考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 28 日

目录

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$，且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$，其中 A 是一个常数，则

$$\lim\, [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

hints 带指数形式的表达式，第一想法是把指数拿下来

$$\lim\, [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x = \left(\frac{x}{x-a}\right)^x \cdot \left(\frac{x}{x+b}\right)^x = \left(1 + \frac{a}{x-a}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{b}{x+b}\right)^x = e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n.$$

hints 往 $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3}\right)$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{c} - 1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c} - 1}{\frac{1}{n}}\right)$$

1^0 类型极限

Example 1.4. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$，则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

夹逼准则应用

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2+n}\le s\le\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

hints

$$x-1\le[x]\le x$$

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1}\right)\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.8. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

hints 直接考察

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分，即对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到一个 n_1，使得 $n>n_1$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_{n_1}-A)}{n}+\tfrac{(a_{n_1+1}-A)+(a_{n_1+2}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|\\ \le&\tfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{n_1}-A|}{n}+\tfrac{|a_{n_1+2}-A|+|a_{n_1+1}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\end{aligned}$$

上述不等式右边第一项，形如 $\frac{C}{n}$，因为先对任意 $n>n_1$ 都有上述不等式成立，那么只需要让 n 取的大一点，就能使得 $\frac{C}{n}<\varepsilon$(阿基米德公理). 右边第二项显然小于 $\frac{n-n_1}{n}\varepsilon$，于是综上

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|<\varepsilon+\frac{n-n_1}{n}\varepsilon<2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值，我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来，然后用初等方法来验证，再根据极限的唯一性，就得到了答案. 把 a_n 换成形式，例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Example 1.9. 求极限

$$x_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots}=\frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握，用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k}\frac{k}{n}=\int_0^1 x^k=\frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=n^{k+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\sim_\infty n^{k+1}\int_0^1 x^k dx=\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.10. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性，所以 $\lim \ln a_n = \ln a$，再根据*1.8*.

Example 1.11. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据*1.10*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{lna} = a.$$

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 *1.11* 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 *(*假设 a_n 的极限存在*)*. 那么有一个推论，对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$，只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可，那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)=x^k\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

那么

$$x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$，这个 $\mathcal{O}$ 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法，即下面的恒等式

$$y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\cdots+z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y=\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z=x$，那么原式就变成了

$$\begin{aligned}&=\frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)-x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}}\\&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-2}x+\cdots+1}\quad\text{上下除以 } x^{k-1}\end{aligned}$$

分母中 $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$ 是趋于 1 的，再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性，取其函数值也是等于 1，所以分母就有 $k\cdot 1$.

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\frac{\ln n}{n}}=1.$$

也可以使用一下*13.1*的伯努利不等式来证明，这里设 $\sqrt[n]{n}=1+h$，那么

$$\begin{aligned}&n=(1+h)^n=1+nh+\tfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\\\Rightarrow\ &n\geq\tfrac{n(n-1)}{2}h^2\\\Rightarrow\ &h^2\leq\tfrac{2}{n-1}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，$h\to 0$，即 $\sqrt[n]{n}-1\to 0$，所以 $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$$

hints 考虑把根式里面变成 $(1+\alpha(x))$ 的形式，因此考虑提出一个因子 x

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-\frac{\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{3}.$$

换元取极限

Example 1.16. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x},\ m\in\mathbb{N}.$$

hints 设 $y=\sqrt[m]{x+1}-1$，显然 y 在 $x=0$ 处连续，所以当 $x\to 0$ 时有 $y\to 0$，那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{(y+1)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式，分母二项式展开.

