考研高数

枫聆

2021 年 5 月 26 日

目录

经典证明

Definition 1.1. (连续函数在闭区间上有界) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在其上有界.

证明. (方法 1: $f(x)$ 非空子区间 $[a,x]$，求其上确界) 假设 B 是使得 $f(x)$ 在形如闭区间 $[a,x]$ 上有界的 $x\in[a,b]$ 集合，显然 $a\in B$，所以 B 非空。若 $e\in B$ 且 $e>a$，那么 a 和 e 之间的点都是在 B 里面的，所以实际上 B 是一个闭区间. 我们再考虑 B 的上确界，根据 x 的取法，有 $x\leq b$，如果我们能证明它的上确界在 b 出取得，那么整个命题就得证. 现在假设 $\sup(B)<b$, 由于 B 是一个闭区间，所以 $\sup(B)\in B$. 由于 f 是连续的，那么足够靠近 $\sup(B)$ 的地方，即 $s-\sup(B)<\delta$ 且 $s>\sup(B)$，有 $|f(s)-f(\sup(B))|<\varepsilon$，那么 $[\sup(B),s]$ 也是有界，这是和 $\sup B$ 是 B 的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的数列，其子列收敛造矛盾) □

Definition 1.2. (确界原理) 任一有上界的非空实数集必有上确界，同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. 假设非空实数集 S 有上界 M，取 S 所有上界为集合 B. 因为 $M\in B$ 所以 B 非空，取 $A=\mathbb{R} \quad B$，要证明 A 是非空是 trivial 的，取 $x=x_0-1$, $x_0\in S$，那么 $x\in A$. 显然地 A 里面所有的元素都小于 B 里面的元素 (若是大于 B 里面某个元素，那么它就是 S 的一个上界了，这是矛盾的)，这样我们就可以得到一个实数上的划分，根据戴德金实数分割定理，存在一个 β，它要么是 A 里面最大值或者要么 B 里面的最小值. 假设它是 A 里面的最大值，根据 A 的定义，对于任意 $a\in A$ 都存在一个 $x_0\in S$ 使得 $a<x_0$，将其作用到 β 上，我们得到某个 $x_0'\in S$ 使得 $\beta<x_0'$. 我们考虑 $\frac{x_0'+\beta}{2}$，有

$$\beta<\frac{x_0'+\beta}{2}<x_0'$$

所以 $x_0'\in A$，这和 β 是 A 里面最大值是矛盾的，所以 $\beta\in B$，即这个 β 就是 S 的上确界. □

Definition 1.3. (极值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，那们存在 $c,d\in[a,b]$ 使得

$$f(c)\leq f(x)\leq f(d),\ x\in[a,b].$$

证明. □

Definition 1.4. (罗尔定理)如果 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 内可导，若有 $f(a)=f(b)$，那么存在至少一个 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=0.$$

证明. □

函数极限