考研高数

枫聆

2021 年 6 月 7 日

目录

经典证明

Theorem 1.1. (连续函数在闭区间上有界) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么它在其上有界 (上下界).

证明. (方法 1: 构造 $f(x)$ 非空子区间 $[a,x]$，求其上确界) 假设 B 是使得 $f(x)$ 在形如闭区间 $[a,x]$ 上有界的 $x\in[a,b]$ 集合，显然 $a\in B$，所以 B 非空。若 $e\in B$ 且 $e>a$，那么 a 和 e 之间的点都是在 B 里面的，所以实际上 B 是一个闭区间. 我们再考虑 B 的上确界，根据 x 的取法，有 $x\le b$，如果我们能证明它的上确界在 b 出取得，那么整个命题就得证. 现在假设 $\sup(B)<b$, 由于 B 是一个闭区间，所以 $\sup(B)\in B$. 由于 f 是连续的，那么足够靠近 $\sup(B)$ 的地方，即 $s-\sup(B)<\delta$ 且 $s>\sup(B)$，有 $|f(s)-f(\sup(B))|<\varepsilon$，那么 $f(x)$, $x\in[\sup(B),s]$ 也是有界，这是和 $\sup B$ 是 B 的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的数列，其子列收敛造矛盾). □

Theorem 1.2. (确界原理) 任一有上界的非空实数集必有上确界，同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. (构造一个实数划分，用戴德金分割定理说明界数就是确界)假设非空实数集 S 有上界 M，取 S 所有上界为集合 B. 因为 $M\in B$ 所以 B 非空，取 $A=\mathbb{R}\setminus B$，要证明 A 是非空是 trivial 的，取 $x=x_0-1$, $x_0\in S$，那么 $x\in A$. 显然地 A 里面所有的元素都小于 B 里面的元素（若是大于 B 里面某个元素，那么它就是 S 的一个上界了，这是矛盾的)，这样我们就可以得到一个实数上的划分，根据戴德金实数分割定理，存在一个 β，它要么是 A 里面最大值或者要么 B 里面的最小值. 假设它是 A 里面的最大值，根据 A 的定义，对于任意 $a\in A$ 都存在一个 $x_0\in S$ 使得 $a<x_0$，将其作用到 β 上，我们得到某个 $x_0'\in S$ 使得 $\beta<x_0'$. 我们考虑 $\frac{x_0'+\beta}{2}$，有

$$\beta<\frac{x_0'+\beta}{2}<x_0'$$

所以 $\frac{x_0'+\beta}{2}\in A$，这和 β 是 A 里面最大值是矛盾的，所以 $\beta\in B$，即这个 β 就是 S 的上确界. □

Theorem 1.3. (极值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，那们存在 $c,d\in[a,b]$ 使得

$$f(c)\le f(x)\le f(d),\ x\in[a,b].$$

证明. (构造一个特殊连续函数说明原函数可以取到确界)f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 (连续闭有界)，那么马上可以得到 f 在 $[a,b]$ 上有界. 取集合 $Y=\{\,f(x)\mid x\in[a,b]\,\}$，即 Y 有界，根据确界原理Y 有确界，那么我们下面证明思路，就是看 $f(x)$ 是不是能取到这个确界. 取其上确界为 m，假设不存在 $d\in[a,b]$ 使得 $f(d)=m$，那么我们考虑函数 $g(x)=\frac{1}{m-f(x)}$，由于 $m>f(x)$, $x\in[a,b]$，所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，又因为 f 在 $[a,b]$ 是上有界的，那么 g 在其上也是有界的. 由于 m 是上确界，所以对任意的正实数 ε，都有 $m-f(x)\le\varepsilon$，那么 $g(x)\ge\frac{1}{\varepsilon}$，这说明 $g(x)$ 是发散的，造成了矛盾. 所以 f 是可以取到上确界的. □

Theorem 1.4. (罗尔定理)如果 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 内可导，若有 $f(a)=f(b)$，那么存在至少一个 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=0.$$

