

考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 12 日

目录

1 极限相关	4
1.1 1^∞ 类型极限	4
1.2 1^0 类型极限	4
1.3 夹逼准则应用	5
1.4 级数相关的极限	6
1.5 去除根式的尴尬	8
1.6 换元取极限	10
1.7 递归求极限	10
1.8 等价无穷小的替换	10
1.9 中值定理	10
1.10 含积分的极限	11
1.11 没有具体的函数表达式	11
2 导数	11
2.1 导数定义相关的	11
2.2 泰勒公式求高阶导数	12
2.3 递归法求高阶导数	12
3 不定积分	13
3.1 多项式分式	13
3.2 分母带根号	13
3.3 换元法	14
3.4 高次	15

3.5	分部积分	15
3.6	三角有理式	15
3.7	递归式	16
3.8	被积函数含不常见函数形式	16
4	定积分	18
4.1	参数积分求导	18
4.2	奇怪的定积分	18
5	反常积分	19
5.1	含有 e^x 的被积函数	19
5.2	待定参数	19
5.3	分离积分	20
5.4	求值	20
6	微分方程	22
6.1	线性微分方程解的结构	22
6.2	带积分的微分方程	22
7	多元函数	23
7.1	带不等式的条件极值	23
8	二重积分	24
8.1	交换次序	24
8.2	化极坐标	24
9	三重积分	25
9.1	直角坐标	25
9.2	柱坐标	25
9.3	球坐标	25
10	多元积分的应用	26
10.1	第一类曲线积分	26
10.2	第二类曲线积分	26
10.3	第一类曲面积分	27
10.4	第二类曲面积分	27

11 级数	28
11.1 不标准的幂级数	28
12 tricks	29
12.1 一些有趣的不等式	29

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 其中 A 是一个常数, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

hints 带指数形式的表达式, 第一想法是把指数拿下来

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left(\frac{x}{x+b} \right)^x = \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \left(1 - \frac{b}{x+b} \right)^x = e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n.$$

hints 往 $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1) + (\sqrt[n]{b}-1) + (\sqrt[n]{c}-1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}} \right)$$

1^0 类型极限

Example 1.4. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$, 则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

夹逼准则应用

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

hints

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1} \right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.8. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

hints 直接考察

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 n_1 , 使得 $n > n_1$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{n_1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - A) + (a_{n_1+2} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{n_1} - A|}{n} + \frac{|a_{n_1+2} - A| + |a_{n_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

上述不等式右边第一项, 形如 $\frac{C}{n}$, 因为先对任意 $n > n_1$ 都有上述不等式成立, 那么只需要让 n 取的大一点, 就能使得 $\frac{C}{n} < \varepsilon$ (**阿基米德公理**). 右边第二项显然小于 $\frac{n - n_1}{n} \varepsilon$, 于是综上

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值, 我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来, 然后用初等方法来验证, 再根据极限的唯一性, 就得到了答案. 把 a_n 换成形式, 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Example 1.9. 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握, 用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^k \sim_{\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.10. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性, 所以 $\lim \ln a_n = \ln a$, 再根据 1.8.

Example 1.11. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据 1.10

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}} = e^{\ln a} = a.$$

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 1.11 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 (假设 a_n 的极限存在). 那么有一个推论, 对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可, 那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

那么

$$x \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{\frac{1}{k}} = x \left(1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$, 这个 \mathcal{O} 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法, 即下面的恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z = x$, 那么原式就变成了

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) - x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-1} + \left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-2} x + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left[\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)} \right]^{k-1} + \left[\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)} \right]^{k-2} x + \cdots + 1} \quad \text{上下除以 } x^{k-1} \end{aligned}$$

分母中 $\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)}$ 是趋于 1 的, 再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性, 取其函数值也是等于 1, 所以分母就有 $k \cdot 1$.

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = 1.$$

也可以使用一下 12.1 的伯努利不等式来证明, 这里设 $\sqrt[n]{n} = 1 + h$, 那么

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ \Rightarrow h^2 &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $h \rightarrow 0$, 即 $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

hints 考虑把根式里面变成 $(1 + \alpha(x))$ 的形式，因此考虑提出一个因子 x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - \frac{\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{3}.$$

换元取极限

Example 1.16. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{x+1} - 1}{x}, m \in \mathbb{N}.$$

hints 设 $y = \sqrt[m]{x+1} - 1$, 显然 y 在 $x = 0$ 处连续, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时有 $y \rightarrow 0$, 那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式, 分母二项式展开.

