

# 考研高数

枫聆

2021 年 6 月 12 日

## 目录

<b>1 经典证明</b>	<b>4</b>
<b>2 数列极限</b>	<b>8</b>
2.1 数列极限的定义	8
2.2 数列极限的几何意义	8
2.3 数列左右极限	8
2.4 数列极限的基本性质	8
2.5 数列无穷小和无穷大	8
2.6 数列极限运算	8
2.7 不定式	9
2.8 单调数列的极限	9
2.9 收敛原理	10
2.10 上下极限	11
<b>3 函数极限</b>	<b>12</b>
3.1 函数极限的定义	12
3.2 函数左右极限	12
3.3 用数列的语言来描述函数极限	12
3.4 两个重要极限	12
3.5 函数极限的基本性质	12
3.6 函数极限运算	12
3.7 不定式	13
3.8 单调函数的极限	13

3.9	函数收敛的判定方法	13
3.10	无穷小及无穷大的分阶	13
3.11	洛必达法则	14
<b>4</b>	<b>函数连续及其间断</b>	<b>17</b>
4.1	函数连续的定义	17
4.2	连续函数的算术运算	17
4.3	单侧连续和间断分类	17
4.4	单调函数的连续性和间断	18
4.5	初等函数的连续性	18
4.6	连续函数的复合	18
4.7	一致性连续	18
<b>5</b>	<b>函数导数</b>	<b>19</b>
5.1	导数定义	19
5.2	初等函数导数表	19
5.3	函数增量公式	19
5.4	导数的基本性质	20
5.5	求导法则	20
5.6	复合函数求导	21
<b>6</b>	<b>函数微分</b>	<b>22</b>
6.1	微分定义	22
6.2	可微和可导的关系	22
6.3	初等函数微分公式	22
6.4	微分运算法则	22
6.5	微分不变性	23
6.6	近似计算	23
6.7	微分基本定理	23
<b>7</b>	<b>高阶导数及微分</b>	<b>25</b>
7.1	高阶导数定义	25
7.2	初等函数的 $n$ 阶导数公式	25
7.3	莱布尼茨公式	25
7.4	高阶微分定义	26

7.5	参变量微分法 . . . . .	26
7.6	泰勒公式 . . . . .	26
7.7	插值法 . . . . .	29
<b>8</b>	<b>利用导数研究函数</b>	<b>30</b>
8.1	基本性质的判定 . . . . .	30
8.2	凹凸性 . . . . .	31

## 经典证明

**Theorem 1.1.** (Weierstrass 第一定理或者连续函数在闭区间上必有界) 若 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么它在其上有界 (上下界).

证明. (方法 1: 构造  $f(x)$  非空子区间  $[a, x]$ , 求其上确界) 假设  $B$  是使得  $f(x)$  在形如闭区间  $[a, x]$  上有界的  $x \in [a, b]$  集合, 显然  $a \in B$ , 所以  $B$  非空. 若  $e \in B$  且  $e > a$ , 那么  $a$  和  $e$  之间的点都是在  $B$  里面的, 所以实际上  $B$  是一个闭区间. 我们再考虑  $B$  的上确界, 根据  $x$  的取法, 有  $x \leq b$ , 如果我们能证明它的上确界在  $b$  出取得, 那么整个命题就得证. 现在假设  $\sup(B) < b$ , 由于  $B$  是一个闭区间, 所以  $\sup(B) \in B$ . 由于  $f$  是连续的, 那么足够靠近  $\sup(B)$  的地方, 即  $s - \sup(B) < \delta$  且  $s > \sup(B)$ , 有  $|f(s) - f(\sup(B))| < \varepsilon$ , 那么  $f(x)$ ,  $x \in [\sup(B), s]$  也是有界, 这是和  $\sup B$  是  $B$  的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的发散数列, 其所有子列收敛造矛盾, 即 Bolzano-Weierstrass 定理).  $\square$

**Theorem 1.2.** (确界原理) 任一有上界的非空实数集必有上确界, 同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. (构造一个实数划分, 用戴德金分割定理说明界数就是确界) 假设非空实数集  $S$  有上界  $M$ , 取  $S$  所有上界为集合  $B$ . 因为  $M \in B$  所以  $B$  非空, 取  $A = \mathbb{R} \setminus B$ , 要证明  $A$  是非空是 trivial 的, 取  $x = x_0 - 1$ ,  $x_0 \in S$ , 那么  $x \in A$ . 显然地  $A$  里面所有的元素都小于  $B$  里面的元素 (若是大于  $B$  里面某个元素, 那么它就是  $S$  的一个上界了, 这是矛盾的), 这样我们就可以得到一个实数上的划分, 根据戴德金实数分割定理, 存在一个  $\beta$ , 它要么是  $A$  里面最大值或者要么  $B$  里面的最小值. 假设它是  $A$  里面的最大值, 根据  $A$  的定义, 对于任意  $a \in A$  都存在一个  $x_0 \in S$  使得  $a < x_0$ , 将其作用到  $\beta$  上, 我们得到某个  $x'_0 \in S$  使得  $\beta < x'_0$ . 我们考虑  $\frac{x'_0 + \beta}{2}$ , 有

$$\beta < \frac{x'_0 + \beta}{2} < x'_0$$

所以  $\frac{x'_0 + \beta}{2} \in A$ , 这和  $\beta$  是  $A$  里面最大值是矛盾的, 所以  $\beta \in B$ , 即这个  $\beta$  就是  $S$  的上确界.  $\square$

**Theorem 1.3.** (零点定理或者 Bolzano-Cauchy 第一定理) 若 real-valued 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上定义着并且连续, 且  $f(a)f(b) < 0$ . 则  $a$  与  $b$  之间存在一点  $c$ , 使得

$$f(c) = 0.$$

证明. ( $c$  是集合的确界) 为方便证明我们假设  $f(a) < 0$  和  $f(b) > 0$ , 根据  $f(x)$  在点  $a$  处连续, 根据保号性可知在足够接近  $a$  的  $x$  的函数值也都是小于 0 的, 我们取集合  $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$ , 显然  $S$  是不为空的, 因为  $a \in S$ , 我们考虑  $\sup S$ , 记为  $c = \sup S$ . 显然一定也有  $c \leq b$ . 我们来证明  $f(c) = 0$ , 利用反证法假设  $f(c) < 0$ , 那么由于  $f(x)$  在  $c$  点连续, 我们在其右边  $c + \delta$  找到一点  $c'$  使得  $f(c') < 0$ , 这和  $c$  的定义是矛盾的, 再考虑  $f(c) > 0$ , 同样由于其连续性, 同样可以在  $c$  左边  $c - \delta$  找到一点  $c'$  使得  $f(c') > 0$ , 这和  $c$  的定义还是矛盾的. 所以  $f(c) = 0$ .

另一种证明手法可以使用区间套.  $\square$

**Theorem 1.4. (介值定理或者 Bolzano-Cauchy 第二定理)** 若 real-valued 函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  上定义着并且连续. 若在  $\mathcal{X}$  上两点  $x = a$  和  $x = b$  处有着不相同的函数值

$$f(a) = A \text{ and } f(b) = B.$$

则对于  $A$  和  $B$  之间任意的数  $C$ , 均存在一点  $c$  位于  $a$  和  $b$  之间使得

$$f(c) = C.$$

用自然语言描述这个性质就是当连续函数从一个值转变到另一个值时, 它必经过每一中间值一次, 换句话说就是  $x$  在  $\mathcal{X}$  上变动时其对应的函数值将完全充满某一区间  $\mathcal{Y}$ .

