

# 考研高数习题集

枫聆

2021 年 12 月 3 日

## 目录

<b>1</b>	<b>极限相关</b>	<b>5</b>
1.1	$1^\infty$ 类型极限	5
1.2	$1^0$ 类型极限	5
1.3	夹逼准则应用	6
1.4	级数相关的极限	7
1.5	去除根式的尴尬	9
1.6	换元取极限	11
1.7	递归求极限	11
1.8	中值定理	12
1.9	含积分的极限	12
1.10	没有具体的函数表达式	12
1.11	三角函数相关	13
1.12	极限存在性	14
1.13	积分定义	14
<b>2</b>	<b>导数</b>	<b>15</b>
2.1	导数定义相关的	15
2.2	泰勒公式求高阶导数	15
2.3	递归法求高阶导数	16
<b>3</b>	<b>函数性质</b>	<b>17</b>
3.1	求零点	17
3.2	经典证明题	17

<b>4</b>	<b>不定积分</b>	<b>18</b>
4.1	多项式分式	18
4.2	分母带根号	18
4.3	换元法	20
4.4	高次	20
4.5	分部积分	20
4.6	三角有理式	20
4.7	递归式	22
4.8	被积函数含不常见函数形式	22
<b>5</b>	<b>定积分</b>	<b>24</b>
5.1	参数积分求导	24
5.2	奇怪的定积分	24
5.3	不太好积的带三角函数的积分	24
5.4	待定系数收敛反常积分	25
5.5	化为极限形式	25
5.6	被积函数带绝对值	25
5.7	级数定积分	26
<b>6</b>	<b>反常积分</b>	<b>28</b>
6.1	含有 $e^x$ 的被积函数	28
6.2	定积分的应用	28
6.3	待定参数	29
6.4	分离积分	30
6.5	求值	30
<b>7</b>	<b>微分方程</b>	<b>32</b>
7.1	线性微分方程解的结构	32
7.2	带积分的微分方程	32
7.3	该死的绝对值	33
7.4	改变自变量	33
<b>8</b>	<b>解析几何</b>	<b>34</b>
8.1	求直线在平面上的投影	34
8.2	旋转直线方程	34

<b>9 多元函数</b>	<b>35</b>
9.1 带不等式的条件极值	35
9.2 可微定义	35
<b>10 二重积分</b>	<b>36</b>
10.1 交换次序更好积分	36
10.2 化极坐标	36
<b>11 三重积分</b>	<b>37</b>
11.1 直角坐标	37
11.2 柱坐标	37
11.3 球坐标	37
<b>12 多元积分的应用</b>	<b>38</b>
12.1 第一类曲线积分	38
12.2 第二类曲线积分	38
12.3 两类曲线积分关系	41
12.4 第一类曲面积分	42
12.5 第二类曲面积分	43
12.6 两类曲面积分的联系	44
<b>13 级数</b>	<b>45</b>
13.1 级数判定总结	45
13.2 极限 test	45
13.3 参数收敛	45
13.4 带-1 的幂次	46
13.5 不标准的幂级数	46
13.6 利用傅里叶公式求和	47
13.7 利用已有的幂级数求和	47
13.8 构造微分方程	47
13.9 化增量公式	48
<b>14 综合证明题</b>	<b>49</b>
14.1 级数	49

<b>15 tricks</b>	<b>51</b>
15.1 一些有趣的不等式 . . . . .	51
15.2 Stirling 公式 . . . . .	51
15.3 高数积分 . . . . .	51

## 极限相关

### $1^\infty$ 类型极限

**Example 1.1.** 若  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$ , 且  $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$ , 其中  $A$  是一个常数, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

hints 带指数形式的表达式, 第一想法是把指数拿下来

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

**Example 1.2.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x.$$

hints

$$\left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \left( \frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left( \frac{x}{x+b} \right)^x = \left( 1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \left( 1 - \frac{b}{x+b} \right)^x = e^{a-b}.$$

**Example 1.3.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n.$$

hints 往  $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$  上凑

$$\left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$$

考虑  $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{c} - 1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c} - 1}{\frac{1}{n}} \right)$$

其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln a$$

### $1^0$ 类型极限

**Example 1.4.** 若  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$ , 则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

## 夹逼准则应用

**Example 1.5.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

**Example 1.6.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right].$$

hints

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

**Example 1.7.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left( \frac{2}{1} \right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

## 级数相关的极限

**Example 1.8.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

hints 直接考察

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 可以找到一个  $n_1$ , 使得  $n > n_1$  时有  $|a_n - A| < \varepsilon$ , 那么

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{n_1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - A) + (a_{n_1+2} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{n_1} - A|}{n} + \frac{|a_{n_1+1} - A| + |a_{n_1+2} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

上述不等式右边第一项, 形如  $\frac{C}{n}$ , 因为先对任意  $n > n_1$  都有上述不等式成立, 那么只需要让  $n$  取的大一点, 就能使得  $\frac{C}{n} < \varepsilon$  (阿基米德公理). 右边第二项显然小于  $\frac{n - n_1}{n} \varepsilon$ , 于是综上

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值, 我们可以用 O.Stolz 定理先猜出来, 然后用初等方法来验证, 再根据极限的唯一性, 就得到了答案. 把  $a_n$  换成形式, 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

**Example 1.9.** 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 O.Stolz 定理考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{1+k}$$

这道题初等方法似乎不能很好的把握, 有一个很 trick 的方法是将其看做积分定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^k = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是  $1^k + 2^k + \cdots + n^k$  的转换思路

$$\sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^k \sim_{\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

**Example 1.10.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}.$$

因为  $\ln x$  的连续性, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$ , 再根据1.8.

**Example 1.11.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据1.10

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{\ln a} = a.$$

**Example 1.12.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 1.11 可知  $a_n$  和  $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$  的极限是相同的 (假设  $a_n$  的极限存在). 那么我们设  $a_n = \frac{c_n}{c_{n-1}}, n = 2, \cdots$ , 其中  $a_1 = c_1$ , 即下述数列

$$c_1, \frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_2}, \cdots, \frac{c_{n+1}}{c_n}, \cdots$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n-1}}$ , 只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设  $c_n = \frac{n!}{n^n}$  即可, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)!}{(n)^n} \cdot \frac{n-1^{n-1}}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}.$$



## 去除根式的尴尬

**Example 1.13.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

那么

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[k]{1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \end{aligned}$$

还有一种升次的方法，即下面的恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}.$$

这里我们使得  $y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$  及  $z = x$ ，那么原式就变成了

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) - x^k}{\left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-1} + \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left[ \sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)} \right]^{k-1} + \left[ \sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)} \right]^{k-2} + \cdots + 1} \quad \text{上下除以 } x^{k-1} \end{aligned}$$

分母中  $\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)}$  是趋于 1 的，再用一下函数  $x^{\frac{m}{n}}$  的连续性，取其函数值也是等于 1，所以分母就有  $k \cdot 1$ 。

**Example 1.14.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

hints 取对数应用  $e^x$  的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim \frac{\ln n}{n}} = 1.$$

也可以使用一下15.1的伯努利不等式来证明，这里设  $\sqrt[n]{n} = 1 + h$ ，那么

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ \Rightarrow h^2 &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时， $h \rightarrow 0$ ，即  $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$ ，所以  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ 。

**Example 1.15.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

**hints** 考虑把根式里面变成  $(1 + \alpha(x))$  的形式，因此考虑提出一个因子  $x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - \frac{\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{3}.$$

## 换元取极限

**Example 1.16.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{x+1} - 1}{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

**hints** 设  $y = \sqrt[m]{x+1} - 1$ , 显然  $y$  在  $x = 0$  处连续, 所以当  $x \rightarrow 0$  时有  $y \rightarrow 0$ , 那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式, 分母二项式展开.

