

考研高数习题集

枫聆

2021 年 8 月 31 日

目录

| | |
|---------------------|----------|
| 1 极限相关 | 3 |
| 1.1 1^∞ 类型极限 | 3 |
| 1.2 1^0 类型极限 | 3 |
| 1.3 夹逼准则应用 | 4 |
| 1.4 级数相关的极限 | 5 |
| 1.5 去除根式的尴尬 | 7 |
| 1.6 换元取极限 | 8 |
| 1.7 递归求极限 | 8 |
| 1.8 等价无穷小的替换 | 8 |
| 1.9 中值定理 | 8 |
| 1.10 含积分的极限 | 9 |
| 2 导数 | 9 |
| 2.1 导数定义相关的 | 9 |
| 3 不定积分 | 9 |
| 3.1 多项式分式 | 9 |
| 3.2 分母带根号 | 10 |
| 3.3 换元法 | 11 |
| 3.4 高次 | 11 |
| 3.5 分部积分 | 11 |
| 3.6 三角有理式 | 11 |
| 3.7 递归式 | 12 |

| | | |
|-----------|----------------|-----------|
| 3.8 | 被积函数含不常见函数形式 | 12 |
| 4 | 定积分 | 14 |
| 4.1 | 参数积分求导 | 14 |
| 4.2 | 奇怪的定积分 | 14 |
| 5 | 反常积分 | 15 |
| 5.1 | 含有 e^x 的被积函数 | 15 |
| 5.2 | 待定参数 | 15 |
| 6 | 微分方程 | 17 |
| 6.1 | 线性微分方程解的结构 | 17 |
| 6.2 | 带积分的微分方程 | 17 |
| 7 | 多元函数 | 18 |
| 7.1 | 带不等式的条件极值 | 18 |
| 8 | 二重积分 | 19 |
| 8.1 | 交换次序 | 19 |
| 8.2 | 化极坐标 | 19 |
| 9 | 三重积分 | 20 |
| 9.1 | 直角坐标 | 20 |
| 9.2 | 柱坐标 | 20 |
| 9.3 | 球坐标 | 20 |
| 10 | 多元积分的应用 | 21 |
| 10.1 | 第一类曲线积分 | 21 |
| 10.2 | 第二类曲线积分 | 21 |
| 10.3 | 第一类曲面积分 | 22 |
| 10.4 | 第二类曲面积分 | 22 |
| 11 | 级数 | 23 |
| 11.1 | 不标准的幂级数 | 23 |
| 12 | tricks | 24 |
| 12.1 | 一些有趣的不等式 | 24 |

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 其中 A 是一个常数, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

hints 带指数形式的表达式, 第一想法是把指数拿下来

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left(\frac{x}{x+b} \right)^x = \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \left(1 - \frac{b}{x+b} \right)^x = e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n.$$

hints 往 $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1) + (\sqrt[n]{b}-1) + (\sqrt[n]{c}-1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}} \right)$$

1^0 类型极限

Example 1.4. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$, 则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

夹逼准则应用

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

hints

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1} \right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.8. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

hints 直接考察

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 n_1 , 使得 $n > n_1$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{n_1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - A) + (a_{n_1+2} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{n_1} - A|}{n} + \frac{|a_{n_1+2} - A| + |a_{n_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

上述不等式右边第一项, 形如 $\frac{C}{n}$, 因为先对任意 $n > n_1$ 都有上述不等式成立, 那么只需要让 n 取的大一点, 就能使得 $\frac{C}{n} < \varepsilon$ (**阿基米德公理**). 右边第二项显然小于 $\frac{n - n_1}{n} \varepsilon$, 于是综上

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值, 我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来, 然后用初等方法来验证, 再根据极限的唯一性, 就得到了答案. 把 a_n 换成形式, 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Example 1.9. 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握, 用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^k \sim_{\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.10. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性, 所以 $\lim \ln a_n = \ln a$, 再根据 1.8.

