

# 自然同构为什么自然？

枫聆

2020 年 11 月 28 日

我也好奇自然同构中的自然在这里是什么含义？在这个名字的背后有一个故事，是 Eilenberg 和 Mac Lane's 共同讲述的一个的故事。为了弄清楚这个故事的含义，前后前后利用一周空闲的时间，大致了解了他们在讲述的一个什么故事，故事包含了 vector space 相关的知识，但是关于向量空间的定义我之前已经忘的差不多了，只好重头开始学一遍。那么到底自然是什么东西呢？

自然同构是刻画两个 functors 之间的关系，更一般地情况，自然同构是自然变换的特殊情况，从自然变换的定义中，我们知道自然变换是由一个一个的 component 组成的，而每个 component 其实是 target category 里面的 morphism，这样看起来我们并没有引入其他的对象来描述两个 functors 的关系，这也是 natural transformation 的定义  $\text{Obj}\mathcal{C} \rightarrow \text{Mor}\mathcal{D}$ ，它描述是这样的一种内在的关系。

好了，开始进入正题，为什么理解这个背后故事中的例子，需要一些前提的知识：

- 向量空间是  $R$ -module 的特殊情况，即  $R = k, k$  是一个 field，这个时候称为  $k$ -vector space.
- 还需要了解一下基和维数的概念，一组基可以 span 向量空间里面的所有向量，如果存在这样一组基，且基的个数是有限的，则称其为向量空间的维数。
- 向量空间  $V$  的对偶空间  $V^* = \text{Hom}(V, k)$ ，是由所有的线性映射  $f: V \rightarrow k$  构成的。
- 向量空间  $V$  的双对偶空间  $V^{**} = \text{Hom}(V^*, k)$ ，是由所有的线性函数  $g: V^* \rightarrow k$  构成的。

首先考虑一个有限维的向量空间  $V$  over  $\mathbb{R}$  和其对偶空间  $V^*$ ，现在来证明它们是同构的，首先选择  $V$  的一组基  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，再定义一组  $V^*$  里面特殊的线性函数  $v_i^*: V \rightarrow \mathbb{R}$

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$B^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$  则是  $V^*$  的一组基，根据  $R$ -module 的 homomorphism 的定义，如果同构它们之间应该存在一个线性函数  $\phi: V \rightarrow V^*$  是一个双射，现在给定这个函数为  $\phi(v_i) = v_i^*$ ，把  $V$  的基映到  $V^*$  基上。

为了理解这样做的情况下  $V$  和  $V^*$  是同构的, 假设任意一个线性函数  $f(v), v \in V$ , 可以把  $v$  用  $B$  来表示, 即  $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$ , 然后我们再把  $f(v)$  稍微调整一下

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i^*(v) f(v_i)$$

这里用到了  $f(kv) = kf(v)$ , 可以看到  $f(v)$  是可以被  $B^*$  span 的, 为了说明  $\phi$  是 well-defined, 设  $g(v) = f(v)$ , 即  $f(v_i) = g(v_i)$ , 这说明确定一个  $f(v)$  只需要确定  $f$  对  $B$  的作用,  $\phi(\sum_{i=1}^n k_i v_i) = \sum_{i=1}^n k_i v_i^* = f(v)$ , 但是怎么和上面的  $f(v)$  的形式不同呢? 在上面中  $k_i$  被替换掉了, 在这里又莫名其妙的出现了? 其实本质上相同的,  $f(v_i)$  和  $k_i$  都是属于  $\mathbb{R}$ . 这个同构的前提是固定了  $V$  中的一组基, 由之确定了  $V^*$  中的一组基, 任意的一组基都可以构造出来这样一种同构, 没有哪一种基相对于其他基是更 natural 的, 所有没有一种同构  $\phi: V \rightarrow V^*$  是更 preferred.