证明. 为方便证明, 我们设  $A < C < B$  且  $a < b$ . 在  $[a, b]$  上考察连续函数  $\varphi(x) = f(x) - C$ , 那么有  $\varphi(a) = f(a) - C < 0$  和  $\varphi(b) = f(b) - C > 0$ , 根据零点定理, 我们可以马上得到存在  $x = c$  使得  $\varphi(c) = f(c) - C = 0$ , 即  $f(c) = C$ .  $\square$

**Theorem 1.5. (极值定理或者 Weierstrass 第二定理)** 若 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  连续, 那们存在  $c, d \in [a, b]$  使得

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d), x \in [a, b].$$

证明. (构造一个特殊连续函数说明原函数可以取到确界)  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续 (连续闭有界), 那么马上可以得到  $f$  在  $[a, b]$  上有界. 取集合  $Y = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ , 即  $Y$  有界, 根据确界原理  $Y$  有确界, 那么我们下面证明思路, 就是看  $f(x)$  是不是能取到这个确界. 取其上确界为  $m$ , 假设不存在  $d \in [a, b]$  使得  $f(d) = m$ , 那么我们考虑函数  $g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$ , 由于  $m > f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 所以  $g(x)$  在  $[a, b]$  上是连续的, 又因为  $f$  在  $[a, b]$  是上有界的, 那么  $g$  在其上也是有界的. 由于  $m$  是上确界, 所以对任意的正实数  $\varepsilon$ , 都有  $m - f(x) \leq \varepsilon$ , 那么  $g(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , 这说明  $g(x)$  是发散的, 造成了矛盾. 所以  $f$  是可以取到上确界的.  $\square$

**Lemma 1.6. (方便证明费马定理的小引理)** 设 real-valued 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有有限导数  $f'(x_0)$ . 若  $f'(x_0) > 0$  [ $f'(x_0) < 0$ ], 则当  $x$  取右方充分接近  $x_0$  的数时就有  $f(x) > f(x_0)$  [ $f(x) < f(x_0)$ ], 而当  $x$  取左方充分接近于  $x_0$  的数值时就有  $f(x) < f(x_0)$  [ $f(x) > f(x_0)$ ].

证明. 这里就需要考虑单侧导数, 若  $f'(x_0) > 0$ , 依据导数的定义

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

若  $x$  从左边接近  $x_0$ , 那么有  $x - x_0 < 0$ , 那么必然有  $f(x) - f(x_0) < 0$  ( $x$  充分接近  $x_0$ ). 同理  $x$  从右边接近  $x_0$ , 那么  $x - x_0 > 0$ , 必然也有  $f(x) - f(x_0) > 0$  ( $x$  充分接近  $x_0$ ).  $\square$

**Theorem 1.7. (费马定理)** 设 real-valued 函数是在某一区间  $\mathcal{X}$  上定义着, 并且在这区间的内点  $c$  (存在一个  $\mathcal{X}$  的子开区间包含  $c$ ) 取得最大 (最小值). 若在这点处存在着有限导数  $f'(c)$ , 则必有  $f'(c) = 0$ .

证明. 方便证明, 假设  $f(x)$  在  $c$  点取得最大值. 分情况考虑, 若  $f'(c) > 0$ , 那么在其  $c$  左边充分接近  $c$  的函数值  $f(x) > f(c)$ , 这其最大值的含义矛盾. 同理若  $f'(c) < 0$ , 那么在其  $c$  的右边充分接近  $c$  的函数值  $f(x) > f(c)$ , 也是和其最大值矛盾的. 故  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Theorem 1.8. (达布定理)** 若 real-valued 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  内有有限导数, 则  $f'(x)$  必至少有一次取得介于  $f'(a)$  及  $f'(b)$  之间的值.

证明. 第一想法肯定是特别想用连续函数的介值定理, 但是用不了, 这里并没有条件说明  $f'(x)$  是连续的, 特别地可导不一定代表其导函数连续, i.e.  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ . 首先证明若  $f'(a)$  和  $f'(b)$  异号时, 必有  $c \in (a, b)$  使得  $f'(c) = 0$ , 方便证明不是一般性设  $f'(a) < 0$  和  $f'(b) > 0$ ,  $f(x)$  可导即连续, 根据极值定理, 存在一点  $c$  使得  $f(c)$  为最大值, 根据前面的费马定理, 这个最大值必不可能在  $a$  或者  $b$  点取到, 因此  $c \in (a, b)$  且  $f'(c) = 0$ .

再来考虑一般情况, 取位于  $f'(a)$  和  $f'(b)$  之间任意的  $C$ , 方便证明设  $f'(a) < C < f'(b)$ . 考虑函数  $\varphi(x) = f(x) - Cx$ , 它的导数为  $\varphi'(x) = f'(x) - C$ , 特别地有  $\varphi'(a) < 0$  和  $\varphi'(b) > 0$ , 即回到了我们刚开始考虑的情况, 所以存在一点  $c \in (a, b)$  使得  $\varphi'(c) = f'(c) - C = 0$ .  $\square$

**Theorem 1.9. (罗尔定理)** 如果 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在开区间  $(a, b)$  内可导, 若有  $f(a) = f(b)$ , 那么存在至少一个  $c \in (a, b)$  使得

$$f'(c) = 0.$$

证明. (确界处导数存在的充分必要条件) 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 那么根据极值定理其在  $[a, b]$  是可以取到极值的, 分两种情况讨论: (1 如果其最大值和最小值同时在  $a, b$  取得, 那么  $f$  就是常函数, 对任意的  $x \in [a, b]$  都有  $f'(x) = 0$ . (2 不失一般性, 我们假设  $f$  在一点  $c \in (a, b)$  处  $f(c)$  为最大值 (若是最小值, 考虑  $-f$  即可), 我们来考虑  $c$  的一个邻域  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  两边, 其中  $c - \varepsilon$  和  $c + \varepsilon$  均在  $[a, b]$  里面. 对任意的  $h \in (c - \varepsilon, c)$  都有

$$f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow c^-} \frac{f(c) - f(h)}{c - h} \leq 0.$$

同理对任意的  $t \in (c, c + \varepsilon)$  都有

$$f'(c^+) = \lim_{t \rightarrow c^+} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0.$$

由于  $f$  在  $c$  点可导, 那么  $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+) = 0$ .  $\square$

**Theorem 1.10. (拉格朗日中值定理)** 若 real-valued 函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 且在  $(a, b)$  上可导, 那么存在一个实数  $c \in (a, b)$  使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

证明. (中值定理是罗尔定理的推广) 构造函数  $g(x) = f(x) - rx$ , 通过选择合适的  $r$ , 使得  $g(a) = g(b)$ , 即

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\Leftrightarrow f(a) - ra = f(b) - rb \\ &\Leftrightarrow r = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

那么根据**罗尔定理**, 我们知道存在一点  $c \in (a, b)$ , 使得  $g'(c) = 0$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - r \\ g'(c) &= f'(c) - r = 0 \\ f'(c) &= r = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

证毕. □

**Theorem 1.11. (柯西中值定理)** 若两个 real-valued 函数  $f$  和  $g$  都在闭区间  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 且都在  $(a, b)$  上可导. 那么存在一点  $c \in (a, b)$ , 使得

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

特别地, 若  $g(b) \neq g(a)$  且  $g'(c) \neq 0$ , 等价于

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

证明. (柯西中值定理是中值定理的扩展) 构造函数  $h(x) = f(x) - rg(x)$ , 选择合适  $r$  使得  $h(a) = h(b)$ , 若  $g(b) \neq g(a)$  即  $r = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ , 那么根据**罗尔定理**可以得到  $h'(c) = 0$ , 即

$$0 = g'(c) - rf'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c).$$

若  $g(a) = g(b)$ , 同样根据**罗尔定理**有  $g'(c) = 0$ , 这个条件显然是使得前面第一个等式成立的. □

**Theorem 1.12. (夹逼准则)** 若函数  $f, g, h$  均在以点  $a$  为聚点的区间  $I$  上定义着, 且对任意的  $x \in I$ , 其中  $x \neq a$  都有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

并且同时满足

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

那么  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

证明. (经典两边夹) 取任意的正实数  $\varepsilon > 0$ , 根据极限地定义对  $g(x)$  和  $h(x)$  我们可以分别找到  $|x| < \delta_1$  和  $|x| < \delta_2$ , 使得

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \text{ 和 } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

成立, 我们取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , 那么当  $|x| < \delta$  时有

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  的任意性, 所以有  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . □

## 数列极限

### 数列极限的定义

**Definition 2.1.** 若对于每一整数  $\varepsilon$ , 不论它怎样小, 恒有序号  $N$ , 使在  $n > N$  时, 一切  $x_n$  满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

, 则称常数  $a$  为数列  $(x_n)$  当  $n$  趋向于无穷时的**极限**, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 也可以说这个序列收敛于  $a$ .

