考研高数

枫聆

2021 年 5 月 31 日

目录

经典证明

Definition 1.1. (连续函数在闭区间上有界) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在其上有界.

证明. (方法 1: $f(x)$ 非空子区间 $[a,x]$，求其上确界) 假设 B 是使得 $f(x)$ 在形如闭区间 $[a,x]$ 上有界的 $x\in[a,b]$ 集合，显然 $a\in B$，所以 B 非空。若 $e\in B$ 且 $e>a$，那么 a 和 e 之间的点都是在 B 里面的，所以实际上 B 是一个闭区间. 我们再考虑 B 的上确界，根据 x 的取法，有 $x\leq b$，如果我们能证明它的上确界在 b 出取得，那么整个命题就得证. 现在假设 $\sup(B)<b$, 由于 B 是一个闭区间，所以 $\sup(B)\in B$. 由于 f 是连续的，那么足够靠近 $\sup(B)$ 的地方，即 $s-\sup(B)<\delta$ 且 $s>\sup(B)$，有 $|f(s)-f(\sup(B))|<\varepsilon$，那么 $f(x)$, $x\in[\sup(B),s]$ 也是有界，这是和 $\sup B$ 是 B 的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的数列，其子列收敛造矛盾). □

Definition 1.2. (确界原理) 任一有上界的非空实数集必有上确界，同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. 构造一个实数划分，用戴德金分割定理说明界数就是确界假设非空实数集 S 有上界 M，取 S 所有上界为集合 B. 因为 $M\in B$ 所以 B 非空，取 $A=\mathbb{R}\setminus B$，要证明 A 是非空是 trivial 的，取 $x=x_0-1$, $x_0\in S$，那么 $x\in A$. 显然地 A 里面所有的元素都小于 B 里面的元素（若是大于 B 里面某个元素，那么它就是 S 的一个上界了，这是矛盾的），这样我们就可以得到一个实数上的划分，根据戴德金实数分割定理，存在一个 β，它要么是 A 里面最大值或者要么 B 里面的最小值. 假设它是 A 里面的最大值，根据 A 的定义，对于任意 $a\in A$ 都存在一个 $x_0\in S$ 使得 $a<x_0$，将其作用到 β 上，我们得到某个 $x_0'\in S$ 使得 $\beta<x_0'$. 我们考虑 $\frac{x_0'+\beta}{2}$，有

$$\beta<\frac{x_0'+\beta}{2}<x_0'$$

所以 $\frac{x_0'+\beta}{2}\in A$，这和 β 是 A 里面最大值是矛盾的，所以 $\beta\in B$，即这个 β 就是 S 的上确界. □

Definition 1.3. (极值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，那们存在 $c,d\in[a,b]$ 使得

$$f(c)\leq f(x)\leq f(d),\ x\in[a,b].$$

证明. (构造一个特殊连续函数说明原函数可以取到确界)f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 (连续闭有界)，那么马上可以得到 f 在 $[a,b]$ 上有界. 取集合 $Y=\{\,f(x)\mid x\in[a,b]\,\}$，即 Y 有界，根据确界原理Y 有确界，那么我们下面证明思路，就是看 $f(x)$ 是不是能取到这个确界. 取其上确界为 m，假设不存在 $d\in[a,b]$ 使得 $f(d)=m$，那么我们考虑函数 $g(x)=\frac{1}{m-f(x)}$，由于 $m>f(x)$, $x\in[a,b]$，所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，又因为 f 在 $[a,b]$ 是上有界的，那么 g 在其上也是有界的. 由于 m 是上确界，所以对任意的正实数 ε，都有 $m-f(x)\leq\varepsilon$，那么 $g(x)\geq\frac{1}{\varepsilon}$，这说明 $g(x)$ 是发散的，造成了矛盾. 所以 f 是可以取到上确界的. □

Definition 1.4. (罗尔定理)如果 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 内可导，若有 $f(a)=f(b)$，那么存在至少一个 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=0.$$

证明. (导数存在的充分必要条件)f 在 $[a,b]$ 上连续，那么根据极值定理其在 $[a,b]$ 是可以取到极值的，分两种情况讨论: (1 如果其最大值和最小值同时在 a,b 取得，那么 f 就是常函数，对任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $f'(x)=0$. (2 不失一般性，我们假设 f 在一点 $c\in(a,b)$ 处 $f(c)$ 为最大值 (若是最小值，考虑 $-f$ 即可)，我们来考虑 c 的一个邻域 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 两边，其中 $c-\varepsilon$ 和 $c+\varepsilon$ 均在 $[a,b]$ 里面. 对任意的 $h\in(c-\varepsilon,c)$ 都有

$$f'(c^-)=\lim_{h\to c^-}\frac{f(c)-f(h)}{c-h}\le 0.$$

同理对任意的 $t\in(c,c+\varepsilon)$ 都有

$$f'(c^+)=\lim_{t\to c^+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\ge 0.$$

由于 f 在 c 点可导，那么 $f'(c)=f'(c^-)=f'(c^+)=0$. □

Definition 1.5. (中值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续，且在 (a,b) 上可导，那么存在一个实数 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明. (中值定理是罗尔定理的推广) 构造函数 $g(x)=f(x)-rx$，通过选择合适的 r，使得 $g(a)=g(b)$，即

$$\begin{aligned} g(a)=g(b) \quad &\Leftrightarrow f(a)-ra=f(b)-rb \\ &\Leftrightarrow r=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

