

# 考研概率论

枫聆

2021 年 6 月 2 日

## 目录

<b>1</b>	<b>随机事件和概率</b>	<b>2</b>
1.1	基本定义 . . . . .	2
1.2	基本性质和运算法则 . . . . .	4
1.3	更深的思考和技巧 . . . . .	7

# 随机事件和概率

## 基本定义

**Definition 1.1.** 对随机现象进行观察或者实验被称为**随机试验**当且仅当满足以下条件

1. 可以在相同的条件下**重复实验**;
2. 所得的可能结果不止一个, 且所有可能结果都能**事前已知**;
3. 每次具体实验之前**无法预知**出现的结果.

**Definition 1.2.** **随机试验**的每一可能的结果为被称为**样本点**, 所有**样本点**构成的集合被称为**样本空间**.

**Definition 1.3.** **样本空间**的任一子集被称为**随机事件**. 其中每个单点集被称为**基本事件**. 事件  $\Omega$  被称为**必然事件**当且仅当每次试验必有  $\Omega$  中某一样本点发生. 特别地, 把空集  $\emptyset$  称为**不可能事件**.

**Definition 1.4.** 若事件  $A$  的发生**必然导致**事件  $B$  发生, 则称事件  $B$  包含事件  $A$ , 记为  $B \supset A$ . 若  $A \supset B$  和  $A \subset B$  同时成立, 则称事件  $A$  和事件  $B$  相等, 记为  $A = B$ .

**Definition 1.5.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 它们的交记为  $A \cap B$  或者  $AB$ , 表示其所有的公共样本点构成的事件. 这样事件的发生, 将导致**事件  $A$  和  $B$  同时发生**. 它们的并记为  $A \cup B$ , 表示它们所有样本点放在一起构成的事件, 这样的事件发生将导致**至少事件  $A$  和  $B$  其中一个发生**.

**Definition 1.6.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 若它们的交  $AB = \emptyset$ , 则称事件  $A$  和  $B$ **互斥**或者**互不相容**. 若它们的并  $A \cup B = \Omega$ , 且  $AB = \emptyset$ , 则称事件  $A$  和  $B$  为**对立事件**或者**互逆事件**, 记为  $\bar{A} = B$  或者  $\bar{B} = A$ .

**Definition 1.7.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 它们的差记为  $A - B$ , 表示事件  $A$  有而  $B$  没有的样本点, 通俗地来讲表示事件  $A$  发生而  $B$  不发生的样本点组成的新事件.

**Definition 1.8.** 设试验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ , real-valued 函数  $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  被为一个概率函数, 其中  $\mathcal{A}$  被称为**输入空间**或者**事件空间**, 即样本空间的**幂集**. 当其满足如下条件 (Kolmogorov axioms) 时

1. 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有  $P(A) \geq 0$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3. 对于一个两两不相交的事件可数序列  $A_1, A_2, \dots$ , 有  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  成立.

则成  $P$  是试验  $E$  的一个**概率分布**. 这个 real-value  $P$  其实看做一个代数形式, 其需要满足 3 个公理.

**Definition 1.9.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 且  $P(A) > 0$ , 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

为在事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的条件概率.

**Definition 1.10.** 若事件  $A, B$  满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称  $A$  与  $B$  相互独立. 从条件概率看两个事件的独立性, 也就是其中一个发生的概率是不会影响另一个发生的概率. 推广至  $n$  个事件  $A_1, \dots, A_n$  相互独立, 需要  $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$  等式成立, 即设任意的  $1 < k \leq n$ , 对任意  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$  满足等式

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

**Definition 1.11.** 当试验的样本空间由  $n$  个有限样本点构成, 且每个样本点的发生具有相同的可能性, 即若事件  $A$  由  $n_A$  个样本点组成, 则事件  $A$  对应的概率为

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

称这样的有限等可能试验中事件  $A$  的概率  $P(A)$  为古典型概率.