Example 1.17. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{n}{m}}-1}{x}.$$

hints 还是使得 $y=(x+1)^{\frac{1}{m}}-1$，那么就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}\frac{y}{(1+y)m-1}=\frac{n}{m}.$$

递归求极限

Example 1.18. 1.7 单调数列求极限

hints 考虑递归式

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a=a\cdot 0\Rightarrow a=0.$$

等价无穷小的替换

中值定理

Example 1.19. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x].$$

hints 对连续函数 $\ln\arctan x$ 应用中值定理

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\frac{1}{[1+(\theta+x)^2]\arctan(\theta+x)},$$

其中 $0<\theta<1$. 那么即有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+(\theta+x)^2}\frac{1}{\arctan(\theta+x)}=\frac{1}{\pi}.$$

含积分的极限

Example 1.20. 求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$$

hints 这样的含参数积分最好的办法就是洛必达，但是这里首先需要换元一下，令 $u=x-t$，则

$$\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt = \int_0^x \sqrt{u}e^{x-u}du = e^x\sqrt{u}e^{-u}du.$$

再用洛必达

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{e^x\sqrt{u}e^{-u}du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \frac{x^{\frac{1}{2}}e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

没有具体的函数表达式

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶导数存在，求

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}.$$

hints 直觉告诉它的结果和二阶导有关，但是任何初等方法都化不出来二阶导的定义，这个时候可以考虑用一下洛必达

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}=\frac{1}{2}f''(a).$$

导数

导数定义相关的

Example 2.1. 已知 $f'(x_0)=-1$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}.$$

hints直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}=-1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}=-1$$

求出需要 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{x}$ 和 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{x}$，两项相减再取倒.

泰勒公式求高阶导数

递归法求高阶导数

Example 2.2. 设

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

求 $f^{(n)}(0)$.

hints 这道题你想求它的麦克劳林级数其实不太好求 (https://math.stackexchange.com/questions/549028/deriving-maclaurin-series-for-frac-arcsin-x-sqrt1-x2)，实际上也不用求出通项，因为只需要求 $x=0$ 的情况，这里有比较 trick 的利用递归式的手法. 先求它的一阶导

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)^{3/2}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2}.$$

这里构造一个微分方程

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

两边求 n 次，根据 n 的莱布尼茨公式有

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^n(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

带入 $x=0$，这里就可能消掉 $f^{(n)}$ 的项，得到一个递归式

$$f^{(n+1)}(0) - n^2 f^{(n-1)}(0).$$

这里我们让 $n = n+1$，则有

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

我们可以求出最前面的两项 $f'(0) = 1$ 和 $f''(0) = 0$，于是这里有

$$f^n(0) = \begin{cases} 0 & n = \text{奇数} \\ (n-1)^2 \times (n-2)! \times \cdots \times 2! & n = \text{偶数} \end{cases}$$

奇数下的情况可以化简为 $2^{n-1}((\frac{n-1}{2})!)^2$

函数性质

求零点

Example 3.1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f'_+(a)>0, f'_-(b)>0, f(a)\geq f(b)$. 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两个零点.

hints $f'(x)$ 有两个零点，也就是有两个极值点. 这样的题目最好还是构造相应的函数，用罗尔定理来做. 设 $g(x)=f(x)-f(a)$ 和 $h(x)=f(x)-f(b)$，我们思路是确定 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的一个零点，那么就可以用罗尔定理来确定两个 $f'(x)$ 的零点. 确定 $g(x)$ 和 $h(x)$ 零点，我们要用零点定理来做. 由于 $f'_+(a)>0$，根据导数的定义有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}>0\Rightarrow f(a+\xi_1)>f(a),\xi_1>0$$

同理，由于 $f'_-(b)>0$，我们可以得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(b-x)-f(b)}{-x}>0\Rightarrow f(b-\xi_2)<f(b),\xi_2>0.$$

注意这里的 $\Rightarrow$ 用到的是极限的保号性. 于是这里由零点定理有

$$g(a+\xi_1)>0,g(b-\xi_1)\leq 0\Rightarrow g(\theta_1)=0,\ a+\xi_1<\theta_1<b-\xi_1$$

因此存在 $f(\theta_1)=f(a)$. 同理有

$$h(a+\xi_1)>0,h(b-\xi_2)<0\Rightarrow g(\theta_2)=0,\ a+\xi_1<\theta_2<b-\xi_1$$

因此存在 $f(\theta_2)=f(b)$.

