in U_1, \cdots, u_m \in U_m \}$$

定义子集和，是为了引入下面这个性质

Proposition 1.4. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 都是 V 中的子空间，则 $U_1 + \cdots + U_m$ 是包含 $U_1, \cdots, U_m$ 的最小子空间.*

证明. 最小的就是指 V 里面任意包含 $U_1, \cdots, U_m$ 的子空间都包含 $U_1 + \cdots + U_m$, 首先得证明一下 $U_1 + \cdots + U_m$ 是一个子空间，按照子空间的定义，加法单位元和封闭性都很显然，满足上述条件的子空间很也显然需要包含所有子空间对应的子集和。 □

Definition 1.5. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 都是 V 中的子空间，如果 $U_1 + \cdots + U_m$ 中的每个元素都有唯一分解形式即 $u_1, \cdots, u_m$，则 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和 (direct sum)，用 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ 表示。*

那怎么判定一个子集合是不是直和呢?

Proposition 1.6. *定义 $U_1, \cdots, U_m$ 都是 V 中的子空间, 如果 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和当且仅当 $u_1 + \cdots + u_m = 0$ 时，$u_1 = ... = u_m = 0$。*

即只需要 0 有唯一的表示形式就够了，来证明一下

证明. 假设

$$u_1 + \cdots + u_m = u_1' + \cdots + u_m'$$

, 整理一下

$$(u_1 - u_1') + \cdots + (u_m - u_m') = 0$$

,0 有唯一的表示方式，则 $u_1 = u_1', \ldots, u_m = u_m'(u_1 - u_1' \in U_1, \ldots, u_m - u_m' \in U_m)$ □

下面再来个特殊情况, 只有两个子空间，怎么判定它们的子集和是不是直和?

Proposition 1.7. 定义 U 和 W 是 V 中的两个子空间，如果 $U+W$ 是直和当且仅当 $U \cap W = 0$.

证明. 如果 $U+W$ 是直和，任取 $v \in U \cap W$, 则 $-v \in U \cap W$, 而 $0 = v + (-v)$, 所以 v 只能是 0.

如果 $U \cap W = \{0\}$, 我们假设还有 $0 = v + w$，其中 v, w 不为 0，则 $w = (-v)$, 则 $v \in U \cap W$，与前提矛盾. 所以 0 有唯一表示。 $\square$

Finite-Dimensional Vector Space

Linear Combinations and Span

Definition 2.1. 给定 V 里面一系列向量 $v_1, v_2, \cdots, v_m$(vector list)，它们的线性组合表示为

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in F$.

Definition 2.2. 给定 V 里面一系列向量 $v_1, v_2, \cdots, v_m$，所有的它们的线性组合构成的集合叫一个 **span**(linear span).

$$\text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \{\, a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m \mid a_1, a_2, \cdots, a_m \in F \,\}.$$

空的 vector list 的 span 表示为 $\{0\}$.

下面是关于 span 一些有趣的性质.

Proposition 2.3. span 是包含当前 vector list 里面所有 vectors 的 smallest subspace.

证明. 首先你得证明 span 确实是一个 subspace，然后所有其他的 subspace 都包含它. span 是一个 subspace 是 clearly 的. 假设 U 这样一个 subspace，包含 $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 则 $a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_mv_m$ 也是属于 U 的. 那么它们的和也应该是属于 U 的. 这就证明了 span 是含于 U 的. □

上面 span 是一个名词，那么下面 span 就是一个动词.

Definition 2.4. 如果 $\text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 等于 V，则称 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ **spans** V

finite-dimensional vector space 的严格定义.

Definition 2.5. 如果一个 vector space 可以被一些 vector list spans, 则称这个 vector sapce 是 finite-dimensional.

这里没有用到 basis 的概念...

Definition 2.6. $\mathcal{P}(F)$ 用来表示 polynomials over F(所有系数属于 F 的多项式集合).

Linear Independence

Definition 2.7. 给定 V 上一个 vector list $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 若要使得 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0$，只能唯一取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$. 则称 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ **linearly independent**. 从另一方面说就是在 $\text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 里面的所有 vector 都有唯一表示形式.

empty vector list 同样被定义为 linearly independent.

