考研高数

枫聆

2021 年 6 月 5 日

目录

经典证明

Theorem 1.1. (连续函数在闭区间上有界) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么它在其上有界 (上下界).

证明. (方法 1: 构造 $f(x)$ 非空子区间 $[a,x]$, 求其上确界) 假设 B 是使得 $f(x)$ 在形如闭区间 $[a,x]$ 上有界的 $x \in [a,b]$ 集合, 显然 $a \in B$, 所以 B 非空。若 $e \in B$ 且 $e > a$, 那么 a 和 e 之间的点都是在 B 里面的, 所以实际上 B 是一个闭区间. 我们再考虑 B 的上确界, 根据 x 的取法, 有 $x \leq b$, 如果我们能证明它的上确界在 b 出取得, 那么整个命题就得证. 现在假设 $\sup(B) < b$, 由于 B 是一个闭区间, 所以 $\sup(B) \in B$. 由于 f 是连续的, 那么足够靠近 $\sup(B)$ 的地方, 即 $s - \sup(B) < \delta$ 且 $s > \sup(B)$, 有 $|f(s) - f(\sup(B))| < \varepsilon$, 那么 $f(x)$, $x \in [\sup(B), s]$ 也是有界, 这是和 $\sup B$ 是 B 的上确界矛盾的.

(方法 2: 构造一个严格递增的数列, 其子列收敛造矛盾). □

Theorem 1.2. (确界原理) 任一有上界的非空实数集必有上确界, 同理任一有下界的非空实数集必有下确界.

证明. (构造一个实数划分, 用戴德金分割定理说明界数就是确界)假设非空实数集 S 有上界 M, 取 S 所有上界为集合 B. 因为 $M \in B$ 所以 B 非空, 取 $A = \mathbb{R} \setminus B$, 要证明 A 是非空是 trivial 的, 取 $x = x_0 - 1$, $x_0 \in S$, 那么 $x \in A$. 显然地 A 里面所有的元素都小于 B 里面的元素 (若是大于 B 里面某个元素, 那么它就是 S 的一个上界了, 这是矛盾的), 这样我们就可以得到一个实数上的划分, 根据戴德金实数分割定理, 存在一个 β, 它要么是 A 里面最大值或者要么 B 里面的最小值. 假设它是 A 里面的最大值, 根据 A 的定义, 对于任意 $a \in A$ 都存在一个 $x_0 \in S$ 使得 $a < x_0$, 将其作用到 β 上, 我们得到某个 $x_0' \in S$ 使得 $\beta < x_0'$. 我们考虑 $\frac{x_0'+\beta}{2}$, 有

$$\beta < \frac{x_0' + \beta}{2} < x_0'$$

所以 $\frac{x_0'+\beta}{2} \in A$, 这和 β 是 A 里面最大值是矛盾的, 所以 $\beta \in B$, 即这个 β 就是 S 的上确界. □

Theorem 1.3. (极值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 那们存在 $c,d \in [a,b]$ 使得

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d),\ x \in [a,b].$$

证明. (构造一个特殊连续函数说明原函数可以取到确界)f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 (连续闭有界), 那么马上可以得到 f 在 $[a,b]$ 上有界. 取集合 $Y = \{\, f(x) \mid x \in [a,b] \,\}$, 即 Y 有界, 根据确界原理Y 有确界, 那么我们下面证明思路, 就是看 $f(x)$ 是不是能取到这个确界. 取其上确界为 m, 假设不存在 $d \in [a,b]$ 使得 $f(d) = m$, 那么我们考虑函数 $g(x) = \frac{1}{m-f(x)}$, 由于 $m > f(x)$, $x \in [a,b]$, 所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的, 又因为 f 在 $[a,b]$ 是上有界的, 那么 g 在其上也是有界的. 由于 m 是上确界, 所以对任意的正实数 ε, 都有 $m - f(x) \leq \varepsilon$, 那么 $g(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, 这说明 $g(x)$ 是发散的, 造成了矛盾. 所以 f 是可以取到上确界的. □

Theorem 1.4. (罗尔定理)如果 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 内可导，若有 $f(a)=f(b)$，那么存在至少一个 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=0.$$

