

# 考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 27 日

## 目录

<b>1 极限相关</b>	<b>4</b>
1.1 $1^\infty$ 类型极限	4
1.2 $1^0$ 类型极限	4
1.3 夹逼准则应用	5
1.4 级数相关的极限	6
1.5 去除根式的尴尬	8
1.6 换元取极限	10
1.7 递归求极限	10
1.8 等价无穷小的替换	10
1.9 中值定理	10
1.10 含积分的极限	11
1.11 没有具体的函数表达式	11
<b>2 导数</b>	<b>11</b>
2.1 导数定义相关的	11
2.2 泰勒公式求高阶导数	12
2.3 递归法求高阶导数	12
<b>3 函数性质</b>	<b>13</b>
3.1 求零点	13

<b>4</b>	<b>不定积分</b>	<b>14</b>
4.1	多项式分式	14
4.2	分母带根号	14
4.3	换元法	16
4.4	高次	16
4.5	分部积分	16
4.6	三角有理式	16
4.7	递归式	17
4.8	被积函数含不常见函数形式	17
<b>5</b>	<b>定积分</b>	<b>19</b>
5.1	参数积分求导	19
5.2	奇怪的定积分	19
5.3	不太好积的带三角函数的积分	19
5.4	待定系数收敛反常积分	20
5.5	化为极限形式	20
<b>6</b>	<b>反常积分</b>	<b>21</b>
6.1	含有 $e^x$ 的被积函数	21
6.2	定积分的应用	21
6.3	待定参数	22
6.4	分离积分	23
6.5	求值	23
<b>7</b>	<b>微分方程</b>	<b>25</b>
7.1	线性微分方程解的结构	25
7.2	带积分的微分方程	25
7.3	该死的绝对值	26
7.4	改变自变量	26
<b>8</b>	<b>多元函数</b>	<b>27</b>
8.1	带不等式的条件极值	27
8.2	可微定义	27

<b>9 二重积分</b>	<b>28</b>
9.1 交换次序更好积分 . . . . .	28
9.2 化极坐标 . . . . .	28
<b>10 三重积分</b>	<b>29</b>
10.1 直角坐标 . . . . .	29
10.2 柱坐标 . . . . .	29
10.3 球坐标 . . . . .	29
<b>11 多元积分的应用</b>	<b>30</b>
11.1 第一类曲线积分 . . . . .	30
11.2 第二类曲线积分 . . . . .	30
11.3 第一类曲面积分 . . . . .	31
11.4 第二类曲面积分 . . . . .	31
<b>12 级数</b>	<b>32</b>
12.1 参数收敛 . . . . .	32
12.2 带-1 的幂次 . . . . .	32
12.3 不标准的幂级数 . . . . .	32
12.4 利用傅里叶公式求和 . . . . .	33
<b>13 tricks</b>	<b>34</b>
13.1 一些有趣的不等式 . . . . .	34
13.2 Stirling 公式 . . . . .	34
13.3 高数积分 . . . . .	34

## 极限相关

### $1^\infty$ 类型极限

**Example 1.1.** 若  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$ , 且  $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$ , 其中  $A$  是一个常数, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A.$$

*hints* 带指数形式的表达式, 第一想法是把指数拿下来

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = \lim e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} = \lim e^{\beta(x)\alpha(x)} = e^A.$$

**Example 1.2.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x.$$

*hints*

$$\left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \left( \frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left( \frac{x}{x+b} \right)^x = \left( 1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \left( 1 - \frac{b}{x+b} \right)^x = e^{a-b}.$$

**Example 1.3.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n.$$

*hints* 往  $(1 + \alpha(x))^{\beta(x)}$  上凑

$$\left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$$

考虑  $\alpha(x)\beta(x)$

$$\frac{(\sqrt[n]{a}-1) + (\sqrt[n]{b}-1) + (\sqrt[n]{c}-1)}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}} \right)$$

### $1^0$ 类型极限

**Example 1.4.** 若  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x)\alpha(x) = 0$ , 则

$$(1 + \alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x).$$

*hints* 取对数

$$e^{\beta(x) \ln(1+\alpha(x))} - 1 \sim e^{\beta(x)\alpha(x)} - 1 \sim \beta(x)\alpha(x).$$

## 夹逼准则应用

**Example 1.5.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

*hints*

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq s \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

**Example 1.6.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right].$$

*hints*

$$x - 1 \leq [x] \leq x$$

**Example 1.7.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$$

*hints*

$$\left( \frac{2}{1} \right) \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n}.$$

## 级数相关的极限

**Example 1.8.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

*hints* 直接考察

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right|$$

用极限的定义等式右边分成两部分, 即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 可以找到一个  $n_1$ , 使得  $n > n_1$  时有  $|x_n - A| < \varepsilon$ , 那么