Example 1.17. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{\frac{n}{m}} - 1}{x}.$$

hints 还是使得 $y = (x+1)^{\frac{1}{m}} - 1$, 那么就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} \frac{y}{(1+y)m - 1} = \frac{n}{m}.$$

递归求极限

Example 1.18. 1.7 单调数列求极限

hints 考虑递归式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a = a \cdot 0 \Rightarrow a = 0.$$

等价无穷小的替换

中值定理

Example 1.19. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

hints 对连续函数 $\ln \arctan x$ 应用中值定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{[1 + (\theta + x)^2] \arctan(\theta + x)},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 那么即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (\theta + x)^2} \frac{1}{\arctan(\theta + x)} = \frac{1}{\pi}.$$

含积分的极限

Example 1.20. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$$

hints 这样的含参数积分最好的办法就是洛必达，但是这里首先需要换元一下，令 $u = x - t$ ，则

$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = \int_0^x \sqrt{u} e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du.$$

再用洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

没有具体的函数表达式

Example 1.21. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处二阶导数存在，求

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)}{h}.$$

hints 直觉告诉它的结果和二阶导有关，但是任何初等方法都化不出来二阶导的定义，这个时候可以考虑用一下洛必达

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} = \frac{1}{2} f''(a).$$

导数

导数定义相关的

Example 2.1. 已知 $f'(x_0) = -1$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}.$$

hints 直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} &= -1 \end{aligned}$$

求出需要 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{x}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x}$ ，两项相减再取倒。

泰勒公式求高阶导数

递归法求高阶导数

Example 2.2. 设

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

求 $f^{(n)}(0)$.

<https://math.stackexchange.com/questions/549028/deriving-maclaurin-series-for-frac-arcsin-x-sqrt{1-x^2}> hints 这道题你想求它的麦克劳林级数其实不太好求, 实际上也不用求出通项, 因为只要求 $x=0$ 的情况, 这里有比较 trick 的利用递归式的手法. 先求它的一阶导

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)^{3/2}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2}.$$

这里构造一个微分方程

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

两边求 n 次, 根据 n 的莱布尼茨公式有

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^n(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0.$$

带入 $x=0$, 这里就可能消掉 $f^{(n)}$ 的项, 得到一个递归式

$$f^{(n+1)}(0) - n^2f^{(n-1)}(0).$$

这里我们让 $n = n+1$, 则有

$$f^{(n+2)}(0) = n^2f^{(n)}(0).$$

我们可以求出最前面的两项 $f'(0) = 1$ 和 $f''(0) = 0$, 于是这里有

$$f^n(0) = \begin{cases} 0 & n = \text{奇数} \\ (n-1)^2 \times (n-2)! \times \cdots \times 2! & n = \text{偶数} \end{cases}$$

奇数下的情况可以化简为 $2^{n-1}((\frac{n-1}{2})!)^2$

不定积分

多项式分式

Example 3.1. 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2 \arctan x - 2x + C,$$

Example 3.2. 求

$$\int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

hints 观察分子多项式次数小于分母的, 且只小一次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 8 \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} d(x^2 - 6x + 13) + 8 \int \frac{1}{4 + (x - 3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x - 3}{2} + C.$$

Example 3.3. 求

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$$

hints 观察分子多项式次数小于分母, 且小两次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4 + (x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4 + (x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + C$$

分母带根号

Example 3.4. 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}.$$

hints 根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} d(x - 2) = \arcsin \frac{x - 2}{2} + C$$

Example 3.5. 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

hints 先分式把分子根号里面的微分

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

Example 3.6. 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

hints 考虑第二类换元, 令 $x = a \sin t$, 则

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4} \sin 2t.$$

把 t 变成 x 也有一点技巧, 第二项可以变成 $\frac{1}{2}(a \sin t)(a \cos t)$, 其中 $a \sin t = x, a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$, 这样会方便一点

$$\frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Example 3.7. 求

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}.$$

hints 这里还是要凑根号下的微分, 有比较多的凑法, 这里提及一种凑微分再配合三角换元的,

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{1}{2} \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{(x^2)^2+1}},$$

令 $x^2 = \tan u$, 于是得到

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin u} du = \frac{1}{2} \ln |\csc u + \cot u|.$$

再带回 x 即可.

换元法

Example 3.8. 求

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$

hints 考虑第二类换元, 令 $x = \ln(t^2 - 1)$, 则

$$\int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

带入 $t = \sqrt{e^x + 1}$, 即得

$$2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$$

高次

分部积分

三角有理式

Example 3.9. 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$$

hints 这里有一个非常巧妙的第二类换元, 令 $x = \arcsin u$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du.$$

再把有理式拆开, 这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1+u}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sin x} + C.$$

Example 3.10. 求

$$\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}.$$

hints 考虑第二类换元, 令 $x = \operatorname{arccot} u$, 则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})} \frac{1}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{1+u} du = -\ln|u| + C = -\ln|1 + \cot x| + C.$$

Example 3.11. 求

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

hints 这种情况可以考虑先化简一下分子, 即上下乘以 $(\cos x - \sin x)$, 这样之后就可以考虑部分分式.