证明. (确界处导数存在的充分必要条件)f 在 $[a,b]$ 上连续，那么根据极值定理其在 $[a,b]$ 是可以取到极值的，分两种情况讨论：(1 如果其最大值和最小值同时在 a,b 取得，那么 f 就是常函数，对任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $f'(x)=0$. (2 不失一般性，我们假设 f 在一点 $c\in(a,b)$ 处 $f(c)$ 为最大值 (若是最小值，考虑 $-f$ 即可)，我们来考虑 c 的一个邻域 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 两边，其中 $c-\varepsilon$ 和 $c+\varepsilon$ 均在 $[a,b]$ 里面. 对任意的 $h\in(c-\varepsilon,c)$ 都有

$$f'(c^-)=\lim_{h\to c^-}\frac{f(c)-f(h)}{c-h}\le 0.$$

同理对任意的 $t\in(c,c+\varepsilon)$ 都有

$$f'(c^+)=\lim_{t\to c^+}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\ge 0.$$

由于 f 在 c 点可导，那么 $f'(c)=f'(c^-)=f'(c^+)=0$. □

Theorem 1.5. (中值定理) 若 real-valued 函数 f 在闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续，且在 (a,b) 上可导，那么存在一个实数 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明. (中值定理是罗尔定理的推广) 构造函数 $g(x)=f(x)-rx$，通过选择合适的 r，使得 $g(a)=g(b)$，即

$$\begin{aligned} g(a)=g(b) \quad &\Leftrightarrow f(a)-ra=f(b)-rb \\ &\Leftrightarrow r=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

那么根据罗尔定理，我们知道存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $g'(c)=0$，

$$\begin{aligned} g'(x)&=f'(x)-r \\ g'(c)&=f'(c)-r=0 \\ f'(c)&=r=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

证毕. □

Theorem 1.6. (柯西中值定理) 若两个 real-valued 函数 f 和 g 都在闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续，且都在 (a,b) 上可导. 那么存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

特别地，若 $g(b)\neq g(a)$ 且 $g'(c)\neq 0$，等价于

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证明. (柯西中值定理是中值定理的扩展) 构造函数 $h(x) = f(x) - rg(x)$，选择合适 r 使得 $h(a) = h(b)$，若 $g(b) \neq g(a)$ 即 $r = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，那么根据罗尔定理可以得到 $h'(c) = 0$, 即

$$0 = g'(c) - rf'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

若 $g(a) = g(b)$，同样根据罗尔定理有 $g'(c) = 0$，这个条件显然是使得前面第一个等式成立的. □

Theorem 1.7. (夹逼准则) 若函数 f, g, h 均在以点 a 为聚点的区间 I 上定义着，且对任意的 $x \in I$，其中 $x \neq a$ 都有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

并且同时满足

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

那么 $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

证明. (经典两边夹) 取任意的正实数 $\varepsilon > 0$，根据极限地定义对 $g(x)$ 和 $h(x)$ 我们可以分别找到 $|x| < \delta_1$ 和 $|x| < \delta_2$，使得

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \text{ 和 } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

成立，我们取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，那么当 $|x| < \delta$ 时有

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，所以有 $\lim_{x \to a} f(x) = L$. □

数列极限

数列极限的定义

Definition 2.1. 若对于每一整数 ε, 不论它怎样小，恒有序号 N, 使在 $n > N$ 时，一切 x_n 满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

, 则称常数 a 为数列 (x_n) 当 n 趋向于无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$. 也可以说这个序列收敛于 a.

数列极限的几何意义

数列左右极限

数列极限的基本性质

无穷小和无穷大

极限运算

Proposition 2.2. 若 $x_n = y_n$，则 $\lim x_n = \lim y_n$.

Proposition 2.3. 若恒有 $x_n \leq y_n$，且各自趋于有限极限，则 $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Proposition 2.4. 夹闭准则 见经典证明.

Proposition 2.5. 任意有限个无穷小的和亦是无穷小.

Proposition 2.6. 有界数列 (x_n) 与无穷小 α_n 的乘积仍是无穷小.