**Example 1.17.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{\frac{n}{m}} - 1}{x}.$$

**hints** 还是使得  $y = (x+1)^{\frac{1}{m}} - 1$ , 那么就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} \frac{y}{(1+y)m - 1} = \frac{n}{m}.$$

**Example 1.18.** 求极限

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{x^2}{2}} e^{2x}}{x^4}.$$

**hints** 这里设  $xe^x = t$ , 则有

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4} \cdot e^{4x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4},$$

这里用泰勒展开是比较好的,

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \\ e^{-\frac{t^2}{2}} &= 1 + \frac{-\frac{t^2}{2}}{1!} + \frac{\frac{t^4}{4}}{2!} + o(t^4)\end{aligned}$$

因此

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^4}{24} - \frac{t^4}{8} + o(t^4)}{t^4} = -\frac{1}{12}.$$

## 递归求极限

**Example 1.19.** 1.7 单调数列求极限

**hints** 考虑递归式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a = a \cdot 0 \Rightarrow a = 0.$$

## 中值定理

**Example 1.20.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

**hints** 对连续函数  $\ln \arctan x$  应用中值定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{[1 + (\theta + x)^2] \arctan(\theta + x)},$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 那么即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (\theta + x)^2} \frac{1}{\arctan(\theta + x)} = \frac{1}{\pi}.$$

## 含积分的极限

**Example 1.21.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$$

**hints** 这样的含参数积分最好的办法就是洛必达, 但是这里首先需要换元一下以免对参数积分求导, 令  $u = x - t$ , 则

$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = \int_0^x \sqrt{u} e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du.$$

再用洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

## 没有具体的函数表达式

**Example 1.22.** 设  $f(x)$  在  $x = a$  处二阶导数存在, 求

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)}{h}.$$

**hints** 直觉告诉它的结果和二阶导有关, 但是任何初等方法都化不出来二阶导的定义, 这个时候可以考虑用一下洛必达

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} = \frac{1}{2} f''(a).$$

## 三角函数相关

**Example 1.23.** 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

**hints** 这个积分有点反直觉，主要是变量放在了  $\sin$  里面. 这里可以充分利用  $\sin x$  的性质

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2[\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

再来搞点不是那么反直觉的东西，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right),$$

这里可以尝试将  $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$  展开，首先

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x),$$

于是

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

**Example 1.24.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x}$$

**hints** 方法 1: 直接泰勒爆算即可，其中

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2}{2!} + \frac{\sin^4}{4!} + o(\sin^4).$$

再把  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$  带入，

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2}{2!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^4}{4!} + o(x^4),$$

这里泰勒余项要把握好，因为分母等价无穷小为  $\frac{x^4}{2}$ . 整理一下即有

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4),$$

方法 2: 对分子用和差化积简化直接泰勒的压力，即

$$\cos(\sin x) - \cos x = \cos\left(\frac{\sin x + x}{2} + \frac{\sin x - x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sin x + x}{2} - \frac{\sin x - x}{2}\right),$$

于是

$$\cos(\sin x) - \cos x = -2 \sin\left(\frac{\sin x + x}{2}\right) \sin\left(\frac{\sin x - x}{2}\right) \sim \frac{(\sin x + x)(x - \sin x)}{2},$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

## 极限存在性

**Annotation 1.25.** 左极限和右极限是否存在且相等.

**Example 1.26.** 求下述函数  $x \rightarrow 1$  时的极限是否存在

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{x - 1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}}.$$

hints 其中

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin(\pi(x - 1))}{x - 1} = -\pi,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0,$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在.

## 积分定义

**Example 1.27.** 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

hints 看见这种对求和取极限的, 可以考虑一下积分的定义. 这里有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{4},$$

求解上述积分可以用分部积分把  $x$  提到微分符号里面去.

## 导数

### 导数定义相关的

**Example 2.1.** 已知  $f'(x_0) = -1$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}.$$

**hints** 直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} &= -1\end{aligned}$$

求出需要  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{x}$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x}$ , 两项相减再取倒.

**Example 2.2.** 已知  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$ , 判断  $f(x)$  在  $x = 0$  是否可导.

**hints** 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $n \rightarrow \infty$ , 那么  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , 因此  $f(x)$  在  $x = 0$  这点连续. 再来研究  $f(x)$  在  $x = 0$  这一点的右导数

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{n}}{x} = \frac{1}{nx},$$

显然有点无从下手, 需要用一下分段函数的性质

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \Rightarrow n \leq \frac{1}{x} \leq n+1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{n+1}{n},$$

对上面不等式取极限再用一下夹逼定理, 可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{nx} = 1$ . 因此  $f(x)$  在  $x = 0$  这里可导.

### 泰勒公式求高阶导数

**Example 2.3.** 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 求  $f^{(3)}(0)$ .

**hints** 直接求 3 阶导是比较麻烦, 这里可以使用泰勒展开再求导. 首先考虑  $\frac{1}{1+x}$  在  $x = 0$  处的展开

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n.$$

那么

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

因此  $f^{(3)}(0) = 0$ .

## 递归法求高阶导数

**Example 2.4.** 设

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

求  $f^{(n)}(0)$ .

**hints** 这道题你想求它的麦克劳林级数其实不太好求 (<https://math.stackexchange.com/questions/549028/deriving-maclaurin-series-for-frac-arcsin-x-sqrt{1-x^2}>), 实际上也不用求出通项, 因为只要求  $x=0$  的情况, 这里有比较 trick 的利用递归式的手法. 先求它的一阶导

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)^{3/2}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2}.$$

这里构造一个微分方程

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

两边求  $n$  次, 根据  $n$  阶莱布尼茨公式有

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^n(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0.$$

带入  $x=0$ , 这里就可能消掉  $f^{(n)}$  的项, 得到一个递归式

$$f^{(n+1)}(0) - n^2f^{(n-1)}(0) = 0.$$

这里我们让  $n = n+1$ , 则有

$$f^{(n+2)}(0) = (n+1)^2f^{(n)}(0).$$

我们可以求出最前面的两项  $f'(0) = 1$  和  $f''(0) = 0$ , 于是这里有

$$f^n(0) = \begin{cases} 0 & n = \text{奇数} \\ (n-1)^2 \times (n-2)! \times \cdots \times 2! & n = \text{偶数} \end{cases}$$

奇数下的情况可以化简为  $2^{n-1}((\frac{n-1}{2})!)^2$



## 函数性质

### 求零点

**Example 3.1.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  可导,  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0, f(a) \geq f(b)$ . 则  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上有两个零点.

**hints** 这样的题目最好还是构造相应的函数, 用罗尔定理来做. 简单分析一下, 如果使用罗尔我们需要分别找到两对函数值相同的点对, 每对点确定一个  $f'(x)$  的零点. 这里只有  $f(a)$  和  $f(b)$  给我们用, 因此我们需要分别找到一个函数值和它们相等的点.