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_{n_1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - A) + (a_{n_1+2} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_{n_1} - A|}{n} + \frac{|a_{n_1+2} - A| + |a_{n_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

上述不等式右边第一项, 形如  $\frac{C}{n}$ , 因为先对任意  $n > n_1$  都有上述不等式成立, 那么只需要让  $n$  取的大一点, 就能使得  $\frac{C}{n} < \varepsilon$  (**阿基米德公理**). 右边第二项显然小于  $\frac{n - n_1}{n} \varepsilon$ , 于是综上

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| < \varepsilon + \frac{n - n_1}{n} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果题目中没有直接给出极限的具体值, 我们可以用 *O.Stolz* 定理先猜出来, 然后用初等方法来验证, 再根据极限的唯一性, 就得到了答案. 把  $a_n$  换成形式, 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

**Example 1.9.** 求极限

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

*hints* 用 *O.Stolz* 定理考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

分母二项式展开合并极有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1}$ . 这道题初等方法似乎不能很好的把握, 用和式的方法写出来其实就是黎曼积分的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \int_0^1 x^k = \frac{1}{k+1}.$$

级数相关的问题往往可以尝试考虑用定积分的思路来解决. 下面是  $1^k + 2^k + \cdots + n^k$  的转换思路

$$\sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^k \sim_{\infty} n^{k+1} \int_0^1 x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

**Example 1.10.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ln a.$$

*hints*

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln a.$$

因为  $\ln x$  的连续性, 所以  $\lim \ln a_n = \ln a$ , 再根据 1.8.

**Example 1.11.** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

*hints* 取对数再根据 1.10

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}} = e^{\ln a} = a.$$

**Example 1.12.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

*hints* 由 1.11 可知  $a_n$  和  $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$  的极限是相同的 (假设  $a_n$  的极限存在). 那么有一个推论, 对于数列

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

则  $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 只要等式右边的极限存在就行. 在这里我们只要设  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  即可, 那么

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

## 去除根式的尴尬

**Example 1.13.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x \right].$$

*hints*

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

那么

$$x \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{\frac{1}{k}} = x \left( 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{nx} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

这里第一个等号右边对  $(1+x)^p$  在  $x=0$  处用了一下泰勒展开得到  $(1+qx+\mathcal{O}(x^2))$ , 这个  $\mathcal{O}$  表示最高次的多项式.

还有一种升次的方法, 即下面的恒等式

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}.$$

这里我们使得  $y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}$  及  $z = x$ , 那么原式就变成了

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) - x^k}{\left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-1} + \left[ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} \right]^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left[ \sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)} \right]^{k-1} + \left[ \sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)} \right]^{k-2}x + \cdots + 1} \end{aligned}$$

上下除以  $x^{k-1}$

分母中  $\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)}$  是趋于 1 的, 再用一下函数  $x^{\frac{m}{n}}$  的连续性, 取其函数值也是等于 1, 所以分母就有  $k \cdot 1$ .

**Example 1.14.** 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

*hints* 取对数应用  $e^x$  的连续性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = 1.$$

也可以使用一下 13.1 的伯努利不等式来证明, 这里设  $\sqrt[n]{n} = 1 + h$ , 那么

$$\begin{aligned} n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \\ \Rightarrow n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ \Rightarrow h^2 &\leq \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $h \rightarrow 0$ , 即  $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .



**Example 1.15.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

**hints** 考虑把根式里面变成  $(1 + \alpha(x))$  的形式，因此考虑提出一个因子  $x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - \frac{\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{3}.$$

## 换元取极限

**Example 1.16.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{x+1} - 1}{x}, m \in \mathbb{N}.$$

*hints* 设  $y = \sqrt[m]{x+1} - 1$ , 显然  $y$  在  $x = 0$  处连续, 所以当  $x \rightarrow 0$  时有  $y \rightarrow 0$ , 那么此时的极限就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(y+1)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

这样上下都变成我们熟悉的多项式, 分母二项式展开.

