

# 考研高数

枫聆

2021 年 5 月 29 日

## 目录

<b>1</b>	<b>经典证明</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>数列极限</b>	<b>5</b>
2.1	上下极限 . . . . .	5
<b>3</b>	<b>函数极限</b>	<b>6</b>
3.1	洛必达法则 . . . . .	6

## 经典证明

**Definition 1.1. (连续函数在闭区间上有界)** 若 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么它在其上有界.

证明. (方法 1:  $f(x)$  非空子区间  $[a, x]$ , 求其上确界) 假设  $B$  是使得  $f(x)$  在形如闭区间  $[a, x]$  上有界的  $x \in [a, b]$  集合, 显然  $a \in B$ , 所以  $B$  非空. 若  $e \in B$  且  $e > a$ , 那么  $a$  和  $e$  之间的点都是在  $B$  里面的, 所以实际上  $B$  是一个闭区间. 我们再考虑  $B$  的上确界, 根据  $x$  的取法, 有  $x \leq b$ , 如果我们能证明它的上确界在  $b$  出取得, 那么整个命题就得证. 现在假设  $\sup(B) < b$ , 由于  $B$  是一个闭区间, 所以  $\sup(B) \in B$ . 由于  $f$  是连续的, 那么足够靠近  $\sup(B)$  的地方, 即  $s - \sup(B) < \delta$  且  $s > \sup(B)$ , 有  $|f(s) - f(\sup(B))| < \varepsilon$ , 那么  $f(x)$ ,  $x \in [\sup(B), s]$  也是有界, 这是和  $\sup B$  是  $B$  的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的数列, 其子列收敛造矛盾). □

**Definition 1.2. (确界原理)** 任一有上界的非空实数集必有上确界, 同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. 构造一个实数划分, 用戴德金分割定理说明界数就是确界 假设非空实数集  $S$  有上界  $M$ , 取  $S$  所有上界为集合  $B$ . 因为  $M \in B$  所以  $B$  非空, 取  $A = \mathbb{R} \setminus B$ , 要证明  $A$  是非空是 trivial 的, 取  $x = x_0 - 1$ ,  $x_0 \in S$ , 那么  $x \in A$ . 显然地  $A$  里面所有的元素都小于  $B$  里面的元素 (若是大于  $B$  里面某个元素, 那么它就是  $S$  的一个上界了, 这是矛盾的), 这样我们就可以得到一个实数上的划分, 根据戴德金实数分割定理, 存在一个  $\beta$ , 它要么是  $A$  里面最大值或者要么  $B$  里面的最小值. 假设它是  $A$  里面的最大值, 根据  $A$  的定义, 对于任意  $a \in A$  都存在一个  $x_0 \in S$  使得  $a < x_0$ , 将其作用到  $\beta$  上, 我们得到某个  $x'_0 \in S$  使得  $\beta < x'_0$ . 我们考虑  $\frac{x'_0 + \beta}{2}$ , 有

$$\beta < \frac{x'_0 + \beta}{2} < x'_0$$

所以  $\frac{x'_0 + \beta}{2} \in A$ , 这和  $\beta$  是  $A$  里面最大值是矛盾的, 所以  $\beta \in B$ , 即这个  $\beta$  就是  $S$  的上确界. □

**Definition 1.3. (极值定理)** 若 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  连续, 那么存在  $c, d \in [a, b]$  使得

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d), x \in [a, b].$$

证明. (构造一个特殊连续函数说明原函数可以取到确界)  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续 (连续闭有界), 那么马上可以得到  $f$  在  $[a, b]$  上有界. 取集合  $Y = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ , 即  $Y$  有界, 根据确界原理  $Y$  有确界, 那么我们下面证明思路, 就是看  $f(x)$  是不是能取到这个确界. 取其上确界为  $m$ , 假设不存在  $d \in [a, b]$  使得  $f(d) = m$ , 那么我们考虑函数  $g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$ , 由于  $m > f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 所以  $g(x)$  在  $[a, b]$  上是连续的, 又因为  $f$  在  $[a, b]$  是有上界的, 那么  $g$  在其上也是有界的. 由于  $m$  是上确界, 所以对任意的正实数  $\varepsilon$ , 都有  $m - f(x) \leq \varepsilon$ , 那么  $g(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , 这说明  $g(x)$  是发散的, 造成了矛盾. 所以  $f$  是可以取到上确界的. □

