考研高数习题集

枫聆

2021 年 8 月 19 日

目录

极限相关

1^∞ 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$，且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$，其中 A 是一个常数，则

$$\lim\,[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

hints 带指数形式的表达式，第一想法是把指数拿下来

$$\lim\,[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x.$$

hints

$$\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x = \left(\frac{x}{x-a}\right)^x\cdot\left(\frac{x}{x+b}\right)^x = \left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x\cdot\left(1-\frac{b}{x+b}\right)^x = e^{a-b}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n.$$

hints 往 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}$ 上凑

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)^n$$

考虑 $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{3}\cdot n = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}}\right)$$

1^0 类型极限

Example 1.4. 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$，则

$$(1+\alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

hints 取对数

$$e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

夹逼准则应用

Example 1.5. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq s\leq\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Example 1.6. 求极限

$$\lim_{n\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

hints

$$x-1\leq[x]\leq x$$

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1}\right)\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.8. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

hints 直接考察

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分，即对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到一个 n_1，使得 $n>n_1$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_{n_1}-A)}{n}+\tfrac{(a_{n_1+1}-A)+(a_{n_1+2}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|\\ \le&\tfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{n_1}-A|}{n}+\tfrac{|a_{n_1+2}-A|+|a_{n_1+1}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\end{aligned}$$

上述不等式右边第一项，形如 $\frac{C}{n}$，因为先对任意 $n>n_1$ 都有上述不等式成立，那么只需要让 n 取的大一点，就能使得 $\frac{C}{n}<\varepsilon$(阿基米德公理). 右边第二项显然小于 $\frac{n-n_1}{n}\varepsilon$，于是综上

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-A\right|<\varepsilon+\frac{n-n_1}{n}\varepsilon<2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值，我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来，然后用初等方法来验证，再根据极限的唯一性，就得到了答案. 把 a_n 换成形式，例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Example 1.9. 求极限

$$x_n=\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots}=\frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握，用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k}\frac{k}{n}=\int_0^1 x^k=\frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=n^{k+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\sim_\infty n^{k+1}\int_0^1 x^k dx=\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Example 1.10. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

hints

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为 $\ln x$ 的连续性，所以 $\lim \ln a_n = \ln a$，再根据*1.8*.

Example 1.11. 当 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, a_n > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

hints 取对数再根据*1.10*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{lna} = a.$$

Example 1.12. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

hints 由 *1.11* 可知 a_n 和 $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的极限是相同的 *(*假设 a_n 的极限存在*)*. 那么有一个推论，对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则 $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$，只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设 $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 即可，那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

去除根式的尴尬

Example 1.13. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right].$$

hints

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)=x^k\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

那么

$$x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=x\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对 $(1+x)^p$ 在 $x=0$ 处用了一下泰勒展开得到 $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$，这个 $\mathcal{O}$ 表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法，即下面的恒等式

$$y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\cdots+z^{k-1}}.$$

这里我们使得 $y=\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$ 及 $z=x$，那么原式就变成了

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)-x^k}{\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}\right]^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}}\\
&= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-2}x+\cdots+1} \qquad \text{上下除以 } x^{k-1}
\end{aligned}$$

分母中 $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$ 是趋于 1 的，再用一下函数 $x^{\frac{m}{n}}$ 的连续性，取其函数值也是等于 1，所以分母就有 $k\cdot 1$.

Example 1.14. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

hints 取对数应用 e^x 的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\frac{\ln n}{n}}=1.$$

也可以使用一下5.1的伯努利不等式来证明，这里设 $\sqrt[n]{n}=1+h$，那么

$$\begin{aligned}
& n=(1+h)^n=1+nh+\tfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\\
\Rightarrow\ & n\geq\tfrac{n(n-1)}{2}h^2\\
\Rightarrow\ & h^2\leq\tfrac{2}{n-1}.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，$h\to 0$，即 $\sqrt[n]{n}-1\to 0$，所以 $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

换元取极限

Example 1.15. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x},\ m\in\mathbb{N}.$$

hints 设 $y=\sqrt[m]{x+1}-1$，显然 y 在 $x=0$ 处连续，所以当 $x\to 0$ 时有 $y\to 0$，那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{(y+1)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式，分母二项式展开.