证明. (确界处导数存在的充分必要条件)f 在 $[a,b]$ 上连续，那么根据极值定理其在 $[a,b]$ 是可以取到极值的，分两种情况讨论: (1 如果其最大值和最小值同时在 a,b 取得，那么 f 就是常函数，对任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $f'(x)=0$. (2 不失一般性，我们假设 f 在一点 $c\in(a,b)$ 处 $f(c)$ 为最大值 (若是最小值，考虑 $-f$ 即可)，我们来考虑 c 的一个邻域 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 两边，其中 $c-\varepsilon$ 和 $c+\varepsilon$ 均在 $[a,b]$ 里面. 对任意的 $h\in(c-\varepsilon,c)$ 都有

$$f'(c^-)=\lim_{h\to c^-}\frac{f(c)-f(h)}{c-h}\leq 0.$$

同理对任意的 $t\in(c,c+\varepsilon)$ 都有

$$f'(c^+)=\lim_{t\to c^+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\geq 0.$$

由于 f 在 c 点可导，那么 $f'(c)=f'(c^-)=f'(c^+)=0$. □

Theorem 1.5. (中值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续，且在 (a,b) 上可导，那么存在一个实数 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明. (中值定理是罗尔定理的推广) 构造函数 $g(x)=f(x)-rx$，通过选择合适的 r，使得 $g(a)=g(b)$，即

$$\begin{aligned} g(a)=g(b) \quad &\Leftrightarrow f(a)-ra=f(b)-rb \\ &\Leftrightarrow r=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

那么根据罗尔定理，我们知道存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $g'(c)=0$，

$$\begin{aligned} g'(x)&=f'(x)-r \\ g'(c)&=f'(c)-r=0 \\ f'(c)&=r=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

证毕. □

Theorem 1.6. (柯西中值定理) 若两个 real-valued 函数 f 和 g 都在闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续，且都在 (a,b) 上可导. 那么存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

特别地，若 $g(b)\neq g(a)$ 且 $g'(c)\neq 0$，等价于

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证明. (柯西中值定理是中值定理的扩展) 构造函数 $h(x) = f(x) - rg(x)$，选择合适 r 使得 $h(a) = h(b)$，若 $g(b) \neq g(a)$ 即 $r = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，那么根据罗尔定理可以得到 $h'(c) = 0$, 即

$$0 = g'(c) - rf'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

若 $g(a) = g(b)$，同样根据罗尔定理有 $g'(c) = 0$，这个条件显然是使得前面第一个等式成立的. $\square$

Theorem 1.7. (夹逼准则) 若函数 f, g, h 均在以点 a 为聚点的区间 I 上定义着，且对任意的 $x \in I$，其中 $x \neq a$ 都有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

并且同时满足

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

那么 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

证明. (经典两边夹) 取任意的正实数 $\varepsilon > 0$，根据极限地定义对 $g(x)$ 和 $h(x)$ 我们可以分别找到 $|x| < \delta_1$ 和 $|x| < \delta_2$，使得

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \text{ 和 } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

成立，我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，那么当 $|x| < \delta$ 时有

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，所以有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. $\square$

数列极限

数列极限的定义

Definition 2.1. 若对于每一整数 ε, 不论它怎样小，恒有序号 N, 使在 $n > N$ 时，一切 x_n 满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

, 则称常数 a 为数列 (x_n) 当 n 趋向于无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$. 也可以说这个序列收敛于 a.

数列极限的几何意义

数列左右极限

数列极限的基本性质

Proposition 2.2. 若 $\lim x_n = a$，又 $a > p$，那么存在某个正整数 N，当 $n > N$ 时，一切 x_n 都满足 $x_n > p$.

Proposition 2.3. 若 $\lim x_n = a$，有 $a > 0$，那么存在某个正整数 N，当 $n > N$ 时，一切 x_n 都满足 $x_n > 0$.

Proposition 2.4. 若 $\lim x_n = a$，且 $a \neq 0$，则必有充分远的 x_n 值，其绝对值大于某个正数 r:

$$|x_n| > r > 0 \ (n > N).$$

性质 1 的推论.

Proposition 2.5. 若 $\lim x_n = a$，则 (x_n) 必有界.

证明. 我们知道任意给定一个 $\varepsilon > 0$，可以找到正整数 N，使得当 $n > N$ 时的一切 x_n 都满足 $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$，因此当 $n > N$ 是存在一个界数使得 $|x_n| < M$. 接着再考虑 $n \leq N$ 时，注意这时候只有有限个 x_n，我们把 M 和它们放在一起，取它们里面绝对值最大的数 M'，即有 $|x_n| \leq M'$. □

Proposition 2.6. 若同时有 $\lim x_n = a$, $\lim x_n = b$，则 $a = b$.

数列无穷小和无穷大

数列极限运算

Proposition 2.7. 若 $x_n = y_n$，则 $\lim x_n = \lim y_n$.

