

# 考研高数习题集

枫聆

2021 年 8 月 26 日

## 目录

<b>1 极限相关</b>	<b>3</b>
1.1 $1^\infty$ 类型极限	3
1.2 $1^0$ 类型极限	3
1.3 夹逼准则应用	4
1.4 级数相关的极限	5
1.5 去除根式的尴尬	7
1.6 换元取极限	8
1.7 递归求极限	8
1.8 等价无穷小的替换	8
1.9 中值定理	8
1.10 含积分的极限	9
<b>2 导数</b>	<b>9</b>
2.1 导数定义相关的	9
<b>3 不定积分</b>	<b>9</b>
3.1 多项式分式	9
3.2 分母带根号	10
3.3 换元法	11
3.4 高次	11
3.5 分部积分	11
3.6 三角有理式	11
3.7 被积函数含不常见函数形式	12

<b>4</b>	<b>定积分</b>	<b>14</b>
4.1	参数积分求导 . . . . .	14
4.2	奇怪的定积分 . . . . .	14
<b>5</b>	<b>反常积分</b>	<b>15</b>
5.1	含有 $e^x$ 的被积函数 . . . . .	15
5.2	待定参数 . . . . .	15
<b>6</b>	<b>微分方程</b>	<b>17</b>
6.1	线性微分方程解的结构 . . . . .	17
6.2	带积分的微分方程 . . . . .	17
<b>7</b>	<b>多元函数</b>	<b>18</b>
7.1	带不等式的条件极值 . . . . .	18
<b>8</b>	<b>二重积分</b>	<b>19</b>
8.1	交换次序 . . . . .	19
8.2	化极坐标 . . . . .	19
<b>9</b>	<b>tricks</b>	<b>20</b>
9.1	一些有趣的不等式 . . . . .	20

## 极限相关

### $1^\infty$ 类型极限

**Example 1.1.** 若  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$ , 且  $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$ , 其中  $A$  是一个常数, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

*hints* 带指数形式的表达式, 第一想法是把指数拿下来

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

**Example 1.2.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x.$$

*hints*

$$\left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \left( \frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left( \frac{x}{x+b} \right)^x = \left( 1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \left( 1 - \frac{b}{x+b} \right)^x = e^{a-b}.$$

**Example 1.3.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n.$$

*hints* 往  $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$  上凑

$$\left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$$

考虑  $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1) + (\sqrt[n]{b}-1) + (\sqrt[n]{c}-1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}} \right)$$

### $1^0$ 类型极限

**Example 1.4.** 若  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$ , 则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

*hints* 取对数

$$e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

## 夹逼准则应用

**Example 1.5.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

*hints*

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

**Example 1.6.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right].$$

*hints*

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

**Example 1.7.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

*hints*

$$\left( \frac{2}{1} \right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

## 级数相关的极限

**Example 1.8.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

*hints* 直接考察

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分, 即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 可以找到一个  $n_1$ , 使得  $n > n_1$  时有  $|x_n - A| < \varepsilon$ , 那么

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{n_1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - A) + (a_{n_1+2} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{n_1} - A|}{n} + \frac{|a_{n_1+2} - A| + |a_{n_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

上述不等式右边第一项, 形如  $\frac{C}{n}$ , 因为先对任意  $n > n_1$  都有上述不等式成立, 那么只需要让  $n$  取的大一点, 就能使得  $\frac{C}{n} < \varepsilon$  (**阿基米德公理**). 右边第二项显然小于  $\frac{n - n_1}{n} \varepsilon$ , 于是综上

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值, 我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来, 然后用初等方法来验证, 再根据极限的唯一性, 就得到了答案. 把  $a_n$  换成形式, 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

**Example 1.9.** 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

*hints* 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1}$ . 这道题初等方法似乎不能很好的把握, 用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是  $1^k + 2^k + \cdots + n^k$  的转换思路

$$\sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^k \sim_{\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

**Example 1.10.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

*hints*

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为  $\ln x$  的连续性, 所以  $\lim \ln a_n = \ln a$ , 再根据 1.8.

**Example 1.11.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

*hints* 取对数再根据 1.10

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}} = e^{\ln a} = a.$$

**Example 1.12.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

*hints* 由 1.11 可知  $a_n$  和  $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$  的极限是相同的 (假设  $a_n$  的极限存在). 那么有一个推论, 对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则  $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  即可, 那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

## 去除根式的尴尬

**Example 1.13.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right].$$

*hints*

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

那么

$$x \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{\frac{1}{k}} = x \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对  $(1+x)^p$  在  $x=0$  处用了一下泰勒展开得到  $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$ , 这个  $\mathcal{O}$  表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法, 即下面的恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}.$$

这里我们使得  $y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$  及  $z = x$ , 那么原式就变成了

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) - x^k}{\left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-1} + \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+\mathcal{O}(\frac{1}{x})}{\left[ \sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})} \right]^{k-1} + \left[ \sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})} \right]^{k-2}x + \cdots + 1} \end{aligned}$$

上下除以  $x^{k-1}$

分母中  $\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}$  是趋于 1 的, 再用一下函数  $x^{\frac{m}{n}}$  的连续性, 取其函数值也是等于 1, 所以分母就有  $k \cdot 1$ .