**Definition 1.12.** 当试验的样本空间是某区域 (该区域可以是一维, 二维或者三维等等), 以  $L(\Omega)$  表示其几何度量,  $L(\Omega)$  有限, 且试验结果出现在  $\Omega$  中任何区域的可能性只与该区域几何度量成正比, 事件  $A$  的样本点所表示的区域为  $\Omega_A$ , 则事件  $A$  的概率为

$$P(A) = \frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}.$$

称这种样本点个数无限但是其几何度量上的等可能试验中事件  $A$  的概率  $P(A)$  为几何型概率.

**Definition 1.13.** 把一随机试验独立重复做若干次, 即同一事件在各次试验中出现的概率相同. 这个过程称为独立重复试验.

**Definition 1.14.** 如果每次试验只有两个结果  $A$  和  $\bar{A}$ , 则称这种试验为伯努利试验, 将伯努利试验独立重复进行  $n$  次, 称为  $n$  重伯努利试验. 设在每次试验中, 概率  $P(A) = p$  ( $0 < p < 1$ ), 则在  $n$  重伯努利试验中事件  $A$  发生  $k$  次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

其又称为二项概率公式.

## 基本性质和运算法则

### Proposition 1.15. 事件相关的运算法则

1. 交换律  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ .
2. 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
3. 分配律  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
4. 对偶律  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ ;  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

### Proposition 1.16. 概率分布相关性质

1.  $P(\emptyset) = 0$ ;
2.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
3.  $A \subset B$ , 则  $P(A) \leq P(B)$ ;
4.  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;

证明. (2) 因为  $P(\Omega) = P(A \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ .

(1) 可以马上通过 (2) 直接得到.

(3)  $P$  满足单调性, 可以根据 Kolmogorov axioms(3) 很自然地可以得到.

(4)  $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ .

□

### Proposition 1.17. 五大概率公式

#### 1. 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

#### 2. 减法公式

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

#### 3. 乘法公式 当 $P(A) > 0$ 时,

$$P(AB) = P(A)P(B|A);$$

当  $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$  时,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

4. **全概率公式** 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ,  $B_i B_j = \emptyset$  且  $P(B_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 则对任意事件有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i).$$

其中称满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ,  $B_i B_j = \emptyset$  的  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为一个**完备事件组**. 通常把  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$  叫做**先验概率**. 全概率公式的意义在于可以将复杂的事件  $A$  划分为简单互斥事件  $AB_1, AB_2, \dots, AB_n$ , 再结乘法公式计算出  $A$  的概率.

5. **贝叶斯公式** 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ,  $B_i B_j = \emptyset$  且  $P(A) > 0, P(B_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}, j = 1, 2, \dots, n.$$

贝叶斯公式的意义在于在事件  $A$  已经发生的条件下, 贝叶斯公式可以用来寻找导致  $A$  发生各种“原因”  $B_i$  的概率. 其中  $P(B_j|A)$  被称为**后验概率**.

证明. (2)  $P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A - B)$ .

(1)  $P(A \cup B) = P((A - AB) \cup (B - AB) \cup AB)$ , 再根据 (2) 有

$$\begin{aligned} P((A - AB) \cup (B - AB) \cup AB) &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

实际上这里还是要分类讨论一下当  $A = B$  的时候.

(3) 条件概率的另一种写法.

(4)  $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^n AB_i) = \sum_{i=1}^n P(AB_i)$ , 再用 (3) 替换一下即可.

(5)  $P(B_j|A) = \frac{P(B_j A)}{P(A)}$ , 用 (3) 和 (4) 分别替换分子和分母即可. □

下面都是一些高中学过的排列组合的性质.

**Definition 1.18. 加法原理** 若完成一件事, 有  $n$  类方式, 第一类方式有  $m_1$  种解决方法, 第二类方式有  $m_2$  种解决方法, 如此定义下去即第  $i$  类方法有  $m_i$  种解决方法. 那么完成这件事就一共有  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  种不同的方法.

