

考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 15 日

目录

1	行列式	1
1.1	定义	1
1.2	化行阶梯形	2
1.3	按一行展开	2
1.4	按多行展开	2
1.5	特殊矩阵	2
1.6	数学归纳法	2
2	矩阵相似	3
2.1	相似判定	3
2.2	对角化判定	3
3	二次型	3
3.1	正定性的判定	3

行列式

定义

Annotation 1.1. 这类题主要是给定某个具体的行列式值的基础上，通过行列式的性质来计算行列式.

化行阶梯形

Annotation 1.2. 不是特殊矩阵的第一选择.

按一行展开

Annotation 1.3. 若是可以将某一行或者某一列消去, 只留下一个非零元素, 按行和按列展开是不错的选择.

Example 1.4. 计算

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

hints 可以考虑把所有列都加到第一列, 再按第一列展开

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{(1+n)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{(1+n)n}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

同样上述矩阵也是所有列加到第一列, 最终有 $|A| = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{2}$

按多行展开

Annotation 1.5. 好像没有直接使用拉普拉斯定理的习惯, 比较特殊的分块矩阵可以考虑.

特殊矩阵

Annotation 1.6. 常见的特殊矩阵<https://www.bilibili.com/read/cv266516>

1. 范德蒙德行列式
2. 爪型行列式

数学归纳法

矩阵相似

相似判定

Proposition 2.1. 常用判定矩阵相似的方法，遇题依次向下使用下述方法.

1. 必要条件: 相似必行列值相等;
2. 必要条件: 特征值相等;
3. 充分条件: 对于都可对角化的矩阵，判定其特征值是否相同;
4. 否命题的充分条件: 一个可对角化，一个不可对角化，则它们不相似;
5. 对于都不可对角的矩阵，同一个特征值的特征子空间的维数相同;
6. 对于都不可对角的矩阵，则对应的特征向量满足: 若 B 对应 λ 的特征向量 λ ，则 A 对应 λ 的特征向量为 $P\alpha$. 这里要求出可逆矩阵 P

对角化判定

Proposition 2.2. 常用判定对角化的方法，遇题依次向下使用下述方法

1. 实对称矩阵一定相似于对角矩阵;
2. 有 n 个不同的特征值，那么一定相似于对角矩阵;
3. n 重特征值对应特征子空间是否为 n 维;

二次型

正定性的判定