考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 22 日

目录

行列式

定义

Annotation 1.1. 这类题特征

1. 按照行列式的完全展开式来计算某种特殊的矩阵
2. 给定某个具体的行列式值的基础上，通过行列式的性质来计算行列式.

Example 1.2. 证明: 如果在 n 阶行列式中，第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行分别与第 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 列交叉位置的元素都是 0，并且 $k + l > n$，那么这个行列式的值等于 0.

证明. 按照行列式的完全展开式，每一项都必须要包含第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行中位于不用列的元素，则有 k 个元素. 由已知的条件，第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行只与 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 之外的 $n - l$ 元素可能不为零，但是 $k > n - l$，说明每一项必取到 0，因此行列式为 0. □

Example 1.3. 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + a_1 & c_1 + b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + a_2 & c_2 + b_2 \\ a_3 + c_3 & b_3 + a_3 & c_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Example 1.4. 行列式最大值 求元素为 1 和 0 的三阶行列式可取的最大值.

hints 从完全展开式我们应使得带正号的项尽可能的都是 1，而带负号项尽可能是 0

1. 若 3 个正项都是 1，那么此时行列式等于 0;
2. 若 2 个正项是 1，此时任取一个 2 个项是正的行列式其行列式均等于 2，且其他负项也都是 0，例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

综上最大值肯定就是 2.

Example 1.5. 设 $n \geq 2$，证明：如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素为 1 或者 -1，则 $|A|$ 闭为偶数.

hints 这个证明按行展开可能更简单

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

其中三个代数余子式都是二阶行列式的正值或者负值，那么我们来看一下元素为 1 或者 -1 的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b21$$

这里一共有 4 种可能的取值，由 $b_{11}b_{22} = \pm 1, b_{12}b21 = \ \pm 1$ 决定，经过计算该二阶行列式取值可能为 $0, 2$，因此 $|A|$ 是由 3 个偶数相加得到的，那么 $|A|$ 也一定是偶数.

Example 1.6. 求元素为 1 或者 -1 的三阶行列式的最大值.

hints 从完全展开式出发，三阶行列式有 6 项，其中每一项只可能为 -1 和 1. 再有前面证明，我们知道这样的三阶行列式的值只能是偶数，那么最大的偶数就是 6 项全为 1 加起来为 6，即

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} = 1, a_{12}a_{23}a_{31} = 1, a_{13}a_{21}a_{32} = 1 \\ &-a_{13}a_{22}a_{31} = 1, -a_{12}a_{21}a_{33} = 1, -a_{11}a_{23}a_{32} = 1 \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33}a_{12}a_{23}a_{31}a_{13}a_{21}a_{32} &= 1 \\ a_{13}a_{22}a_{31}a_{12}a_{21}a_{33}a_{11}a_{23}a_{32} &= -1 \end{aligned}$$

这是矛盾的. 因此我们再考虑行列式最大值为 4 的可能，可以找到

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 4$$

那么这样的行列式的最大值为 4.

Example 1.7. 设 $n \leq 3$，证明：元素为 1 或者 -1 的 n 阶行列式的绝对值不超过 $(n-1)!(n-1)$.

hints 借助前面的例子做归纳.

Example 1.8. 设 $n \geq 2$，证明：元素为 1 或 -1 的 n 阶行列式的值能被 2^{n-1} 整除.

hints 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是这样的行列式，首先将第一列上的 (-1) 所在行都提一个 -1 出来

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 1 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 c_{ij} 值可能为 $2, -2, 0$，因此从第 2 列到第 n 列都是可以提一个因子 2 出来，最终就可以凑成 2^{n-1}.

化行阶梯形

Annotation 1.9. 不是特殊矩阵的第一选择.

按一行展开

Annotation 1.10. 若是可以将某一行或者某一列消去，只留下一个非零元素，按行和按列展开是不错的选择.

Example 1.11. 计算

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

hints可以考虑把所有列都加到第一列，再按第一列展开

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \frac{(1+n)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{(1+n)n}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

同样上述矩阵也是所有列加到第一列，最终有 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$.

按多行展开

Annotation 1.12. 好像没有直接使用拉普拉斯定理的习惯，比较特殊的分块矩阵可以考虑.

特殊矩阵

Annotation 1.13. 常见的特殊矩阵`https://www.bilibili.com/read/cv266516`

1. 范德蒙德行列式

2. 爪型行列式

数学归纳法

Annotation 1.14. 通常证明手法也是按行或者列展开.

Example 1.15. 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

证明. 当 $n=2$ 时，有

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_0$$

假设对于上述形式的 $n-1$ 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-2} \end{vmatrix} = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

那么 n 阶行列式，把它按第一行展开，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_n &= x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1) + (-1)^{1+n} a_0 (-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

□

递推式

Example 1.16. 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

hints 显然 $\boldsymbol{D}_1 = 2$. 将 $\boldsymbol{D}_n$ 按第一列展开，则有

$$\boldsymbol{D}_n = 2\boldsymbol{D}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{D}_{n-1} - \boldsymbol{D}_{n-2}$$

这也意味着 $\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}_{n-1} = \boldsymbol{D}_{n-1} - \boldsymbol{D}_{n-2}$，可以马上推出 $\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}_{n-1} = \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1 = 1$，即该行列式是一个等差数列 $D_n = 2 + (n-1) = n+1$.