**Example 1.17.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{\frac{n}{m}} - 1}{x}.$$

*hints* 还是使得  $y = (x+1)^{\frac{1}{m}} - 1$ , 那么就变成了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} \frac{y}{(1+y)m - 1} = \frac{n}{m}.$$

## 递归求极限

**Example 1.18.** 1.7 单调数列求极限

*hints* 考虑递归式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

等式两边同时取极限则有

$$a = a \cdot 0 \Rightarrow a = 0.$$

## 等价无穷小的替换

## 中值定理

**Example 1.19.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

*hints* 对连续函数  $\ln \arctan x$  应用中值定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{[1 + (\theta + x)^2] \arctan(\theta + x)},$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 那么即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (\theta + x)^2} \frac{1}{\arctan(\theta + x)} = \frac{1}{\pi}.$$

## 含积分的极限

**Example 1.20.** 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$$

**hints** 这样的含参数积分最好的办法就是洛必达，但是这里首先需要换元一下，令  $u = x - t$ ，则

$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = \int_0^x \sqrt{u} e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du.$$

再用洛必达

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

## 没有具体的函数表达式

**Example 1.21.** 设  $f(x)$  在  $x = a$  处二阶导数存在，求

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)}{h}.$$

**hints** 直觉告诉它的结果和二阶导有关，但是任何初等方法都化不出来二阶导的定义，这个时候可以考虑用一下洛必达

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} = \frac{1}{2} f''(a).$$

## 导数

### 导数定义相关的

**Example 2.1.** 已知  $f'(x_0) = -1$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}.$$

**hints** 直觉上就是想办法凑导数的定义出来

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} &= -1 \end{aligned}$$

求出需要  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{x}$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x}$ ，两项相减再取倒。

## 泰勒公式求高阶导数

## 递归法求高阶导数

**Example 2.2.** 设

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

求  $f^{(n)}(0)$ .

<https://math.stackexchange.com/questions/549028/deriving-maclaurin-series-for-frac-arcsin-x-sqrt{1-x^2}> hints 这道题你想求它的麦克劳林级数其实不太好求, 实际上也不用求出通项, 因为只要求  $x=0$  的情况, 这里有比较 trick 的利用递归式的手法. 先求它的一阶导

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)^{3/2}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2}.$$

这里构造一个微分方程

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

两边求  $n$  次, 根据  $n$  的莱布尼茨公式有

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^n(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0.$$

带入  $x=0$ , 这里就可能消掉  $f^{(n)}$  的项, 得到一个递归式

$$f^{(n+1)}(0) - n^2f^{(n-1)}(0).$$

这里我们让  $n = n+1$ , 则有

$$f^{(n+2)}(0) = n^2f^{(n)}(0).$$

我们可以求出最前面的两项  $f'(0) = 1$  和  $f''(0) = 0$ , 于是这里有

$$f^n(0) = \begin{cases} 0 & n = \text{奇数} \\ (n-1)^2 \times (n-2)! \times \cdots \times 2! & n = \text{偶数} \end{cases}$$

奇数下的情况可以化简为  $2^{n-1}((\frac{n-1}{2})!)^2$

## 函数性质

### 求零点

**Example 3.1.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  可导,  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0, f(a) \geq f(b)$ . 则  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上有两个零点.

**hints**  $f'(x)$  有两个零点, 也就是有两个极值点. 这样的题目最好还是构造相应的函数, 用罗尔定理来做. 设  $g(x) = f(x) - f(a)$  和  $h(x) = f(x) - f(b)$ , 我们思路是确定  $g(x)$  和  $h(x)$  的一个零点, 那么就可以用罗尔定理来确定两个  $f'(x)$  的零点. 确定  $g(x)$  和  $h(x)$  零点, 我们要用零点定理来做. 由于  $f'_+(a) > 0$ , 根据导数的定义有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} > 0 \Rightarrow f(a + \xi_1) > f(a), \xi_1 > 0$$

同理, 由于  $f'_-(b) > 0$ , 我们可以得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(b-x) - f(b)}{-x} > 0 \Rightarrow f(b - \xi_2) < f(b), \xi_2 > 0.$$

注意这里的  $\Rightarrow$  用到的是极限的保号性. 于是这里由零点定理有

$$g(a + \xi_1) > 0, g(b - \xi_1) \leq 0 \Rightarrow g(\theta_1) = 0, a + \xi_1 < \theta_1 < b - \xi_1$$

因此存在  $f(\theta_1) = f(a)$ . 同理有

$$h(a + \xi_1) > 0, h(b - \xi_2) < 0 \Rightarrow h(\theta_2) = 0, a + \xi_1 < \theta_2 < b - \xi_1$$

因此存在  $f(\theta_2) = f(b)$ .

现在需要分类讨论一下, 若  $\theta_1 \leq \theta_2$ , 则根据罗尔定理我们可以在  $(a, \theta_1)$  及  $(\theta_2, b)$  上各找到一个零点. 若  $\theta_1 > \theta_2$ , 此时由  $g(a + \xi_1) > 0, g(\theta_2) \leq 0$ , 存在一点  $\theta_3$  使得  $f(\theta_3) = 0$ , 同理由  $g(\theta_1) \geq 0, g(b - \xi_2) < 0$ , 可以找到一点  $\theta_4$  使得  $f(\theta_4) = 0$ , 这样  $\theta_3 < \theta_4$ , 回到了前面一种情况. 证闭!