设  $g(x) = f(x) - f(a)$  和  $h(x) = f(x) - f(b)$ , 那么我们思路就变为了确定  $g(x)$  和  $h(x)$  的一个零点. 而确定  $g(x)$  和  $h(x)$  零点, 我们可以用零点定理来做. 由于  $f'_+(a) > 0$ , 根据导数的定义有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} > 0 \Rightarrow f(a + \xi_1) > f(a), \xi_1 > 0$$

同理, 由于  $f'_-(b) > 0$ , 我们可以得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(b-x) - f(b)}{-x} > 0 \Rightarrow f(b - \xi_2) < f(b), \xi_2 > 0.$$

注意这里的  $\Rightarrow$  用到的是极限的保号性. 于是这里由零点定理有

$$g(a + \xi_1) > 0, g(b - \xi_1) < 0 \Rightarrow g(\theta_1) = 0, a + \xi_1 < \theta_1 < b - \xi_1$$

因此存在  $f(\theta_1) = f(a)$ . 同理有

$$h(a + \xi_1) > 0, h(b - \xi_2) < 0 \Rightarrow g(\theta_2) = 0, a + \xi_1 < \theta_2 < b - \xi_1$$

其中因为  $f(a + \xi_i) > a \geq b$  才有  $h(a + \xi_1) > 0$ , 因此存在  $f(\theta_2) = f(b)$ .

但是我们还不确定  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的关系. 因此需要分类讨论一下, 若  $\theta_1 \leq \theta_2$ , 则根据罗尔定理我们可以在  $(a, \theta_1)$  及  $(\theta_2, b)$  上各找到一个零点. 若  $\theta_1 > \theta_2$ , 此时由  $g(a + \xi_1) > 0, g(\theta_2) \leq 0$ , 存在一点  $\theta_3$  使得  $f(\theta_3) = a$ , 同理由  $g(\theta_1) \geq 0, g(b - \xi_2) < 0$ , 可以找到一点  $\theta_4$  使得  $f(\theta_4) = b$ , 这样  $\theta_3 < \theta_4$ , 回到了前面一种情况. 证闭!

### 经典证明题

## 不定积分

### 多项式分式

**Example 4.1.** 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2 \arctan x - 2x + C,$$

**Example 4.2.** 求

$$\int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

hints 观察分子多项式次数小于分母的, 且只小一次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 8 \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} d(x^2 - 6x + 13) + 8 \int \frac{1}{4 + (x - 3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x - 3}{2} + C.$$

**Example 4.3.** 求

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$$

hints 观察分子多项式次数小于分母, 且小两次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4 + (x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4 + (x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + C$$

### 分母带根号

**Example 4.4.** 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}.$$

hints 根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} d(x - 2) = \arcsin \frac{x - 2}{2} + C$$

**Example 4.5.** 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

**hints** 先分式把分子根号里面的微分

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

**Example 4.6.** 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

**hints** 这是实在没办法处理根号的时候, 考虑第二类换元, 令  $x = a \sin t$ , 则

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4} \sin 2t.$$

把  $t$  变成  $x$  也有一点技巧, 第二项可以变成  $\frac{1}{2}(a \sin t)(a \cos t)$ , 其中  $a \sin t = x, a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$ , 这样会方便一点

$$\frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

**Example 4.7.** 求

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}.$$

**hints** 这里还是要凑根号下的微分, 有比较多的凑法, 这里提及一种凑微分再配合三角换元的,

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{1}{2} \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{(x^2)^2+1}},$$

令  $x^2 = \tan u$ , 于是得到

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin u} du = \frac{1}{2} \ln |\csc u + \cot u|.$$

再带回  $x$  即可.

**Example 4.8.** 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}.$$

**hints** 这里目标肯定是换元换成我们熟悉的积分, 但是找不到因子提到微分符号里面, 这时可以分母提一个  $x^3$  出来, 就可以换元了

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C$$

这里也可以尝试令  $x = \frac{1}{t}$ , 有

$$-\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)} = -\int \frac{d\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

当然也可以爆算设  $x = \tan u$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2 u}{\sec^3 u} du &= \int \cos u dx \\ &= -\sin u\end{aligned}$$

我们可以计算得到  $\sec^2 u = 1 + x^2$ , 因此  $\sin u = \frac{\tan u}{\sec u} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . 似乎这样更简单...

## 换元法

**Example 4.9.** 求

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = \ln(t^2 - 1)$ , 则

$$\int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

带入  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 即得

$$2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$$

## 高次

## 分部积分

## 三角有理式

**Example 4.10.** 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$$

**hints** 这里有一个非常巧妙的第二类换元, 令  $x = \arcsin u$ , 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du.$$

再把有理式拆开, 这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| - \frac{1}{2(1+u)}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sin x} + C.$$

这里还可以做一下变换

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x (1 + \sin x)} &= \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2)(1 + \sin x)} \\ &= \int \frac{1}{4(1 - \sin x)} + \frac{1}{4(1 + \sin x)} + \frac{1}{2(1 + \sin x)^2} d \sin x \end{aligned}$$

这样做也比较简单.

**Example 4.11.** 求

$$\int \frac{dx}{\sin x (\sin x + \cos x)}.$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = \operatorname{arccot} u$ , 则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})} \frac{1}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{1+u} du = -\ln |u| + C = -\ln |1 + \cot x| + C.$$

也可以做一个小变换

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x (\sin x + \cos x)} dx &= \int \frac{\tan^2 + 1}{\tan(\tan + 1)} dx \\ &= \int \frac{d \tan x}{\tan(\tan + 1)} \\ &= \ln |\tan x| - \ln |\tan + 1| + C \\ &= \ln \left| \frac{\tan x}{\tan x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

**Example 4.12.** 求

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

**hints** 暴力合并

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}{\cos 2x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d \cos 2x - \frac{1}{2} \int \sec 2x dx + \frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + \frac{x}{2} + C = -\frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

还有一种比较理想是思路, 是把分子往  $d(\sin x + \cos x)$  上凑, 即

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C\end{aligned}$$

其中  $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ .

## 递归式

**Example 4.13.** 求

$$\int e^{ax} \cos nx dx.$$

**hints** 连续分部积分 2 次回到原积分, 总是把  $e^{ax}$  提到积分符号里面.

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos nx dx &= \frac{1}{a} \int \cos nx de^{ax} = \frac{1}{a} (e^{ax} \cos nx + n \int e^{ax} \sin nx dx) \\ &= \frac{1}{a} [e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a} (e^{ax} \sin nx - n \int e^{ax} \cos nx dx)]\end{aligned}$$

整理两边即得

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2} \Rightarrow \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2 + n^2}$$

类似的有

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{ae^{ax} \sin nx - ne^{ax} \cos nx}{a^2 + n^2}$$

## 被积函数含不常见函数形式

**Example 4.14.** 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

**hints** 必须得想办法处理  $\arcsin e^x$ , 因为我们没有已知原函数导数为反三角的, 这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令  $t = \sqrt{1-e^{2x}}$ , 那么  $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}$ ,  $dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$ , 于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

**Example 4.15.** 求

$$\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$$

**hints** 根号下的有理分式，得先有理化，同时这是  $\ln$  结构的积分，再优先考虑分部积分，令  $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ ，那么  $x = \frac{1}{t^2-1}$ ，于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} dt,$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(1+t)^2(t-1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

最后带入  $x$ .