### 数列极限的几何意义

#### 数列左右极限

### 数列极限的基本性质

**Proposition 2.2.** 若  $\lim x_n = a$ , 又  $a > p$ , 那么存在某个正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 一切  $x_n$  都满足  $x_n > p$ .

**Proposition 2.3.** 若  $\lim x_n = a$ , 有  $a > 0$ , 那么存在某个正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 一切  $x_n$  都满足  $x_n > 0$ .

**Proposition 2.4.** 若  $\lim x_n = a$ , 且  $a \neq 0$ , 则必有充分远的  $x_n$  值, 其绝对值大于某个正数  $r$ :

$$|x_n| > r > 0 \quad (n > N).$$

性质 1 的推论.

**Proposition 2.5.** 若  $\lim x_n = a$ , 则  $(x_n)$  必有界.

证明. 我们知道任意给定一个  $\varepsilon > 0$ , 可以找到正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时的一切  $x_n$  都满足  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , 因此当  $n > N$  是存在一个界数使得  $|x_n| < M$ . 接着再考虑  $n \leq N$  时, 注意这时候只有有限个  $x_n$ , 我们把  $M$  和它们放在一起, 取它们里面绝对值最大的数  $M'$ , 即有  $|x_n| \leq M'$ .  $\square$

**Proposition 2.6.** 若同时有  $\lim x_n = a$ ,  $\lim x_n = b$ , 则  $a = b$ .

### 数列无穷小和无穷大

### 数列极限运算

**Proposition 2.7.** 若  $x_n = y_n$ , 则  $\lim x_n = \lim y_n$ .



**Proposition 2.8.** 若恒有  $x_n \leq y_n$ , 且各自趋于有限极限, 则  $\lim x_n \leq \lim y_n$ .

**Proposition 2.9.** 夹闭准则 见经典证明.

**Proposition 2.10.** 任意有限个无穷小的和亦是无穷小.

**Proposition 2.11.** 有界数列  $(x_n)$  与无穷小  $\alpha_n$  的乘积仍是无穷小.

**Proposition 2.12.** 若  $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ , 则  $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$ . 考虑两个极限的尾巴

$$\lim(x_n \pm y_n) = a + b + \alpha + \beta.$$

**Proposition 2.13.** 若  $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ , 则  $\lim(x_n y_n) = ab$ . 考虑两个极限的尾巴

$$\lim x_n y_n = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

**Proposition 2.14.** 若  $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ , 且  $b \neq 0$ , 则  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ . 考虑两个极限的尾巴

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a + \alpha}{b + \beta}.$$

## 不定式

**Annotation 2.15.**

$$\frac{x_n}{y_n} \sim \frac{0}{0}$$

**Annotation 2.16.**

$$\frac{x_n}{y_n} \sim \frac{\infty}{\infty}$$

**Annotation 2.17.**

$$x_n y_n \sim 0 \cdot \infty$$

**Annotation 2.18.**

$$x_n - y_n \sim \infty - \infty$$

## 单调数列的极限

**Theorem 2.19.** 给定单调增加的数列  $(x_n)$ , 若它有上界

$$x_n \leq M, n = 1, 2, \dots$$

则它必有一有限极限, 此极限为上确界. 同理单调减少的数列  $(x_n)$ , 若它有下界

$$x_n \geq M, n = 1, 2, \dots$$

则它必有一有限极限, 此极限为下确界.

## 收敛原理

**Theorem 2.20. (柯西收敛原理)** 数列  $(x_n)$  有有限极限的必要且充分条件是: 对于任意的数  $\varepsilon > 0$ , 总存在着整数  $N$ , 使得当  $n > N$  和  $n' > N$  时有下面不等式成立

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon.$$

证明. (必要性) 若  $\lim x_n = a$ , 即对任意的  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 能找到一个整数  $N$ , 使得  $n, n' > N$  时有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 那么

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leq |x_n - a| + |x_{n'} - a| < \varepsilon$$

(充分性) 若满足上述定理中的条件, 我们要证明  $\lim x_n = a$ , 我们得想办法把这个  $a$  表示出来, 这里手法将会用戴德金实数划分的结论来把这个  $a$  弄出来.

在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数  $\alpha$ , 若  $x_n$  从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数  $\alpha$  归入下组  $A$ , 其余的 (即不落在  $A$  里面的) 一起实数归入上组  $A'$ .

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件, 对于任意数  $\varepsilon > 0$  及其对应的  $N$ . 若  $n > N$  及  $n' > N$ , 则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon.$$

现在我们可以看到每一个数  $x_{n'} - \varepsilon$  都是小于  $x_n$  的, 所以它归入下组  $A$ . 另一方面  $x_{n'} + \varepsilon$  都大于  $x_n$ , 所以  $x_{n'} + \varepsilon$  放不进去  $A$ , 那它只能归入  $A'$  了, 所以  $A$  和  $A'$  都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数  $\alpha$  和确定序列  $x_n$ , 要么它属于  $A$  或者属于  $A'$ . 同时  $A$  中实数都小于  $A'$  的实数. 如果  $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$ , 则  $x_n$  从某一项其也都大于  $\alpha'$ , 这样就产生矛盾了. 因此的确产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理, 有实数  $a$  存在它是  $A$  和  $A'$  的界数, 即

$$\alpha \leq a \leq \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'.$$

我们注意到当  $n > N$  时,  $x_{n'} - \varepsilon$  是一个  $\alpha$ , 而  $x_{n'} + \varepsilon$  是一个  $\alpha'$ . 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \leq a \leq x_{n'} + \varepsilon.$$

即  $|x_{n'} - a| \leq \varepsilon$ , 所以  $\lim x_n = a$ .

若是不用实数划分的手法, 也可以构造  $a_n = \inf_{k \geq n} x_k$  和  $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$ , 证明  $\lim a_n = \lim b_n = c$ , 再用一下夹逼准则  $a_n \leq x_n \leq b_n$ . □

## 上下极限

**Definition 2.21.** 序列  $(x_n)$  的部分极限的最大值和最小值, 称为  $x_n$  的上极限和下极限, 各记为

$$\overline{\lim}x_n \text{ 及 } \underline{\lim}x_n.$$

## 函数极限

### 函数极限的定义

### 函数左右极限

### 用数列的语言来描述函数极限

### 两个重要极限

**Proposition 3.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

证明. 几何证明的手法, 或者直接上洛必达.

□

**Proposition 3.2.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

证明. 单调有界.

□

### 函数极限的基本性质

**Proposition 3.3.** 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 则对于充分接近  $a$  的  $x$  的函数值是有界的

$$|f(x)| \leq M, |x - a| < \delta.$$

注意这里和  $\lim x_n = b$ , 而导致整个  $(x_n)$  有界是区别的, 因为这里当  $x - a < -\delta$  或者  $x - a > \delta$  可能有无限多个函数值的, 它们是否有界是无法确定的.