## 不定积分

### 多项式分式

**Example 4.1.** 求

$$\int \frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} dx.$$

hints 还是得部分分式

$$\frac{x^4 - x^2}{1 + x^2} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1) + 2}{1 + x^2} = x^2 + \frac{2}{1 + x^2} - 2.$$

因此原函数为

$$\frac{x^3}{3} + 2 \arctan x - 2x + C,$$

**Example 4.2.** 求

$$\int \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

hints 观察分子多项式次数小于分母的, 且只小一次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13} dx + 8 \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} d(x^2 - 6x + 13) + 8 \int \frac{1}{4 + (x - 3)^2} dx,$$

因此原函数为

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x - 3}{2} + C.$$

**Example 4.3.** 求

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$$

hints 观察分子多项式次数小于分母, 且小两次, 所以我们考虑这样部分分式

$$\int \frac{x}{4 + (x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4 + (x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2 + 1}{2} + C$$

### 分母带根号

**Example 4.4.** 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}.$$

hints 根号下凑平方

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} d(x - 2) = \arcsin \frac{x - 2}{2} + C$$

**Example 4.5.** 求

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

**hints** 先分式把分子根号里面的微分

$$\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} d(3+2x-x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx,$$

因此原函数为

$$\sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

**Example 4.6.** 求

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = a \sin t$ , 则

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^2}{4} \sin 2t.$$

把  $t$  变成  $x$  也有一点技巧, 第二项可以变成  $\frac{1}{2}(a \sin t)(a \cos t)$ , 其中  $a \sin t = x, a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2}$ , 这样会方便一点

$$\frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

**Example 4.7.** 求

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}.$$

**hints** 这里还是要凑根号下的微分, 有比较多的凑法, 这里提及一种凑微分再配合三角换元的,

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{1}{2} \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{(x^2)^2+1}},$$

令  $x^2 = \tan u$ , 于是得到

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin u} du = \frac{1}{2} \ln |\csc u + \cot u|.$$

再带回  $x$  即可.

**Example 4.8.** 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}.$$

**hints** 这里目标肯定是换元换成我们熟悉的积分, 但是找不到因子提到微分符号里面, 这时可以分母提一个  $x^3$  出来, 就可以换元了

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C$$

这里也可以尝试令  $x = \frac{1}{t}$ , 有

$$-\int \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)} = \int \frac{d\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

## 换元法

**Example 4.9.** 求

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = \ln(t^2 - 1)$ , 则

$$\int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

带入  $t = \sqrt{e^x + 1}$ , 即得

$$2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$$

## 高次

## 分部积分

## 三角有理式

**Example 4.10.** 求

$$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$$

**hints** 这里有一个非常巧妙的第二类换元, 令  $x = \arcsin u$ , 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du.$$

再把有理式拆开, 这过程使用待定系数的方法

$$\int \frac{1}{(1+u)(1-u^2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1+u}.$$

最后即有

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sin x} + C.$$



**Example 4.11.** 求

$$\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}.$$

**hints** 考虑第二类换元, 令  $x = \operatorname{arccot} u$ , 则有

$$-\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}})} \frac{1}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{1+u} du = -\ln|u| + C = -\ln|1 + \cot x| + C.$$

**Example 4.12.** 求

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

**hints** 这种情况可以考虑先化简一下分子, 即上下乘以  $(\cos x - \sin x)$ , 这样之后就可以考虑部分分式.

## 递归式

**Example 4.13.** 求

$$\int e^{ax} \cos nx dx.$$

**hints** 分部积分 2 次回到原积分

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos nx dx &= \frac{1}{a} \int \cos nx de^{ax} = \frac{1}{a} (e^{ax} \cos nx + n \int e^{ax} \sin nx dx) \\ &= \frac{1}{a} [e^{ax} \cos nx + \frac{n}{a} (e^{ax} \sin nx - n \int e^{ax} \cos nx dx)] \end{aligned}$$

整理两边即得

$$\frac{n^2 + a^2}{a^2} \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2} \Rightarrow \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{ae^{ax} \cos nx + ne^{ax} \sin nx}{a^2 + n^2}$$

类似的有

$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{ae^{ax} \sin nx - ne^{ax} \cos nx}{a^2 + n^2}$$

## 被积函数含不常见函数形式

**Example 4.14.** 求

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

**hints** 必须得想办法吧  $\arcsin e^x$  提出来, 因为我们没有已知原函数导数为反三角的, 这里自然地就要使用部分积分了

$$-\int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

这里令  $t = \sqrt{1 - e^{2x}}$ , 那么  $x = \frac{\ln(1-t^2)}{2}$ ,  $dx = \frac{-t}{1-t^2}dt$ , 于是

$$\int \frac{1}{t} \frac{-t}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C.$$