**Definition 1.4. (罗尔定理)** 如果 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在开区间  $(a, b)$  内可导, 若有  $f(a) = f(b)$ , 那么存在至少一个  $c \in (a, b)$  使得

$$f'(c) = 0.$$

证明. (导数存在的充分必要条件)  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 那么根据**极值定理**其在  $[a, b]$  是可以取到极值的, 分两种情况讨论: (1 如果其最大值和最小值同时在  $a, b$  取得, 那么  $f$  就是常函数, 对任意的  $x \in [a, b]$  都有  $f'(x) = 0$ . (2 不失一般性, 我们假设  $f$  在一点  $c \in (a, b)$  处  $f(c)$  为最大值 (若是最小值, 考虑  $-f$  即可), 我们来考虑  $c$  的一个邻域  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  两边, 其中  $c - \varepsilon$  和  $c + \varepsilon$  均在  $[a, b]$  里面. 对任意的  $h \in (c - \varepsilon, c)$  都有

$$f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow c^-} \frac{f(c) - f(h)}{c - h} \leq 0.$$

同理对任意的  $t \in (c, c + \varepsilon)$  都有

$$f'(c^+) = \lim_{t \rightarrow c^+} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0.$$

由于  $f$  在  $c$  点可导, 那么  $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+) = 0$ . □

**Definition 1.5. (中值定理)** 若 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 且在  $(a, b)$  上可导, 那么存在一个实数  $c \in (a, b)$  使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

证明. (中值定理是罗尔定理的推广) 构造函数  $g(x) = f(x) - rx$ , 通过选择合适的  $r$ , 使得  $g(a) = g(b)$ , 即

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\Leftrightarrow f(a) - ra = f(b) - rb \\ &\Leftrightarrow r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

那么根据**罗尔定理**, 我们知道存在一点  $c \in (a, b)$ , 使得  $g'(c) = 0$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - r \\ g'(c) &= f'(c) - r = 0 \\ f'(c) &= r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

证毕. □

**Definition 1.6. (柯西中值定理)** 若两个 real-valued 函数  $f$  和  $g$  都在闭区间  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 且都在  $(a, b)$  上可导. 那么存在一点  $c \in (a, b)$ , 使得

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

特别地, 若  $g(b) \neq g(a)$  且  $g'(c) \neq 0$ , 等价于

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

证明. (柯西中值定理是中值定理的扩展) 构造函数  $h(x) = f(x) - rg(x)$ , 选择合适  $r$  使得  $h(a) = h(b)$ , 若  $g(b) \neq g(a)$  即  $r = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ , 那么根据**罗尔定理**可以得到  $h'(c) = 0$ , 即

$$0 = g'(c) - rf'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c).$$

若  $g(a) = g(b)$ , 同样根据**罗尔定理**有  $g'(c) = 0$ , 这个条件显然是使得前面第一个等式成立的. □

**Definition 1.7. (夹逼准则)** 若函数  $f, g, h$  均在以点  $a$  为聚点的区间  $I$  上定义着, 且对任意的  $x \in I$ , 其中  $x \neq a$  都有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

并且同时满足

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

那么  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

证明. [经典两边夹](#) 取任意的正实数  $\varepsilon > 0$ , 根据极限地定义对  $g(x)$  和  $h(x)$  我们可以分别找到  $|x| < \delta_1$  和  $|x| < \delta_2$ , 使得

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \text{ 和 } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

成立, 我们取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , 那么当  $|x| < \delta$  时有

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 所以有  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

