考研高数习题集

枫聆

2021 年 8 月 13 日

目录

1 极限相关 **2**
1.1 1^{∞} 类型极限 2
1.2 1^{0} 类型极限 2
1.3 夹逼准则应用 3
1.4 级数相关的极限 4
1.5 去除根式的尴尬 6
1.6 换元取极限 7
1.7 递归求极限 7
1.8 等价无穷小的替换 7

2 tricks **8**
2.1 一些有趣的不等式 8

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x)=0, \lim \beta(x)=\infty$，且 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$，其中 A 是一个常数，则

$$\lim\left[1+\alpha(x)\right]^{\beta(x)}=e^{A}.$$

hints 带指数形式的表达式，第一想法是把指数拿下来

$$\lim\left[1+\alpha(x)\right]^{\beta(x)}=\lim e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}=\lim e^{\beta(x)\alpha(x)}=e^{A}.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}=\left(\frac{x}{x-a}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x}{x+b}\right)^{x}=\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{b}{x+b}\right)^{x}=e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{n}.$$

hints 往 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{n}=\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)^{n}$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{3}\cdot n=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}}\right)$$

1^0 类型极限

Example 1.4. 若 $\lim \alpha(x)=0, \lim \beta(x)\alpha(x)=0$，则

$$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))}-1\sim e^{\beta(x)\alpha(x)}-1\sim\beta(x)\alpha(x).$$

夹逼准则应用

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2+n}\le s\le\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

hints

$$x-1\le[x]\le x$$

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1}\right)\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.8. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

hints 直接考察

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}\right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分，即对任意的 $\varepsilon > 0$，可以找到一个 n_1，使得 $n > n_1$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_{n_1}-A)}{n} + \tfrac{(a_{n_1+1}-A)+(a_{n_1+2}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|\\ \le\ & \tfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{n_1}-A|}{n} + \tfrac{|a_{n_1+2}-A|+|a_{n_1+1}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\end{aligned}$$

上述不等式右边第一项，形如 $\frac{C}{n}$，因为先对任意 $n > n_1$ 都有上述不等式成立，那么只需要让 n 取的大一点，就能使得 $\frac{C}{n} < \varepsilon$(阿基米德公理). 右边第二项显然小于 $\frac{n-n_1}{n}\varepsilon$，于是综上

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值，我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来，然后用初等方法来验证，再根据极限的唯一性，就得到了答案. 把 a_n 换成形式，例如

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Example 1.9. 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim \frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握，用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k} \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \sim_\infty n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.10. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性，所以 $\lim \ln a_n = \ln a$，再根据*1.8*.

Example 1.11. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据*1.10*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{lna} = a.$$

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 *1.11* 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 *(*假设 a_n 的极限存在*)*. 那么有一个推论，对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$，只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可，那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)=x^k\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

那么

$$x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$，这个 $\mathcal{O}$ 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法，即下面的恒等式

$$y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\cdots+z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y=\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z=x$，那么原式就变成了

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)-x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}}\\
&= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-2}x+\cdots+1} \qquad \text{上下除以 } x^{k-1}
\end{aligned}$$

分母中 $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$ 是趋于 1 的，再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性，取其函数值也是等于 1，所以分母就有 $k\cdot 1$.

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\frac{\ln n}{n}}=1.$$

也可以使用一下2.1的伯努利不等式来证明，这里设 $\sqrt[n]{n}=1+h$，那么

$$\begin{aligned}
&n=(1+h)^n=1+nh+\tfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\\
\Rightarrow\ &n\geq\tfrac{n(n-1)}{2}h^2\\
\Rightarrow\ &h^2\leq\tfrac{2}{n-1}.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，$h\to 0$，即 $\sqrt[n]{n}-1\to 0$，所以 $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

换元取极限

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x},\ m\in\mathbb{N}.$$

hints 设 $y=\sqrt[m]{x+1}-1$，显然 y 在 $x=0$ 处连续，所以当 $x\to 0$ 时有 $y\to 0$，那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{(y+1)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式，分母二项式展开.

Example 1.16. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{n}{m}}-1}{x}.$$

hints 还是使得 $y=(x+1)^{\frac{1}{m}}-1$，那么就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}\frac{y}{(1+y)m-1}=\frac{n}{m}.$$

递归求极限

Example 1.17. 1.7 单调数列求极限

hints 考虑递归式

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a=a\cdot 0\Rightarrow a=0.$$

等价无穷小的替换

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 2.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n},\ a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1+x)^n \leq 1 + nx,\ n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1+x) = a^{\frac{1}{n}}$，即可得到上式.