

考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 21 日

目录

1	行列式	2
1.1	定义	2
1.2	化行阶梯形	3
1.3	按一行展开	4
1.4	按多行展开	4
1.5	特殊矩阵	4
1.6	数学归纳法	4
1.7	递推式	6
1.8	Laplace 展开	7
2	向量空间	8
2.1	向量运算下的线性性质判定	8
3	方程组的解	9
3.1	方程组性质	9
3.2	给定方程组解的情况	9
3.3	带参数的方程组解的情况	9
4	矩阵相似	9
4.1	相似判定	9
4.2	对角化判定	10
5	二次型	10
5.1	正定性的判定	10

行列式

定义

Annotation 1.1. 这类题特征

1. 按照行列式的完全展开式来计算某种特殊的矩阵
2. 给定某个具体的行列式值的基础上, 通过行列式的性质来计算行列式.

Example 1.2. 证明: 如果在 n 阶行列式中, 第 i_1, i_2, \dots, i_k 行分别与第 j_1, j_2, \dots, j_l 列交叉位置的元素都是 0, 并且 $k + l > n$, 那么这个行列式的值等于 0.

证明. 按照行列式的完全展开式, 每一项都必须包含第 i_1, i_2, \dots, i_k 行中位于不用列的元素, 则有 k 个元素. 由已知的条件, 第 i_1, i_2, \dots, i_k 行只与 j_1, j_2, \dots, j_l 之外的 $n - l$ 元素可能不为零, 但是 $k > n - l$, 说明每一项必取到 0, 因此行列式为 0. \square

Example 1.3. 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + a_1 & c_1 + b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + a_2 & c_2 + b_2 \\ a_3 + c_3 & b_3 + a_3 & c_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Example 1.4. 行列式最大值 求元素为 1 和 0 的三阶行列式可取的最大值.

hints 从完全展开式我们应使得带正号的项尽可能的都是 1, 而带负号项尽可能是 0

1. 若 3 个正项都是 1, 那么此时行列式等于 0;
2. 若 2 个正项是 1, 此时任取一个 2 个项是正的行列式其行列式均等于 2, 且其他负项也都是 0, 例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

综上最大值肯定就是 2.

Example 1.5. 设 $n \geq 2$, 证明: 如果 n 阶矩阵 A 的元素为 1 或者 -1 , 则 $|A|$ 为偶数.

hints 这个证明按行展开可能更简单

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

其中三个代数余子式都是二阶行列式的正值或者负值，那么我们来看一下元素为 1 或者 -1 的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

这里一共有 4 种可能的取值，由 $b_{11}b_{22} = \pm 1, b_{12}b_{21} = \pm 1$ 决定，经过计算该二阶行列式取值可能为 0, 2，因此 $|A|$ 是由 3 个偶数相加得到的，那么 $|A|$ 也一定是偶数。

Example 1.6. 求元素为 1 或者 -1 的三阶行列式的最大值。

hints 从完全展开式出发，三阶行列式有 6 项，其中每一项只可能为 -1 和 1。再有前面证明，我们知道这样的三阶行列式的值只能是偶数，那么最大的偶数就是 6 项全为 1 加起来为 6，即

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33} &= 1, a_{12}a_{23}a_{31} = 1, a_{13}a_{21}a_{32} = 1 \\ -a_{13}a_{22}a_{31} &= 1, -a_{12}a_{21}a_{33} = 1, -a_{11}a_{23}a_{32} = 1 \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33}a_{12}a_{23}a_{31}a_{13}a_{21}a_{32} &= 1 \\ a_{13}a_{22}a_{31}a_{12}a_{21}a_{33}a_{11}a_{23}a_{32} &= -1 \end{aligned}$$

这是矛盾的。因此我们再考虑行列式最大值为 4 的可能，可以找到

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 4$$

那么这样的行列式的最大值为 4。

Example 1.7. 设 $n \leq 3$ ，证明：元素为 1 或者 -1 的 n 阶行列式的绝对值不超过 $(n-1)!(n-1)$ 。

hints 借助前面的例子做归纳。

Example 1.8. 设 $n \geq 2$ ，证明：元素为 1 或 -1 的 n 阶行列式的值能被 2^{n-1} 整除。

hints 设 $|A|$ 是这样的行列式，首先将第一列上的 (-1) 所在行都提一个 -1 出来

$$|A| = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 1 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 c_{ij} 值可能为 2, -2, 0，因此从第 2 列到第 n 列都是可以提一个因子 2 出来，最终就可以凑成 2^{n-1} 。

化行阶梯形

Annotation 1.9. 不是特殊矩阵的第一选择。

按一行展开

Annotation 1.10. 若是可以将某一行或者某一列消去，只留下一个非零元素，按行和按列展开是不错的选择.

Example 1.11. 计算

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

hints 可以考虑把所有列都加到第一列，再按第一列展开

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{(1+n)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{(1+n)n}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

同样上述矩阵也是所有列加到第一列，最终有 $|A| = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{2}$.

按多行展开

Annotation 1.12. 好像没有直接使用拉普拉斯定理的习惯，比较特殊的分块矩阵可以考虑.

特殊矩阵

Annotation 1.13. 常见的特殊矩阵<https://www.bilibili.com/read/cv266516>

1. 范德蒙德行列式
2. 爪型行列式

数学归纳法

Annotation 1.14. 通常证明手法也是按行或者列展开.