Example 1.16. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{n}{m}}-1}{x}.$$

hints 还是使得 $y=(x+1)^{\frac{1}{m}}-1$，那么就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}\frac{y}{(1+y)m-1}=\frac{n}{m}.$$

递归求极限

Example 1.17. 1.7 单调数列求极限

hints 考虑递归式

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a=a\cdot 0\Rightarrow a=0.$$

等价无穷小的替换

中值定理

Example 1.18. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x].$$

hints 对连续函数 $\ln\arctan x$ 应用中值定理

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\frac{1}{[1+(\theta+x)^2]\arctan(\theta+x)},$$

其中 $0<\theta<1$. 那么即有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+(\theta+x)^2}\frac{1}{\arctan(\theta+x)}=\frac{1}{\pi}.$$

导数

导数定义相关的

Example 2.1. 已知 $f'(x_0) = -1$，求

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}.$$

hints直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x} = -1$$

求出需要 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{x}$，两项相减再取倒.

不定积分

多项式分式

Example 3.1. 求

$$\int \frac{x^4-x^2}{1+x^2}dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4-x^2}{1+x^2} = \frac{(x^4-1)-(x^2+1)+2}{1+x^2} = x^2 + \frac{2}{1+x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2\arctan x - 2x + C,$$

Example 3.2. 求

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx.$$

hints观察分子多项式次数小于分母的，且只小一次，所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx + 8\int \frac{1}{x^2-6x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-6x+13}d(x^2-6x+13) + 8\int \frac{1}{4+(x-3)^2}dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

Example 3.3. 求
$$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5}dx$$
hints 观察分子多项式次数小于分母，且小两次，所以我们考虑这样部分分式
$$\int \frac{x}{4+(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4+(x^2+1)^2}d(x^2+1) = \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2}+C$$

分母带根号

Example 3.4. 求
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$
hints根号下凑平方
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}d(x-2) = \arcsin\frac{x-2}{2}+C$$
Example 3.5. 求
$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$$
hints 先分式把分子变成常数 1
$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx+\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}d(3+2x-x^2)+\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx,$$
因此原函数为
$$\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\frac{x-1}{2}+C$$
Example 3.6. 求
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$
hints 考虑第二类换元，令 $x=a\sin t$，则
$$\int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int 1-\cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2}-\frac{a^2}{4}\sin 2t.$$
把 t 变成 x 也有一点技巧，第二项可以变成 $\frac{1}{2}(a\sin t)(a\cos t)$，其中 $a\sin t=x, a\cos t=\sqrt{a^2-x^2}$，这样会方便一点
$$\frac{a^2\arcsin\frac{x}{a}}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

换元法

Example 3.7. 求

$$\int \sqrt{1+e^x}dx$$

hints考虑第二类换元，令 $x=\ln(t^2-1)$，则

$$\int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int 1+\frac{1}{t^2-1}dt=2t+\ln|\frac{t-1}{t+1}|+C$$

带入 $t=\sqrt{e^x+1}$，即得

$$2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$$

高次

分部积分

三角有理式

Example 3.8. 求

$$\int\frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}.$$

hints 这里有一个非常巧妙的第二类换元，令 $x=\arcsin u$，则

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1+u)}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\int\frac{1}{(1+u)(1-u^2)}du.$$

再把有理式拆开，这过程使用待定系数的方法

$$\int\frac{1}{(1+u)(1-u^2)}du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}du=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+u)}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin x}+C.$$

Example 3.9. 求

$$\int\frac{dx}{\sin x(\sin x+\cos x)}.$$

hints 考虑第二类换元，令 $x=\operatorname{arccot}u$，则有

$$-\int\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}})}\frac{1}{1+u^2}du=-\int\frac{1}{1+u}du=-\ln|u|+C=-\ln|1+\cot x|+C.$$

被积函数含不常见函数形式

Example 3.10. 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

hints 必须得想办法吧 $\arcsin e^x$ 提出来，因为我们没有已知原函数导数为反三角的，这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令 $t = \sqrt{1-e^{2x}}$，那么 $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}, dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$，于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

Example 3.11. 求

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx, x > 0$$

hints首选分部积分，但是为了为了能部分积分，我们必须先第一类换元，令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$，那么 $x = \frac{1}{t^2-1}$，于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

定积分

奇怪的定积分

Example 4.1. 设 $f(x)=\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$.

hints 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 5.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n},\ a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1+x)^n \leq 1 + nx,\ n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1+x) = a^{\frac{1}{n}}$，即可得到上式.