现在我们来考虑  $V$  的双对偶空间  $V^{**}$ , 我们现在也是否需要先选择  $V$  的一组基  $B$ , 再确定  $V^*$  的一组基  $B^*$ , 最后再确定  $V^{**}$  的一组基  $B^{**}$  呢? 实际上没有必要的, 可以直接定义  $\psi_V: V \rightarrow V^{**}$ , 对  $v \in V$ , 有  $\psi_V(v)(f) = f(v)$ , 表示  $\psi_V(v): V^* \rightarrow \mathbb{R}$  把  $f \in V^*$  映到  $f(v)$  上. 我们来尝试理解  $\psi_V(v)$ , 它是一个“evaluation function”

$$f \mapsto f(v): V^* \rightarrow k$$

它可以表示为  $\{f(v), g(v), \dots\}$  indexed set, 如果  $\{f(v_1), g(v_1), \dots\}$  等于  $\{f(v), g(v), \dots\}$ . 即  $f(v) = f(v_1), g(v) = g(v_1)$ , 由于线性函数是  $f(v - v_1) = f(v) - f(v_1) = 0$ , 所以  $v = v_1$ , 所以  $\psi_V$  是一个单射, 似乎主要需要证明  $\psi_V$  也是一个线性函数, 证明它以后, 自然是单射了, 好吧  $\wedge \circ \wedge / \sim$ , 我们从线性函数两个 axioms 出发

$$\begin{aligned} \{f(v_1 + v_2), g(v_1 + v_2), \dots\} &= \{f(v_1) + f(v_2), g(v_1) + g(v_2), \dots\} \\ &= \{f(v_1), g(v_1), \dots\} + \{f(v_2), g(v_2), \dots\} \\ \{f(kv), g(kv), \dots\} &= \{kf(v), kg(v), \dots\} \end{aligned}$$

现在再来说明  $\psi_V$  是一个满射, 由于  $V$  和  $V^{**}$  都是  $n$  维向量空间 over  $\mathbb{R}$ , 所以它是一个满射. 我们构造这个同构无关于  $V$  的基选择, 这个同构表现形式相对于  $V$  和  $V^*$  同构的构造更加的 natural, 适用于任何有限向量空间的一般构造形式。

让故事继续, 由于  $V$  和  $V^{**}$  同构构造适用于所有有限向量空间, 我们再引入一个有限向量空间  $W$ , 对应也能得到一个同构  $\psi_W: W \rightarrow W^{**}$ , 同时  $V$  和  $W$  之间存在一个 homomorphism  $f$ , 那么  $V$  和  $V^*$  之间也应该有一个 homomorphism, 但是如何表示呢? 由此我开始漫长的思考, 为什么要引入对偶空间呢? 各种查资料中, 我隐约感受到了其中的一丝直觉, 为了求解线性方程组, 从而很自然引入的概念, 试想在求解方程组的时候, 我们常用的手段, 用某一行去加上 (减去) 去另一行, 还可能用某一行的整数倍加上 (减去) 另一行, 而每一行等式可以用一个 linear map 来表示, 这不正是符合 vector space 里面的 axioms 吗? 所以

linear maps 的全体是一个向量空间，但为什么是对偶呢？因为对偶的概念其实是指原来的 vector space 和其对应的 dual vector space 是没有区别的，因为在同构的意义下！下面是一段奇妙的理解，似乎能懂一些东西，但是其实什么也没懂o()o

“The dual is intuitively the space of "rulers" (or measurement-instruments) of our vector space. Its elements measure vectors. This is what makes the dual space and its relatives so important in Differential Geometry, for instance. This immediately motivates the study of the dual space. For motivations in other areas, the other answers are quite well-versed.

This also happens to explain intuitively some facts. For instance, the fact that there is no canonical isomorphism between a vector space and its dual can then be seen as a consequence of the fact that rulers need scaling, and there is no canonical way to provide one scaling for space. However, if we were to measure the measure-instruments, how could we proceed? Is there a canonical way to do so? Well, if we want to measure our measures, why not measure them by how they act on what they are supposed to measure? We need no bases for that. This justifies intuitively why there is a natural embedding of the space on its bidual. (Note, however, that this fails to justify why it is an isomorphism in the finite-dimensional case)”

回到故事的主线， $V^*$  和  $W^*$  之间的关系如何描述？天然的下面图交换，给定  $f$ ，对任意的  $\phi_W$  都可以唯一确定  $\phi_W f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ，我们现在可以来描述  $V^*$  和  $W^*$  的关系了， $f^T: W^* \rightarrow V^*$ ，其中  $f^T$  就表示把  $\phi_W$  映射到  $\phi_W f$ ，我们 fixed 了这个  $f$ 。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow \phi_W f & \downarrow \phi_W \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