**Example 1.14.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

*hints* 取对数应用  $e^x$  的连续性

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim \frac{\ln n}{n}} = 1.$$

也可以使用一下 9.1 的伯努利不等式来证明, 这里设  $\sqrt[n]{n} = 1 + h$ , 那么

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ \Rightarrow h^2 &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $h \rightarrow 0$ , 即  $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$ , 所以  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ .

## 换元取极限

**Example 1.15.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{x+1} - 1}{x}, m \in \mathbb{N}.$$

*hints* 设  $y = \sqrt[m]{x+1} - 1$ , 显然  $y$  在  $x = 0$  处连续, 所以当  $x \rightarrow 0$  时有  $y \rightarrow 0$ , 那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式, 分母二项式展开.

**Example 1.16.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{\frac{n}{m}} - 1}{x}.$$

*hints* 还是使得  $y = (x+1)^{\frac{1}{m}} - 1$ , 那么就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} \frac{y}{(1+y)m - 1} = \frac{n}{m}.$$

## 递归求极限

**Example 1.17.** 1.7 单调数列求极限

*hints* 考虑递归式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a = a \cdot 0 \Rightarrow a = 0.$$

## 等价无穷小的替换

## 中值定理

**Example 1.18.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

*hints* 对连续函数  $\ln \arctan x$  应用中值定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{[1 + (\theta + x)^2] \arctan(\theta + x)},$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 那么即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (\theta + x)^2} \frac{1}{\arctan(\theta + x)} = \frac{1}{\pi}.$$



## 含积分的极限

**Example 1.19.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$$

**hints** 这样的含参数积分最好的办法就是洛必达，但是这里首先需要换元一下，令  $u = x - t$ ，则

$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = \int_0^x \sqrt{u} e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du.$$

再用洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

## 导数

### 导数定义相关的

**Example 2.1.** 已知  $f'(x_0) = -1$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}.$$

**hints** 直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} &= -1 \end{aligned}$$

求出需要  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{x}$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x}$ ，两项相减再取倒。

## 不定积分

### 多项式分式

**Example 3.1.** 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

**hints** 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2 \arctan x - 2x + C,$$

**Example 3.2.** 求

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx.$$

**hints** 观察分子多项式次数小于分母的, 且只小一次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13} dx + 8 \int \frac{1}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-6x+13} d(x^2-6x+13) + 8 \int \frac{1}{4+(x-3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C.$$

**Example 3.3.** 求

$$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx$$

**hints** 观察分子多项式次数小于分母, 且小两次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4+(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4+(x^2+1)^2} d(x^2+1) = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2+1}{2} + C$$

## 分母带根号

**Example 3.4.** 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

**hints** 根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} d(x-2) = \arcsin \frac{x-2}{2} + C$$

**Example 3.5.** 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

**hints** 先分式把分子变成常数 1

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

**Example 3.6.** 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = a \sin t$ , 则

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4} \sin 2t.$$

把  $t$  变成  $x$  也有一点技巧, 第二项可以变成  $\frac{1}{2}(a \sin t)(a \cos t)$ , 其中  $a \sin t = x, a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$ , 这样会方便一点

$$\frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

## 换元法

**Example 3.7.** 求

$$\int \sqrt{1 + e^x} dx$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = \ln(t^2 - 1)$ , 则

$$\int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

带入  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 即得

$$2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$$

## 高次

## 分部积分

## 三角有理式

**Example 3.8.** 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$$

**hints** 这里有一个非常巧妙的第二类换元, 令  $x = \arcsin u$ , 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}(1 + u)} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int \frac{1}{(1 + u)(1 - u^2)} du.$$

再把有理式拆开, 这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+u)}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\sin x} + C.$$

**Example 3.9.** 求

$$\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}.$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = \operatorname{arccot} u$ , 则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})} \frac{1}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{1+u} du = -\ln|u| + C = -\ln|1+\cot x| + C.$$

## 被积函数含不常见函数形式

**Example 3.10.** 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

**hints** 必须得想办法吧  $\arcsin e^x$  提出来, 因为我们没有已知原函数导数为反三角的, 这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令  $t = \sqrt{1-e^{2x}}$ , 那么  $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}$ ,  $dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$ , 于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

**Example 3.11.** 求

$$\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$$

**hints** 首选分部积分, 但是为了为了能部分积分, 我们必须先第一类换元, 令  $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ , 那么  $x = \frac{1}{t^2-1}$ , 于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

## 定积分

### 参数积分求导

**Example 4.1.** 设  $f(x)$  连续, 求

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$$

**hints** 对于这种第二类的参数积分, 对于有比较简洁的结果的, 首先应该换元试试, 令  $u = x^2 - t^2$ , 那么即有

$$-\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2).$$

### 奇怪的定积分

**Example 4.2.** 设  $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ , 求  $\int_0^\pi f(x) dx$ .

**hints** 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x) dx = x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

## 反常积分

### 含有 $e^x$ 的被积函数

**Example 5.1.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0).$$

**hints** 比较审敛法, 取任意的  $\lambda > 1$ , 即  $\frac{1}{x^\lambda}$  是收敛的, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu e^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\mu+\lambda}}{e^{ax}} = 0,$$

因此原无穷积分也是收敛的.

