

# 考研概率论

枫聆

2021 年 6 月 1 日

## 目录

<b>1</b>	<b>随机事件和概率</b>	<b>2</b>
1.1	基本定义 . . . . .	2
1.2	基本性质和运算法则 . . . . .	4

# 随机事件和概率

## 基本定义

**Definition 1.1.** 对随机现象进行观察或者实验被称为**随机试验**当且仅当满足以下条件

1. 可以在相同的条件下**重复实验**;
2. 所得的可能结果不止一个, 且所有可能结果都能**事前已知**;
3. 每次具体实验之前**无法预知**出现的结果.

**Definition 1.2.** **随机试验**的每一可能的结果为被称为**样本点**, 所有**样本点**构成的集合被称为**样本空间**.

**Definition 1.3.** **样本空间**的任一子集被称为**随机事件**. 其中每个单点集被称为**基本事件**. 事件  $\Omega$  被称为**必然事件**当且仅当每次试验必有  $\Omega$  中某一样本点发生. 特别地, 把空集  $\emptyset$  称为**不可能事件**.

**Definition 1.4.** 若事件  $A$  的发生**必然导致**事件  $B$  发生, 则称事件  $B$  包含事件  $A$ , 记为  $B \supset A$ . 若  $A \supset B$  和  $A \subset B$  同时成立, 则称事件  $A$  和事件  $B$  相等, 记为  $A = B$ .

**Definition 1.5.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 它们的交记为  $A \cap B$  或者  $AB$ , 表示其所有的公共样本点构成的事件. 这样事件的发生, 将导致**事件  $A$  和  $B$  同时发生**. 它们的并记为  $A \cup B$ , 表示它们所有样本点放在一起构成的事件, 这样的事件发生将导致**至少事件  $A$  和  $B$  其中一个发生**.

**Definition 1.6.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 若它们的交  $AB = \emptyset$ , 则称事件  $A$  和  $B$ **互斥**或者**互不相容**. 若它们的并  $A \cup B = \Omega$ , 且  $AB = \emptyset$ , 则称事件  $A$  和  $B$  为**对立事件**或者**互逆事件**, 记为  $\bar{A} = B$  或者  $\bar{B} = A$ .

**Definition 1.7.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 它们的差记为  $A - B$ , 表示事件  $A$  有而  $B$  没有的样本点, 通俗地来讲表示事件  $A$  发生而  $B$  不发生的样本点组成的新事件.

**Definition 1.8.** 设试验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ , real-valued 函数  $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  被为一个概率函数, 其中  $\mathcal{A}$  被称为**输入空间**或者**事件空间**, 即样本空间的**幂集**. 当其满足如下条件 (Kolmogorov axioms) 时

1. 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有  $P(A) \geq 0$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3. 对于一个两两不相交的事件可数序列  $A_1, A_2, \dots$ , 有  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  成立.

则成  $P$  是试验  $E$  的一个**概率分布**. 这个 real-value  $P$  其实看做一个代数形式, 其需要满足 3 个公理.

**Definition 1.9.** 给定事件  $A$  和  $B$ , 且  $P(A) > 0$ , 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

为在事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的条件概率.

**Definition 1.10.** 若事件  $A, B$  满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称  $A$  与  $B$  相互独立. 从条件概率看两个事件的独立性, 也就是其中一个发生的概率是不会影响另一个发生的概率.

## 基本性质和运算法则

### Proposition 1.11. 事件相关的运算法则

1. 交换律  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ .
2. 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
3. 分配律  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
4. 对偶律  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ ;  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

### Proposition 1.12. 概率分布相关性质

1.  $P(\emptyset) = 0$ ;
2.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
3.  $A \subset B$ , 则  $P(A) \leq P(B)$ ;
4.  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;

证明. (2) 因为  $P(\Omega) = P(A \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ .

(1) 可以马上通过 (2) 直接得到.

(3)  $P$  满足单调性, 可以根据 Kolmogorov axioms(3) 很自然地可以得到.

(4)  $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ . □

### Proposition 1.13. 五大概率公式

1. 加法公式  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .
2. 减法公式  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ .
3. 乘法公式 当  $P(A) > 0$  时,  $P(AB) = P(A)P(B|A)$ ;  
当  $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$  时,  $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ .
4. 全概率公式 设  $B_1, B_2, \cdots, B_n$  满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ,  $B_i B_j = \emptyset$  且  $P(B_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \cdots, n$ , 则对任意事件有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i).$$

其中称满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ,  $B_i B_j = \emptyset$  的  $B_1, B_2, \cdots, B_n$  为一个完备事件组. 通常把  $P(B_1), P(B_2), \cdots, P(B_n)$  叫做先验概率. 全概率公式的意义在于可以将复杂的事件  $A$  划分为简单互斥事件  $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ , 再结乘法公式计算出  $A$  的概率.

5. **贝叶斯公式** 设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  满足  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ,  $B_i B_j = \emptyset$  且  $P(A) > 0, P(B_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}, j = 1, 2, \dots, n.$$

贝叶斯公式的意义在于在事件  $A$  已经发生的条件下, 贝叶斯公式可以用来寻找导致  $A$  发生各种“原因”  $B_i$  的概率. 其中  $P(B_j|A)$  被称为**后验概率**.

证明. (2)  $P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A - B)$ .

(1)  $P(A \cup B) = P((A - AB) \cup (B - AB) \cup AB)$ , 再根据 (2) 有

$$\begin{aligned} P((A - AB) \cup (B - AB) \cup AB) &= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

实际上这里还是要分类讨论一下当  $A = B$  的时候.

(3) 条件概率的另一种写法.

(4)  $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^n AB_i) = \sum_{i=1}^n P(AB_i)$ , 再用 (3) 替换一下即可.

(5)  $P(B_j|A) = \frac{P(B_j A)}{P(A)}$ , 用 (3) 和 (4) 分别替换分子和分母即可.

□