考研高数习题集

枫聆

2021 年 6 月 24 日

目录

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim\alpha(x)=1,\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$，其中 A 是一个常数，则

$$\lim\left[1+\alpha(x)\right]^{\beta(x)}=e^A.$$

hints 带指数形式的表达式，第一想法是把指数拿下来

$$\lim\left[1+\alpha(x)\right]^{\beta(x)}=\lim e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}=\lim e^{\beta(x)\alpha(x)}=e^A.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\left(\frac{x}{x-a}\right)^x+\left(\frac{x}{x+b}\right)^x=\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x+\left(1-\frac{b}{x+b}\right)^x=e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n.$$

hints 往 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)^n$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{3}\cdot n=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}}\right)$$

夹逼准则应用

Example 1.4. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq s\leq\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

hints

$$x-1\leq[x]\leq x$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1}\right)\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.7. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

hints 直接考察

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分，即对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到一个 n_1，使得 $n>n_1$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_{n_1}-A)}{n}+\tfrac{(a_{n_1+1}-A)+(a_{n_1+2}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|\\ \le&\ \tfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{n_1}-A|}{n}+\tfrac{|a_{n_1+2}-A|+|a_{n_1+1}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\end{aligned}$$

上述不等式右边第一项，形如 $\frac{C}{n}$，因为先对任意 $n>n_1$ 都有上述不等式成立，那么只需要让 n 取的大一点，就能使得 $\frac{C}{n}<\varepsilon$(阿基米德公理). 右边第二项显然小于 $\frac{n-n_1}{n}\varepsilon$，于是综上

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|<\varepsilon+\frac{n-n_1}{n}\varepsilon<2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值，我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来，然后用初等方法来验证，再根据极限的唯一性，就得到了答案. 把 a_n 换成形式，例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Example 1.8. 求极限

$$x_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots}=\frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握，用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k}\frac{k}{n}=\int_0^1 x^k=\frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=n^{k+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\sim_\infty n^{k+1}\int_0^1 x^k dx=\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.9. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性，所以 $\lim \ln a_n = \ln a$，再根据*1.7*.

Example 1.10. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据*1.9*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{lna} = a.$$

Example 1.11. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 *1.10* 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 *(*假设 a_n 的极限存在*)*. 那么有一个推论，对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$，只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可，那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)=x^k\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

那么

$$x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$，这个 $\mathcal{O}$ 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法，即下面的恒等式

$$y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\cdots+z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y=\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z=x$，那么原式就变成了

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)-x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}}\\
&= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-2}x+\cdots+1} \qquad \text{上下除以 } x^{k-1}
\end{aligned}$$

分母中 $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$ 是趋于 1 的，再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性，取其函数值也是等于 1，所以分母就有 $k\cdot 1$.

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\frac{\ln n}{n}}=1.$$

也可以使用一下*2.1*的伯努利不等式来证明，这里设 $\sqrt[n]{n}=1+h$，那么

$$\begin{aligned}
& n=(1+h)^n=1+nh+\tfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\\
\Rightarrow\ & n\ge\tfrac{n(n-1)}{2}h^2\\
\Rightarrow\ & h^2\le\tfrac{2}{n-1}.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，$h\to 0$，即 $\sqrt[n]{n}-1\to 0$，所以 $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

换元取极限

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x},\ m\in\mathbb{N}.$$

hints 设 $y=\sqrt[m]{x+1}-1$，显然 y 在 $x=0$ 处连续，所以当 $x\to 0$ 时有 $y\to 0$，那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{(y+1)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式，分母二项式展开.

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{n}{m}}-1}{x}.$$

hints 还是使得 $y=(x+1)^{\frac{1}{m}}-1$，那么就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}\frac{y}{(1+y)m-1}=\frac{n}{m}.$$

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 2.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n},\ a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1+x)^n \leq 1 + nx,\ n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1+x) = a^{\frac{1}{n}}$，即可得到上式.