所以我们可以很自然的得到下面的图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \phi_V & & \downarrow \phi_W \\ V^* & \xleftarrow{f^T} & W^* \end{array}$$

但是问题是这张图交换吗？我们来验证一下，首先有

$$\phi_V = f^T \phi_W f$$

，由于  $\phi_V$  可逆，则有

$$1_V = \phi_V^{-1} f^T \phi_W f$$

这说明  $f$  有左逆元，但是一般情况下是没有的，所以上面的图在一般情况下可能并不交换。

我们再来看  $V^{**}$  和  $W^{**}$ ，根据前面我们知道， $(f^T)^T: V^{**} \rightarrow W^{**}$ ，那么现在我们图应该是这样的

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \psi_V \downarrow & & \downarrow \psi_W \\ V^{**} & \xrightarrow{(f^T)^T} & W^{**} \end{array}$$

看起来似乎要比上面那个图要协调一点，还是来看看是不是交换的

$$(f^T)^T \psi_V = \psi_W f$$

在把  $(f^T)^T$  整理出来

$$(f^T)^T = \phi_W f \psi_V^{-1}$$

fixed 了  $f$ ，我们可以得到唯一的  $(f^T)^T$ ，所以上面的图是交换的。

故事到这里，其实为什么叫自然，应该能有那么一点感觉了，用范畴论的思想来说其实就是指**空间向量**和它的**双对偶空间**所对应的上面这个交换图是天然交换的，只需要我们给定两个任意的空间向量和他们之间的 homomorphism，注意这里 homomorphism 是指任意的  $f \in \mathbf{Hom}(V, W)$ ，在这里也就是具体的 linear map。相对地，**空间向量**和它的**对偶空间**，我们并不能总是保证上面的图交换。

但是故事到这里并没有结束，因为我们还并没有把它归纳到自然同构的形式上，自然同构的定义需要两个 pair-functor，如果把全体有限维的向量空间看做一个范畴  $\mathbf{Vect}$ ，那么上面图中的箭头  $f: V \rightarrow W$  就是  $\mathbf{Vect}$  中一个 morphism，为了尽可能的维持上面的交换图，我们知道自然同构的交换图里面的箭头都属于 source 范畴

算了不啰嗦了直接把两个 functor 给出来吧，一个 trivial functor  $1: \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Vect}$  和一个双对偶 functor  $DD: \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Vect}$  把  $V$  映到  $V^{**}$  和把  $f$  映射到  $DD(f)$  那么现在我们可以给出两个一个自然同构的形式了

$$\begin{array}{ccc} 1(V) & \xrightarrow{1} & 1(W) \\ \psi_V \downarrow & & \downarrow \psi_W \\ DD(V) & \xrightarrow{DD} & DD(W) \end{array}$$

前面说了这么多，其实就是想说明通过  $\psi_V$  引入自然同构  $\psi: 1 \Rightarrow DD$ ，而  $\psi_V$  就是其中的一个 component。自然同构描述的是两个函子之间同构的关系，我们用向量空间和它的双对偶空间直觉上“自然”地同构作为 component 引入，就有了 trivial functor 和 double dual functor 的同构，那么我们如果用不那么“自然地”“向量空间和它的对偶空间同构作为 component，是否也能试用于描述两个函子之间的关系？我们来尝试一下

$$\begin{array}{ccc}
 1(V) & \xrightarrow{1} & 1(W) \\
 \phi_V \downarrow & & \downarrow \phi_W \\
 D(V) & \xleftarrow{D(f)} & D(W)
 \end{array}$$

还是 trivial identity functor 和 dual functor，我们已经说过了，我们并不能保证这张图交换，因为除非  $f$  是一个同构，原因上面已经说过了。

提供 vector space 里面两个特殊同构，其中 vector space 和 double-dual space 的同构更自然，是因为它可以作为 natural isomorphism 的 component，自然不自然的我觉得，似乎也没什么意义了，即使它不叫自然，也能用别的名字代替，主要是两个同构确实用另一种观点来看确实是有区别！