### 函数极限运算

**Proposition 3.4.** 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  和  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , 则函数

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= A \pm B, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) &= A \cdot B, \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A}{B}. \end{aligned}$$

## 不定式

Annotation 3.5.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty.$$

## 单调函数的极限

**Theorem 3.6.** 若单调增大函数  $f(x)$  在区域  $\mathcal{X}$  内变动着. 区域  $\mathcal{X}$  以大于一切  $x$  值的数  $a$  (它可以是有限的数, 或者等于  $+\infty$ ) 作为聚点, 若在这时函数  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上有上界

$$\forall x \in \mathcal{X}, f(x) \leq M.$$

则当  $x \rightarrow a$  时  $f(x)$  有一有限极限.

证明. 若  $f(x)$  上有界, 考虑  $f$  在  $\mathcal{X}$  上变动构成的集合  $\{f(x)\}$ , 即  $\{f(x)\}$  是有上界的, 那么根据确界原理,  $\{f(x)\}$  有上确界, 设其为  $A$ , 接下来我们证明  $A$  就是  $f(x)$  趋向于  $a$  的极限.

给定任意  $\varepsilon > 0$ , 根据上确界的性质, 可以找到一个  $x' < a$ , 使得  $f(x') > A - \varepsilon$ . 再由于  $f(x)$  是单调增的, 所以当  $x > x'$  时, 都有  $f(x) > A - \varepsilon$ , 其上界也很容易得到  $f(x) \leq A < A + \varepsilon$ , 所以综上当  $x > x'$  有

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

这里  $\delta$  的取值取决于  $a$  的取值, 若  $a$  是一个有限的数, 那么  $\delta = a - x'$  即可, 若  $a = +\infty$ , 则取  $\Delta = x'$ .  $\square$

## 函数收敛的判定方法

**Theorem 3.7.** 函数  $f(x)$  当  $x$  趋于  $a$  时有一有限极限的充分必要条件为, 对于任意  $\varepsilon > 0$  必存在着  $\delta > 0$ , 只需要满足

$$|x - a| < \delta, |x' - a| < \delta.$$

就能使得下面不等式成立

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

证明. 充分性显然, 必要性可以通过用数列描述函数极限的方法, 配合数列中有限极限存在的充要条件来进行证明.  $\square$

## 无穷小及无穷大的分阶

**Definition 3.8.** 给定两个无穷小  $\alpha$  和  $\beta$

1. 若  $\frac{\beta}{\alpha}$  有一异于零的有限极限, 则称  $\alpha$  和  $\beta$  是**同阶无穷小**;
2. 若  $\frac{\beta}{\alpha}$  趋于无穷小, 则称  $\beta$  是  $\alpha$  的**高阶无穷小**, 记做  $\beta = o(\alpha)$ . 同时  $\alpha$  是  $\beta$  的低阶无穷小;

**Definition 3.9.** 为了更精确地比较无穷小的性态, 需要用数字来表示它们的阶, 在这种情形下, 我们首先在所研究的无穷小内选出一个作为一种”标准”, 把它称为**基本无穷小**.

**Definition 3.10.** 若  $\beta$  与  $\alpha^k$  是同阶的无穷小量, 则称  $\beta$  是基本无穷小  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小.

**Definition 3.11.** 给定两个无穷小  $\alpha$  和  $\beta$ , 若它们的差  $\gamma = \beta - \alpha$  是比  $\alpha$  和  $\beta$  中任何一个更高阶的无穷小, 则称  $\alpha$  和  $\beta$  为**等价无穷小**, 记做  $\alpha \sim \beta$ .

**Proposition 3.12.** 给定两个无穷小  $\alpha$  和  $\beta$ , 若它们是等价无穷小当且仅当  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ .

证明. 经常看见的定义实际是一个充要条件, 首先证明充分性, 设  $\delta = \frac{\beta}{\alpha} - 1$ , 所以有  $\lim \delta = 0$ . 那么

$$\gamma = \delta\alpha$$

很容易得到  $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \delta = 0$  和  $\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \delta = 0$ .

若  $\alpha$  和  $\beta$  是等价无穷小, 那么

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) = 0,$$

所以  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ . □

**Definition 3.13.** 若选定  $\alpha$  为基本无穷小, 则形如  $c \cdot \alpha^k$  就被称为**最简单的无穷小**, 其中  $c$  是一个常数, 而  $k > 0$ . 设  $\beta$  关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小, 即

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c,$$

其中  $c$  是异于零的有限数, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = 1,$$

因此  $\beta$  和  $c\alpha^k$  为等价无穷小. 与给定无穷小  $\beta$  等价的最简单的无穷小  $c\alpha^k$  被称为  $\beta$  的**主部**.

**Annotation 3.14.** 设  $\beta \sim c\alpha^k$ , 即  $\beta = c\alpha^k + \gamma$ , 其中  $\gamma = o(c\alpha^k)$ . 可以想象, 再从  $\gamma$  也可以分出主部  $\gamma = c'\alpha^{k'} + \delta$ , 其中  $k' > k$ , 而  $\delta = o(c'\alpha^{k'})$ , 余类推. **是不是感觉你可以把泰勒展开式由此推出来? 但是这种方法太低效了, 但是它却能帮你更好的理解无穷小的概念.**

## 洛必达法则

**Definition 3.15.** 若 real-value 函数  $f$  和  $g$  都在去心邻域  $\tilde{U}(c, \delta)$  可导, 有

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \text{ 或者 } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty,$$

且对任意  $x \in \tilde{U}$  都有  $g'(x) \neq 0$ , 同时有  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 那么

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 首先来看一个比较特殊的情况, 除满足上述条件之外, 若还满足  $f(c) = g(c) = 0$ , 并且  $g'(c) \neq 0$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

下面来严格证明分两种情况来证明, 由于  $\tilde{U}$  在  $c$  这里间断, 后面需要频繁使用到柯西中值定理, 所以自然地在  $U$  的两端来分析, 取开区间  $\mathcal{I}$  以  $c$  点为端点, 且  $\mathcal{I} \subset \tilde{U}$ . 注意到条件满足对任意的  $x \in \mathcal{I}$  有  $g'(x) \neq 0$ , 并且  $g$  在  $\mathcal{I}$  上是连续的, 那么是可以在  $\mathcal{I}$  里面找到一个足够小的区间使得  $g(x) \neq 0$ , 那这个小区间代替  $\mathcal{I}$ .

我们定义  $m(x) = \inf_{g'(\alpha)} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$  和  $M(x) = \sup_{g'(\alpha)} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$  其中  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\alpha$  取遍  $x$  和  $c$  之间的数 (为什么确保可以取到确界? 任意  $\alpha$  处  $f$  和  $g$  导数均有意义). 在确定  $x$  之后, 我们再取定  $x$  和  $c$  之间一点  $y$ , 结合柯西中值定理可以保证在它们之间找到一个  $c$  使得

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \leq M(x).$$

注意为什么这里可以保证  $g(x) - g(y) \neq 0$ ? 假设存在  $g(x) = g(y)$ , 那么根据罗尔定理, 就存在一点  $p$  使得  $g'(p) = 0$ , 这是和前提条件  $\forall x \in \tilde{U}, g'(x) \neq 0$  矛盾的.

情况一:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ .

对任意的  $x \in \mathcal{I}$ , 取  $y$  位于  $x$  和  $c$  之间, 为了得到  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , 我们让

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}}{\frac{g(x) - g(y)}{x - y}} \leq M(x).$$

当  $y \rightarrow c$  时,  $\frac{f(y)}{g(y)}$  和  $\frac{g(y)}{g(y)}$  都趋向于 0, 所以

$$m(x) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M(x).$$

情况二:  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ .

对任意的  $x \in \mathcal{I}$ , 取  $y$  位于  $x$  和  $c$  之间. 如果我们还是用上面的分式, 直接尝试把  $\frac{f(x)}{g(x)}$  构造出来, 尝试分式对  $y \rightarrow c$  取极限的时候, 显然是无法处理的. 同时你注意到在当前条件下是对  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  是没有特别说明的, 言下之意它不会对我们的证明产生影响. 现在我们考虑把前面分式上下都除以  $g(y)$ , 同时上下取负, 即

$$m(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}}{\frac{g(y) - g(x)}{y - x}} \leq M(x).$$

那么当  $y \rightarrow c$  时,  $\frac{f(x)}{g(y)}$  和  $\frac{g(x)}{g(y)}$  都是趋于 0, 那么此刻关键是我们如何需要考虑  $\lim_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)}$ ? 让  $S_x = \{y \mid y \text{ 位于 } x \text{ 和 } c \text{ 之间}\}$ , 我们取遍  $y \in S_x$ , 我们可以得到一个有界数列  $\{\frac{f(y)}{g(y)}\}$ (为什么有界?  $f$  和  $g$  在  $[x, c]$  上连续), 我们考虑其上下极限

$$m(x) \leq \liminf_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq \limsup_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq M(x).$$

当对  $m(x)$  和  $M(x)$  也取极限  $x \rightarrow c$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow c} m(x) = \lim_{x \rightarrow c} M(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对情况一使用夹逼准则, 可以很快得到  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . 对情况二也同样使用夹逼准则, 可以得到

$$\liminf_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} = \limsup_{y \rightarrow c} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

上下极限相等可以马上得到  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . 最终证毕. □



## 函数连续及其间断

### 函数连续的定义

**Annotation 4.1. (motivation)** 在研究  $x$  趋向于  $x_0$  的极限时候, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 并不要求  $x$  可以取到  $x_0$ , 即使  $f(x_0)$  有定义, 极限也不依赖它. 自然地, 现在我们特别地考虑若  $f(x_0)$  有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 这种情形下我们就说  $f$  在  $x_0$  处连续, 其他情况下则说  $f$  在  $x_0$  这里有间断.

### 连续函数的算术运算

**Theorem 4.2.** 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  都在区间  $\mathcal{X}$  上变动着, 且都在点  $x_0$  处连续, 则函数

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdots g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

也在都  $x_0$  处连续.

证明. 与相关函数的极限联系起来即可. □

### 单侧连续和间断分类

**Definition 4.3. (单侧极限)** 若  $f(x)$  在  $x_0$  处是左 (右) 连续, 只需要满足下面关系式

$$\begin{aligned} f(x_0^-) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0). \\ \left[ f(x_0^+) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \right] \end{aligned}$$

用自然语言说就是求极限过程中, 我们既可以从左边接近  $x_0$ , 也可以从右边接近  $x_0$ , 于是就有了单侧极限的概念.

**Theorem 4.4. (连续的充要条件)** 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续当且仅当其左极限和右极限都存在且相等.

**Definition 4.5.** 函数  $f(x)$  可能在  $x_0$  处存在两类间断点

1.  $x_0$  处单侧极限存在但是不等于  $f(x_0)$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处有间断点, 称其为普通间断点或者第一类间断点, 通常说在  $f(x)$  在  $x_0$  处有跃度.
2.  $x_0$  处单侧极限是无穷或者根本不存在, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处有间断点, 称其为第二类间断点.

## 单调函数的连续性和间断

**Theorem 4.6. (单调函数上的间断点)** 若单调函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  内有间断点, 那么只能是第一类间断点.

证明. 若  $f(x)$  是单调增的, 且在  $x_0$  处有间断点, 那么考虑其左极限, 当  $x < x_0$  时, 都有  $f(x) < f(x_0)$ , 即  $f(x)$  在趋近于  $x_0$  过程中是有界, 那么根据单调函数有界则必有有限极限的定理, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0).$$

若可以取到等号, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处左连续, 反之  $f(x)$  在  $x_0$  处有跃度, 所以是第一类间断点. 同理也可以考虑右极限.  $\square$

**Theorem 4.7. (单调函数连续性判别)** 若在区间  $\mathcal{X}$  上的单调函数  $f(x)$  的函数值都含于区间  $\mathcal{Y}$ , 且把整个  $\mathcal{Y}$  都填满了, 即  $\forall y \in \mathcal{Y}$ , 都存在一个  $x \in \mathcal{X}$  使得  $f(x) = y$ , 则  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上连续.

证明. 若  $f(x)$  为单调增的, 假设  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  在  $x_0$  处有间断点, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0)$ , 那么  $f(x_0^-)$  和  $f(x_0)$  之间的值,  $f(x)$  是无法取到的, 这和命题是矛盾的, 所以  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上连续.  $\square$

## 初等函数的连续性

### 连续函数的复合

**Theorem 4.8.** 若函数  $\varphi(y)$  定义在区间  $\mathcal{Y}$  上, 而函数  $f(x)$  定义于区间  $\mathcal{X}$  上, 且其对应的函数值含于  $\mathcal{Y}$ . 若  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  中的一点  $x_0$  连续, 又  $\varphi(y)$  在  $y_0 = f(x_0)$  这一点也是连续的, 则复合函数  $\varphi(f(x))$  在点  $x_0$  处亦是连续的.

### 一致性连续

## 函数导数

### 导数定义

**Definition 5.1.** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  处取得增量  $\Delta x$  时, 相应地, 因变量取得增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . 如果  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  当  $\Delta x$  趋近于 0 时极限存在, 那么称函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处可导, 并称这个极限为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数, 记做  $f'(x_0)$ , 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Definition 5.2.** 导数的记法

1.  $\frac{dy}{dx}$  或  $\frac{df(x_0)}{dx}$  莱布尼茨 (G.W.Leibniz);
2.  $y'$  或者  $f'(x_0)$  拉格朗日 (J.L.Lagrange);
3.  $Dy$  或者  $Df(x_0)$  柯西 (A.L.Cauchy).

### 初等函数导数表

### 函数增量公式

**Definition 5.3.** 若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处有导数  $y'_x = f'(x_0)$ , 则函数的增量可以表示为如下形式

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

其中  $\Delta x \leq 0$ , 且  $x_0 + \Delta x \in \mathcal{X}$ . 或者更简短地

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

式中  $\alpha$  是依赖于  $\Delta x$  的量, 且随着  $\Delta x$  一同趋于 0, 因为由导数定义, 在  $\Delta \rightarrow 0$  时有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'_x$$

故令

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x$$

自然地  $\alpha \Delta x$  是比  $\Delta x$  更高阶无穷小, 上式也可以写作

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

## 导数的基本性质

**Proposition 5.4. (可导必连续)** 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则函数在这点必是连续的.

证明. 由导数的定义, 当  $\Delta x \rightarrow 0$ , 有  $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \rightarrow 0$ , 即给定  $\varepsilon > 0$ , 可以找到  $|\Delta x| = |\Delta x + x_0 - x_0| < \delta$ , 使得  $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , 把  $\Delta x + x_0$  用  $x$  替换, 即得到极限的定义.  $\square$

## 求导法则

**Proposition 5.5.** 若函数  $u = \varphi(x)$  和  $v = \psi(x)$  都在点  $x$  处有导数, 那么它们的和, 差, 积, 商 (除分母为 0 的点之外) 都在  $x$  处有导数, 即

1. 给定常数  $c$ , 那么函数  $y = cu$  的导数为

$$y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

2. 函数  $y = u \pm v$  的导数为

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. 函数  $y = u \cdot v$  的导数为

$$y' = (u \cdot v)' = u'v + v'u.$$

4. 函数  $y = \frac{u}{v}$  的导数为

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

证明. (1)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'.$$

(2)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u \pm v + \Delta v) - (u + v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