那么根据罗尔定理，我们知道存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $g'(c)=0$，

$$\begin{aligned} g'(x)&=f'(x)-r \\ g'(c)&=f'(c)-r=0 \\ f'(c)&=r=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

证毕. □

Definition 1.6. (柯西中值定理) 若两个 real-valued 函数 f 和 g 都在闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续，且都在 (a,b) 上可导. 那么存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

特别地，若 $g(b)\neq g(a)$ 且 $g'(c)\neq 0$，等价于

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证明. (柯西中值定理是中值定理的扩展) 构造函数 $h(x)=f(x)-rg(x)$，选择合适 r 使得 $h(a)=h(b)$，若 $g(b)\neq g(a)$ 即 $r=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，那么根据罗尔定理可以得到 $h'(c)=0$, 即

$$0=g'(c)-rf'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

若 $g(a)=g(b)$，同样根据罗尔定理有 $g'(c)=0$，这个条件显然是使得前面第一个等式成立的. □

Definition 1.7. (夹逼准则) 若函数 f, g, h 均在以点 a 为聚点的区间 I 上定义着, 且对任意的 $x \in I$, 其中 $x \neq a$ 都有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

并且同时满足

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

那么 $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

证明. 经典两边夹取任意的正实数 $\varepsilon > 0$, 根据极限地定义对 $g(x)$ 和 $h(x)$ 我们可以分别找到 $|x| < \delta_1$ 和 $|x| < \delta_2$, 使得

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \text{ 和 } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

成立，我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，那么当 $|x| < \delta$ 时有

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，所以有 $\lim_{x \to a} f(x) = L$. □

数列极限

上下极限

函数极限

洛必达法则

Definition 3.1. 若 real-value 函数 f 和 g 在去心邻域 $\tilde{U}(c,\delta)$ 可导，有

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ 或者 } \lim_{x\to c} g(x) = \infty,$$

且对任意 $x \in \tilde{U}$ 都有 $g'(x) \neq 0$，同时有 $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 首先来看一个比较特殊的情况，除满足上述条件之外，若还满足 $f(c) = g(c) = 0$，并且 $g'(c) \neq 0$，那么

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

下面来严格证明分两种情况来证明，由于 $\tilde{U}$ 在 c 这里间断，后面需要频繁使用到柯西中值定理，所以自然地在 U 的两端来分析，取开区间 $\mathcal{I}$ 以 c 点为端点，且 $\mathcal{I} \subset \tilde{U}$. 注意到条件满足对任意的 $x \in \mathcal{I}$ 有 $g'(x) \neq 0$，并且 g 在 $\mathcal{I}$ 上是连续的，那么是可以在 $\mathcal{I}$ 里面找到一个足够小的区间使得 $g(x) \neq 0$，那这个小区间代替 $\mathcal{I}$.

我们定义 $m(x) = \inf \frac{f'(c)}{g'(c)}$ 和 $M(x) = \sup \frac{f'(c)}{g'(c)}$ 其中 c 取遍 x 和 c 之间的数. 我们再取定 x 和 c 之间一点 y，结合柯西中值定理可以保证在它们之间找到一个 c 使得

$$m(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq M(x).$$

注意为什么这里可以保证 $g(x) - g(y) \neq 0$? 假设存在 $g(x) = g(y)$, 那么根据罗尔定理，就存在一点 p 使得 $g'(p) = 0$，这是个前提条件 $g(x) \neq 0$ 矛盾的.

情况一：$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$.

对任意的 $x \in \mathcal{I}$, 取 y 位于 x 和 c 之间，为了得到 $\frac{f(x)}{g(x)}$，我们让

$$m(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} \leq M(x).$$

当 $y \to c$ 时，$\frac{f(y)}{g(x)}$ 和 $\frac{g(y)}{g(x)}$ 都趋向于 0，所以

$$m(x) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M(x).$$

情况二：$\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$. 对任意的 $x\in\mathcal{I}$, 取 y 位于 x 和 c 之间. 如果我们还是用上面的分式，直接尝试把 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 构造出来，整体这个分式对 $y\to c$，显然是无法处理的. 同时你注意到在当前条件下是对 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 是没有特别说明的，言下之意它不会对我们的证明产生影响. 现在我们考虑把前面分式上下都除以 $g(y)$，同时上下同时取负，即

$$m(x)\leq \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}}\leq M(x).$$

那么当 $y\to c$ 时，$\frac{f(x)}{g(y)}$ 和 $\frac{g(x)}{g(y)}$ 都是趋于 0，那么此刻关键是我们如何需要考虑 $\lim\limits_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}$? 让 $S_x=\{y\mid$ y 位于 x 和 c 之间$\}$, 我们取遍 $y\in S_x$, 我们可以得到得到一个有界数列 $\{\frac{f(y)}{g(y)}\}$，我们考虑其上下极限

$$m(x)\leq \liminf_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}\leq \limsup_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}\leq M(x).$$

当对 $m(x)$ 和 $M(x)$ 也取极限 $x\to c$ 时，有

$$\lim_{x\to c} m(x)=\lim_{x\to c} M(x)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对情况一使用夹逼准则，可以很快得到 $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. 对情况二也同样使用夹逼准则，可以得到

$$\liminf_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}=\limsup_{y\to c}\frac{f(y)}{g(y)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

上下极限相等可以马上得到 $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. 最终证毕. $\square$