□

## 数列极限

### 上下极限

## 函数极限

### 洛必达法则

**Definition 3.1.** 若 real-value 函数  $f$  和  $g$  在去心邻域  $\tilde{U}(c, \delta)$  可导, 有

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \text{ 或者 } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty,$$

且对任意  $x \in \tilde{U}$  都有  $g'(x) \neq 0$ , 同时有  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 那么

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 首先来看一个比较特殊的情况, 除满足上述条件之外, 若还满足  $f(c) = g(c) = 0$ , 并且  $g'(c) \neq 0$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

下面来严格证明分两种情况来证明, 由于  $\tilde{U}$  在  $c$  这里间断, 后面需要频繁使用到柯西中值定理, 所以自然地在  $U$  的两端来分析, 取开区间  $\mathcal{I}$  以  $c$  点为端点, 且  $\mathcal{I} \subset \tilde{U}$ . 注意到条件满足对任意的  $x \in \mathcal{I}$  有  $g'(x) \neq 0$ , 并且  $g$  在  $\mathcal{I}$  上是连续的, 那么是可以在  $\mathcal{I}$  里面找到一个足够小的区间使得  $g(x) \neq 0$ , 那这个小区间代替  $\mathcal{I}$ .

我们定义  $m(x) = \inf_{g'(c)} \frac{f'(c)}{g'(c)}$  和  $M(x) = \sup_{g'(c)} \frac{f'(c)}{g'(c)}$  其中  $c$  取遍  $x$  和  $c$  之间的数. 我们再取定  $x$  和  $c$  之间一点  $y$ , 结合柯西中值定理可以保证在它们之间找到一个  $c$  使得

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq M(x).$$

注意为什么这里可以保证  $g(x) - g(y) \neq 0$ ? 假设存在  $g(x) = g(y)$ , 那么根据罗尔定理, 就存在一点  $p$  使得  $g'(p) = 0$ , 这是个前提条件  $g'(x) \neq 0$  矛盾的.

情况一:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ .

对任意的  $x \in \mathcal{I}$ , 取  $y$  位于  $x$  和  $c$  之间, 为了得到  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , 我们让

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}}{\frac{g(x) - g(y)}{x - y}} \leq M(x).$$

当  $y \rightarrow c$  时,  $\frac{f(y)}{g(y)}$  和  $\frac{g(y)}{g(y)}$  都趋向于 0, 所以

$$m(x) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M(x).$$

情况二:  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ . 对任意的  $x \in \mathcal{I}$ , 取  $y$  位于  $x$  和  $c$  之间. 如果我们还是用上面的分式, 直接尝试把  $\frac{f(x)}{g(x)}$  构造出来, 整体这个分式对  $y \rightarrow c$ , 显然是无法处理的. 同时你注意到在当前条件下是对  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  是没有特别说明的, 言下之意它不会对我们的证明产生影响. 现在我们考虑把前面分式上下都除以  $g(y)$ , 同时上下同时取负, 即

$$m(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}} \leq M(x).$$

那么当  $y \rightarrow c$  时,  $\frac{f(x)}{g(y)}$  和  $\frac{g(x)}{g(y)}$  都是趋于 0, 那么此刻关键是我们如何需要考虑  $\lim_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)}$ ? 让  $S_x = \{y \mid y \text{ 位于 } x \text{ 和 } c \text{ 之间}\}$ , 我们取遍  $y \in S_x$ , 我们可以得到得到一个有界数列  $\{\frac{f(y)}{g(y)}\}$ , 我们考虑其上下极限

$$m(x) \leq \liminf_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq \limsup_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq M(x).$$

当对  $m(x)$  和  $M(x)$  也取极限  $x \rightarrow c$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow c} m(x) = \lim_{x \rightarrow c} M(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对情况一使用夹逼准则, 可以很快得到  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . 对情况二也同样使用夹逼准则, 可以得到

$$\liminf_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} = \limsup_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

上下极限相等可以马上得到  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . 最终证毕. □