(3)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + o(\Delta) = u'v + uv'.$$

(4)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'v + uv'}{v^2}.$$

$\square$

**Proposition 5.6.  $n$  个函数相乘求导推广** 若  $y = uvw \cdots st$ , 那么其导数为

$$y' = u'vw \cdots st + uv'w \cdots st + \cdots uvw \cdots s't + uvw \cdots st'.$$

## 复合函数求导

**Definition 5.7.** 设函数  $u = \varphi(x)$  在某一点  $x_0$  处有导数  $u'_x = \varphi'(x_0)$ . 函数  $y = f(u)$  在对应点  $u_0 = \varphi(x_0)$  处也有导数  $y'_u = f'(u_0)$ . 那么复合函数  $f(\varphi(x))$  在  $x_0$  处也有导数, 它等于

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

或者更简短地

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

证明. 若给定点  $x_0$  一任意增量  $\Delta x$ , 设  $\Delta u$  是  $\Delta x$  引起函数  $u = \varphi(x)$  的增量, 设  $\Delta y$  又是由  $\Delta u$  引起函数  $y = f(u)$  的增量, 那么  $\Delta y$  可以用增量公式来表示

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \cdot \Delta u,$$

其中  $\alpha$  依赖于  $\Delta u$  的取值并与它一同趋向于 0. 再用  $\Delta x$  除以等式两边得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

若  $\Delta x \rightarrow 0$ , 则  $\Delta u$  同样也趋向于 0, 由于  $\alpha$  随着  $\Delta u$  也趋向于 0, 因此上述等式的极限存在, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u u'_x$$

□

## 函数微分

### 微分定义

**Definition 6.1.** 设函数  $y = f(x)$  在某一区间  $\mathcal{X}$  上定义, 并且在  $x_0$  处是连续的, 于是对应于变元的增量  $\Delta x$ , 函数的增量为

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

若存在着一个关于  $\Delta x$  为线性的无穷小  $A \cdot \Delta x$  ( $A$  是一个常数), 使得它与  $\Delta y$  的差是较  $\Delta x$  更高阶的无穷小, 言下之意就是  $\Delta y$  和  $A \cdot \Delta x$  是等价无穷小, 即

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可微, 表达式  $A \cdot \Delta x$  称为函数  $f(x)$  的微分, 用记号  $dy$  或者  $df(x_0)$  表示.

### 可微和可导的关系

**Proposition 6.2.** 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的充分必要条件是函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且有

$$dy = y'_x \cdot \Delta x.$$

若按照微分的定义, 来讨论自变量  $x$  本身, 称它的微分就是增量  $\Delta x$ , 即约定

$$dx = \Delta x.$$

于是前式可以写作

$$dy = y'_x \cdot dx.$$

由此可得

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

证明. 从两者的定义里面很容易看出是等价的, 实际上上面函数微分表示式中的  $A$  就是  $f(x)$  在其这一点的导数. □

### 初等函数微分公式

### 微分运算法则

**Proposition 6.3.** 基本微分运算法则如下

1.  $d(cu) = c \cdot du$ ,
2.  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ,
3.  $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$ ,
4.  $d(\frac{u}{v}) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$ .

证明. 根据对应的导数运算法则可以很快的推导. □

## 微分不变性

**Definition 6.4.** 给定两个函数  $y = f(x)$  和  $x = \varphi(t)$ , 可以它们组成复合函数  $y = f(\varphi(t))$ . 若导数  $y'_x$  和  $x'_t$  存在, 则复合函数亦存在着导数

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t$$

若把  $x$  当做自变量, 则微分  $dy = y'_x dx$ . 现在改用  $t$  当做自变量, 那么微分另一表达式如下

$$dy = y'_t \cdot dt = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x \cdot dx$$

又回到原来的微分形式. 这种微分形式即使在原来的自变量换成新的自变量以后仍可以保持着的性质称为 **微分形式不变性**. 要注意的是上面式子中  $dx$  并不是表示  $\Delta x$ , 而是  $x = \varphi(t)$  的微分.

**Example 6.5.** 当  $y$  对于  $x$  的关系不是直接给定, 而是由  $x$  及  $y$  两者对于第三方辅助变量 (参变量) 的关系所给定时

$$x = \varphi(t), y = \psi(t).$$

现在要求  $y'_x$ , 假定这两函数都有导数, 而且  $x = \varphi(t)$  又存在反函数  $t = \theta(x)$ , 那么  $y$  关于  $x$  的函数可以写作

$$y = \psi(\theta(x)).$$

它也有导数存在. 我们可以不必重新建立上面这个关系来求  $y'_x$ , 可以通过下面方法来完成

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

## 近似计算

## 微分基本定理

**Annotation 6.6.** 均在经典证明中

1. 费马定理
2. 达布定理
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理



## 高阶导数及微分

### 高阶导数定义

**Definition 7.1.** 函数  $f(x)$  的二阶导数记为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 或 } y''$$

推广至  $n$  阶导数, 记为

$$\frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } y^{(n)}$$

### 初等函数的 $n$ 阶导数公式

### 莱布尼茨公式

**Proposition 7.2.** 给定两个关于  $x$  的函数  $u, v$ , 均在其定义域上有  $n$  阶导数, 那么它们乘积  $y = uv$  的  $n$  阶导数公式为

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}.$$

证明. 采用数学归纳法, 考虑  $n+1$  阶导数的情况

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^n C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}. \end{aligned}$$

考虑两个和式中相同未知数的项, 设第一个和式中某一项  $C_n^k u^{(n-k+1)} v^k$ , 那么对应第二个和式中的项就是

$$C_n^{k-1} u^{(n-(k-1))} v^{((k-1)+1)}.$$

二者的系数相加

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

注意这里需要  $k \geq 1$ , 因此二者还各自存在两个独立的项  $u^{(n+1)}v$  和  $uv^{(n+1)}$ , 那么上述整体和式可以写作

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \sum_{i=i}^n C_{n+1}^i u^{(n-i)} v^{(i)} + uv^{(n+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i u^{(n-i)} v^{(i)}. \end{aligned}$$

□

## 高阶微分定义

**Definition 7.3.** 函数  $f(x)$  的二阶微分记为

$$d^2y = d(dy).$$

推广至  $n$  阶微分, 记为

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

## 参变量微分法

## 泰勒公式

**Annotation 7.4.** 几种泰勒公式的推导思路

1. 积分推导泰勒公式

<https://math.stackexchange.com/questions/481661/simplest-proof-of-taylors-theorem>

2. 部分积分推导泰勒公式

[https://proofwiki.org/wiki/Taylor's\\_Theorem/One\\_Variable](https://proofwiki.org/wiki/Taylor's_Theorem/One_Variable)

3. 洛必达推导泰勒公式

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/88855321>

**Theorem 7.5.** 若函数  $f(x)$  在某  $x_0$  的邻域定义着,  $f(x)$  在此邻域上有直至  $(n-1)$  的各阶导数, 并且特别地在点  $x_0$  上有  $n$  阶导数, 则对于该邻域内的任一  $x$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中  $R_n = o((x - x_0)^n)$ . 上述等式称为带佩亚诺余项的泰勒公式.

证明. 把  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$  记为  $p_n$ , 所以  $R_n = f(x) - p_n(x)$ . 注意到  $f(x)$  在  $p_n(x)$  在  $x_0$  处, 它们两个的函数值和各阶导数直到  $n$  都是相等. 我们需要证明的是当  $f(x)$  被展开成上述多项式形式之后余项  $R_n$  是比  $(x - x_0)^n (x \rightarrow x_0)$  还高阶的无穷小, 也就是来探究这个这个余项的形式.