Proposition 2.8. 若恒有 $x_n \le y_n$，且各自趋于有限极限，则 $\lim x_n \le \lim y_n$.

Proposition 2.9. 夹闭准则 见经典证明.

Proposition 2.10. 任意有限个无穷小的和亦是无穷小.

Proposition 2.11. 有界数列 (x_n) 与无穷小 α_n 的乘积仍是无穷小.

Proposition 2.12. 若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，则 $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$. 考虑两个极限的尾巴

$$\lim(x_n \pm y_n) = a + b + \alpha + \beta.$$

Proposition 2.13. 若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，则 $\lim(x_n y_n) = ab$. 考虑两个极限的尾巴

$$\lim x_n y_n = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

Proposition 2.14. 若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，且 $b \ne 0$，则 $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. 考虑两个极限的尾巴

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}.$$

不定式

Annotation 2.15.

$$\frac{x_n}{y_n} \sim \frac{0}{0}$$

Annotation 2.16.

$$\frac{x_n}{y_n} \sim \frac{\infty}{\infty}$$

Annotation 2.17.

$$x_n y_n \sim 0 \cdot \infty$$

Annotation 2.18.

$$x_n - y_n \sim \infty - \infty$$

单调数列的极限

Theorem 2.19. 给定单调增加的数列 (x_n)，若它有上界

$$x_n \le M,\ n = 1, 2, \cdots$$

则它必有一有限极限，此极限为上确界. 同理单调减少的数理 (x_n)，若它有下界

$$x_n \ge M,\ n = 1, 2, \cdots$$

则它必有一有限极限，此极限为下确界.

收敛原理

Theorem 2.20. (柯西收敛原理)数列 (x_n) 有有限极限的必要且充分条件是: 对于任意的数 $\varepsilon > 0$，总存在着整数 N，使得当 $n > N$ 和 $n' > N$ 时有下面不等式成立

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon.$$

证明. (必要性) 若 $\lim x_n = a$，即对任意的 $\frac{\varepsilon}{2}$，能找到一个整数 N，使得 $n, n' > N$ 时有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ |x_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 那么

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \le |x_n - a| + |x_{n'} - a| < \varepsilon$$

(充分性) 若满足上述定理中的条件，我们要证明 $\lim x_n = a$，我们得想办法把这个 a 表示出来，这里手法将会用戴德金实数划分的结论来把这个 a 弄出来.

在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数 α，若 x_n 从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数 α 归入下组 A，其余的 (即不落在 A 里面的) 一起实数归入上组 A'.

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件，对于任意数 $\varepsilon > 0$ 及其对应的 N. 若 $n > N$ 及 $n' > N$，则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon.$$

现在我们可以看到每一个数 $x_{n'} - \varepsilon$ 都是小于 x_n 的，所以它归入下组 A. 另一方面 $x_{n'} + \varepsilon$ 都大于 x_n，所以 $x_{n'} + \varepsilon$ 放不进去 A，那它只能归入 A' 了, 所以 A 和 A' 都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数 α 和确定序列 x_n，要么它属于 A 或者属于 A'. 同时 A 中实数都小于 A' 的实数. 如果 $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$，则 x_n 从某一项其也都大于 a'，这样就产生矛盾了. 因此的确产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理，有实数 a 存在它是 A 和 A' 的界数，即

$$\alpha \le a \le \alpha',\ \alpha \in A, \alpha' \in A'.$$

我们注意到当 $n > N$ 时，$x_{n'} - \varepsilon$ 是一个 α, 而 $x_{n'} + \varepsilon$ 是一个 α'. 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \le a \le x_{n'} + \varepsilon.$$

即 $|x_{n'} - a| \le \varepsilon$，所以 $\lim x_n = a$.

若是不用实数划分的手法，也可以构造 $a_n = \inf\limits_{k \ge n} x_k$ 和 $b_n = \sup\limits_{k \ge n}$，证明 $\lim a_n = \lim b_n = c$，再用一下夹逼准则 $a_n \le x_n \le b_n$. $\square$

上下极限

Definition 2.21. 序列 (x_n) 的部分极限的最大值和最小值，称为 x_n 的上极限和下极限，各记为

$$\overline{\lim} x_n \text{ 及 } \underline{\lim} x_n.$$

函数极限

函数极限的定义

函数左右极限

两个重要极限

Proposition 3.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

证明. 几何证明的手法，或者直接上洛必达. □

Proposition 3.2.

$$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^x.$$

证明. 单调有界. □

函数极限的基本性质

Proposition 3.3. 若 $\lim_{x\to a} = A$，则对于充分接近 a 的 x 的函数值是有界的

$$|f(x)|\le M,\ |x-a|<\delta.$$

注意这里和 $\lim x_n = b$，而导致整个 (x_n) 有界是区别的，因为这里当 $x-a<-\delta$ 或者 $x-a>\delta$ 可能是有无限多个函数值的，它们是否有界是无法确定的.

