

考研高数习题集

枫聆

2021 年 8 月 18 日

目录

1 极限相关	3
1.1 1^∞ 类型极限	3
1.2 1^0 类型极限	3
1.3 夹逼准则应用	4
1.4 级数相关的极限	5
1.5 去除根式的尴尬	7
1.6 换元取极限	8
1.7 递归求极限	8
1.8 等价无穷小的替换	8
1.9 中值定理	8
2 导数	9
2.1 导数定义相关的	9
3 不定积分	9
3.1 多项式分式	9
3.2 分母带根号	10
3.3 换元法	11
3.4 高次	11
3.5 分部积分	11
3.6 三角有理式	11
3.7 被积函数含不常见函数形式	12

4 tricks	13
4.1 一些有趣的不等式	13

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 其中 A 是一个常数, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

hints 带指数形式的表达式, 第一想法是把指数拿下来

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left(\frac{x}{x+b} \right)^x = \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \left(1 - \frac{b}{x+b} \right)^x = e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n.$$

hints 往 $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1) + (\sqrt[n]{b}-1) + (\sqrt[n]{c}-1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}} \right)$$

1^0 类型极限

Example 1.4. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$, 则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

夹逼准则应用

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

hints

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1} \right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.8. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

hints 直接考察

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 n_1 , 使得 $n > n_1$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{n_1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - A) + (a_{n_1+2} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{n_1} - A|}{n} + \frac{|a_{n_1+2} - A| + |a_{n_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

上述不等式右边第一项, 形如 $\frac{C}{n}$, 因为先对任意 $n > n_1$ 都有上述不等式成立, 那么只需要让 n 取的大一点, 就能使得 $\frac{C}{n} < \varepsilon$ (**阿基米德公理**). 右边第二项显然小于 $\frac{n - n_1}{n} \varepsilon$, 于是综上

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值, 我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来, 然后用初等方法来验证, 再根据极限的唯一性, 就得到了答案. 把 a_n 换成形式, 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Example 1.9. 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握, 用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^k \sim_{\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.10. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性, 所以 $\lim \ln a_n = \ln a$, 再根据 1.8.

Example 1.11. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据 1.10

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}} = e^{\ln a} = a.$$

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 1.11 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 (假设 a_n 的极限存在). 那么有一个推论, 对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可, 那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

那么

$$x \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{\frac{1}{k}} = x \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$, 这个 \mathcal{O} 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法, 即下面的恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z = x$, 那么原式就变成了

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) - x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-1} + \left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})} \right]^{k-1} + \left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})} \right]^{k-2}x + \cdots + 1} \end{aligned}$$

上下除以 x^{k-1}

分母中 $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$ 是趋于 1 的, 再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性, 取其函数值也是等于 1, 所以分母就有 $k \cdot 1$.

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim \frac{\ln n}{n}} = 1.$$

也可以使用一下 4.1 的伯努利不等式来证明, 这里设 $\sqrt[n]{n} = 1 + h$, 那么

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ \Rightarrow h^2 &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $h \rightarrow 0$, 即 $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$, 所以 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

换元取极限

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{x+1} - 1}{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

hints 设 $y = \sqrt[m]{x+1} - 1$, 显然 y 在 $x = 0$ 处连续, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时有 $y \rightarrow 0$, 那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式, 分母二项式展开.

Example 1.16. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{\frac{n}{m}} - 1}{x}.$$

hints 还是使得 $y = (x+1)^{\frac{1}{m}} - 1$, 那么就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} \frac{y}{(1+y)m - 1} = \frac{n}{m}.$$

递归求极限

Example 1.17. 1.7 单调数列求极限

hints 考虑递归式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a = a \cdot 0 \Rightarrow a = 0.$$

等价无穷小的替换

中值定理

Example 1.18. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

hints 对连续函数 $\ln \arctan x$ 应用中值定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{[1 + (\theta + x)^2] \arctan(\theta + x)},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 那么即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (\theta + x)^2} \frac{1}{\arctan(\theta + x)} = \frac{1}{\pi}.$$

导数

导数定义相关的

Example 2.1. 已知 $f'(x_0) = -1$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}.$$

hints 直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} &= -1\end{aligned}$$

求出需要 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{x}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x}$, 两项相减再取倒.

不定积分

多项式分式

Example 3.1. 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2 \arctan x - 2x + C,$$

Example 3.2. 求

$$\int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

hints 观察分子多项式次数小于分母的, 且只小一次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 8 \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} d(x^2 - 6x + 13) + 8 \int \frac{1}{4 + (x - 3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x - 3}{2} + C.$$

Example 3.3. 求

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$$

hints 观察分子多项式次数小于分母，且小两次，所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4 + (x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4 + (x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + C$$

分母带根号

Example 3.4. 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

hints 根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} d(x-2) = \arcsin \frac{x-2}{2} + C$$

Example 3.5. 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

hints 先分式把分子变成常数 1

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

Example 3.6. 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

hints 考虑第二类换元，令 $x = a \sin t$ ，则

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4} \sin 2t.$$

把 t 变成 x 也有一点技巧，第二项可以变成 $\frac{1}{2}(a \sin t)(a \cos t)$ ，其中 $a \sin t = x, a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$ ，这样会方便一点

$$\frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

换元法

Example 3.7. 求

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$

hints考虑第二类换元, 令 $x = \ln(t^2 - 1)$, 则

$$\int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

带入 $t = \sqrt{e^x + 1}$, 即得

$$2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$$

高次

分部积分

三角有理式

Example 3.8. 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$$

hints这里有一个非常巧妙的第二类换元, 令 $x = \arcsin u$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du.$$

再把有理式拆开, 这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1+u}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sin x} + C.$$

Example 3.9. 求

$$\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}.$$

hints考虑第二类换元, 令 $x = \operatorname{arccot} u$, 则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})} \frac{1}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{1+u} du = -\ln |u| + C = -\ln |1 + \cot x| + C.$$

被积函数含不常见函数形式

Example 3.10. 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

hints 必须得想办法吧 $\arcsin e^x$ 提出来, 因为我们没有已知原函数导数为反三角的, 这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令 $t = \sqrt{1-e^{2x}}$, 那么 $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}$, $dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$, 于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

Example 3.11. 求

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$$

hints 首选分部积分, 但是为了为了能部分积分, 我们必须先第一类换元, 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 那么 $x = \frac{1}{t^2-1}$, 于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 4.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \quad a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx, \quad n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1 + x) = a^{\frac{1}{n}}$, 即可得到上式.