Proposition 2.7. 若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，则 $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$. 考虑两个极限的尾巴

$$\lim(x_n \pm y_n) = a + b + \alpha + \beta.$$

Proposition 2.8. 若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，则 $\lim(x_n y_n) = ab$. 考虑两个极限的尾巴

$$\lim x_n y_n = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

Proposition 2.9. 若 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，且 $b \neq 0$，则 $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. 考虑两个极限的尾巴

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}.$$

不定式

上下极限

Definition 2.10. 序列 (x_n) 的部分极限的最大值和最小值，称为 x_n 的上极限和下极限，各记为

$$\overline{\lim} x_n \text{ 及 } \underline{\lim} x_n.$$

函数极限

洛必达法则

Definition 3.1. 若 real-value 函数 f 和 g 都在去心邻域 $\tilde{U}(c,\delta)$ 可导，有

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ 或者 } \lim_{x\to c} g(x) = \infty,$$

且对任意 $x \in \tilde{U}$ 都有 $g'(x) \neq 0$，同时有 $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 首先来看一个比较特殊的情况，除满足上述条件之外，若还满足 $f(c) = g(c) = 0$，并且 $g'(c) \neq 0$，那么

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

下面来严格证明分两种情况来证明，由于 $\tilde{U}$ 在 c 这里间断，后面需要频繁使用到柯西中值定理，所以自然地在 U 的两端来分析，取开区间 $\mathcal{I}$ 以 c 点为端点，且 $\mathcal{I} \subset \tilde{U}$. 注意到条件满足对任意的 $x \in \mathcal{I}$ 有 $g'(x) \neq 0$，并且 g 在 $\mathcal{I}$ 上是连续的，那么是可以在 $\mathcal{I}$ 里面找到一个足够小的区间使得 $g(x) \neq 0$，那这个小区间代替 $\mathcal{I}$.

我们定义 $m(x) = \inf \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ 和 $M(x) = \sup \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ 其中 $x \in \mathcal{I}$，α 取遍 x 和 c 之间的数 (为什么确保可以取到确界？任意 α 处 f 和 g 导数均有意义). 在确定 x 之后，我们再取定 x 和 c 之间一点 y，结合柯西中值定理可以保证在它们之间找到一个 c 使得

$$m(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \leq M(x).$$

注意为什么这里可以保证 $g(x) - g(y) \neq 0$？ 假设存在 $g(x) = g(y)$，那么根据罗尔定理，就存在一点 p 使得 $g'(p) = 0$，这是和前提条件 $\forall x \in \bar{U}$，$g'(x) \neq 0$ 矛盾的.

情况一：$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$.

对任意的 $x \in \mathcal{I}$, 取 y 位于 x 和 c 之间，为了得到 $\frac{f(x)}{g(x)}$，我们让

$$m(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} \leq M(x).$$

当 $y \to c$ 时，$\frac{f(y)}{g(x)}$ 和 $\frac{g(y)}{g(x)}$ 都趋向于 0，所以

$$m(x) \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M(x).$$

情况二：$\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$.

对任意的 $x \in \mathcal{I}$, 取 y 位于 x 和 c 之间. 如果我们还是用上面的分式，直接尝试把 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 构造出来，尝试分式对 $y \to c$ 取极限的时候，显然是无法处理的. 同时你注意到在当前条件下是对 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 是没有特别说明的，言下之意它不会对我们的证明产生影响. 现在我们考虑把前面分式上下都除以 $g(y)$，同时上下取负，即

$$m(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}} \leq M(x).$$

那么当 $y \to c$ 时，$\frac{f(x)}{g(y)}$ 和 $\frac{g(x)}{g(y)}$ 都是趋于 0，那么此刻关键是我们如何需要考虑 $\lim\limits_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)}$? 让 $S_x = \{y \mid$ y 位于 x 和 c 之间$\}$, 我们取遍 $y \in S_x$, 我们可以得到得到一个有界数列 $\{\frac{f(y)}{g(y)}\}$(为什么有界? f 和 g 在 $[x,c]$ 上连续)，我们考虑其上下极限

$$m(x) \leq \liminf_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq \limsup_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq M(x).$$

当对 $m(x)$ 和 $M(x)$ 也取极限 $x \to c$ 时，有

$$\lim_{x\to c} m(x) = \lim_{x\to c} M(x) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对情况一使用夹逼准则，可以很快得到 $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 对情况二也同样使用夹逼准则，可以得到

$$\liminf_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)} = \limsup_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

上下极限相等可以马上得到 $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. 最终证毕. $\square$