考研高数

枫聆

2021 年 5 月 25 日

目录

经典证明

Definition 1.1. 连续函数在闭区间上有界 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，那么它在其上有界.

证明. $f(x)$ 非空子区间 $[a, x]$，求其上确界 假设 B 是使得 $f(x)$ 在形如闭区间 $[a, x]$ 上有界的 $x \in [a, b]$ 集合，显然 $a \in B$，所以 B 非空。若 $e \in B$ 且 $e > a$，那么 a 和 e 之间的点都是在 B 里面的，所以实际上 B 是一个闭区间. 我们再考虑 B 的上确界，根据 x 的取法，有 $x \leq b$，如果我们能证明它的上确界在 b 出取得，那么整个命题就得证. 现在假设 $\sup(B) < b$, 由于 B 是一个闭区间，所以 $\sup(B) \in B$. 由于 f 是连续的，那么足够靠近 $\sup(B)$ 的地方，即 $s - \sup(B) < \delta$ 且 $s > \sup(B)$，有 $|f(s) - f(\sup(B))| < \varepsilon$，那么 $[\sup(B), s]$ 也是有界，这是和 $\sup B$ 是 B 的上确界矛盾的. □

Definition 1.2. 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 连续，那们存在 $c, d \in [a, b]$ 使得

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d),\ x \in [a, b].$$

证明. □

Definition 1.3. 如果 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且在开区间 (a, b) 内可导，若有 $f(a) = f(b)$，那么存在至少一个 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c) = 0.$$

证明. □

函数极限