**Example 5.2.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

**hints** 这里需要注意两个上下积分限都需要考察, 我们可以将上述积分划分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int_A^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},$$

其中  $A \in (0, +\infty)$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 取  $0 < \lambda < 1$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = 0,$$

即积分  $\int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$  是收敛的. 当  $x \rightarrow \infty$  时, 取  $\lambda > 1$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \cdot x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} = 0,$$

### 待定参数

**Example 5.3.** 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$$

收敛, 求  $a, b$ .

[hints](#) 这道题还是用柯西审敛法，注意要同时考虑积分上下限. 当  $x \rightarrow +\infty$ ，那么就要和  $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda > 1)$  比较，于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda-(a+b)}}{(\frac{1}{x} + 1)^b},$$

其中分母是趋于 0，为保证分子不趋于无穷，则需要  $\lambda < (a+b)$ ，即  $a+b > 1$ . 当  $x \rightarrow 0$  时，那么就要和  $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda < 1)$  比较，于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{1}{x^{a-\lambda}(1+x)^b},$$

其中  $(1+x)^b \rightarrow 0$ ，则  $a < \lambda$ ，即  $a < 1$ .



## 微分方程

### 线性微分方程解的结构

**Example 6.1.** 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$ ,  $y_2 = e^x - xe^{2x}$ ,  $y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 求该方程的通解.

**hints** 这题考察线性微分方程解结构的一个非常典型的题, 这里用到两个非齐次方程的解的差是齐次方程的解, 则

$$y_2 - y_3 = e^x, y_1 - y_3 = e^{3x}.$$

它们是两个线性无关的解, 因此它们是原方程导出的齐次方程的通解, 我们再求一个特解即可, 即  $y_1 - e^{3x} = -xe^{2x}$ , 则原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}.$$

### 带积分的微分方程

**Example 6.2.** 设函数  $f(x)$  连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求  $f(x)$ .

**hints** 尝试去掉积分符号, 去导前做一些变换,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(u)du &= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1 \\ f(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x} \end{aligned}$$

注意这里有  $f(0) = -1$  (要善于发现这样的条件), 设  $y = \int_0^x f(t)dt$ , 于是

$$y' - y = -e^{-x},$$

根据一阶线性方程的通解我们有

$$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2},$$

则  $f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$ . 由于  $f(0) = -1$ , 因此  $C = -\frac{1}{2}$ , 最终  $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

## 多元函数

### 带不等式的条件极值

**Example 7.1.** 求函数  $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$  在椭圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上的最大值和最小值.

[hints](#) 这个不等式的取值范围是一个闭连通域, 我们只需要分别考虑它里面点构成的区域和边界上的点即可. 在这个椭圆里面唯一的驻点是  $(0, 0)$ , 其对应的函数值为 2; 在椭圆上的点满足  $y = 4 - 4^x$ , 则  $f(x)$  可以改写为

$$z = x^2 - (4 - 4^x) + 22 = 5x^2 - 2,$$

其中  $-1 \leq x \leq 1$ , 那么其最大值为 3, 最小值为 -2. 三个驻点比较得出最终结果.

## 二重积分

### 交换次序

**Example 8.1.** 求积分

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx.$$

**hints** 明显这个被积函数对  $dx$  是不好积的, 于是考虑交换积分次序. 交换次序可以考虑画图来做, 于是有

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos x \Big|_0^1 = -\ln \cos x.$$

### 化极坐标

**Example 8.2.** 求积分

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

**hints** 被积函数出现  $x^2+y^2$ , 考虑化极坐标. 首先把极坐标方程写出来, 确定  $\theta$  变限在  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , 当固定一点  $x$  时, 此时  $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ , 那么考虑这个积分域的边界就有

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = 2\rho \cos \theta \Rightarrow \rho = 2 \cos \theta.$$

于是原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \cos^3 \theta}{3} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta = \frac{8}{3} (\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

## tricks

### 一些有趣的不等式

**Proposition 9.1.**

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \quad a > 1.$$

*hints* 伯努利不等式.

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx, \quad n \geq 0, x \leq -1.$$

使得  $(1 + x) = a^{\frac{1}{n}}$ , 即可得到上式.