Example 1.11. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据 1.10

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}} = e^{\ln a} = a.$$

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 1.11 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 (假设 a_n 的极限存在). 那么有一个推论, 对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可, 那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

那么

$$x \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{\frac{1}{k}} = x \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$, 这个 \mathcal{O} 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法, 即下面的恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z = x$, 那么原式就变成了

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) - x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-1} + \left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})} \right]^{k-1} + \left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})} \right]^{k-2}x + \cdots + 1} \end{aligned}$$

上下除以 x^{k-1}

分母中 $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$ 是趋于 1 的, 再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性, 取其函数值也是等于 1, 所以分母就有 $k \cdot 1$.

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim \frac{\ln n}{n}} = 1.$$

也可以使用一下 12.1 的伯努利不等式来证明, 这里设 $\sqrt[n]{n} = 1+h$, 那么

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ \Rightarrow h^2 &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $h \rightarrow 0$, 即 $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$, 所以 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

换元取极限

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{x+1} - 1}{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

hints 设 $y = \sqrt[m]{x+1} - 1$, 显然 y 在 $x = 0$ 处连续, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时有 $y \rightarrow 0$, 那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式, 分母二项式展开.

Example 1.16. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{\frac{n}{m}} - 1}{x}.$$

hints 还是使得 $y = (x+1)^{\frac{1}{m}} - 1$, 那么就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} \frac{y}{(1+y)m - 1} = \frac{n}{m}.$$

递归求极限

Example 1.17. 1.7 单调数列求极限

hints 考虑递归式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a = a \cdot 0 \Rightarrow a = 0.$$

等价无穷小的替换

中值定理

Example 1.18. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

hints 对连续函数 $\ln \arctan x$ 应用中值定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{[1 + (\theta + x)^2] \arctan(\theta + x)},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 那么即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (\theta + x)^2} \frac{1}{\arctan(\theta + x)} = \frac{1}{\pi}.$$

含积分的极限

Example 1.19. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$$

hints 这样的含参数积分最好的办法就是洛必达，但是这里首先需要换元一下，令 $u = x - t$ ，则

$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = \int_0^x \sqrt{u} e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du.$$

再用洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

导数

导数定义相关的

Example 2.1. 已知 $f'(x_0) = -1$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}.$$

hints 直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} &= -1 \end{aligned}$$

求出需要 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{x}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x}$ ，两项相减再取倒。

不定积分

多项式分式

Example 3.1. 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2 \arctan x - 2x + C,$$

Example 3.2. 求

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx.$$

hints 观察分子多项式次数小于分母的, 且只小一次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13} dx + 8 \int \frac{1}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-6x+13} d(x^2-6x+13) + 8 \int \frac{1}{4+(x-3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C.$$

Example 3.3. 求

$$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx$$

hints 观察分子多项式次数小于分母, 且小两次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4+(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4+(x^2+1)^2} d(x^2+1) = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2+1}{2} + C$$

分母带根号

Example 3.4. 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

hints 根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} d(x-2) = \arcsin \frac{x-2}{2} + C$$

Example 3.5. 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

hints 先分式把分子变成常数 1

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

Example 3.6. 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

hints 考虑第二类换元, 令 $x = a \sin t$, 则

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4} \sin 2t.$$

把 t 变成 x 也有一点技巧, 第二项可以变成 $\frac{1}{2}(a \sin t)(a \cos t)$, 其中 $a \sin t = x, a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$, 这样会方便一点

$$\frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

换元法

Example 3.7. 求

$$\int \sqrt{1 + e^x} dx$$

hints 考虑第二类换元, 令 $x = \ln(t^2 - 1)$, 则

$$\int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

带入 $t = \sqrt{e^x + 1}$, 即得

$$2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$$

高次

分部积分

三角有理式

Example 3.8. 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$$

hints 这里有一个非常巧妙的第二类换元, 令 $x = \arcsin u$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}(1 + u)} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int \frac{1}{(1 + u)(1 - u^2)} du.$$

再把有理式拆开，这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+u)}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\sin x} + C.$$

Example 3.9. 求

$$\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}.$$

hints 考虑第二类换元，令 $x = \operatorname{arccot} u$ ，则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})} \frac{1}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{1+u} du = -\ln|u| + C = -\ln|1 + \cot x| + C.$$

递归式

Example 3.10. 求

$$\int e^{ax} \cos nx dx.$$

hints 分部积分 2 次回到原积分

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos nx dx &= \frac{1}{a} \int \cos nx de^{ax} = \frac{1}{a} (e^{ax} \cos nx + n \int e^{ax} \sin nx dx) \\ &= \frac{1}{a} [e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a} (e^{ax} \sin nx - n \int e^{ax} \cos nx dx)] \end{aligned}$$