## 定积分

### 参数积分求导

**Example 5.1.** 设  $f(x)$  连续, 求

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$$

**hints** 对于这种第二类的参数积分, 应该有比较简洁的结果的, 首先应该换元试试, 令  $u = x^2 - t^2$ , 那么即有

$$-\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2).$$

### 奇怪的定积分

**Example 5.2.** 设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{x-t} dt$ , 求  $\int_0^\pi f(x) dx$ .

**hints** 这题暂时有问题, 题目似乎有问题, 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x) dx = x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

### 不太好积的带三角函数的积分

**Example 5.3.** 求

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

**hints** 如果不能一眼看出来

$$I = - \int_0^\pi x d \arctan \cos x = - x \arctan \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \arctan \cos x.$$

后面这个积分, 令  $u = \pi - x$ , 则可以得到

$$\int_0^\pi \arctan \cos x = - \int_0^\pi \arctan \cos x,$$

即它是等于零的.

**尝试方法** 我们要充分利用三角函数的性质, 一开始我们令  $u = \pi - x$ , 则有

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} \rightarrow 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \arctan \cos x \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$



## 待定系数收敛反常积分

**Example 5.4.** 求满足下式的  $a, b$

$$\int_1^{+\infty} \left[ \frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right] dx = 1$$

hints 首先化简一下

$$\int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x + a}{2x^2 + ax} dx$$

若上述积分收敛, 则  $b = a$ . 于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{2x^2 + ax} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{2x + a} dx = \ln \frac{x}{2x + a} \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2 + a} = 1 \Rightarrow a = 2e - 2.$$

## 化为极限形式

**Example 5.5.** 求

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$$

hints 考虑部分分式

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{x}{1 + e^{-x}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} dx$$

你会发现第一个积分是发散的, 这里我们考虑把它转换为极限的形式

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{1 + e^{-x}} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{1}{1 + e^{-x}} dx \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1 + e^{-a}} - \int_0^a \frac{e^x}{1 + e^x} dx \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1 + e^{-a}} - \ln(1 + e^a) + \ln 2 \right]$$

其中

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1 + e^{-a}} - \ln(1 + e^a) \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-a}} (a - (1 + e^{-a}) \ln(1 + e^a)) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln e^a - \ln(1 + e^a) - \frac{\ln(1 + e^a)}{e^a} = 0$$

因此原积分等于  $\ln 2$ .

## 被积函数带绝对值

**Example 5.6.** 求曲线  $y = e^{-x} \sin x$  与  $x$  轴之间图形的面积.

hints 由题意面积  $S$  为

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx,$$

没有办法直接计算，因此考虑把它看成分段函数

$$S = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx - \cdots,$$

我们再来研究一下被积函数的原函数

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= - \int \sin x de^{-x} \\ &= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \\ &= -e^{-x} \sin x - \int \cos x de^{-x} \\ &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \end{aligned}$$

由此可以推出

$$\int e^{-x} \sin x dx = \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx &= \frac{-e^{-(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi + e^{-k\pi} \cos k\pi}{2} \quad k = 0, 1, \dots \\ &= \frac{(-1)^k e^{-(k+1)\pi} + (-1)^k e^{-k\pi}}{2} \\ &= (-1)^k \cdot \frac{e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}}{2} \end{aligned}$$

最终

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}}{2} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2 - 2e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{2e^{\pi} - 2}.$$

## 级数定积分

**Example 5.7.** 设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ . 证明  $a_n = \frac{n-1}{n-2} a_{n-2}$ .

[hints](#) 这道题主要就是在研究怎么拆  $a_n$ ，首先你可以做一些尝试性的工作，比如

$$a_{n-2} - a_n = \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx,$$

但是似乎还是没有什么用，先放着. 观察  $a_n$  的形式是一个多项式乘上一个函数，那么将  $a_n$  朝  $a_{n-2}$  努力，我们首先要拆出  $x^{n-2}$ ，大致方向应该是朝部分积分努力. 于是

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{3} \int x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \int x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \end{aligned}$$

结合前面我们前面得到的那个式子

$$a_n = \frac{n-1}{3} (a_{n-2} - a_n) \Rightarrow a_n = \frac{n-1}{n-2} \cdot a_{n-2}.$$

## 反常积分

### 含有 $e^x$ 的被积函数

**Example 6.1.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0).$$

**hints** 比较审敛法, 取任意的  $\lambda > 1$ , 即  $\frac{1}{x^\lambda}$  是收敛的, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu e^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\mu+\lambda}}{e^{ax}} = 0,$$

因此原无穷积分也是收敛的.

**Example 6.2.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

**hints** 这里需要注意两个上下积分限都需要考察, 我们可以将上述积分划分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int_A^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},$$

其中  $A \in (0, +\infty)$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 取  $0 < \lambda < 1$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = 0,$$

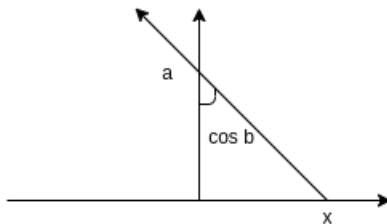
即积分  $\int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$  是收敛的. 当  $x \rightarrow \infty$  时, 取  $\lambda > 1$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = 0,$$

### 定积分的应用

**Example 6.3.** 设无穷长直线  $L$  的线密度为 1, 引力常数为  $k$ , 求距  $L$  距离为  $a$  的单位质点与  $L$  的万有引力.

**hints** 首先得知道万有引力公式  $F = k \frac{Mm}{r^2}$ . 再考虑直线上某个点对给定单位质点的引力, 然后考虑这些引力的合成. 示意图为



设  $L$  所在的直线为  $x$  轴,  $y$  轴过给定的单位质点. 由示意图这些力的合成一定是在  $y$  轴上的, 关于  $F_y$  的微分为

$$dF_y = k \frac{kdx}{a^2 + x^2} \cos b = \frac{kadx}{(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

因此

$$F_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kadx}{(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = 2ka \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令  $x = a \tan u$ , 则有

$$F_y = 2ka \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sec^2 u}{a^3 \sec^3} du = \frac{2k}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2k}{a}$$

## 待定参数

**Example 6.4.** 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$$

收敛, 求  $a, b$ .

[hints](#) 这道题还是用柯西审敛法, 注意要同时考虑积分上下限. 当  $x \rightarrow +\infty$ , 那么就要和  $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda > 1)$  比较, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda-(a+b)}}{(\frac{1}{x} + 1)^b},$$

其中分母是趋于 1, 为保证分子不趋于无穷, 则需要  $\lambda \leq (a+b)$ , 即  $a+b > 1$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 那么就要和  $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda < 1)$  比较, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{1}{x^{a-\lambda}(1+x)^b},$$

其中  $(1+x)^b \rightarrow 1$ , 则  $a \leq \lambda$ , 即  $a < 1$ .

## 分离积分

**Example 6.5.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

**hints** 其中后面这个积分在柯西判别法很容易确定是收敛的 (实际上可以用狄利克雷判别法), 因为总是满足

$$f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

那么前面这个积分可以做一下变换

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx$$

这是因为  $\frac{\sin x}{x}$  在  $(0, \frac{\pi}{2}]$  上是单调减的, 因此  $\frac{\sin x}{x} \leq \frac{\pi}{2}, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$  这一点求两次导即可知道, 所以前面这个积分是发散的. 因此整个积分是发散的.