Example 1.17. 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

其中 $a \neq b$.

hints 还是按第一列展开

$$\boldsymbol{D}_n = (a+b)\boldsymbol{D}_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\boldsymbol{D}_{n-1} - ab\boldsymbol{D}_{n-2}.$$

注意其上最后一个等式成立的条件是 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$，那么推出

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = b(\boldsymbol{D}_{n-1} - a\boldsymbol{D}_{n-2}) \Rightarrow \boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = (\boldsymbol{D}_2 - a\boldsymbol{D}_1)b^{n-2} \\
\boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = a(\boldsymbol{D}_{n-1} - b\boldsymbol{D}_{n-2}) \Rightarrow \boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = (\boldsymbol{D}_2 - b\boldsymbol{D}_1)a^{n-2}
\end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{D}_1 = a + b$，$\boldsymbol{D}_2 = a^2 + ab + b^2$. 因此

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = b^n \\
\boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = a^n
\end{aligned}$$

所以 $D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$.

当 $a = 0$ 时，$\boldsymbol{D}_n = b^n$; 当 $b = 0$ 时，$\boldsymbol{D}_n = a^n$.

Laplace 展开

Example 1.18. 计算下述 $2n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_{2n} = \begin{vmatrix}
a & & & & & b \\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a & b & & \\
& & b & a & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
b & & & & & a
\end{vmatrix}$$

hints 尝试从第一行和最后一行展开，于是得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{2n} &= \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \cdot \boldsymbol{D}_{2n-2} \\
&= (a^2 - b^2)\boldsymbol{D}_{2n-2}
\end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{D}_2 = a^2 - b^2$，因此 $\boldsymbol{D}_{2n} = (a^2 - b^2)^n$

向量空间

向量运算下的线性性质判定

Example 2.1. 证明: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么向量组 $3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, 5\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 - 7\boldsymbol{\alpha}_1$ hints 直接用线性无关的定义，即

$$k_1(3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(5\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(4\boldsymbol{\alpha}_3 - 7\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}$$

此时需要证明 $k_1 = k_2 = k_3$，展开上式

$$(3k_1 - 7k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (5k_2 - k_1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (2k_2 + 4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = 0.$$

根据已知条件，于是得到下述方程组

$$\begin{cases} 3k_1 - 7k_3 = 0 \\ 5k_2 - k_1 = 0 \\ 2k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

由此构造系数矩阵，最后系数矩阵的行列式不为零，即原方程只有零解，命题得证.

秩

特殊矩阵的秩

Example 3.1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n. 这样的矩阵称为主对角占优矩阵.

hints 设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，那么只需证明 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都是线性无关的. 假设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是线性相关的，则存在

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0. 取

$$|k_l| = \max\{|k_1|, |k_2|, \cdots, |k_n|\}.$$

然后我们列向量的第 l 个分量有

$$k_1 a_{l1} + k_1 a_{l2} + \cdots + k_n a_{ln} = 0,$$

等式两边除以 k_l，得到

$$a_{ll}=-\frac{k_1}{k_l}a_{l1}-\frac{k_2}{k_l}a_{l2}-\cdots-\frac{k_n}{k_l}a_{ln}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}\frac{k_j}{k_l}|a_{lj}|.$$

因此有

$$|a_{ll}|\leq\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}|a_{lj}|,$$

与前提条件矛盾. 从而 $\boldsymbol{A}$ 等于 n.

方程组的解

方程组性质

Example 4.1. 证明: 给定 s 个 n 线性方程组成的线性方程组，如果该方程组的增广矩阵的第 i 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由其余行向量线性表出，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

那么将第 i 个方程去掉之后得到的方程组与原方程组通解.

Example 4.2. 设一个 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$. 证明: H 的任意 s 列都线性无关当且仅当，齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$$

的任一非零解的非零分量的数目大于 s.

hints *必要性* 若 H 的任意 s 列都线性无关. 假设上述线性方程存在一个非零解为

$$\eta = (0, \cdots, c_{i_1}, \cdots, c_{i_j}, \cdots)^T.$$

其中 $c_{i_1}, \cdots, c_{i_j}$ 均不为零，且 $l \leq s$. 则

$$c_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + \cdots + c_{i_j}\boldsymbol{\alpha}_{i_j} = \mathbf{0},$$

这意味着存在 l 列线性相关，与前提数矛盾，因此任一非零解的非零分量的数目大于 s

充分性 若 H 的任一非零向量的非零分量的数目大于 s. 假设有 $l \leq s$ 个列向量线性相关

$$k_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + \cdots + k_{i_j}\boldsymbol{\alpha}_{i_j} = \mathbf{0},$$

那么存在一个非零解，即

$$\eta = (0, \cdots, k_{i_1}, \cdots, k_{i_j}, \cdots)^T.$$

就是将其他分量扩充为 0 即可，这样和前提是矛盾的. 因此 H 的任意 s 列都线性无关.

给定方程组解的情况

带参数的方程组解的情况

矩阵相似

相似判定

Proposition 5.1. 常用判定矩阵相似的方法，遇题依次向下使用下述方法.

1. 必要条件: 相似必行列值相等;
2. 必要条件: 特征值相等;
3. 充分条件: 对于都可对角化的矩阵，判定其特征值是否相同;
4. 否命题的充分条件: 一个可对角化，一个不可对角化，则它们不相似;
5. 对于都不可对角的矩阵，同一个特征值的特征子空间的维数相同;
6. 对于都不可对角的矩阵，则对应的特征向量满足: 若 $\boldsymbol{B}$ 对应 λ 的特征向量 λ，则 $\boldsymbol{A}$ 对应 λ 的特征向量为 $P\alpha$. 这里需要求出可逆矩阵 P

对角化判定

Proposition 5.2. 常用判定对角化的方法，遇题依次向下使用下述方法

1. 实对称矩阵一定相似于对角矩阵;
2. 有 n 个不同的特征值，那么一定相似于对角矩阵;
3. n 重特征值对应特征子空间是否为 n 维;

二次型

正定性的判定