现在需要分类讨论一下，若 $\theta_1\leq\theta_2$，则根据罗尔定理我们可以在 (a,θ_1) 及 (θ_2,b) 上各找到一个零点. 若 $\theta_1>\theta_2$，此时由 $g(a+\xi_1)>0,g(\theta_2)\leq 0$，存在一点 θ_3 使得 $f(\theta_3)=0$，同理由 $g(\theta_1)\geq 0,g(b-\xi_2)<0$，可以找到一点 θ_4 使得 $f(\theta_4)=0$，这样 $\theta_3<\theta_4$，回到了前面一种情况. 证闭!

不定积分

多项式分式

Example 4.1. 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2\arctan x - 2x + C,$$

Example 4.2. 求

$$\int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

hints观察分子多项式次数小于分母的，且只小一次，所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 8\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} d(x^2 - 6x + 13) + 8\int \frac{1}{4 + (x - 3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 13) + 4\arctan\frac{x - 3}{2} + C.$$

Example 4.3. 求

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$$

hints 观察分子多项式次数小于分母，且小两次，所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4 + (x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4 + (x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2 + 1}{2} + C$$

分母带根号

Example 4.4. 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}.$$

hints根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} d(x - 2) = \arcsin\frac{x - 2}{2} + C$$

Example 4.5. 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$$

hints 先分式把分子根号里面的微分

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{2} + C$$

Example 4.6. 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

hints 考虑第二类换元，令 $x = a\sin t$，则

$$\int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int 1-\cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4}\sin 2t.$$

把 t 变成 x 也有一点技巧，第二项可以变成 $\frac{1}{2}(a\sin t)(a\cos t)$，其中 $a\sin t = x, a\cos t = \sqrt{a^2-x^2}$，这样会方便一点

$$\frac{a^2\arcsin\frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

Example 4.7. 求

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}.$$

hints这里还是要凑根号下的微分，有比较多的凑法，这里提及一种凑微分再配合三角换元的，

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2\sqrt{(x^2)^2+1}},$$

令 $x^2 = \tan u$，于是得到

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin u}du = \frac{1}{2}\ln|\csc u + \cot u|.$$

再带回 x 即可.

Example 4.8. 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}.$$

hints 这里目标肯定是换元换成我们熟悉的积分，但是找不到因子提到微分符号里面，这时可以分母提一个 x^3 出来，就可以换元了

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C$$

这里也可以尝试令 $x=\frac{1}{t}$，有

$$-\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}=\int \frac{d\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

换元法

Example 4.9. 求

$$\int \sqrt{1+e^x}dx$$

hints考虑第二类换元，令 $x=\ln(t^2-1)$，则

$$\int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int 1+\frac{1}{t^2-1}dt=2t+\ln|\frac{t-1}{t+1}|+C$$

带入 $t=\sqrt{e^x+1}$，即得

$$2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$$

高次

分部积分

三角有理式

Example 4.10. 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}.$$

hints 这里有一个非常巧妙的第二类换元，令 $x=\arcsin u$，则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1+u)}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)}du.$$

再把有理式拆开，这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)}du=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}du=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+u)}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin x}+C.$$

Example 4.11. 求

$$\int \frac{dx}{\sin x(\sin x+\cos x)}.$$

hints 考虑第二类换元，令 $x=\operatorname{arccot} u$，则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}})}\frac{1}{1+u^2}du=-\int \frac{1}{1+u}du=-\ln|u|+C=-\ln|1+\cot x|+C.$$

Example 4.12. 求

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

hints 这种情况可以考虑先化简一下分子，即上下乘以 $(\cos x-\sin x)$，这样之后就可以考虑部分分式.