推广导一般形式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx,$$

1. 当  $p \leq 0$  时, 显然发散.
2. 当  $0 < p \leq 1$  时, 条件收敛.
3. 当  $1 < p < 2$  时, 绝对收敛.
4. 当  $p \geq 2$  时, 发散.

## 求值

**Example 6.6.** 求

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

**hints 方法 1** 设  $u = \frac{1}{x}$ , 则有

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$$

把这个积分和原积分加起来

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2} dx$$

这里设  $t = x - \frac{1}{x}$ , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

因此  $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

**方法 2** 可以考虑直接部分分式即, 其中分母可以分解为

$$1 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^2 = (1 + x^2)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

因此

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

即

$$\frac{2\sqrt{2}}{1 + x^2} = \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

原积分可以写作

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x + \sqrt{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} - \frac{x - \sqrt{2}}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx$$

再继续拆

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} - \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx$$

第一项和第三项需要换元一下, 令  $u = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du + \arctan \sqrt{2} \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du + \arctan \sqrt{2} \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} \right]$$

其中

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du = - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du = 0.$$

因此

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

## 微分方程

### 线性微分方程解的结构

**Example 7.1.** 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$ ,  $y_2 = e^x - xe^{2x}$ ,  $y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 求该方程的通解.

**hints** 这题考察线性微分方程解结构的一个非常典型的题, 这里用到两个非齐次方程的解的差是齐次方程的解, 则

$$y_2 - y_3 = e^x, y_1 - y_3 = e^{3x}.$$

它们是两个线性无关的解, 因此它们是原方程导出的齐次方程的通解, 我们再求一个特解即可, 即  $y_1 - e^{3x} = -xe^{2x}$ , 则原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}.$$

### 带积分的微分方程

**Example 7.2.** 设函数  $f(x)$  连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求  $f(x)$ .

**hints** 尝试去掉积分符号, 求导前做一些变换,

$$\begin{aligned}\int_0^x f(u)du &= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1 \\ f(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x}\end{aligned}$$

注意这里有  $f(0) = -1$  (要善于发现这样的条件), 设  $y = \int_0^x f(t)dt$ , 于是

$$y' - y = -e^{-x},$$

根据一阶线性方程的通解我们有

$$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2},$$

则  $f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$ . 由于  $f(0) = -1$ , 因此  $C = -\frac{1}{2}$ , 最终  $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .



## 该死的绝对值

**Annotation 7.3.** 有时候的积分结果带  $\ln|f(x)|$ ，这个时候在考虑要不要去绝对值的时候，可以采取的下述的手法

1. 如果提供了某个点  $(x_0, y_0)$ ，那么这个时候我们可以考虑去掉绝对值保留  $x_0$  所在的定义域，因为通解不需要表示全部的解，只要保证我们最终我们可以根据这个特殊的点确定某个特解即可！
2. 如果没有提供某个点，那么这个时候我们可以有条件的去掉绝对值
  - (a) 若是可分离变量方程，且里面没有无理数因子，我们可以把绝对值去掉
  - (b) 若是一阶线性方程，在对  $P(x)$  积分结果中出现  $\ln|f(x)|$ ，根据  $P(x)$  中的是否有无理数因子或者分母为偶数的因子，如果有，那么这个绝对值不要去掉，最后分类讨论；若没有，可以直接去绝对值。
3. 拿不准的时候，就彻底不取，直接开讨论就行。

**Example 7.4.** 求  $y(1) = 0$ ，且满足下述方程的  $y$

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

**hints** 显然这个是一个齐次微分方程，令  $u = \frac{y}{x}$ ，于是有

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan u = \ln|x| + C$$

题目中已经给定了一个点  $(1, 0)$ ，那么此时我们可以去掉绝对值，只考虑  $x > 0$  的情况，即有

$$u = \tan(\ln x + C) \Rightarrow y = x \tan(\ln x + C).$$

最后带入特殊点，得到  $C = 0$ ，最终有  $y = x \tan(\ln x + C)$

## 改变自变量

**Example 7.5.** 求下述方程的通解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^4}$$

**hints** 当且形式根本找不到方法求，那么我们考虑求以  $y$  为自变量的  $x = f(y)$  形式的函数，于是有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^4}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^3$$

即是关于自变量  $y$  一个线性方程。此时就可以直接用通项公式有

$$x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$$

## 解析几何

### 求直线在平面上的投影

**Annotation 8.1.** 如给定直线  $L$  和平面  $S$ , 求  $L$  在  $S$  上投影直线方程.

1. 确定与  $L$  和  $S$  法向量  $\eta$  都垂直的向量  $\gamma$ , 即  $L$  方向向量叉乘  $\eta$ ;
2. 确定以  $\gamma$  为法向量, 包含  $L$  的平面  $S'$ , 将  $L$  上一点带入由  $\gamma$  确定的平面方程;
3.  $S$  和  $S'$  相交的直线就是  $L$  在  $S$  上的投影直线方程.

### 旋转直线方程

**Example 8.2.** 求直线  $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$  绕直线  $L_1: \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$  旋转一圈所产生的曲面方程.

**hints** 这里要用一个局部的思想, 我们任取  $L$  上一点  $(x_0, y_0, z_0)$  考察它绕直线  $L_1$  旋转得到的方程

$$\begin{cases} z = z_0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 \end{cases}$$

再考虑点  $(x_0, y_0, z_0)$  在直线  $L$ , 目的是为了让上述方程取遍所有  $L$  上的点. 这里有

$$\begin{cases} x_0 = 2z_0 + 5 \\ y_0 = 3z_0 + 4 \end{cases}$$

将它们带入第一个方程, 即有

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2z+3)^2 + (3z+1)^2,$$

这就是我们要求的曲线方程.

## 多元函数

### 带不等式的条件极值

**Example 9.1.** 求函数  $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$  在椭圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上的最大值和最小值.

**hints** 这个不等式的取值范围是一个闭连通域, 我们只需要分别考虑它里面点构成的区域和边界上的点即可. 在这个椭圆里面唯一的驻点是  $(0, 0)$ , 其对应的函数值为 2; 在椭圆上的点满足  $y^2 = 4 - x^2$ , 则  $f(x)$  可以改写为

$$z = x^2 - (4 - x^2) + 2 = 5x^2 - 2,$$

其中  $-1 \leq x \leq 1$ , 那么其最大值为 3, 最小值为 -2. 三个驻点比较得出最终结果.

### 可微定义

**Example 9.2.** 设连续函数  $z = f(x, y)$  满足

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0,$$

求  $dz|_{(0,1)}$ .

**hints** 显然要从定义出发, 目标是整理出来定义的形式, 先求  $f(0, 1)$ , 由上式极限存在, 可以得到

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) = 2x - y + 2,$$

再由  $f(x, y)$  连续, 上述等式左边就等于  $f(0, 1)$ , 等式右边是个有限极限, 即  $f(0, 1) = 1$ . 我们再重新整理一下

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - f(0, 1) - 2x + (y - 1)}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0,$$

这就是  $f(x)$  在点  $(0, 1)$  处可微定义, 即  $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$ .