因此

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} + C$$

**Example 4.15.** 求

$$\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx, x > 0$$

[hints](#) 首选分部积分, 但是为了为了能部分积分, 我们必须先第一类换元, 令  $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ , 那么  $x = \frac{1}{t^2-1}$ , 于是

$$\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)},$$

其中

$$\int \frac{1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

因此

$$\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(1+t)} + C.$$

## 定积分

### 参数积分求导

**Example 5.1.** 设  $f(x)$  连续, 求

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$$

**hints** 对于这种第二类的参数积分, 对于有比较简洁的结果的, 首先应该换元试试, 令  $u = x^2 - t^2$ , 那么即有

$$-\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2).$$

### 奇怪的定积分

**Example 5.2.** 设  $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ , 求  $\int_0^\pi f(x) dx$ .

**hints** 可以用分部积分

$$\int_0^\pi f(x) dx = x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

### 不太好积的带三角函数的积分

**Example 5.3.** 求

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

**hints** 如果不能一眼看出来

$$I = - \int_0^\pi x d \arctan \cos x = - x \arctan \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \arctan \cos x.$$

后面这个积分, 令  $u = \pi - x$ , 则可以得到

$$\int_0^\pi \arctan \cos x = - \int_0^\pi \arctan \cos x,$$

即它是等于零的.

**尝试方法** 我们要充分利用三角函数的性质, 一开始我们令  $u = \pi - x$ , 则有

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} \rightarrow 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \arctan \cos x \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

## 待定系数收敛反常积分

**Example 5.4.** 求满足下式的  $a, b$

$$\int_1^{+\infty} \left[ \frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right] dx = 1$$

hints 首先化简一下

$$\int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x + a}{2x^2 + ax} dx$$

若上述积分收敛, 则  $b = a$ . 于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{2x^2 + ax} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{2x + a} dx = \ln \frac{x}{2x + a} \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2 + a} = 1 \Rightarrow a = 2e - 2.$$

## 化为极限形式

**Example 5.5.** 求

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$$

hints 考虑部分分式

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{x}{1 + e^{-x}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} dx$$

你会发现第一个积分是发散的, 这里我们考虑把它转换为极限的形式

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{1 + e^{-x}} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{1}{1 + e^{-x}} dx \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1 + e^{-a}} - \int_0^a \frac{e^x}{1 + e^x} dx \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1 + e^{-a}} - \ln(1 + e^a) + \ln 2 \right]$$

其中

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{a}{1 + e^{-a}} - \ln(1 + e^a) \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-a}} (a - (1 + e^{-a}) \ln(1 + e^a)) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln e^a - \ln(1 + e^a) - \frac{\ln(1 + e^a)}{e^a} = 0$$

因此原积分等于  $\ln 2$ .

## 反常积分

### 含有 $e^x$ 的被积函数

**Example 6.1.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ax} dx \quad (\mu, a > 0).$$

**hints** 比较审敛法, 取任意的  $\lambda > 1$ , 即  $\frac{1}{x^\lambda}$  是收敛的, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu e^{-ax}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\mu+\lambda}}{e^{ax}} = 0,$$

因此原无穷积分也是收敛的.

**Example 6.2.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

**hints** 这里需要注意两个上下积分限都需要考察, 我们可以将上述积分划分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int_A^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},$$

其中  $A \in (0, +\infty)$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 取  $0 < \lambda < 1$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{x^{1+\lambda}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = 0,$$

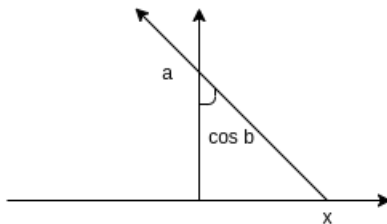
即积分  $\int_0^A \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$  是收敛的. 当  $x \rightarrow \infty$  时, 取  $\lambda > 1$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}}{\frac{1}{x}^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \cdot x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} = 0,$$

### 定积分的应用

**Example 6.3.** 设无穷长直线  $L$  的线密度为 1, 引力常数为  $k$ , 则  $L$  对距直接为  $a$  的单位质点.

**hints** 首先得知道万有引力公式  $F = k \frac{Mm}{r^2}$ . 再考虑直线上某个点对给定单位质点的引力, 然后考虑这些引力的合成. 示意图为



设  $L$  所在的直线为  $x$  轴,  $y$  轴过给定的单位质点. 由示意图这些力的合成一定是在  $y$  轴上的, 关于  $F_y$  的微分为

$$dF_y = k \frac{kdx}{a^2 + x^2} \cos b = \frac{kadx}{(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

因此

$$F_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kadx}{(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = 2ka \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令  $x = a \tan u$ , 则有

$$F_y = 2ka \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sec^2 u}{a^3 \sec^3} du = \frac{2k}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2k}{a}$$

## 待定参数

**Example 6.4.** 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$$

收敛, 求  $a, b$ .