递归式

Example 4.13. 求

$$\int e^{ax}\cos nx dx.$$

hints分部积分 2 次回到原积分

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos nx dx=\frac{1}{a}\int \cos nx de^{ax} &= \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos nx+n\int e^{ax}\sin nx dx\right)\\ &= \frac{1}{a}\left[e^{ax}\cos nx+\frac{n}{a}\left(e^{ax}\sin nx-n\int e^{ax}\cos nx dx\right)\right]\end{aligned}$$

整理两边即得

$$\frac{n^2+a^2}{a^2}\int e^{ax}\cos nx dx=\frac{ae^{ax}\cos nx+ne^{ax}\sin nx}{a^2}\Rightarrow \int e^{ax}\cos nx dx=\frac{ae^{ax}\cos nx+ne^{ax}\sin nx}{a^2+n^2}$$

类似的有

$$\int e^{ax}\sin nx dx=\frac{ae^{ax}\sin nx-ne^{ax}\cos nx}{a^2+n^2}$$

被积函数含不常见函数形式

Example 4.14. 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx.$$

hints 必须得想办法吧 $\arcsin e^x$ 提出来，因为我们没有已知原函数导数为反三角的，这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x})=-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\int e^{-x}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$$

这里令 $t=\sqrt{1-e^{2x}}$，那么 $x=\frac{\ln(1-t^2)}{2}, dx=\frac{-t}{1-t^2}dt$，于是

$$\int \frac{1}{t}\frac{-t}{1-t^2}dt=\int \frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}+C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}+C$$

Example 4.15. 求

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx, x>0$$

hints首选分部积分，但是为了为了能部分积分，我们必须先第一类换元，令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，那么 $x=\frac{1}{t^2-1}$，于是

$$\int \ln(1+t)d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int\frac{1}{(1+t)^2(t-1)}=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(1+t)^2(t-1)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2(1+t)}+C.$$

因此

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2(1+t)}+C.$$

定积分

参数积分求导

Example 5.1. 设 $f(x)$ 连续，求

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt.$$

hints 对于这种第二类的参数积分，对于有比较简洁的结果的，首先应该换元试试，令 $u=x^2-t^2$，那么即有

$$-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du=xf(x^2).$$

奇怪的定积分

Example 5.2. 设 $f(x)=\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$.

hints 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x)dx=xf(x)|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)dx=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi \sin x dx=2.$$

不太好积的带三角函数的积分

Example 5.3. 求

$$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

hints 如果不能一眼看出来

$$I=-\int_0^\pi xd\arctan\cos x=-x\arctan\cos x|_0^\pi+\int_0^\pi \arctan\cos x.$$

后面这个积分，令 $u=\pi-x$，则可以得到

$$\int_0^\pi \arctan\cos x=-\int_0^\pi \arctan\cos x,$$

即它是等于零的.

尝试方法 我们要充分利用三角函数的性质，一开始我们令 $u=\pi-x$，则有

$$I=\int_0^\pi \frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^u}\to 2I=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\arctan\cos x|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$$

待定系数收敛反常积分

Example 5.4. 求满足下式的 a, b

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=1$$

hints 首先化简一下

$$\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}dx$$

若上述积分收敛，则 $b=a$. 于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{2x^2+ax}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+a}dx=\ln\frac{x}{2x+a}\bigg|_1^{+\infty}=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2+a}=1\Rightarrow a=2e-2.$$

化为极限形式

Example 5.5. 求

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$$

hints 考虑部分分式

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{x}{1+e^{-x}}\bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}$$

你会发现第一个积分是发散的，这里我们考虑把它转换为极限的形式

$$\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{x}{1+e^{-x}}\bigg|_0^a-\int_0^a\frac{1}{1+e^{-x}}dx\right]=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{a}{1+e^{-a}}-\int_0^a\frac{e^x}{1+e^x}dx\right]=\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{a}{1+e^{-a}}-\ln(1+e^a)+\ln 2\right]$$

其中

$$\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{a}{1+e^{-a}}-\ln 1+e^a\right]=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-a}}(a-(1+e^{-a})\ln(1+e^a))=\lim_{a\to+\infty}\ln e^a-\ln(1+e^a)-\frac{\ln(1+e^a)}{e^a}=0$$

因此原积分等于 $\ln 2$.