## 二重积分

### 交换次序更好积分

**Example 10.1.** 求积分

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx.$$

**hints** 明显这个被积函数对  $dx$  是不好积的, 于是考虑交换积分次序. 交换次序可以考虑画图来做, 于是有

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos x \Big|_0^1 = -\ln \cos 1.$$

**Example 10.2.** 设  $f(x)$  为连续函数, 定义

$$F(x) = \int_1^x dv \int_v^x f(u) du, x > 1,$$

求  $F'(x)$ .

**hints** 二重积分求导, 这显然直接求不了. 考虑先计算这个二重积分, 现在的积分次序导致我们无法对  $\int f(u) du$  处理, 所以先交换次序. 有

$$F(x) = \int_1^x du \int_1^u f(u) dv = \int_1^x (u-1)f(u) du.$$

被积函数是连续函数的变上限积分, 它的导数为  $(x-1)f(x)$ .

### 化极坐标

**Example 10.3.** 求积分

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

**hints** 被积函数出现  $x^2+y^2$ , 考虑化极坐标. 首先把极坐标方程写出来, 确定  $\theta$  变限在  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , 当固定一点  $x$  时, 此时  $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ , 那么考虑这个积分域的边界就有

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = 2\rho \cos \theta \Rightarrow \rho = 2 \cos \theta.$$

于是原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \cos^3 \theta}{3} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta = \frac{8}{3} (\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

## 三重积分

### 直角坐标

**Example 11.1.** 设  $\Omega$  由  $x^2 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  所确定, 求

$$\iiint_{\Omega} z^2 dv$$

**hints** 显然这是一个椭圆区域, 因此先考虑二重积分再单重积分,  $xOy$  上椭圆方程为

$$\frac{x^2}{1 - \frac{z^2}{3}} + \frac{y^2}{2^2(1 - \frac{z^2}{3})} = 1$$

这里可以直接套公式得出该椭圆面积为  $S = \pi ab = 2\pi(1 - \frac{z^2}{3})$ . 因此

$$\iiint_{\Omega} z^2 dv = 2\pi \int_0^1 z^2(1 - \frac{z^2}{3}) dz = \frac{28}{45}\pi$$

**Example 11.2.** 设  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2, y = x, y = 0, z = 1$  在第一卦限所围成的区域,  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续, 求  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  直角坐标表示  $\int dy \int dx \int f(x, y, z) dz$ .

**hints** 先是在  $xOy$  上积分, 那么先确定  $\Omega$  在其上的投影. 确定几条平面曲线: (1 因为  $z = 1$ , 那么椭圆抛物面在  $xOy$  上投影为  $x^2 + y^2 = 1$ . (2  $y = x$  (3  $y = 0$  (4 第一象限. 借助前面这些条件  $xOy$  上的投影是可以确定了. 对  $z$  积分, 可以想象我们在平面上对抛物线积分.

### 柱坐标

### 球坐标

## 多元积分的应用

### 第一类曲线积分

**Annotation 12.1.** 第一类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
3. 确定是否为特殊曲线做简化计算的操作, 例如关于坐标轴的对称, 轮换对称性等;
4. 若是曲线积分化定积分. 这一过程要注意弧长微分替换积分变量的过程, 而提到的参数方程的弧长微分为  $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ .

**Example 12.2.** 设  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 求

$$\oint_L xy ds$$

**hints** 这里要充分考虑  $L$  的性质, 对于任意  $L$  上一点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 显然点  $(y_0, x_0, z_0)$ ,  $(z_0, y_0, x_0)$  也都在  $L$  上, 因此  $L$  具有轮换对称性. 于是

$$\oint_L xy ds = \oint_L yx ds = \oint_L zy ds$$

考虑所给  $L$  的特殊性, 这里有

$$\oint_L (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \oint_L xy + yz + xz ds = 6 \oint_L xy ds = -2\pi,$$

因此

$$\oint_L xy ds = -\frac{\pi}{3}.$$

### 第二类曲线积分

**Annotation 12.3.** 第二类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方向;
3. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围 (1 常见的参数方程类型的曲线, 这种曲线有可能直接计算或者路径无关; (2 方程组形式的曲线, 例如两个曲面的交线, 这里情况下可能无法直接将曲线转换为参数方程, 就要小心比较巧妙的计算手法和化简步骤.

4. 确定平面曲线积分是否与路径无关, 常见判定手法 (1  $Pdx+Qdy$  是否是某个二元函数的全微分 (2  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . 若与路径无关考虑, (1 利用原函数直接计算 (2 化简单积分路线, 例如平行于坐标轴, 就化为两个定积分.
5. 确定是否为光滑的平面闭曲线, 若为光滑曲线考虑使用格林公式化二重积分, 注意曲线方向和其围成的区域  $D$  要遵守左手法则, 即绕着曲线的方向绕一圈, 区域  $D$  总是在观察者的左手边. 还需要注意被积函数  $P, Q$  在  $D$  上要有连续的一阶偏导;
6. 确定若不是平面闭曲线, 可以考虑做补线让其变成一个闭曲线, 再使用格林公式, 可能可以简化计算.
7. 确定是否为空间闭曲线, 若是空间闭曲线, 考虑使用斯托克斯公式, 注意曲线方向和曲面的法向量要遵守右手法则.

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

8. 直接计算, 使用公式

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)dt$$

**Example 12.4.** 计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$

其中  $L$  是  $x^2 + y^2 = 2$ , 方向为逆时针方向.

hints 千万注意这里不能直接使用格林公式, 因为被积函数有个奇点  $(0,0)$  在圆里面. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x+y}{4x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4x-y}{4x^2+y^2} \right),$$

因此考虑用一条闭曲线  $L_2$  ( $L_2$  在  $x^2 + y^2 = 2$  里面) 把这个奇点围起来, 设它的方向还是为逆时针, 那么可以两次用格林公式然后减去奇点所在的区域, 对剩下的曲线积分还是零, 即

$$\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2}dy - \int_{L_2} \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2}dy = 0,$$

因此

$$I = \int_{L_2} \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2}dy,$$

我们可以通过选择合适的  $L_2$  来避免引入奇点, 例如令  $L_2: 4x^2 + y^2 = 1$ , 那么

$$I = \int_{L_2} 4x - ydx + x + ydy = \iint_D 2dxdy = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi,$$

**Example 12.5.** 已知曲线  $L$  的方程为

$$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x \end{cases}$$

起点为  $A(0, \sqrt{2}, 0)$ , 终点为  $B(0, -\sqrt{2}, 0)$ , 计算曲线积分

$$I = \int_L (y + z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2 y^2 dz$$

**hints** 不能直接写出曲线的参数方程, 意味我们可能不能直接求化为普通的单重积分.  $L$  是一个空间曲线, 且通过  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  我们知道  $L$  是一条半圆弧,  $A, B$  是它的两个端点. 因此我们考虑补上直线段  $L_{BA}$ , 与  $L$  的方向保持一至. 设  $L$  和  $L_{BA}$  围成的封闭平面区域为  $\Sigma$ ,

$\Sigma$  在平面  $z = x$  上那么我们就可以使用 stokes 公式得到

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & z^2 - x^2 + y & x^2 y^2 \end{vmatrix} dS - \int_{L_{AB}} (y + z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2 y^2 dz$$

根据右手定则知道  $\Sigma$  的法向量为  $(1, 0, -1)$ , 因此方向余弦为  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . 于是

$$\iint_{\Sigma} \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2 y - 2z) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-2x - 1) \right| dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} 2x^2 y + 1 dS = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

其中  $\Sigma$  关于平面  $xOz$  对称, 因此  $\iint_{\Sigma} 2x^2 y dS = 0$ . 而

$$\int_{L_{AB}} (y + z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2 y^2 dz = \int_{L_{AB}} y dy = 0.$$

最终

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

**Example 12.6.** 设  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $y + z = 0$  的交线, 从  $z$  轴正向忘  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 求曲线积分

$$\oint_L z dx + y dz.$$

**hints** 这里直接用 stokes 公式

$$\oint_L z dx + y dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} dS$$



其中  $\Sigma$  为闭曲线  $L$  围成的平面区域, 其法向量为  $(0, 1, 1)$ , 因此其方向余弦为  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . 因此

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{2}} dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2} dx dy = \pi$$

其中  $\Sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ , 因此其在  $xOy$  上的投影区域  $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$ .