函数极限运算

洛必达法则

Definition 3.4. 若 real-value 函数 f 和 g 都在去心邻域 $\tilde{U}(c,\delta)$ 可导，有

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ 或者 } \lim_{x\to c} g(x) = \infty,$$

且对任意 $x\in\tilde{U}$ 都有 $g'(x)\neq 0$，同时有 $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 首先来看一个比较特殊的情况，除满足上述条件之外，若还满足 $f(c)=g(c)=0$，并且 $g'(c)\neq 0$，那么

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

下面来严格证明分两种情况来证明，由于 $\tilde{U}$ 在 c 这里间断，后面需要频繁使用到柯西中值定理，所以自然地在 U 的两端来分析，取开区间 $\mathcal{I}$ 以 c 点为端点，且 $\mathcal{I}\subset\tilde{U}$. 注意到条件满足对任意的 $x\in\mathcal{I}$ 有 $g'(x)\neq 0$，并且 g 在 $\mathcal{I}$ 上是连续的，那么是可以在 $\mathcal{I}$ 里面找到一个足够小的区间使得 $g(x)\neq 0$，那这个小区间代替 $\mathcal{I}$.

我们定义 $m(x)=\inf\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ 和 $M(x)=\sup\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ 其中 $x\in\mathcal{I}$，α 取遍 x 和 c 之间的数 (为什么确保可以取到确界？任意 α 处 f 和 g 导数均有意义). 在确定 x 之后，我们再取定 x 和 c 之间一点 y，结合柯西中值定理可以保证在它们之间找到一个 c 使得

$$m(x)\leq\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}\leq M(x).$$

注意为什么这里可以保证 $g(x)-g(y)\neq 0$? 假设存在 $g(x)=g(y)$，那么根据罗尔定理，就存在一点 p 使得 $g'(p)=0$，这是和前提条件 $\forall x\in\bar{U}$，$g'(x)\neq 0$ 矛盾的.

情况一：$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$.

对任意的 $x\in\mathcal{I}$，取 y 位于 x 和 c 之间，为了得到 $\frac{f(x)}{g(x)}$，我们让

$$m(x)\leq\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}\leq M(x).$$

当 $y\to c$ 时，$\frac{f(y)}{g(x)}$ 和 $\frac{g(y)}{g(x)}$ 都趋向于 0，所以

$$m(x)\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq M(x).$$

情况二：$\lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$.

对任意的 $x\in\mathcal{I}$，取 y 位于 x 和 c 之间. 如果我们还是用上面的分式，直接尝试把 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 构造出来，尝试分式对 $y\to c$ 取极限的时候，显然是无法处理的. 同时你注意到在当前条件下是对 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 是没有特别说明的，言下之意它不会对我们的证明产生影响. 现在我们考虑把前面分式上下都除以 $g(y)$，同时上下取负，即

$$m(x)\leq\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}}\leq M(x).$$

那么当 $y\to c$ 时，$\frac{f(x)}{g(y)}$ 和 $\frac{g(x)}{g(y)}$ 都是趋于 0，那么此刻关键是我们如何需要考虑 $\lim\limits_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}$? 让 $S_x=\{y\mid$ y 位于 x 和 c 之间$\}$，我们取遍 $y\in S_x$，我们可以得到得到一个有界数列 $\{\frac{f(y)}{g(y)}\}$(为什么有界？f 和 g 在 $[x,c]$ 上连续)，我们考虑其上下极限

$$m(x)\leq\liminf_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}\leq\limsup_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}\leq M(x).$$

当对 $m(x)$ 和 $M(x)$ 也取极限 $x \to c$ 时，有

$$\lim_{x\to c} m(x) = \lim_{x\to c} M(x) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对情况一使用夹逼准则，可以很快得到 $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 对情况二也同样使用夹逼准则，可以得到

$$\lim_{y\to c} \inf \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to c} \sup \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

上下极限相等可以马上得到 $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 最终证毕. $\square$