反常积分

含有 e^x 的被积函数

Example 6.1. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ax} dx \ (\mu, a > 0).$$

hints比较审敛法，取任意的 $\lambda > 1$，即 $\frac{1}{x^\lambda}$ 是收敛的，于是

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\mu e^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{u+\lambda}}{e^{ax}} = 0,$$

因此原无穷积分也是收敛的.

Example 6.2. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

hints这里需要注意两个上下积分限都需要考察，我们可以将上述积分划分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int_0^{A} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \int_A^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}},$$

其中 $A \in (0, +\infty)$. 当 $x \to 0$ 时，取 $0 < \lambda < 1$，于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = 0,$$

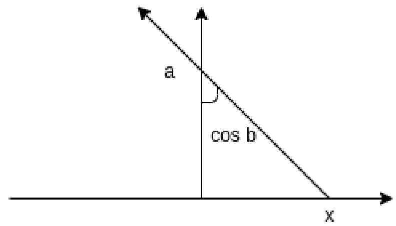
即积分 $\int_0^A \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ 是收敛的. 当 $x \to \infty$ 时，取 $\lambda > 1$，于是

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \cdot x^{-(2\lambda+2)-x^{-(2\lambda+2)}}}} = 0,$$

定积分的应用

Example 6.3. 设无穷长直线 L 的线密度为 1，引力常数为 k，则 L 对距直接为 a 的单位质点.

hints 首先得知道万有引用公式 $F = k\frac{Mn}{r^2}$. 再考虑直线上某个点对给定单位质点的引力，然后考虑这些引力的合成. 示意图为



设 L 所在的直线为 x 轴，y 轴过给定的单位质点. 由示意图这些力的合成一定是在 y 轴上的，关于 F_y 的微分为

$$dF_y = k\frac{kdx}{a^2+x^2}\cos b = \frac{kadx}{(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

因此

$$F_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kadx}{(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = 2ka\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $x = a\tan u$，则有

$$F_y = 2ka\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sec^2 u}{a^3\sec^3}du = \frac{2k}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2k}{a}$$

待定参数

Example 6.4. 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$$

收敛，求 a, b.

hints 这道题还是用柯西审敛法，注意要同时考虑积分上下限. 当 $x \to +\infty$，那么就要和 $\frac{1}{x^\lambda}(\lambda > 1)$ 比较，于是有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda-(a+b)}}{(\frac{1}{x}+1)^b},$$

其中分母是趋于 0，为保证分子不趋于无穷，则需要 $\lambda < (a+b)$，即 $a+b > 1$. 当 $x \to 0$ 时，那么就要和 $\frac{1}{x^\lambda}(\lambda < 1)$ 比较，于是有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{1}{x^{a-\lambda}(1+x)^b},$$

其中 $(1+x)^b \to 0$，则 $a < \lambda$，即 $a < 1$.

分离积分

Example 6.5. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$$

hints其中后面这个积分在柯西判别法很容易确定是收敛的 (实际上可以用狄利克雷判别法)，因为总是满足

$$f(x)\le\frac{1}{x^2}$$

那么前面这个积分可以做一下变换

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}dx\ge\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}$$

这是因为 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上是单调减的，这一点求两次导即可知道，所以前面这个积分是发散的. 因此整个积分是发散的.