## 两类曲线积分关系

**Example 12.7.** 设  $L$  是圆周  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\mathbf{n}$  为  $L$  的外法线向量,  $u(x, y) = \frac{1}{12}(x^4 + y^4)$ , 求

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

hints 由方向梯度有

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta$  分别是  $\mathbf{n}$  方向余弦. 这里有两种手法来尝试计算.

方法 1 先展开这个方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{3}x^3 \cos \alpha + \frac{1}{3}y^3 \cos \beta,$$

这里我们尝试把  $\cos \alpha$  和  $\cos \beta$  求出来. 将对  $L$  曲线积分变成在极坐标下的普通积分,

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

其上任意一点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  处的外法线向量为

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta),$$

因此

$$\cos \alpha = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}, \cos \beta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}},$$

最终积分变为

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}{3} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

方法 2 这里用到第一类曲线积分和第二类曲线积分的联系. 设  $L$  上任意一点  $(x, y)$  处的逆时针方向切线  $l$  与  $x, y$  轴的方向余弦分别为  $\cos \gamma, \cos \delta$ . 那么这个  $\mathbf{n}$  相当于是  $l$  顺时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  得到的, 于是

$$\cos \alpha = \cos \delta, \cos \beta = -\cos \gamma.$$

因此原积分变为

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} \cos \delta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \gamma ds \\
 &= \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \quad (\text{两类积分的转换}) \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

## 第一类曲面积分

**Annotation 12.8.** 第一类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种  $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定是否为特殊的曲面做简化计算，例如关于坐标轴平面对称，轮换对称性等；
3. 直接计算，使用曲面微分的变量替换，需要注意  $x, y$  的区域  $D$  的确定

$$\int_{\Sigma} \int f(x, y, z) dS = \int_D \int \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

**Example 12.9.** 设  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ，求曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS.$$

[hints](#) 这道理按照球面来积分，好像有点难受. 首先我们做一个简单的代换

$$I = \iint_{\Sigma} 2ax dS = 2a \iint_{\Sigma} x dS,$$

其中  $\iint_{\Sigma} x dS$  可以看求曲面形心的  $\bar{x}$  中的分子，且球面的形心的  $\bar{x} = a$ ，从而

$$I = 2a \cdot a \cdot 4\pi a^2 = 8\pi a^4.$$

**Example 12.10.** 设薄片型物体  $S$  是圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  割下的有限部分，其上任一点的密度为  $u(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 求  $S$  的质量.

hints 这种题型看似复杂的曲面都难以想象，直接按照步骤来行。先确定圆锥面和柱面的交线

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 0$$

它在  $xOy$  上的投影是一个我们熟悉的圆。于是直接套公式就行

$$\begin{aligned} M &= \iint_S 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds \\ &= \iint_D 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dxdy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} 9\sqrt{2\rho^2} \sqrt{2} \rho d\rho \\ &= 64 \end{aligned}$$

其中  $(x-1)^2 + y^2 = 0$  的极坐标方程为  $\rho = 2\cos\theta$ 。

## 第二类曲面积分

**Annotation 12.11.** 第二类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种  $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定曲面的方向；
3. 确定曲面是否可以围成一个闭区域，考虑使用高斯公式

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

这里曲面需要取外侧方向，如果当且曲面是内侧方向则需要加负号，也需要确定  $P, Q, R$  是否具有二阶连续偏导。

4. 考虑是否可以增加补面围成一个闭区间来使用高斯公式。
5. 考虑将其转换为第一类曲面积分，计算每点的法向量  $\boldsymbol{\eta}$ ，利用法向量计算出对应的方向余弦，再利用

$$\iint_{\Sigma} P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

这样做的前提是可以化为第一类曲面积分之后可以简化计算。

6. 直接计算, 上述给定是  $z$  关于  $x, y$  方程, 那么曲线方向决定了曲面法线和  $z$  轴的夹角余弦值, 若余弦值是负的, 则需要在下式积分号就带负号

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} f(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

这里要注意若给定是  $y$  关于  $x, z$  的方程, 这里的余弦值则是看曲面法向量和  $y$  轴的夹角.

## 两类曲面积分的联系

**Example 12.12.** 设  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$  的下侧,  $f(x)$  为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy.$$

**hints** 这里有未知函数  $f(xy)$  肯定不能硬积分. 考虑转换第一类曲面积分, 曲面  $z$  的法向量  $\eta$  为

$$\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

这里方向是一致的, 因为  $\varepsilon_z \cdot \eta < 0$ . 为了方便计算方向余弦, 令  $\eta = (x, y, -z)$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \frac{x^2 f(xy) + 2x^2 - xy + y^2 f(xy) + 2y^2 + xy - z^2 f(xy) - z^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{(x^2 + y^2 - z^2) f(xy) + 2x^2 + 2y^2 - z^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} dS \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dS \end{aligned}$$

这样我们得到一个简洁的第一类曲面积分, 再将其放到  $xOy$  上的区域  $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  来计算, 于是得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{2}}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho \\ &= \frac{14\pi}{3} \end{aligned}$$

## 级数

### 级数判定总结

**Annotation 13.1.** 一些有用的资料

1. 遇到一个级数应该用怎样的手法总结.
2. 级数判定手法大全.

### 极限 test

**Example 13.2.** 讨论下述级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1).$$

**hints** 这里很难拿哪一个级数来做极限 test, 观察  $n \ln t$ , 我们可以将其泰勒展开, 找到最小的无穷小. 于是

$$\ln(1 + \frac{2}{2n-1}) = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2}(\frac{2}{2n-1})^2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{2n-1})^3 + o((\frac{2}{2n-1})^3).$$

那么

$$\begin{aligned} n \ln(1 + \frac{2}{2n-1}) - 1 &= -1 + \frac{2n}{2n-1} - \frac{n}{2}(\frac{2}{2n-1})^2 + \frac{n}{3}(\frac{2}{2n-1})^3 + o(n(\frac{2}{2n-1})^3) \\ &= \frac{2n+3}{3(2n-1)}(\frac{1}{2n-1})^2 + o(\frac{8n}{(2n-1)}(\frac{1}{2n-1})^2) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1}{(\frac{1}{2n-1})^2} = \frac{1}{3},$$

其中级数  $\sum_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2n-1})^2$  是收敛的, 所以原级数也是收敛的.