[hints](#) 这道题还是用柯西审敛法, 注意要同时考虑积分上下限. 当  $x \rightarrow +\infty$ , 那么就要和  $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda > 1)$  比较, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda-(a+b)}}{(\frac{1}{x} + 1)^b},$$

其中分母是趋于 0, 为保证分子不趋于无穷, 则需要  $\lambda < (a+b)$ , 即  $a+b > 1$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 那么就要和  $\frac{1}{x^\lambda} (\lambda < 1)$  比较, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{1}{x^{a-\lambda}(1+x)^b},$$

其中  $(1+x)^b \rightarrow 0$ , 则  $a < \lambda$ , 即  $a < 1$ .

## 分离积分

**Example 6.5.** 讨论下述积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

其中后面这个积分在柯西判别法很容易确定是收敛的 (实际上可以用狄利克雷判别法), 因为总是满足

$$f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

那么前面这个积分可以做一下变换

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx$$

这是因为  $\frac{\sin x}{x}$  在  $(0, \frac{\pi}{2}]$  上是单调减的, 这一点求两次导即可知道, 所以前面这个积分是发散的. 因此整个积分是发散的.

## 求值

**Example 6.6.** 求

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

方法 1 设  $u = \frac{1}{x}$ , 则有

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$$

把这个积分和原积分加起来

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2} dx$$

这里设  $t = x - \frac{1}{x}$ , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

因此  $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

方法 2 可以考虑直接部分分式即, 其中分母可以分解为

$$1+x^4 = 1+2x^2+x^4-2x^2 = (1+x^2)^2 - 2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

因此

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

即

$$\frac{2\sqrt{2}}{1+x^2} = \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

原积分可以写作

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x+\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} - \frac{x-\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} dx$$

再继续拆

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} - \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} dx$$

第一项和第三项需要换元一下，令  $u = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2+\frac{1}{2}} du + \arctan \sqrt{2} \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2+\frac{1}{2}} du + \arctan \sqrt{2} \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} \right]$$

其中

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2+\frac{1}{2}} du - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{u}{u^2+\frac{1}{2}} du = - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u}{u^2+\frac{1}{2}} du = 0.$$

因此

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$



## 微分方程

### 线性微分方程解的结构

**Example 7.1.** 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$ ,  $y_2 = e^x - xe^{2x}$ ,  $y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 求该方程的通解.

**hints** 这题考察线性微分方程解结构的一个非常典型的题, 这里用到两个非齐次方程的解的差是齐次方程的解, 则

$$y_2 - y_3 = e^x, y_1 - y_3 = e^{3x}.$$

它们是两个线性无关的解, 因此它们是原方程导出的齐次方程的通解, 我们再求一个特解即可, 即  $y_1 - e^{3x} = -xe^{2x}$ , 则原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}.$$

### 带积分的微分方程

**Example 7.2.** 设函数  $f(x)$  连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求  $f(x)$ .

**hints** 尝试去掉积分符号, 去导前做一些变换,

$$\begin{aligned}\int_0^x f(u)du &= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1 \\ f(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x}\end{aligned}$$

注意这里有  $f(0) = -1$  (要善于发现这样的条件), 设  $y = \int_0^x f(t)dt$ , 于是

$$y' - y = -e^{-x},$$

根据一阶线性方程的通解我们有

$$y = Ce^x + \frac{e^{-x}}{2},$$

则  $f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$ . 由于  $f(0) = -1$ , 因此  $C = -\frac{1}{2}$ , 最终  $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

## 该死的绝对值

**Annotation 7.3.** 有时候的积分结果带  $\ln|f(x)|$ ，这个时候在考虑要不要去绝对值的时候，可以采取的下述的手法

1. 如果提供了某个点  $(x_0, y_0)$ ，那么这个时候我们可以考虑去掉绝对值保留  $x_0$  所在的定义域，因为通解不需要表示全部的解，只要保证我们最终我们可以根据这个特殊的点确定某个特解即可！
2. 如果没有提供某个点，那么这个时候我们可以有条件的去掉绝对值
  - (a) 若是可分离变量方程，且里面没有无理数因子，我们可以把绝对值去掉
  - (b) 若是一阶线性方程，在对  $P(x)$  积分结果中出现  $\ln|f(x)|$ ，根据  $P(x)$  中的是否有无理数因子或者分母为偶数的因子，如果有，那么这个绝对值不要去掉，最后分类讨论；若没有，可以直接去绝对值。
3. 拿不准的时候，就彻底不去，直接开讨论就行。