求值

Example 6.6. 求

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

hints 方法 1 设 $u=\frac{1}{x}$，则有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du$$

把这个积分和原积分加起来

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2}dx$$

这里设 $t=x-\frac{1}{x}$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

因此 $I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

方法 2 可以考虑直接部分分式即，其中分母可以分解为

$$1+x^4=1+2x^2+x^4-2x^2=(1+x^2)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

因此

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

即

$$\frac{2\sqrt{2}}{1+x^2}=\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

原积分可以写作

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{x+\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}-\frac{x-\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx$$

再继续拆

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}-\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx$$

第一项和第三项需要换元一下，令 $u=x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty}\frac{u}{u^2+\frac{1}{2}}du+\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty}\frac{u}{u^2+\frac{1}{2}}du+\arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\right]$$

其中

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty}\frac{u}{u^2+\frac{1}{2}}du-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty}\frac{u}{u^2+\frac{1}{2}}du=-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{u}{u^2+\frac{1}{2}}du=0.$$

因此

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

微分方程

线性微分方程解的结构

Example 7.1. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，求该方程的通解.

hints 这题考察线性微分方程解结构的一个非常典型的题，这里用到两个非齐次方程的解的差是齐次方程的解，则

$$y_2 - y_3 = e^x, y_1 - y_3 = e^{3x}.$$

它们是两个线性无关的解，因此它们是原方程导出的齐次方程的通解，我们再求一个特解即可，即 $y_1 - e^{3x} = -xe^{2x}$，则原方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - xe^{2x}.$$

带积分的微分方程

Example 7.2. 设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求 $f(x)$.

hints 尝试去掉积分符号，去导前做一些变换，

$$\begin{aligned} \int_0^x f(u)du &= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1 \\ f(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x} \end{aligned}$$

注意这里有 $f(0) = -1$(要善于发现这样的条件)，设 $y = \int_0^x f(t)dt$，于是

$$y' - y = -e^{-x},$$

根据一阶线性方程的通解我们有

$$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2},$$

则 $f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$. 由于 $f(0) = -1$，因此 $C = -\frac{1}{2}$，最终 $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

该死的绝对值

Annotation 7.3. 有时候的积分结果带 $\ln|f(x)|$，这个时候在考虑要不要去绝对值的时候，可以采取的下述的手法

1. 如果提供了某个点 (x_0, y_0)，那么这个时候我们可以考虑去掉绝对值保留 x_0 所在的定义域，因为通解不需要表示全部的解，只要保证我们最终我们可以根据这个特殊的点确定某个特解即可！
2. 如果没有提供某个点，那么这个时候我们可以有条件的去掉绝对值
   (a) 若是可分离变量方程，且里面没有无理数因子，我们可以把绝对值去掉
   (b) 若是一阶线性方程，在对 $P(x)$ 积分结果中出现 $\ln|f(x)|$，根据 $P(x)$ 中的是否有无理数因子或者分母为偶数的因子，如果有，那么这个绝对值不要去掉，最后分类讨论; 若没有，可以直接去绝对值.
3. 拿不准的时候，就彻底不去，直接开讨论就行.

Example 7.4. 求 $y(1) = 0$，且满足下述方程的 y

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

hints 显然这个是一个齐次微分方程，令 $u = \frac{y}{x}$，于是有

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan u = \ln|x| + C$$

题目中已经给定了一个点 $(1, 0)$，那么此时我们可以去掉绝对值，只考虑 $x > 0$ 的情况，即有

$$u = \tan(\ln x + C) \Rightarrow y = x\tan(\ln x + C).$$

最后带入特殊点，得到 $C = 0$，最终有 $y = x\tan(\ln x + C)$

改变自变量

Example 7.5. 求下述方程的通解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^4}$$

hints 当且形式根本找不到方法求，那么我们考虑求以 y 为自变量的 $x = f(x)$ 形式的函数，于是有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^4}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^3$$

即是关于自变量 y 一个线性方程. 此时就可以直接用通项公式有

$$x = y(\frac{1}{3}y^3 + C)$$

多元函数

带不等式的条件极值

Example 8.1. 求函数 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

hints 这个不等式的取值范围是一个闭连通域，我们只需要分别考虑它里面点构成的区域和边界上的点即可. 在这个椭圆里面唯一的驻点是 $(0,0)$，其对应的函数值为 2; 在椭圆上的点满足 $y=4-4^x$，则 $f(x)$ 可以改写为

$$z=x^2-(4-4^x)+22=5x^2-2,$$

其中 $-1\le x\le 1$，那么其最大值为 3，最小值为 -2. 三个驻点比较得出最终结果.