**Definition 1.19. 乘法原理** 若完成一件事分成  $n$  个步骤, 其中第  $i$  步有  $m_i$  种不同的方法, 必须依次完成每一步之后才能进行下一步, 那么完成这件事就一共有  $m_1 m_2 \dots m_n$ .

**Definition 1.20. 排列数公式** 从  $n$  个元素中取  $m$  个元素出来进行排列, 则不同排列的总数为

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1).$$

特别地, 若  $m = n$  时,  $P_n^n = n!$  其被称为**全排列**; 若有放回的取, 则不同的排列总数为  $n^n$ ;

**Definition 1.21. 组合数公式** 从  $n$  个元素中取  $m$  个元素组成一组, 即不管其顺序, 则不同的组合总数为

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{P_n^m}{m!}.$$

**Proposition 1.22.** 如果把  $n$  个不同的元素分成  $k$  组 ( $1 \leq k \leq n$ ), 使得第  $i$  组有  $n_i$  个元素, 那么  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , 组内不考虑元素的排列, 那么不同的分法总数有

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}.$$

证明. 实际上就是

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!((n-n_1)-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!((n-n_1-\cdots-n_{k-1})-n_k)!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.23. 常用的组合数公式**

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$$

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i C_m^{k-i}$$

证明. (1) 比较 trivial.

(2) 用自然语言来解释, 就是说我在  $n+1$  个元素里面取  $k$  等价于我先考虑在  $n$  个元素里面取  $k$ , 然后现在又来了一个新的元素  $e$ , 考虑多出的取法显然要包括这个  $e$ , 那么现在我只要再去原来  $n$  个元素里面取  $k-1$  就够了, 这就是第二个等式的含义. 代数证明就略过了...

(3) 直接考虑  $(1+1)^n$  的展开式就够了.

(4) 实际上也比较 trivial, 即考虑  $k$  分别在  $m$  个元素和  $n$  元素里面取.

□

## 更深的思考和技巧

**Annotation 1.24.** 零概率事件  $P(A) = 0$  与不可能事件  $A = \emptyset$  不是一个概念.

**Annotation 1.25.** 如何理解事件之间独立性 事件  $A$  和  $B$  独立, 则下面等式成立

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

你可能总想深究其更本质的含义, 可能你会联想到当事件  $A$  和  $B$  独立时, 那么  $A$  和  $B$  之间有什么关系呢? 实际上并不能确定  $A$  和  $B$  有什么特别地确切的关系, 所以你把上述等价理解为在描述一个代数结构就好了, 从这个代数结构可以引发一些有趣的性质 i.e. 例如化简某些运算条件概率, 所以就特别地把这个代数结构提出来了. 但是当  $P(A) > 0, P(B) > 0$  时, 有这样一种关系: 互斥不独立, 独立不互斥, 证明也是很显然的.

**Annotation 1.26.** 当  $P(A) = 0$  时, 如何计算  $P(AB)$ ? 条件概率的定义中特别指明了  $P(A) > 0$ , 那么  $P(A)$  等于 0 时候, 条件概率  $P(B|A)$  是未定义的. 那么此时如果我们要计算  $P(AB)$  应该怎么办呢? 肯定不能使用乘法公式了. 我们可以利用  $P$  的单调性, 因为  $AB \subseteq A$ , 所以  $P(AB) \leq P(A)$ , 所以  $P(AB) = 0$ .

**Annotation 1.27.** 取部分对立事件不影响独立性 若  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 有下面等式成立

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$$

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

我们来证明第一个等式

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ &= (1 - P(\bar{A}))(1 - P(\bar{B})) \\ &= 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\bar{A})P(\bar{B}) \\ P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

其余的等式应用类似的手法来证明. 由此在  $A$  和  $B$  相互独立的情况下, 延伸出来一些有用的等式

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \\ P(A - B) &= P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

这些等式也可以推广为  $n$  个事件相互独立.