整理两边即得

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2} \Rightarrow \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2 + n^2}$$

类似的有

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{ae^{ax} \sin nx - ne^{ax} \cos nx}{a^2 + n^2}$$

被积函数含不常见函数形式

Example 3.11. 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

hints 必须得想办法吧 $\arcsin e^x$ 提出来，因为我们没有已知原函数导数为反三角的，这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令 $t = \sqrt{1 - e^{2x}}$, 那么 $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}$, $dx = \frac{-t}{1-t^2}dt$, 于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

Example 3.12. 求

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$$

[hints](#) 首选分部积分, 但是为了为了能部分积分, 我们必须先第一类换元, 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 那么 $x = \frac{1}{t^2-1}$, 于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

定积分

参数积分求导

Example 4.1. 设 $f(x)$ 连续, 求

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$$

hints 对于这种第二类的参数积分, 对于有比较简洁的结果的, 首先应该换元试试, 令 $u = x^2 - t^2$, 那么即有

$$-\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2).$$

奇怪的定积分

Example 4.2. 设 $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$.

hints 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x) dx = x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

反常积分

含有 e^x 的被积函数

Example 5.1. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0).$$

hints 比较审敛法, 取任意的 $\lambda > 1$, 即 $\frac{1}{x^\lambda}$ 是收敛的, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu e^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\mu+\lambda}}{e^{ax}} = 0,$$

因此原无穷积分也是收敛的.

Example 5.2. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

hints 这里需要注意两个上下积分限都需要考察, 我们可以将上述积分划分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int_A^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},$$

其中 $A \in (0, +\infty)$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 取 $0 < \lambda < 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = 0,$$

即积分 $\int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ 是收敛的. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 取 $\lambda > 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \cdot x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} = 0,$$

待定参数

Example 5.3. 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$$

收敛, 求 a, b .

[hints](#) 这道题还是用柯西审敛法，注意要同时考虑积分上下限. 当 $x \rightarrow +\infty$ ，那么就要和 $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda > 1)$ 比较，于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda-(a+b)}}{(\frac{1}{x} + 1)^b},$$

其中分母是趋于 0，为保证分子不趋于无穷，则需要 $\lambda < (a+b)$ ，即 $a+b > 1$. 当 $x \rightarrow 0$ 时，那么就要和 $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda < 1)$ 比较，于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{1}{x^{a-\lambda}(1+x)^b},$$

其中 $(1+x)^b \rightarrow 0$ ，则 $a < \lambda$ ，即 $a < 1$.

微分方程

线性微分方程解的结构

Example 6.1. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 求该方程的通解.

hints 这题考察线性微分方程解结构的一个非常典型的题, 这里用到两个非齐次方程的解的差是齐次方程的解, 则

$$y_2 - y_3 = e^x, y_1 - y_3 = e^{3x}.$$

它们是两个线性无关的解, 因此它们是原方程导出的齐次方程的通解, 我们再求一个特解即可, 即 $y_1 - e^{3x} = -xe^{2x}$, 则原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}.$$

带积分的微分方程

Example 6.2. 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求 $f(x)$.

hints 尝试去掉积分符号, 去导前做一些变换,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(u)du &= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt + e^{-x} - 1 \\ f(x) &= \int_0^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) - e^{-x} \end{aligned}$$

注意这里有 $f(0) = -1$ (要善于发现这样的条件), 设 $y = \int_0^x f(t)dt$, 于是

$$y' - y = -e^{-x},$$

根据一阶线性方程的通解我们有

$$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2},$$

则 $f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$. 由于 $f(0) = -1$, 因此 $C = -\frac{1}{2}$, 最终 $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

多元函数

带不等式的条件极值

Example 7.1. 求函数 $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

[hints](#) 这个不等式的取值范围是一个闭连通域, 我们只需要分别考虑它里面点构成的区域和边界上的点即可. 在这个椭圆里面唯一的驻点是 $(0, 0)$, 其对应的函数值为 2; 在椭圆上的点满足 $y = 4 - 4^x$, 则 $f(x)$ 可以改写为

$$z = x^2 - (4 - 4^x) + 22 = 5x^2 - 2,$$

其中 $-1 \leq x \leq 1$, 那么其最大值为 3, 最小值为 -2. 三个驻点比较得出最终结果.