可微定义

Example 8.2. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$

求 $dz|_{(0,1)}$.

hints 显然要从定义出发，目标是整理出来定义的形式，先求 $f(0,1)$，由上式极限存在，可以得到

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}f(x,y)=2x-y+2,$$

再由 $f(x,y)$ 连续，上述等式左边就等于 $f(0,1)$，等式右边是个有限极限，即 $f(0,1)=1$. 我们再重新整理一下

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-f(0,1)-2x+(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$

这就是 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处可微定义，即 $dz|_{(0,1)}=2dx-dy$.

二重积分

交换次序更好积分

Example 9.1. 求积分
$$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx.$$
hints 明显这个被积函数对 dx 是不好积的，于是考虑交换积分次序. 交换次序可以考虑画图来做，于是有
$$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\tan x}{x}dy = \int_0^1 tanxdx = -\ln\cos x|_0^1 = -\ln\cos x.$$
Example 9.2. 设 $f(x)$ 为连续函数，定义
$$F(x) = \int_1^x dv\int_v^x f(u)du, x > 1,$$
求 $F'(x)$.

hints二重积分求导,这显然直接求不了. 考虑先计算这个二重积分,现在的积分次序导致我们无法对 $\int f(u)du$ 处理，所以先交换次序. 有
$$F(x) = \int_1^x du\int_1^u f(u)dv = \int_1^x (u-1)f(u)du.$$
被积函数是连续函数的变上限积分，它的导数为 $(x-1)f(x)$.

化极坐标

Example 9.3. 求积分
$$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy.$$
hints 被积函数出现 x^2+y^2，考虑化极坐标. 首先把极坐标方程写出来，确定 θ 变限在 $[0,\frac{\pi}{2}]$，当固定一点 x 时，此时 $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$，那么考虑这个积分域的边界就有
$$x^2+y^2 = \rho^2 = 2\rho\cos\theta \Rightarrow \rho = 2\cos\theta.$$
于是原积分为
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3}d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)d\sin\theta = \frac{8}{3}(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

三重积分

直角坐标

柱坐标

球坐标

多元积分的应用

第一类曲线积分

Annotation 11.1. 第一类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
3. 确定是否为特殊曲线做简化计算的操作，例如关于坐标轴等价，在曲线上的自变量等价;
4. 若是曲线积分化定积分. 这一过程要注意弧长微分替换积分变量的过程，而提到的参数方程的弧长微分为 $\sqrt{x(t)'^2+y(t)'^2+z(t)'^2}dt$.

第二类曲线积分

Annotation 11.2. 第二类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方向;
3. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
4. 确定平面曲线积分是否与路径无关, 常见判定手法 (1 $Pdx+Qdy$ 是否是某个二元函数的全微分 (2 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 若与路径无关考虑，(1 利用原函数直接计算 (2 化简单积分路线，例如平行于坐标轴，就化为两个定积分.
5. 确定是否为光滑的平面闭曲线，若为光滑曲线考虑使用格林公式化二重积分，注意曲线方向和其围成的区域 D 要遵守左手法则，即绕着曲线的方向绕一圈，区域 D 总是在观察者的左手边. 还需要注意被积函数 P, Q 在 D 上要有连续的一阶偏导;
6. 确定若不是平面闭曲线，可以考虑做补线让其变成一个闭曲线，再使用格林公式，可能可以简化计算.
7. 确定是否为空间闭曲线，若是空间闭曲线，考虑使用斯托克斯公式，注意曲线方向和曲面的法向量要遵守右手法则.
$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$
8. 直接计算，使用公式
$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)dt$$

