考研高数

枫聆

2021 年 5 月 26 日

目录

经典证明

Definition 1.1. (连续函数在闭区间上有界) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在其上有界.

证明. (方法 1: $f(x)$ 非空子区间 $[a,x]$，求其上确界) 假设 B 是使得 $f(x)$ 在形如闭区间 $[a,x]$ 上有界的 $x \in [a,b]$ 集合，显然 $a \in B$，所以 B 非空。若 $e \in B$ 且 $e > a$，那么 a 和 e 之间的点都是在 B 里面的，所以实际上 B 是一个闭区间. 我们再考虑 B 的上确界，根据 x 的取法，有 $x \leq b$，如果我们能证明它的上确界在 b 出取得，那么整个命题就得证. 现在假设 $\sup(B) < b$, 由于 B 是一个闭区间，所以 $\sup(B) \in B$. 由于 f 是连续的，那么足够靠近 $\sup(B)$ 的地方，即 $s - \sup(B) < \delta$ 且 $s > \sup(B)$，有 $|f(s) - f(\sup(B))| < \varepsilon$，那么 $[\sup(B), s]$ 也是有界，这是和 $\sup B$ 是 B 的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的数列，其子列收敛造矛盾). □

Definition 1.2. (确界原理) 任一有上界的非空实数集必有上确界，同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. 构造一个实数划分，用戴德金分割定理说明界数就是确界假设非空实数集 S 有上界 M，取 S 所有上界为集合 B. 因为 $M \in B$ 所以 B 非空，取 $A = \mathbb{R}\ \ B$，要证明 A 是非空是 trivial 的，取 $x = x_0 - 1$, $x_0 \in S$，那么 $x \in A$. 显然地 A 里面所有的元素都小于 B 里面的元素（若是大于 B 里面某个元素，那么它就是 S 的一个上界了，这是矛盾的），这样我们就可以得到一个实数上的划分，根据戴德金实数分割定理，存在一个 β，它要么是 A 里面最大值或者要么 B 里面的最小值. 假设它是 A 里面的最大值，根据 A 的定义，对于任意 $a \in A$ 都存在一个 $x_0 \in S$ 使得 $a < x_0$，将其作用到 β 上，我们得到某个 $x_0' \in S$ 使得 $\beta < x_0'$. 我们考虑 $\frac{x_0'+\beta}{2}$，有

$$\beta < \frac{x_0' + \beta}{2} < x_0'$$

所以 $\frac{x_0'+\beta}{2} \in A$，这和 β 是 A 里面最大值是矛盾的，所以 $\beta \in B$，即这个 β 就是 S 的上确界. □

Definition 1.3. (极值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，那们存在 $c, d \in [a,b]$ 使得

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d),\ x \in [a,b].$$

证明. (构造一个特殊连续函数说明原函数可以取到确界)f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么马上可以得到 f 在 $[a,b]$ 上有界. 取集合 $Y = \{\, f(x) \mid x \in [a,b] \,\}$，即 Y 有界，根据确界原理 Y 有确界，那么我们下面证明思路，就是看 $f(x)$ 是不是能取到这个确界. 取其上确界为 m，假设不存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = m$，那么我们考虑函数 $g(x) = \frac{1}{m-f(x)}$，由于 $m > f(x)$, $x \in [a,b]$，所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，又因为 f 在 $[a,b]$ 是上有界的，那么 g 在其上也是有界的. 由于 m 是上确界，所以对任意的正实数 ε，都有 $m - f(x) \leq \varepsilon$，那么 $g(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$，这说明 $g(x)$ 是发散的，造成了矛盾. 所以 f 是可以取到上确界的. □

Definition 1.4. (罗尔定理)如果 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 内可导，若有 $f(a) = f(b)$，那么存在至少一个 $c \in (a,b)$ 使得

$$f'(c) = 0.$$

证明. (导数存在的充分必要条件)f 在 $[a,b]$ 上连续，那么其在 $[a,b]$ 是可以取到极值的，分两种情况讨论: (1 如果其最大值和最小值同时在 a,b 取得，那么 f 就是常函数，对任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $f'(x)=0$. (2 不失一般性，我们假设 f 在一点 $c\in(a,b)$ 处 $f(c)$ 为最大值，我们来考虑 c 的一个邻域 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 两边，其中 $c-\varepsilon$ 和 $c+\varepsilon$ 均在 $[a,b]$ 里面. 对任意的 $h\in(c-\varepsilon,c)$ 都有

$$f'(c^-)=\lim_{h\to c^-}\frac{f(c)-f(h)}{c-h}\leq 0.$$

同理对任意的 $t\in(c,c+\varepsilon)$ 都有

$$f'(c^+)=\lim_{t\to c^+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\geq 0.$$

由于 f 在 c 点可导，那么 $f'(c)=f'(c^-)=f'(c^+)=0$. □

函数极限