考研高数习题集

枫聆

2021 年 6 月 22 日

目录

极限相关

1^{∞} 类型极限

Example 1.1. 若 $\lim \alpha(x) = 1, \lim \beta(x) = \infty$，且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$，其中 A 是一个常数，则

$$\lim\,[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^{A}.$$

hints 带指数形式的表达式，第一想法是把指数拿下来

$$\lim\,[1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x)\ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^{A}.$$

夹逼准则应用

Example 1.2. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right).$$

hints

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Example 1.3. 求极限

$$\lim_{n\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

hints

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

Example 1.4. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

hints

$$\left(\frac{2}{1}\right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

级数相关的极限

Example 1.5. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A.$$

hints 直接考察

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分，即对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到一个 n_1，使得 $n>n_1$ 时有 $|x_n-A|<\varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_{n_1}-A)}{n} + \tfrac{(a_{n_1+1}-A)+(a_{n_1+2}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right| \\ \le &\tfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{n_1}-A|}{n} + \tfrac{|a_{n_1+2}-A|+|a_{n_1+1}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\end{aligned}$$

上述不等式右边第一项，形如 $\frac{C}{n}$，因为先对任意 $n>n_1$ 都有上述不等式成立，那么只需要让 n 取的大一点，就能使得 $\frac{C}{n}<\varepsilon$(阿基米德公理). 右边第二项显然小于 $\frac{n-n_1}{n}\varepsilon$，于是综上

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - A\right| < \varepsilon + \frac{n-n_1}{n}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值，我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来，然后用初等方法来验证，再根据极限的唯一性，就得到了答案. 把 a_n 换成形式，例如

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Example 1.6. 求极限

$$x_n = \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

hints 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有 $\lim \frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots} = \frac{1}{k+1}$. 这道题初等方法似乎不能很好的把握，用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的转换思路

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = n^{k+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k \sim_\infty n^{k+1}\int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

换元取极限

Example 1.7. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}-1}{x},\ m\in\mathbb{N}.$$

hints 设 $y=\sqrt[m]{x+1}-1$，显然 y 在 $x=0$ 处连续，所以当 $x\to 0$ 时有 $y\to 0$，那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{(y+1)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式，分母二项式展开.

Example 1.8. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{n}{m}}-1}{x}.$$

hints 还是使得 $y=(x+1)^{\frac{1}{m}}-1$，那么就变成了

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y}\frac{y}{(1+y)m-1}=\frac{n}{m}.$$

tricks

一些有趣的不等式

Proposition 2.1.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n},\ a > 1.$$

hints 伯努利不等式.

$$(1+x)^n \leq 1 + nx,\ n \geq 0, x \leq -1.$$

使得 $(1+x) = a^{\frac{1}{n}}$，即可得到上式.