### 参数收敛

**Example 13.3.** 讨论下列级数收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$$

**hints** 展开  $\ln n!$ , 有

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < n \ln n < n^{1+\beta},$$

在  $n$  足够大的时候, 对任何  $\beta > 0$  都是成立. 因此

$$\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{n^{1+\beta}}{n^\alpha} = n^{1+\beta-\alpha},$$

因此取  $\alpha > 2$  时, 存在  $\beta$  使得

$$\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{1}{n} < \frac{n^{1+\beta}}{n^\alpha}.$$

即原级数在  $\alpha > 2$  是收敛的. 同理若  $\alpha \leq 2$  时, 是存在  $\beta$  使得  $1 + \beta - \alpha > -1$  的, 此时是无法判定其是否收敛的。

**Example 13.4.** 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}$  收敛, 求  $\alpha$  取值.

**hints** 先用比较审敛法确定一收敛与原级数收敛性相同的级数, 显然这样选择一个调和级数  $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ , 来验证一下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

判定调和级数的收敛性, 需要  $\alpha > \frac{3}{2}$ .

## 带-1 的幂次

**Example 13.5.** 判断下述级数的收敛性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\ln n}$$

**hints** 这个级数奇数时为零, 因此我们写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln 2n}$$

这个级数显然是发散的, 因为在  $n$  足够大时  $\frac{2}{\ln 2n} \geq \frac{1}{n}$ .

## 不标准的幂级数

**Example 13.6.** 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$$

的收敛半径.

**hints** 这是一个不标准的幂级数, 无法直接用结论. 所以先化标准的形式  $a_n x^n$ . 先考虑积分, 消掉指数的常数, 即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} x^{2n}.$$

再令  $u = x^2$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} u^n$  的收敛半径, 根据结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

因此其收敛半径为 3, 所以  $|x| < \sqrt{3}$ , 即原级数的收敛半径为  $\sqrt{3}$ .

## 利用傅里叶公式求和

**Example 13.7.** 求下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$$

**hints** 考虑  $s(x) = \frac{x}{\pi}$  在  $(-\pi, \pi)$  上的傅里叶级数, 它是一个奇函数因此

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{\pi} \sin nx dx \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}.$$

显然有

$$s(1) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = \frac{1}{\pi},$$

因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$

## 利用已有的幂级数求和

**Example 13.8.** 求下述幂级数的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} x^{2n}.$$

**hints** 这个级数显然不能在有限次的积分或者求导来一般手法求和, 考虑把它拆开成熟悉的级数, 这里可以拆成两个熟悉的三角函数:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} - 1 = -x \sin x + \cos x - 1.$$

## 构造微分方程

**Annotation 13.9.** 下面两种形式可以尝试构造微分方程:

1. 形如  $a_n x^{f(n)}$ ,  $a_n$  里面含有关于  $f(n)$ .
2. 可以构造  $g(a_n)$  使得其含有关于  $f(n)$  的因子.

**Example 13.10.** 求下述幂级数的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!!}$$

**hints** 连续的求导和积分似乎很难做到, 这里就很有技巧了, 可以构造含  $S(x)$  一阶微分方程. 其中

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}x}{(2n-2)!!} = -xS(x),$$

解这个微分方程得到  $S(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ , 因为这里  $S(0) = 1$ , 最终得到  $S(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

## 化增量公式

**Example 13.11.** 求下述幂级数的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**hints** 观察这个系数有点像  $e^x$  的幂级数, 但是只有奇数项. 那么偶数项其实就是  $S'(x)$ , 因此  $S'(x) + S(x) = e^x$ , 由此解得  $S(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$ , 由  $S(0) = 0$ , 最终可得  $S(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$

**Example 13.12.** 考虑调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的收敛性.

**hints** 这次我们不从部分和出发, 我们考虑它和另级一个发散的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n],$$

来比较. 考虑这个函数  $\ln(n+1) - \ln n$  在  $[n, n+1]$  上的增量公式

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{(n+\theta)}, \theta$$

于是

$$\frac{1}{(n+\theta)} < \frac{1}{n},$$

因此  $\frac{1}{n}$  是收敛的.

**Example 13.13.** 考虑级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{n^{1+s}}$  的收敛性, 其中  $s > 0$ .

**hints** 同样引入收敛级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^s} - \frac{1}{(n)^s}$  来做比较. 考虑函数  $\frac{1}{(n-1)^s} - \frac{1}{(n)^s}$  在  $[n-1, n]$  上的增量公式

$$\frac{1}{(n-1)^s} - \frac{1}{(n)^s} = \frac{1}{(n-\theta)^{1+s}}, 0 < \theta < 1,$$



那么

$$\frac{1}{n^{1+s}} < \frac{1}{(n-\theta)^{1+s}},$$

因此原级数收敛.

**Example 13.14.** 分析下述级数的收敛性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

hints 那个级数要比调和级数每一项  $\frac{1}{n}$  小那么一点, 因此考虑和  $\frac{1}{n^s}$  比较, 也可以换个级数来比较. 考虑级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \ln(n+1) - \ln \ln n,$$

显然这级数是发散的, 如果我们考虑函数  $\ln \ln(n+1) - \ln \ln n$  在  $[n, n+1]$  上的增量公式

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = \frac{1}{(n+\theta) \ln(n+\theta)}, 0 < \theta < 1,$$

那么有

$$\frac{1}{(n+\theta) \ln(n+\theta)} < \frac{1}{n \ln n},$$

因此原级数发散.

## 综合证明题

### 级数

**Example 14.1.** 设数列  $a_n, b_n$  满足  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛. 证明: (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; (2) \text{ 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

hints (1) 由级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos a_n - a_n = 1,$$

设辅助函数  $f(x) = \cos x - x$ , 其  $f'(x) = -\sin x - 1$ , 那么它在  $(0, \frac{1}{\pi})$  是单调递减的, 而  $f(0) = 1$ , 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(2 方法 1: 直接求

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos b_n}{b_n^2} \cdot \frac{a_n}{1 - \cos b_n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1 - \cos b_n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a_n}{1 + a_n - \cos a_n} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

方法 2(未完成): 想办法把  $a_n$  表示出来, 稍微变换一下题目中的式子

$$(\cos a_n - a_n) - (\cos b_n - b_n) = b_n,$$

还是使用上面的辅助函数  $f(x)$ , 这里用一下中值定理有

$$f(a_n) - f(b_n) = (a_n - b_n)(-\sin \theta - 1)$$

其中  $\theta$  在  $a_n$  和  $b_n$  之中. 于是

$$a_n = b_n - \frac{b_n}{1 + \sin \theta},$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(b_{n+1} - \frac{b_{n+1}}{1 + \sin \theta_2})}{b_{n+1}(b_n - \frac{b_n}{1 + \sin \theta_1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_2(1 + \sin \theta_1)}{\sin \theta_1(1 + \sin \theta_2)}$$

## tricks

### 一些有趣的不等式

**Proposition 15.1.**

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \quad a > 1.$$

*hints* 伯努利不等式.

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx, \quad n \geq 0, x \leq -1.$$

使得  $(1 + x) = a^{\frac{1}{n}}$ , 即可得到上式.

**Proposition 15.2.**

$$\sin x < x, \quad 0 < x < +\infty$$

**Proposition 15.3.**

$$\ln(1 + x) < x, \quad -1 < x < +\infty$$

### Stirling 公式

**Proposition 15.4.**

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n).$$

经常用于拆解  $\ln n!$  有奇效.

### 高数积分

**Proposition 15.5.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$