# 考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 20 日

# 目录



# 行列式

## 定义

**Annotation 1.1.** 这类题特征

1. 按照行列式的完全展开式来计算某种特殊的矩阵
2. 给定某个具体的行列式值的基础上，通过行列式的性质来计算行列式.

**Example 1.2.** 证明: 如果在 $n$ 阶行列式中，第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行分别与第 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 列交叉位置的元素都是 0，并且 $k + l > n$，那么这个行列式的值等于 0.

证明. 按照行列式的完全展开式，每一项都必须要包含第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行中位于不用列的元素，则有 $k$ 个元素. 由已知的条件，第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行只与 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 之外的 $n - l$ 元素可能不为零，但是 $k > n - l$，说明每一项必取到 0，因此行列式为 0. □

**Example 1.3.** 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + a_1 & c_1 + b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + a_2 & c_2 + b_2 \\ a_3 + c_3 & b_3 + a_3 & c_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

**Example 1.4.** 求元素为 1 和 0 的三阶行列式可取的最大值.

hints 从完全展开式我们应使得带正号的项尽可能的都是 1，而带负号项尽可能是 0

1. 若 3 个正项都是 1，那么此时行列式等于 0;
2. 若 2 个正项是 1，此时任取一个 2 个项是正的行列式其行列式均等于 2，且其他负项也都是 0，例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

综上最大值肯定就是 2.

**Example 1.5.** 设 $n \geq 2$，证明: 如果 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素为 1 或者 $-1$，则 $|A|$ 闭为偶数. hints 这个证明按行展开可能更简单

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

其中三个代数余子式都是二阶行列式的正值或者负值，那么我们来看一下元素为 1 或者 $-1$ 的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b21$$

这里一共有 4 种可能的取值，由 $b_{11}b_{22} = \pm 1, b_{12}b21 = \ \pm 1$ 决定，经过计算该二阶行列式取值可能为 $0, 2$，因此 $|A|$ 是由 3 个偶数相加得到的，那么 $|A|$ 也一定是偶数.

**Example 1.6.** 求元素为 1 或者 $-1$ 的三阶行列式的最大值. hints 从完全展开式出发，三阶行列式有 6 项，其中每一项只可能为 $-1$ 和 1. 再有前面证明，我们知道这样的三阶行列式的值只能是偶数，那么最大的偶数就是 6 项全为 1 加起来为 6，即

$$a_{11}a_{22}a_{33} = 1, a_{12}a_{23}a_{31} = 1, a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} = 1, -a_{12}a_{21}a_{33} = 1, -a_{11}a_{23}a_{32} = 1$$

由此得出

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{12}a_{23}a_{31}a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}a_{12}a_{21}a_{33}a_{11}a_{23}a_{32} = -1$$

这是矛盾的. 因此我们再考虑行列式最大值为 4 的可能，可以找到

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+1+1-1+1 = 4$$

## 化行阶梯形

**Annotation 1.7.** 不是特殊矩阵的第一选择.

## 按一行展开

**Annotation 1.8.** 若是可以将某一行或者某一列消去，只留下一个非零元素，按行和按列展开是不错的选择.

**Example 1.9.** 计算

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

hints可以考虑把所有列都加到第一列，再按第一列展开

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \frac{(1+n)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{(1+n)n}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

同样上述矩阵也是所有列加到第一列，最终有 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$.

## 按多行展开

**Annotation 1.10.** 好像没有直接使用拉普拉斯定理的习惯，比较特殊的分块矩阵可以考虑.

## 特殊矩阵

**Annotation 1.11.** 常见的特殊矩阵https://www.bilibili.com/read/cv266516

1. 范德蒙德行列式
2. 爪型行列式

## 数学归纳法

**Annotation 1.12.** 通常证明手法也是按行或者列展开.

**Example 1.13.** 计算 $n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

证明. 当 $n=2$ 时，有

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_0$$

假设对于上述形式的 $n-1$ 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-2} \end{vmatrix} = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

那么 $n$ 阶行列式，把它按第一行展开，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_n &= x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}a_0\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1)+(-1)^{1+n}a_0(-1)^{n-1} \\ &= x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\end{aligned}$$

□

# 递推式

**Example 1.14.** 计算 $n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

hints 显然 $\boldsymbol{D}_1 = 2$. 将 $\boldsymbol{D}_n$ 按第一列展开，则有

$$\boldsymbol{D}_n = 2\boldsymbol{D}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{D}_{n-1} - \boldsymbol{D}_{n-2}$$

这也意味着 $\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}_{n-1} = \boldsymbol{D}_{n-1} - \boldsymbol{D}_{n-2}$，可以马上推出 $\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}_{n-1} = \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1 = 1$，即该行列式是一个等差数列 $D_n = 2 + (n-1) = n+1$.

**Example 1.15.** 计算 $n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

其中 $a \neq b$.

hints 还是按第一列展开

$$\boldsymbol{D}_n = (a+b)\boldsymbol{D}_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\boldsymbol{D}_{n-1} - ab\boldsymbol{D}_{n-2}.$$

注意其上最后一个等式成立的条件是 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$，那么推出

$$\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = b(\boldsymbol{D}_{n-1} - a\boldsymbol{D}_{n-2}) \Rightarrow \boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = (\boldsymbol{D}_2 - a\boldsymbol{D}_1)b^{n-2}$$
$$\boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = a(\boldsymbol{D}_{n-1} - b\boldsymbol{D}_{n-2}) \Rightarrow \boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = (\boldsymbol{D}_2 - b\boldsymbol{D}_1)a^{n-2}$$

而 $\boldsymbol{D}_1 = a+b$，$\boldsymbol{D}_2 = a^2+ab+b^2$. 因此

$$\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = b^n$$
$$\boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = a^n$$

所以 $D_n = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{D}_n = b^n$; 当 $b=0$ 时，$\boldsymbol{D}_n = a^n$.

# Laplace 展开

**Example 1.16.** 计算下述 $2n$ 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

hints 尝试从第一行和最后一行展开，于是得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{2n} &= \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \cdot \boldsymbol{D}_{2n-2} \\ &= (a^2 - b^2)\boldsymbol{D}_{2n-2}\end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{D}_2 = a^2 - b^2$，因此 $\boldsymbol{D}_{2n} = (a^2 - b^2)^n$

# 方程组的解

## 给定方程组解的情况

## 带参数的方程组解的情况

# 矩阵相似

## 相似判定

**Proposition 3.1.** 常用判定矩阵相似的方法，遇题依次向下使用下述方法.

1. 必要条件: 相似必行列值相等;
2. 必要条件: 特征值相等;
3. 充分条件: 对于都可对角化的矩阵，判定其特征值是否相同;
4. 否命题的充分条件: 一个可对角化，一个不可对角化，则它们不相似;
5. 对于都不可对角的矩阵，同一个特征值的特征子空间的维数相同;
6. 对于都不可对角的矩阵，则对应的特征向量满足: 若 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda$ 的特征向量 $\lambda$，则 $\boldsymbol{A}$ 对应 $\lambda$ 的特征向量为 $P\alpha$. 这里需要求出可逆矩阵 $P$

## 对角化判定

**Proposition 3.2.** 常用判定对角化的方法，遇题依次向下使用下述方法

1. 实对称矩阵一定相似于对角矩阵;
2. 有 $n$ 个不同的特征值，那么一定相似于对角矩阵;
3. $n$ 重特征值对应特征子空间是否为 $n$ 维;

# 二次型

## 正定性的判定