二重积分

交换次序

Example 8.1. 求积分

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx.$$

hints 明显这个被积函数对 dx 是不好积的, 于是考虑交换积分次序. 交换次序可以考虑画图来做, 于是有

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos x \Big|_0^1 = -\ln \cos x.$$

化极坐标

Example 8.2. 求积分

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

hints 被积函数出现 $x^2 + y^2$, 考虑化极坐标. 首先把极坐标方程写出来, 确定 θ 变限在 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 当固定一点 x 时, 此时 $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$, 那么考虑这个积分域的边界就有

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = 2\rho \cos \theta \Rightarrow \rho = 2 \cos \theta.$$

于是原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \cos^3 \theta}{3} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\sin \theta = \frac{8}{3} (\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

三重积分

直角坐标

柱坐标

球坐标

多元积分的应用

第一类曲线积分

Annotation 10.1. 第一类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
3. 确定是否为特殊曲线做简化计算的操作, 例如关于坐标轴等价, 在曲线上的自变量等价;
4. 若是曲线积分化定积分. 这一过程要注意弧长微分替换积分变量的过程, 而提到的参数方程的弧长微分为 $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$.

第二类曲线积分

Annotation 10.2. 第二类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方向;
3. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
4. 确定平面曲线积分是否与路径无关, 常见判定手法 (1 $Pdx+Qdy$ 是否是某个二元函数的全微分 (2 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 若与路径无关考虑, (1 利用原函数直接计算 (2 化简单积分路线, 例如平行于坐标轴, 就化为两个定积分.
5. 确定是否为光滑的平面闭曲线, 若为光滑曲线考虑使用格林公式化二重积分, 注意曲线方向和其围成的区域 D 要遵守左手法则, 即绕着曲线的方向绕一圈, 区域 D 总是在观察者的左手边. 还需要注意被积函数 P, Q 在 D 上要有连续的一阶偏导;
6. 确定若不是平面闭曲线, 可以考虑做补线让其变成一个闭曲线, 再使用格林公式, 可能可以简化计算.
7. 确定是否为空间闭曲线, 若是空间闭曲线, 考虑使用斯托克斯公式, 注意曲线方向和曲面的法向量要遵守右手法则.

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

8. 直接计算, 使用公式

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)dt$$

第一类曲面积分

Annotation 10.3. 第一类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种 $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定是否为特殊的曲面做简化计算，例如关于坐标轴平面对称，在曲面上的自变量等价；
3. 直接计算，使用曲面微分的变量替换，需要注意 x, y 的区域 D 的确定

$$\int \int_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \int \int_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

第二类曲面积分

Annotation 10.4. 第二类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种 $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定曲面的方向；
3. 确定曲面是否可以围成一个闭区域，考虑使用高斯公式

$$\int \int_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

这里曲面需要取外侧方向，如果当且曲面是内侧方向则需要加负号，也需要确定 P, Q, R 是否具有一阶连续偏导.

4. 考虑是否可以增加补面围成一个闭区间来使用高斯公式.
5. 直接计算，上述给定是 z 关于 x, y 方程，那么曲线方向决定了曲面法线和 z 轴的夹角余弦值，若余弦值是负的，则需要在下式积分号就带负号

$$\int \int_S f(x, y, z) dx dy = \pm \int \int_{D_{xy}} f(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

这里要注意若给定是 y 关于 x, z 的方程，这里的余弦值则是看曲面法向量和 y 轴的夹角.

级数

不标准的幂级数

Example 11.1. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$$

的收敛半径. [hints](#) 这是一个不标准的幂级数, 无法直接用结论. 所以先化标准的形式 $a_n x^n$. 先考虑积分, 消掉指数的常数, 即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} x^{2n}.$$

再令 $u = x^2$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} u^n$ 的收敛半径, 根据结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

因此其收敛半径为 3, 所以 $|x| < \sqrt{3}$, 即原级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$.

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 12.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \quad a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx, \quad n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1 + x) = a^{\frac{1}{n}}$, 即可得到上式.