对  $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$  两边都取  $n$  次导数之后, 很快可以得到

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

接下来的证明手法有两种, 第一种是高数书上的对  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n}{(x - x_0)^n}$  使用  $n-1$  次洛必达; 第二种用数学归纳法. 这里使用我选择用数学归纳法来证明, 当  $n=1$  时, 即满足

$$R_n(x_0) = R'_n(x) = 0$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{x - x_0} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{x - x_0} = R'_n(x_0) = 0$$

所以  $R_n(x) = o((x - x_0))$ . 假设  $n = k, k = 1, 2, 3, \dots$  时成立, 那么考虑  $n = k + 1$  时, 满足条件

$$R_{n+1}(x_0) = R'_{n+1}(x_0) = \dots = R^{(n)}_{n+1}(x_0) = R^{(n+1)}_{n+1}(x_0) = 0.$$

按照假设有  $R'_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ , 根据拉格朗日中值定理,  $x$  和  $x_0$  之间存在一点  $c$  使得

$$R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_0) = R'_{n+1}(c)(x - x_0).$$

因为  $|x - c| < |x - x_0|$ , 所以有

$$R'_{n+1}(c) = o((x - c)^n) = o((x - x_0)^n),$$

由此  $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^{n+1})$ . 主要这里为什么可以用拉格朗日中值, 因为我们特别说明  $f(x)$  在某个邻域上是可导的.  $\square$

**Proposition 7.6. (泰勒展开的唯一性)** 函数  $f(x)$  的泰勒展开式唯一.

证明. 设  $f(x)$  的泰勒展开为

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \dots + A_n(x - x_0)^n + R_n(x).$$

若还存在另外一个多项式

$$f(x) = A'_0 + A'_1(x - x_0) + \dots + A'_n(x - x_0)^n + R_n(x).$$

那么必有  $A_0 = A'_0, A_1 = A'_1, \dots, A_n = A'_n$ . 这是因为, 分别比较未知数指数相同的项, 首先可以马上得到  $A_0 = A'_0$ , 约去这两项之后, 再求导. 接着又可以类似的得到  $A_1 = A'_1$ , 余类推, 因此系数都相同.  $\square$

**Definition 7.7.** 取  $x_0 = 0$  时, 函数  $f(x)$  的带佩亚诺余项的泰勒公式被称为**麦克劳林**公式, 即

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

**Proposition 7.8. 各初等函数在  $x_0 = 0$  处的泰勒公式**

1. 若  $f(x) = e^x$ , 则  $f^{(k)} = e^x (k = 1, 2, 3, \dots)$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

2. 若  $f(x) = \sin x$ , 则  $f^{(k)} = \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$ , 令  $n = 2m, m = 1, 2, 3, \dots$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m}).$$

3. 若  $f(x) = \cos x$ , 则  $f^{(k)} = \cos(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$ , 令  $n = 2m + 1$ ,  $m = 1, 2, 3 \dots$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1}).$$

4. 若  $f(x) = x^m$ , 其中  $m$  为任意非零实数, 这里需要先考虑一些小细节, 当  $x \rightarrow 0$ ,  $x^m$  或者其  $n$  阶导数 ( $n > m$ ) 可能趋于无穷大, 此处取  $x_0$  做泰勒展开出来的结果可能没有意义. 所以应该取  $x_0 = 1$ , 即用  $(x - x_0)$  来展开  $x^m$ , 这就相对于我们在  $x_0 = 0$  时, 用  $x$  展开  $(1 + x)^m$ . 因此这里我们略微调整一下来展开  $f(x) = (1 + x)^m$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \dots \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1}).$$

5. 若  $f(x) = \ln x$ , 它在  $x \rightarrow 0$  时其函数值趋于无穷大, 所以仿照前面, 只考虑  $f(x) = \ln(1 + x)$ , 则  $f^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

6. 反三角函数...

**Theorem 7.9.** 设函数  $f(x)$  在区间  $[x_0, x_0 + H]$  上定义着, 且  $f(x)$  在  $(x_0, H_0)$  上均存在  $(n + 1)$  阶有限的导数, 则对于任意  $x \in [x_0, x_0 + H]$  均有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中  $R_n = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n$ ,  $\psi(x)$  是定义在  $[x_0, x]$  上连续的函数且在  $(x_0, x)$  上都存在不为零的有限导数, 而  $x_0 < c < x$ .

当  $\psi(z)$  取定  $(x - z)^p$  时, 有

$$r_n = \frac{f^{n+1}(c)}{n!p}(x - c)^{n+1-p}(x - x_0)^p.$$

该表达式称为施勒米尔希 (Schlomilch-Roche) 余式. 若令上式  $p = n + 1$ , 就可以得到拉格朗日余项.

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

证明.

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

实际上  $R_n(x)$  也可以写作  $R_n(x, x_0)$ , 这个定理的动机就是为了推导具体的余项, 使得我们根据展开式计算某个函数值  $f(x)$  时, 可以知道我们结果误差的程度, 当前我们粗略的认为误差的程度与  $x$  和  $x_0$  的取定有所关系.

不想推了, 去看菲砖上构造证明, 没怎么弄懂...

□

## 插值法

**Definition 7.10.** 设定义在  $[a, b]$  上的某函数  $f(x)$ , 若给定  $x_0, x_1, \dots, x_m$  处的  $m+1$  个函数值. 若存在某个近似函数  $L(x)$ , 使得  $L(x_i) = f(x_i)$ , 这个表达式叫做**插值公式**. 特别地若

$$L(x) = \sum_{k=0}^m f(x_k) l_k(x).$$

其中  $l_k = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_m)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)}$ , 显然地有  $l_k(x_k) = 1$  和  $l_k(x_i) = 0, i \neq k$ .

## 利用导数研究函数

### 基本性质的判定

**Theorem 8.1. (常函数的判定)** 设函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  上定义着且连续可导.  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上是常数当且仅当对任意的  $x \in \mathcal{X}$  都有  $f'(x) = 0$ . 在做理论研究时, 若所给函数不能从定义看出它是一个常函数, 这个定理的威力就显现出来了.

**Corollary 8.2.** 给定在区间  $\mathcal{X}$  上的两个连续可导函数  $f(x)$  和  $g(x)$ , 并且

$$\forall x \in \mathcal{X}, f'(x) = g'(x).$$

则  $f(x) = g(x) + C$ , 其中  $C$  是一个常数.  $h(x) = f(x) - g(x)$  还原到上述定理

**Theorem 8.3. (函数单调性判定)** 设函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  上定义着且连续可导.  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上单调增大 (减少) 当且仅当对任意的  $x \in \mathcal{X}$  都有  $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ .

**Theorem 8.4. (函数严格单调性判定)** 设函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  上定义着且连续可导.  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上严格单调增大 (减少) 的充要条件为

1. 任意  $x \in \mathcal{X}$ , 都有  $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ ;
2. 任意  $\mathcal{X}$  的子区间内  $f'(x)$  不恒为 0.

证明. 第一个条件保证了  $f(x)$  单调, 第二个条件保证了  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上没有常数段. 为什么还可以允许  $f(x) = 0$ , 如果存在这样的点, 那么这个点是一个拐点.  $\square$

**Definition 8.5.** 给定连续函数  $f(x)$ , 若函数  $f(x_0)$  在  $x_0$  的某个邻域上取得最大值 (最小值), 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处有极大值 (极小值).