**Example 7.4.** 求  $y(1) = 0$ ，且满足下述方程的  $y$

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

**hints** 显然这个是一个齐次微分方程，令  $u = \frac{y}{x}$ ，于是有

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan u = \ln|x| + C$$

题目中已经给定了一个点  $(1, 0)$ ，那么此时我们可以去掉绝对值，只考虑  $x > 0$  的情况，即有

$$u = \tan(\ln x + C) \Rightarrow y = x \tan(\ln x + C).$$

最后带入特殊点，得到  $C = 0$ ，最终有  $y = x \tan(\ln x + C)$

## 改变自变量

**Example 7.5.** 求下述方程的通解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^4}$$

**hints** 当且形式根本找不到方法求，那么我们考虑求以  $y$  为自变量的  $x = f(y)$  形式的函数，于是有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^4}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^3$$

即是关于自变量  $y$  一个线性方程。此时就可以直接用通项公式有

$$x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$$

## 多元函数

### 带不等式的条件极值

**Example 8.1.** 求函数  $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$  在椭圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上的最大值和最小值.

**hints** 这个不等式的取值范围是一个闭连通域, 我们只需要分别考虑它里面点构成的区域和边界上的点即可. 在这个椭圆里面唯一的驻点是  $(0, 0)$ , 其对应的函数值为 2; 在椭圆上的点满足  $y = 4 - 4^x$ , 则  $f(x)$  可以改写为

$$z = x^2 - (4 - 4^x) + 22 = 5x^2 - 2,$$

其中  $-1 \leq x \leq 1$ , 那么其最大值为 3, 最小值为 -2. 三个驻点比较得出最终结果.

### 可微定义

**Example 8.2.** 设连续函数  $z = f(x, y)$  满足

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0,$$

求  $dz|_{(0,1)}$ .

**hints** 显然要从定义出发, 目标是整理出来定义的形式, 先求  $f(0, 1)$ , 由上式极限存在, 可以得到

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) = 2x - y + 2,$$

再由  $f(x, y)$  连续, 上述等式左边就等于  $f(0, 1)$ , 等式右边是个有限极限, 即  $f(0, 1) = 1$ . 我们再重新整理一下

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - f(0, 1) - 2x + (y - 1)}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0,$$

这就是  $f(x)$  在点  $(0, 1)$  处可微定义, 即  $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$ .

## 二重积分

### 交换次序更好积分

**Example 9.1.** 求积分

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx.$$

**hints** 明显这个被积函数对  $dx$  是不好积的, 于是考虑交换积分次序. 交换次序可以考虑画图来做, 于是有

$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln \cos x \Big|_0^1 = -\ln \cos x.$$

**Example 9.2.** 设  $f(x)$  为连续函数, 定义

$$F(x) = \int_1^x dv \int_v^x f(u) du, x > 1,$$

求  $F'(x)$ .

**hints** 二重积分求导, 这显然直接求不了. 考虑先计算这个二重积分, 现在的积分次序导致我们无法对  $\int f(u) du$  处理, 所以先交换次序. 有

$$F(x) = \int_1^x du \int_1^u f(u) dv = \int_1^x (u-1)f(u) du.$$

被积函数是连续函数的变上限积分, 它的导数为  $(x-1)f(x)$ .

### 化极坐标

**Example 9.3.** 求积分

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

**hints** 被积函数出现  $x^2+y^2$ , 考虑化极坐标. 首先把极坐标方程写出来, 确定  $\theta$  变限在  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , 当固定一点  $x$  时, 此时  $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ , 那么考虑这个积分域的边界就有

$$x^2+y^2=\rho^2=2\rho\cos\theta\Rightarrow\rho=2\cos\theta.$$

于是原积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta) d\sin\theta = \frac{8}{3} \left( \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

## 三重积分

直角坐标

柱坐标

球坐标

## 多元积分的应用

### 第一类曲线积分

**Annotation 11.1.** 第一类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
3. 确定是否为特殊曲线做简化计算的操作, 例如关于坐标轴等价, 在曲线上的自变量等价;
4. 若是曲线积分化定积分. 这一过程要注意弧长微分替换积分变量的过程, 而提到的参数方程的弧长微分为  $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ .

### 第二类曲线积分

**Annotation 11.2.** 第二类曲线积分的一般解决方法:

1. 确定是平面曲线还是空间曲线;
2. 确定曲线方向;
3. 确定曲线方程的给定形式和自变量的变换范围, 注意无论怎样的曲线方程都是可以看做参数方程的;
4. 确定平面曲线积分是否与路径无关, 常见判定手法 (1  $Pdx+Qdy$  是否是某个二元函数的全微分 (2  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . 若与路径无关考虑, (1 利用原函数直接计算 (2 化简单积分路线, 例如平行于坐标轴, 就化为两个定积分.
5. 确定是否为光滑的平面闭曲线, 若为光滑曲线考虑使用格林公式化二重积分, 注意曲线方向和其围成的区域  $D$  要遵守左手法则, 即绕着曲线的方向绕一圈, 区域  $D$  总是在观察者的左手边. 还需要注意被积函数  $P, Q$  在  $D$  上要有连续的一阶偏导;
6. 确定若不是平面闭曲线, 可以考虑做补线让其变成一个闭曲线, 再使用格林公式, 可能可以简化计算.
7. 确定是否为空间闭曲线, 若是空间闭曲线, 考虑使用斯托克斯公式, 注意曲线方向和曲面的法向量要遵守右手法则.

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

8. 直接计算, 使用公式

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)dt$$

## 第一类曲面积分

**Annotation 11.3.** 第一类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种  $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定是否为特殊的曲面做简化计算，例如关于坐标轴平面对称，在曲面上的自变量等价；
3. 直接计算，使用曲面微分的变量替换，需要注意  $x, y$  的区域  $D$  的确定

$$\int \int_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \int \int_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

## 第二类曲面积分

**Annotation 11.4.** 第二类曲面积分的一般计算方法

1. 确定曲面方程，实际上只有一种  $z = f(x, y)$ ，并没有复杂的参数方程，和其自变量变化范围；
2. 确定曲面的方向；
3. 确定曲面是否可以围成一个闭区域，考虑使用高斯公式

$$\int \int_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int \int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

这里曲面需要取外侧方向，如果当且曲面是内侧方向则需要加负号，也需要确定  $P, Q, R$  是否具有一阶连续偏导.

4. 考虑是否可以增加补面围成一个闭区间来使用高斯公式.
5. 直接计算，上述给定是  $z$  关于  $x, y$  方程，那么曲线方向决定了曲面法线和  $z$  轴的夹角余弦值，若余弦值是负的，则需要在下式积分号就带负号

$$\int \int_S f(x, y, z) dx dy = \pm \int \int_{D_{xy}} f(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

这里要注意若给定是  $y$  关于  $x, z$  的方程，这里的余弦值则是看曲面法向量和  $y$  轴的夹角.

## 级数

### 参数收敛

**Example 12.1.** 讨论下列级数收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$$

hints 展开  $\ln n!$ , 有

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < n \ln n < n^{1+\beta},$$

在  $n$  足够大的时候, 对任何  $\beta > 0$  都是成立. 因此

$$\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} < \frac{n^{1+\beta}}{n^{\alpha}} = n^{1+\beta-\alpha},$$

因此取  $\alpha > 2$  时, 存在  $\beta$  使得

$$\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n} < \frac{n^{1+\beta}}{n^{\alpha}}.$$

即原级数在  $\alpha > 2$  是收敛的. 同理若  $\alpha \leq 2$  时, 是存在  $\beta$  使得  $1 + \beta - \alpha > -1$  的, 此时是无法判定其是否收敛的。

### 带-1 的幂次

**Example 12.2.** 判断下述级数的收敛性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\ln n}$$

hints 这个级数奇数时为零, 因此我们写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln 2n}$$

这个级数显然是发散的, 因为在  $n$  足够大时  $\frac{2}{\ln 2n} \geq \frac{1}{n}$ .

### 不标准的幂级数

**Example 12.3.** 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$$

的收敛半径.



**hints** 这是一个不标准的幂级数，无法直接用结论。所以先化标准的形式  $a_n x^n$ 。先考虑积分，消掉指数的常数，即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} x^{2n}.$$

再令  $u = x^2$ ，求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2^n + (-3)^n)} u^n$  的收敛半径，根据结论有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

因此其收敛半径为 3，所以  $|x| < \sqrt{3}$ ，即原级数的收敛半径为  $\sqrt{3}$ 。

## 利用傅里叶公式求和

**Example 12.4.** 求下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$$

**hints** 考虑  $s(x) = \frac{x}{\pi}$  在  $(-\pi, \pi)$  上的傅里叶级数，它是一个奇函数因此

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin nx dx \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}.$$

显然有

$$s(1) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = \frac{1}{\pi},$$

因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$

## tricks

### 一些有趣的不等式

**Proposition 13.1.**

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \quad a > 1.$$

*hints* 伯努利不等式.

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx, \quad n \geq 0, x \leq -1.$$

使得  $(1 + x) = a^{\frac{1}{n}}$ , 即可得到上式.

### Stirling 公式

**Proposition 13.2.**

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n).$$

经常用于拆解  $\ln n!$  有奇效.

### 高数积分

**Proposition 13.3.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$