第一类曲面积分

Annotation 11.3. 第一类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种 $z = f(x, y)$，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围;
2. 确定是否为特殊的曲面做简化计算，例如关于坐标轴平面对称，在曲面上的自变量等价;
3. 直接计算，使用曲面微分的变量替换，需要注意 x, y 的区域 D 的确定

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y), f_y^2(x, y)}dxdy.$$

第二类曲面积分

Annotation 11.4. 第二类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种 $z = f(x, y)$，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围;
2. 确定曲面的方向;
3. 确定曲面是否可以围成一个闭区域，考虑使用高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv.$$

   这里曲面需要取外侧方向，如果当且曲面是内侧方向则需要加负号，也需要确定 P, Q, R 是否具有一阶连续偏导.

4. 考虑是否可以增加补面围成一个闭区间来使用高斯公式.
5. 直接计算，上述给定是 z 关于 x, y 方程，那么曲线方向决定了曲面法线和 z 轴的夹角余弦值，若余弦值是负的，则需要在下式积分号就带负号

$$\iint_S f(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} f(x, y, f(x, y))dxdy.$$

   这里要注意若给定是 y 关于 x, z 的方程，这里的余弦值则是看曲面法向量和 y 轴的夹角.

级数

参数收敛

Example 12.1. 讨论下列级数收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$$

hints 展开 $\ln n!$，有

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots \ln n < n \ln n < n^{1+\beta},$$

在 n 足够大的时候，对任何 $\beta > 0$ 都是成立. 因此

$$\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{n^{1+\beta}}{n^\alpha} = n^{1+\beta-\alpha},$$

因此取 $\alpha > 2$ 时，存在 β 使得

$$\frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{1}{n} < \frac{n^{1+\beta}}{n^\alpha}.$$

即原级数在 $a > 2$ 是收敛的. 同理若 $\alpha \leq 2$ 时，是存在 β 使得 $1 + \beta - \alpha > -1$ 的，此时是无法判定其是否收敛的。

Example 12.2. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}$ 收敛，求 α 取值.

hints 先用比较审敛法确定一收敛与原级数收敛性相同的级数，显然这样选择一个调和级数 $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，来验证一下

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

判定调和级数的收敛性，需要 $\alpha > \frac{3}{2}$.

带-1 的幂次

Example 12.3. 判断下述级数的收敛性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\ln n}$$

hints 这个级数奇数时为零，因此我们写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln 2n}$$

这个级数显然是发散的，因为在 n 足够大时 $\frac{2}{\ln 2n} \geq \frac{1}{n}$.

不标准的幂级数

Example 12.4. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$$

的收敛半径.

hints这是一个不标准的幂级数，无法直接用结论. 所以先化标准的形式 $a_n x^n$. 先考虑积分，消掉指数的常数，即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} x^{2n}.$$

再令 $u = x^2$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n+(-3)^n)} u^n$ 的收敛半径，根据结论有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

因此其收敛半径为 3，所以 $|x| < \sqrt{3}$，即原级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$.

利用傅里叶公式求和

Example 12.5. 求下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$$

hints 考虑 $s(x) = \frac{x}{\pi}$ 在 $(-\pi, pi)$ 上的傅里叶级数，它是一个奇函数因此

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin nx dx \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}.$$

显然有

$$s(1) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = \frac{1}{\pi},$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\frac{1}{2}$.

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 13.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n},\ a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1+x)^n \leq 1 + nx,\ n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1+x) = a^{\frac{1}{n}}$，即可得到上式.

Stirling 公式

Proposition 13.2.

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n).$$

经常用于拆解 $\ln n!$ 有奇效.

高数积分

Proposition 13.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$