考研概率论

枫聆

2021 年 9 月 27 日

目录

1 概率运算 **2**

1.1 贝叶斯的应用 2

2 期望和方差 **3**

2.1 复杂随机变量函数 3

概率运算

贝叶斯的应用

Example 1.1. 假设有两箱同种零件: 第一箱内装有 50 件，其中 10 件一等品; 第二箱内装有 30 件，其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑选一箱，然后从箱中随机取两个零件，试求在第一次取出的零件是一等品的条件下，第二次取出一等品的概率.

hints 设事件 A 为选择第一个箱子，事件 B_1 为第一次取出一等品，事件 B_2 为第二次取出一等品. 这里要求的是一个条件概率 $P(B_2|B_1)$，首先我们用贝叶斯公式分别计算 $P(A|B_1)$ 和 $P(\bar{A}|B_1)$，即

$$P(A|B_1) = \frac{P(A)P(B_1|A)}{P(A)P(B_1|A) + P(\bar{A})P(B_1|\bar{A})} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{10}{50} + \frac{18}{30}} = \frac{1}{4},$$

因此 $P(\bar{A}|B_1) = \frac{3}{4}$. 于是

$$P(B_2|B_1) = P(B_2|AB_1)P(A|B_1) + P(B_2|\bar{A}B_1)P(\bar{A}|B_1) = \frac{9}{49} \times \frac{1}{4} + \frac{17}{29} \times \frac{3}{4}$$

期望和方差

复杂随机变量函数

Example 2.1. 相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 均服从正态分布 $N(0, \frac{1}{2})$，求 $D(|X_1 - X_2|)$.

hints 这里求期望不需要计算出 $|X_1 - X_2|$ 的概率分布，只需要确定 $X_1 - X_2$ 概率分布即可，设 $Z = X_1 - X_2$，那么显然有 $Z \sim N(0, 1)$. 首先求 $E(|X_1 - X_2|)$

$$E(|X_1 - X_2|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f_z(z) dz = 2 \int_0^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

再来求 $D(|X_1 - X_2|)$

$$D(|X_1 - X_2|) = D(|Z|) = E(Z^2) - E^2(|Z|) = 1 - \frac{2}{\pi}.$$