下面是关于 linearly dependent 的一个小性质.

Lemma 2.8. 给定 V 上一组 linearly dependent 的 vector list $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 则存在一个 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得下面两个命题成立.

1. $v_j \in \text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_{j-1})$;
2. 如果 j^{th} vector 从 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 中被去掉，则剩下的 vectors 构成的 span 依然等于 $\text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

这个 lemma 本质就是在 linearly dependent vector list 里面可以挑一个 vector 出来，它可以被其他的 vectors 表示.

证明. 因为 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ linear independent，所以存在某个 $a_k, k \in \{1, \cdots, m\}$ 不等于 0，使得

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdot + a_mv_m = 0.$$

让 j 表示最大值形如 $a_j \neq 0$. 则我们有

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \frac{a_2}{a_j}v_2 - \cdots - -\frac{a_{j-1}}{a_j}v_{j-1}.$$

□

还有一个比较直观的判定给定 vector list 是不是 linearly independent 的方法.

Proposition 2.9. linearly independent vector list 长度是小于等于 spanning vector list(vector list spans V) 的长度.

证明. 给定 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ linearly independent 和 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ spans V. 我们的目标是证明 $m \leq n$. 整个证明过程非常的有趣，会用 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 替换部分 $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

首先我们考虑 $v_1, u_1, u_2, \cdots u_m$，现在这个 vector list 变成了 linearly dependent，因为 v_1 现在至少可以有两种表示方法了. 使用前面关于 linearly dependent 的 lemma 我们可以去掉某个 u_k，使得剩下的 vector list 还是 spans V. 我们称这个新的 vector list 为 B.

然后 by induction，我们可以把剩下的 $v_2, \cdots, v_m$ 也都加到 B 里面，同时每次 remove 一个 u_k. 我们必须考虑一下有没有足够多的 u_k 够我们 remove？也就是说我们还剩下一些 v_i 放不进去 B. 假设存在这种情况，也就

是说现在 B 里面全是 v，所以 B 里面的 vectors 都是 linearly independent，并且 spans V，现在还剩下 v_i 还没放进去. 矛盾就来了，v_i 加上 B 里面的 vectors 就变成 linearly dependent 了. 所以是不存在这种情况的. 也就是说 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是完全可以一一替换部分 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的. 最后结论就是 $m \leq n$. □

Proposition 2.10. finite-dimensional vector space 的 subspace 还是 finite-dimensional.

证明. 这里还是一个构造证明，用 U 表示 V 上的 subspace. 如果 $U = \{0\}$，clearly. 如果 $U \neq \{0\}$，则我们从里面挑一个非零 vector v_1 出来. 如果 $U = \text{span}(v_1)$，we are done. 反之我们接着取非零 $v_2 \in U$，这里还有有一个条件就是 $v_2 \notin \text{span}(v_1)$.

一般地，如果 $U = \text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_{j-1})$，we are done. 反之我们接着取 $v_j \in U$，且 $v_j \notin \text{span}(v_1, v_2, \cdots, v_{j-1})$. 你可以观察到这样取出来的 vector list 都是 linearly independent. 根据前面的 lemma 我们知道它的长度应该是小于任何的 spanning list，V 现在是 finite-dimensional，根据定义它可以被一些 vector list span. 所以最终我们这样的取法是会停下来的，因为长度被限制了，即 U 最终也会被一个 vector lists span，U 也是 finite-dimensional. 其实感觉有点找 basis 的感觉了. □

Bases

Definition 2.11. 若 V 上的一组 *list of vectors* 是 *linear independent* 且 *spans* V，则称它是一个 V 上的一个 *basis(基)*.

basis 更常见的另一种描述方式如下

Proposition 2.12. 若 V 上的一组 *list* $v_1, v_2, \cdots, v_m$ *of vectors* 是一个 *basis* 当且仅当任意的 $v \in V$ 都有唯一的表示 *(linear combination)*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v2 + \cdots + a_m v_m.$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in F$.