考研概率论

枫聆

2021 年 5 月 31 日

目录

随机事件和概率

基本定义

Definition 1.1. 对随机现象进行观察或者实验被成为随机试验当且仅当满足以下条件

1. 可以在相同的条件下重复实验;
2. 所得的可能结果不止一个，且所有可能结果都能事前已知;
3. 每次具体实验之前无法预知出现的结果.

Definition 1.2. 随机试验的每一可能的结果为被称为样本点，所有样本点构成的集合被称为样本空间.

Definition 1.3. 样本空间的任一子集被称为随机事件. 其中每个单点集被称为基本事件. 事件 Ω 被称为必然事件当且仅当每次试验必有 Ω 中某一样本点发生. 特别地，把空集 $\emptyset$ 称为不可能事件.

Definition 1.4. 若事件 A 的发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$. 若 $A \supset B$ 和 $A \subset B$ 同时成立，则称事件 A 和事件 B 相等，记为 $A = B$.

Definition 1.5. 给定事件 A 和 B, 它们的交记为 $A \cap B$ 或者 AB, 表示其所有的公共样本点构成的事件. 这样事件的发生，将导致事件 A 和 B 同时发生. 它们的并记为 $A \cup B$，表示它们所有样本点放在一起构成的事件，这样的事件发生将导致至少事件 A 和 B 其中一个发生.

Definition 1.6. 给定事件 A 和 B，若它们的交 $AB = \emptyset$，则称事件 A 和 B互斥或者互不相容. 若它们的并 $A \cup B = \Omega$，且 $AB = \emptyset$，则称事件 A 和 B 为对立事件或者互逆事件，记为 $\bar{A} = B$ 或者 $\bar{B} = A$.

Definition 1.7. 给定事件 A 和 B，它们的差记为 $A - B$，表示事件 A 有而 B 没有的样本点，通俗地来讲表示事件 A 发生而 B 不发生的样本点组成的新事件.

Definition 1.8. 设试验 E 的样本空间为 Ω，real-valued 函数 $P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 被为一个概率函数，其中 $\mathcal{A}$ 被称为输入空间或者事件空间，即样本空间的幂集. 当其满足如下条件 (Kolmogorov axioms) 时

1. 对于任意的 $A \in \mathcal{A}$，有 $P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. 对于一个两两不相交的事件可数序列 $A_1, A_2, \cdots$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 成立.

则成 P 是试验 E 的一个概率分布. 这个 real-value P 其实看做一个代数形式，其需要满足 3 个公理.

Definition 1.9. 给定事件 A 和 B，且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

Definition 1.10. 若事件 A, B 满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B相互独立. 从条件概率看两个事件的独立性，也就是其中一个发生的概率是不会影响另一个发生的概率.

基本性质和运算法则

Proposition 1.11. 事件相关的运算法则

1. 交换律 $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2. 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$; $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$

Proposition 1.12. 概率分布相关性质

1. $P(\emptyset) = 0$;

2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

3. $A \subset B$，则 $P(A) \le P(B)$;

4. $0 \le P(A) \le 1$;

证明. (2) 因为 $P(\Omega) = P(A\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.

(1) 可以马上通过 (2) 直接得到.

(3) P 满足单调性，可以根据 Kolmogorov axioms(3) 很自然地可以得到.

(4) $P(\emptyset) \le P(A) \le P(\Omega)$. □

Proposition 1.13. 五大概率公式

1. 加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

2. 减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

3. 乘法公式 当 $P(A) > 0$ 时，$P(AB) = P(A)P(B|A)$;
   当 $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 时，$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$.

4. 全概率公式 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，$B_iB_j = \emptyset$ 且 $P(B_k) > 0$，$k = 1, 2, \cdots, n$，则对任意事件有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

   其中称满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，$B_iB_j = \emptyset$ 的 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为一个完备事件组. 通常把 $P(B_1), P(B_2), \cdots, P(B_n)$ 叫做先验概率. 全概率公式的意义在于可以将复杂的事件 A 划分为简单互斥事件 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$，再结乘法公式计算出 A 的概率.

5. 贝叶斯公式 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i=\Omega$，$B_iB_j=\emptyset$ 且 $P(A)>0,P(B_k)>0$，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},\ j=1,2,\cdots,n.$$

证明. (2) $P(A)=P(AB\cup A\bar{B})=P(AB)+P(A-B)$.

(1) $P(A\cup B)=P((A-AB)\cup(B-AB)\cup AB)$, 再根据 (2) 有

$$\begin{aligned}P((A-AB)\cup(B-AB)\cup AB) &= P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB)\\ &= P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

实际上这里还是要分类讨论一下当 $A=B$ 的时候.

(3) 条件概率的另一种写法.

(4) $P(A)=P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}AB_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}P(AB_i)$，再用 (3) 替换一下即可.

(5) $P(B_j|A)=\frac{P(B_jA)}{P(A)}$，用 (3) 和 (4) 分别替换分子和分母即可.

□