递归式

Example 3.12. 求

$$\int e^{ax} \cos nx dx.$$

hints 分部积分 2 次回到原积分

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos nx dx &= \frac{1}{a} \int \cos nx de^{ax} = \frac{1}{a} (e^{ax} \cos nx + n \int e^{ax} \sin nx dx) \\ &= \frac{1}{a} [e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a} (e^{ax} \sin nx - n \int e^{ax} \cos nx dx)] \end{aligned}$$

整理两边即得

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2} \Rightarrow \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2 + n^2}$$

类似的有

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{ae^{ax} \sin nx - ne^{ax} \cos nx}{a^2 + n^2}$$

被积函数含不常见函数形式

Example 3.13. 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

hints 必须得想办法吧 $\arcsin e^x$ 提出来, 因为我们没有已知原函数导数为反三角的, 这里自然地就要使用部分积分了

$$- \int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令 $t = \sqrt{1-e^{2x}}$, 那么 $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}$, $dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$, 于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

Example 3.14. 求

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$$

hints 首选分部积分, 但是为了为了能部分积分, 我们必须先第一类换元, 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 那么 $x = \frac{1}{t^2-1}$, 于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

定积分

参数积分求导

Example 4.1. 设 $f(x)$ 连续, 求

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$$

hints 对于这种第二类的参数积分, 对于有比较简洁的结果的, 首先应该换元试试, 令 $u = x^2 - t^2$, 那么即有

$$-\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2).$$

奇怪的定积分

Example 4.2. 设 $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$.

hints 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x) dx = x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

反常积分

含有 e^x 的被积函数

Example 5.1. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0).$$

hints 比较审敛法, 取任意的 $\lambda > 1$, 即 $\frac{1}{x^\lambda}$ 是收敛的, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu e^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\mu+\lambda}}{e^{ax}} = 0,$$

因此原无穷积分也是收敛的.

Example 5.2. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

hints 这里需要注意两个上下积分限都需要考察, 我们可以将上述积分划分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int_A^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},$$

其中 $A \in (0, +\infty)$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 取 $0 < \lambda < 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = 0,$$

即积分 $\int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ 是收敛的. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 取 $\lambda > 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \cdot x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} = 0,$$

待定参数

Example 5.3. 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$$

收敛, 求 a, b .

hints 这道题还是用柯西审敛法，注意要同时考虑积分上下限. 当 $x \rightarrow +\infty$ ，那么就要和 $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda > 1)$ 比较，于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda-(a+b)}}{(\frac{1}{x} + 1)^b},$$

其中分母是趋于 0，为保证分子不趋于无穷，则需要 $\lambda < (a+b)$ ，即 $a+b > 1$. 当 $x \rightarrow 0$ 时，那么就要和 $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda < 1)$ 比较，于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{1}{x^{a-\lambda}(1+x)^b},$$

其中 $(1+x)^b \rightarrow 0$ ，则 $a < \lambda$ ，即 $a < 1$.

分离积分

Example 5.4. 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

hints 其中后面这个积分在柯西判别法很容易确定是收敛的 (实际上可以用狄利克雷判别法)，因为总是满足

$$f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

那么前面这个积分可以做一下变换

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx$$

这是因为 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调减的，这一点求两次导即可知道，所以前面这个积分是发散的. 因此整个积分是发散的.

求值

Example 5.5. 求

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

hints 设 $u = \frac{1}{x}$ ，则有

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$$

把这个积分和原积分加起来

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2} dx$$

这里设 $t = x - \frac{1}{x}$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

因此 $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

微分方程

线性微分方程解的结构

Example 6.1. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 求该方程的通解.

hints 这题考察线性微分方程解结构的一个非常典型的题, 这里用到两个非齐次方程的解的差是齐次方程的解, 则

$$y_2 - y_3 = e^x, y_1 - y_3 = e^{3x}.$$

它们是两个线性无关的解, 因此它们是原方程导出的齐次方程的通解, 我们再求一个特解即可, 即 $y_1 - e^{3x} = -xe^{2x}$, 则原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}.$$

带积分的微分方程

Example 6.2. 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求 $f(x)$.

hints 尝试去掉积分符号, 去导前做一些变换,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(u)du &= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1 \\ f(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x} \end{aligned}$$

注意这里有 $f(0) = -1$ (要善于发现这样的条件), 设 $y = \int_0^x f(t)dt$, 于是

$$y' - y = -e^{-x},$$

根据一阶线性方程的通解我们有

$$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2},$$

则 $f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$. 由于 $f(0) = -1$, 因此 $C = -\frac{1}{2}$, 最终 $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