**Proposition 8.6. (极值判定充分条件-第一法则)** 给定连续函数  $f(x)$ , 若  $f(x)$  在  $x_0$  处导数为零或者不存在有限导数, 且  $f(x)$  在  $x_0$  的某一个去心邻域上可导, 那么存在下面三种情况

1. 若  $x < x_0$  时  $f'(x) > 0$ , 而在  $x > x_0$  时有  $f'(x) < 0$ , 则在  $x_0$  处有极大值;
2. 若  $x < x_0$  时  $f'(x) < 0$ , 而在  $x > x_0$  时有  $f'(x) > 0$ , 则在  $x_0$  处有极小值;
3. 若  $x < x_0$  和  $x > x_0$  都有  $f'(x) > 0$  或者  $f'(x) < 0$ , 则在  $x_0$  处无极值.

**Proposition 8.7. (极值判定充分条件-第二法则)** 给定连续函数  $f(x)$ , 若  $f(x)$  在  $x_0$  某个邻域上可导, 并且在  $x_0$  处有二阶导数. 那么当  $f'(x_0) = 0$ , 考虑两种情况

1. 若  $f''(x_0) > 0$ , 则在  $x_0$  处有极小值;
2. 若  $f''(x_0) < 0$ , 则在  $x_0$  处有极大值.

**Proposition 8.8.** (当  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0$  时极值判定推广) 给定函数  $f(x)$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且一阶导数到  $(n-1)$  阶导数全为 0, 即

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

同时也有  $f^{(n)} \neq 0$ . 则当  $n$  为奇数时, 在  $x_0$  处没有极值; 当  $n$  为偶数时, 若  $f^{(n)} > 0$ , 在  $x_0$  处有极小值, 若  $f^{(n)} < 0$ , 在  $x_0$  处有极大值.

证明. 在  $x_0$  处用带 peano 余项泰勒公式展开即有

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha \cdot (x - x_0)^n,$$

前  $n-1$  阶导均为 0. 当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha$  也是趋向于零. 在  $x$  充分接近  $x_0$  条件下, 考虑两种情况

1. 若  $n$  是一个奇数, 在  $x < x_0$  时,  $(x - x_0)^n < 0$ , 而  $f^{(n)}(x_0) + \alpha$  的符号和  $f^{(n)}(x_0)$  是相同, 因此等式左边的符号是  $-f^{(n)}(x_0)$  相同, 方便证明假设  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 那么  $f(x) > f(x_0)$ , 当  $x > x_0$  时,  $(x - x_0)^n > 0$ , 因此等式左边符号是和  $f^{(n)}(x_0)$ , 那么  $f(x) < f(x_0)$ , 所以在  $f(x_0)$  左右两边都可以取它小或者大的数, 因此在  $x_0$  这里没有极值, 同理假设  $f^{(n)}(x_0) > 0$  也会得到类似的结果;
2. 若  $n$  是一个偶数, 那么  $(x - x_0)^n$  的值恒大于零, 即等式左边的符号和  $f^{(n)}(x_0)$  保持一致, 假设  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 那么  $x_0$  两边均有  $f(x) > f(x_0)$ , 所以在  $x_0$  处取极小值, 同理当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时, 在  $x_0$  处取得极大值.

□

**Definition 8.9.** 给定有限闭区间  $[a, b]$  上函数  $f(x)$ , 其上所有极大值中最大值 (极小值中的最小值) 为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的**最大值 (最小值)**.

## 凹凸性

**Definition 8.10.** 给定在区间  $\mathcal{X}$  上定义着的连续函数  $f(x)$ , 若对  $\mathcal{X}$  上任意两点  $x_1, x_2$  均满足不等式

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \geq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

其中  $\alpha \in [0, 1]$ , 则  $f(x)$  被称为**凹函数**. 前述给定条件不定, 若满足不等式

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

则  $f(x)$  被称为**凸函数**.

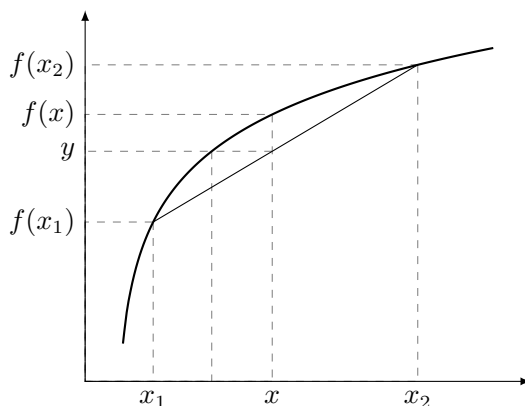
**Annotation 8.11.** 特别的标注一下上面  $\alpha$  是如何推导而来的，下面是一个凹函数的图像，我们需要描述性质是  $f(x) \leq y$ ，先把  $y$  表示出来

$$\begin{aligned} y &= f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1)) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \end{aligned}$$

我们让  $\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ，那么  $y = (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$ . 同样  $x$  也可以变换为

$$x = x_1 - \alpha(x_1 - x_2) = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2.$$

于是就有了上面定义的形式.



**Annotation 8.12.** 我们这里使用的凹凸性都是描述函数性质的，并不是用来描述函数图像的，高数书使用的是对图像的凹凸性描述的，这里有几种记忆函数凹凸性质的方法.

1. 从几何性质上，凹函数的曲线在两点确定的弦之上，凸函数的曲线在两点确定的弦之下.

**Theorem 8.13. (凹凸性判定 1)** 给定在区间  $\mathcal{X}$  上定义着的连续可导函数  $f(x)$ ，它是凸函数 (凹函数) 当且仅当它导数  $f'(x)$  是单调增的 (单调减的).

证明. 前面我们知道凸函数的性质可以用

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in [x_1, x_2]$$

来描述，来略微整理一下

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x_2 - x)(f(x_1) - f(x)) + (x_1 - x)(f(x) - f(x_2)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$



不等式两边在必要性证明中可以让  $x$  分别趋向  $x_1$  或者  $x_2$  求得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

和

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

即有  $f'(x_2) \geq f'(x_1)$ .

在充分证明中可以使用拉格朗日中值定理让等式两边分别等于  $f'(\xi_1)$  和  $f'(\xi_2)$ , 其中  $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ . □

**Theorem 8.14. (凹凸性判定 2)** 给定在区间  $\mathcal{X}$  上定义着的连续且二阶可导函数  $f(x)$ , 它是凸函数 (凹函数) 当且仅当  $f''(x) \geq 0 (\leq 0)$ .

证明. 由单调性判定定理, 回到前一个定理中的  $f'(x)$  的性质即可. □

**Theorem 8.15. (凹凸性判定 3)** 给定在区间  $\mathcal{X}$  上定义着的连续可导函数  $f(x)$ , 它是凸函数 (凹函数) 当且仅当它的曲线在它任意切线上面 (切线下面).

证明. **充分性** 任意点  $x_0 \in \mathcal{X}$  处切线方程  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , 那么只需要证明

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

当  $x > x_0$  时有

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

当  $x < x_0$  时有

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

那么根据拉格朗日中值定理可以找到  $\xi_1 < x_0 < \xi_2$ , 使得

$$f'(x_0) \leq f'(\xi_2), f'(x_0) \geq f'(\xi_1).$$

即  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ , 回到第一个判别定理. □

**Proposition 8.16. (琴生不等式)** 凸函数满足

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \cdots + q_nf(x_n),$$

其中  $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ ,  $q_1, q_2, \cdots, q_n > 0$ .

**Definition 8.17.** 若曲线  $f(x)$  在经过  $(x_0, f(x_0))$  时, 曲线的凹凸性改变了, 则这一点称为**拐点**.

**Proposition 8.18.** 判别拐点的存在方法

1. 若  $f(x)$  的二阶导存在, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处  $f''(x) = 0$  变号, 则在  $x_0$  处有拐点.
2. 若  $f(x)$  的  $n$  阶导数存在, 如果点  $x_0$  处第一个不为零的导数 (大于二阶导) 是奇数阶导数, 那么在  $x_0$  处有拐点, 如果是偶数阶导数, 则没有拐点.