Example 1.15. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

证明. 当 $n = 2$ 时, 有

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1x + a_0$$

假设对于上述形式的 $n - 1$ 阶行列式, 有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-2} \end{vmatrix} = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

那么 n 阶行列式, 把它按第一行展开, 有

$$\begin{aligned} D_n &= x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x + a_1) + (-1)^{1+n} a_0 (-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \end{aligned}$$

□

递推式

Example 1.16. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

hints 显然 $D_1 = 2$. 将 D_n 按第一列展开, 则有

$$D_n = 2D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

这也意味着 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$, 可以马上推出 $D_n - D_{n-1} = D_2 - D_1 = 1$, 即该行列式是一个等差数列 $D_n = 2 + (n-1) = n+1$.

Example 1.17. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

其中 $a \neq b$.

hints 还是按第一列展开

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

注意其上最后一个等式成立的条件是 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$, 那么推出

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \Rightarrow D_n - aD_{n-1} = (D_2 - aD_1)b^{n-2} \\ D_n - bD_{n-1} &= a(D_{n-1} - bD_{n-2}) \Rightarrow D_n - bD_{n-1} = (D_2 - bD_1)a^{n-2} \end{aligned}$$

而 $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + ab + b^2$. 因此

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b^n \\ D_n - bD_{n-1} &= a^n \end{aligned}$$

所以 $D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$.

当 $a = 0$ 时, $D_n = b^n$; 当 $b = 0$ 时, $D_n = a^n$.

Laplace 展开

Example 1.18. 计算下述 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & \ddots & & & \ddots \\ b & & & & a \end{vmatrix}$$

[hints](#) 尝试从第一行和最后一行展开, 于是得到

$$\begin{aligned} D_{2n} &= \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \cdot D_{2n-2} \\ &= (a^2 - b^2)D_{2n-2} \end{aligned}$$

而 $D_2 = a^2 - b^2$, 因此 $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$

向量空间

向量运算下的线性性质判定

Example 2.1. 证明: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 那么向量组 $3\alpha_1 - \alpha_2, 5\alpha_2 + 2\alpha_3, 4\alpha_3 - 7\alpha_1$ [hints](#) 直接用线性无关的定义, 即

$$k_1(3\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(5\alpha_2 + 2\alpha_3) + k_3(4\alpha_3 - 7\alpha_1) = \mathbf{0}$$

此时需要证明 $k_1 = k_2 = k_3$, 展开上式

$$(3k_1 - 7k_3)\alpha_1 + (5k_2 - k_1)\alpha_2 + (2k_2 + 4k_3)\alpha_3 = \mathbf{0}.$$

根据已知条件, 于是得到下述方程组

$$\begin{cases} 3k_1 - 7k_3 = 0 \\ 5k_2 - k_1 = 0 \\ 2k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

由此构造系数矩阵, 最后系数矩阵的行列式不为零, 即原方程只有零解, 命题得证.

方程组的解

方程组性质

Example 3.1. 证明: 给定 s 个 n 线性方程组成的线性方程组, 如果该方程组的增广矩阵的第 i 个行向量 α_i 可以由其余行向量线性表出, 即

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s$$

那么将第 i 个方程去掉之后得到的方程组与原方程组通解.

Example 3.2. 设一个 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 证明: H 的任意 s 列都线性无关当且仅当, 齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

的任一非零解的非零分量的数目大于 s .

[hints](#) 必要性 若 H 的任意 s 列都线性无关. 假设上述线性方程存在一个非零解为

$$\eta = (0, \cdots, c_{i_1}, \cdots, c_{i_j}, \cdots)^T.$$

其中 c_{i_1}, \cdots, c_{i_j} 均不为零, 且 $l \leq s$. 则

$$c_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + c_{i_j}\alpha_{i_j} = \mathbf{0},$$

这意味着存在 l 列线性相关, 与前提矛盾, 因此任一非零解的非零分量的数目大于 s

充分性 若 H 的任一非零向量的非零分量的数目大于 s . 假设有 $l \leq s$ 个列向量线性相关

$$k_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + k_{i_j}\alpha_{i_j} = \mathbf{0},$$

那么存在一个非零解, 即

$$\eta = (0, \cdots, k_{i_1}, \cdots, k_{i_j}, \cdots)^T.$$

就是将其他分量扩充为 0 即可, 这样和前提是矛盾的. 因此 H 的任意 s 列都线性无关.

给定方程组解的情况

带参数的方程组解的情况

矩阵相似

相似判定

Proposition 4.1. 常用判定矩阵相似的方法，遇题依次向下使用下述方法.

1. 必要条件: 相似必行列值相等;
2. 必要条件: 特征值相等;
3. 充分条件: 对于都可对角化的矩阵，判定其特征值是否相同;
4. 否命题的充分条件: 一个可对角化，一个不可对角化，则它们不相似;
5. 对于都不可对角的矩阵，同一个特征值的特征子空间的维数相同;
6. 对于都不可对角的矩阵，则对应的特征向量满足: 若 B 对应 λ 的特征向量 λ ，则 A 对应 λ 的特征向量为 $P\alpha$. 这里要求出可逆矩阵 P

对角化判定

Proposition 4.2. 常用判定对角化的方法，遇题依次向下使用下述方法

1. 实对称矩阵一定相似于对角矩阵;
2. 有 n 个不同的特征值，那么一定相似于对角矩阵;
3. n 重特征值对应特征子空间是否为 n 维;

二次型

正定性的判定