多元函数

带不等式的条件极值

Example 7.1. 求函数 $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

[hints](#) 这个不等式的取值范围是一个闭连通域, 我们只需要分别考虑它里面点构成的区域和边界上的点即可. 在这个椭圆里面唯一的驻点是 $(0, 0)$, 其对应的函数值为 2; 在椭圆上的点满足 $y = 4 - 4^x$, 则 $f(x)$ 可以改写为

$$z = x^2 - (4 - 4^x) + 22 = 5x^2 - 2,$$

其中 $-1 \leq x \leq 1$, 那么其最大值为 3, 最小值为 -2. 三个驻点比较得出最终结果.

二重积分

交换次序

Example 8.1. 求积分

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx.$$

hints 明显这个被积函数对 dx 是不好积的, 于是考虑交换积分次序. 交换次序可以考虑画图来做, 于是有

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos x \Big|_0^1 = -\ln \cos x.$$

化极坐标

Example 8.2. 求积分

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

hints 被积函数出现 $x^2 + y^2$, 考虑化极坐标. 首先把极坐标方程写出来, 确定 θ 变限在 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 当固定一点 x 时, 此时 $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$, 那么考虑这个积分域的边界就有

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = 2\rho \cos \theta \Rightarrow \rho = 2 \cos \theta.$$

于是原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \cos^3 \theta}{3} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta = \frac{8}{3} \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

三重积分

直角坐标

柱坐标

球坐标

多元积分的应用

第一类曲线积分

Annotation 10.1. 第一类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
3. 确定是否为特殊曲线做简化计算的操作, 例如关于坐标轴等价, 在曲线上的自变量等价;
4. 若是曲线积分化定积分. 这一过程要注意弧长微分替换积分变量的过程, 而提到的参数方程的弧长微分为 $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$.

第二类曲线积分

Annotation 10.2. 第二类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方向;
3. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
4. 确定平面曲线积分是否与路径无关, 常见判定手法 (1 $Pdx+Qdy$ 是否是某个二元函数的全微分 (2 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 若与路径无关考虑, (1 利用原函数直接计算 (2 化简单积分路线, 例如平行于坐标轴, 就化为两个定积分.
5. 确定是否为光滑的平面闭曲线, 若为光滑曲线考虑使用格林公式化二重积分, 注意曲线方向和其围成的区域 D 要遵守左手法则, 即绕着曲线的方向绕一圈, 区域 D 总是在观察者的左手边. 还需要注意被积函数 P, Q 在 D 上要有连续的一阶偏导;
6. 确定若不是平面闭曲线, 可以考虑做补线让其变成一个闭曲线, 再使用格林公式, 可能可以简化计算.
7. 确定是否为空间闭曲线, 若是空间闭曲线, 考虑使用斯托克斯公式, 注意曲线方向和曲面的法向量要遵守右手法则.

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

8. 直接计算, 使用公式

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)dt$$

第一类曲面积分

Annotation 10.3. 第一类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种 $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定是否为特殊的曲面做简化计算，例如关于坐标轴平面对称，在曲面上的自变量等价；
3. 直接计算，使用曲面微分的变量替换，需要注意 x, y 的区域 D 的确定

$$\int \int_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \int \int_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

第二类曲面积分

Annotation 10.4. 第二类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种 $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定曲面的方向；
3. 确定曲面是否可以围成一个闭区域，考虑使用高斯公式

$$\int \int_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

这里曲面需要取外侧方向，如果当且曲面是内侧方向则需要加负号，也需要确定 P, Q, R 是否具有一阶连续偏导.

4. 考虑是否可以增加补面围成一个闭区间来使用高斯公式.
5. 直接计算，上述给定是 z 关于 x, y 方程，那么曲线方向决定了曲面法线和 z 轴的夹角余弦值，若余弦值是负的，则需要在下式积分号就带负号

$$\int \int_S f(x, y, z) dx dy = \pm \int \int_{D_{xy}} f(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

这里要注意若给定是 y 关于 x, z 的方程，这里的余弦值则是看曲面法向量和 y 轴的夹角.

级数

不标准的幂级数

Example 11.1. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$$

的收敛半径. [hints](#) 这是一个不标准的幂级数, 无法直接用结论. 所以先化标准的形式 $a_n x^n$. 先考虑积分, 消掉指数的常数, 即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} x^{2n}.$$

再令 $u = x^2$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} u^n$ 的收敛半径, 根据结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

因此其收敛半径为 3, 所以 $|x| < \sqrt{3}$, 即原级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$.

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 12.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \quad a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx, \quad n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1 + x) = a^{\frac{1}{n}}$, 即可得到上式.