考研高数习题集

枫聆

2021 年 9 月 18 日

目录

行列式

定义

Annotation 1.1. 这类题特征

1. 按照行列式的完全展开式来计算某种特殊的矩阵

2. 给定某个具体的行列式值的基础上，通过行列式的性质来计算行列式.

Example 1.2. 证明: 如果在 n 阶行列式中，第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行分别与第 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 列交叉位置的元素都是 0，并且 $k+l>n$，那么这个行列式的值等于 0.

证明. 按照行列式的完全展开式，每一项都必须要包含第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行中位于不用列的元素，则有 k 个元素. 由已知的条件，第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行只与 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 之外的 $n-l$ 元素可能不为零，但是 $k>n-l$，说明每一项必取到 0，因此行列式为 0. □

Example 1.3. 证明

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

化行阶梯形

Annotation 1.4. 不是特殊矩阵的第一选择.

按一行展开

Annotation 1.5. 若是可以将某一行或者某一列消去，只留下一个非零元素，按行和按列展开是不错的选择.

Example 1.6. 计算

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

hints可以考虑把所有列都加到第一列，再按第一列展开

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \frac{(1+n)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{(1+n)n}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

同样上述矩阵也是所有列加到第一列，最终有 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$.

按多行展开

Annotation 1.7. 好像没有直接使用拉普拉斯定理的习惯，比较特殊的分块矩阵可以考虑.

特殊矩阵

Annotation 1.8. 常见的特殊矩阵https://www.bilibili.com/read/cv266516

1. 范德蒙德行列式
2. 爪型行列式

数学归纳法

Annotation 1.9. 通常证明手法也是按行或者列展开.

Example 1.10. 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

证明. 当 $n=2$ 时，有

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_0$$

假设对于上述形式的 $n-1$ 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-2} \end{vmatrix} = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

那么 n 阶行列式，把它按第一行展开，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_n &= x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= x(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1)+(-1)^{1+n}a_0(-1)^{n-1} \\
&= x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0
\end{aligned}$$

□

递推式

Example 1.11. 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

hints 显然 $\boldsymbol{D}_1 = 2$. 将 $\boldsymbol{D}_n$ 按第一列展开，则有

$$\boldsymbol{D}_n = 2\boldsymbol{D}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{D}_{n-1} - \boldsymbol{D}_{n-2}$$

这也意味着 $\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}_{n-1} = \boldsymbol{D}_{n-1} - \boldsymbol{D}_{n-2}$，可以马上推出 $\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}_{n-1} = \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1 = 1$，即该行列式是一个等差数列 $D_n = 2 + (n-1) = n+1$.

Example 1.12. 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

其中 $a \neq b$.

hints 还是按第一列展开

$$\boldsymbol{D}_n = (a+b)\boldsymbol{D}_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\boldsymbol{D}_{n-1} - ab\boldsymbol{D}_{n-2}.$$

注意其上最后一个等式成立的条件是 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$，那么推出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = b(\boldsymbol{D}_{n-1} - a\boldsymbol{D}_{n-2}) \Rightarrow \boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = (\boldsymbol{D}_2 - a\boldsymbol{D}_1)b^{n-2} \\ \boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = a(\boldsymbol{D}_{n-1} - b\boldsymbol{D}_{n-2}) \Rightarrow \boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = (\boldsymbol{D}_2 - b\boldsymbol{D}_1)a^{n-2} \end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{D}_1 = a+b$，$\boldsymbol{D}_2 = a^2+ab+b^2$. 因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = b^n \\ \boldsymbol{D}_n - b\boldsymbol{D}_{n-1} = a^n \end{aligned}$$

所以 $D_n = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

当 $a = 0$ 时，$\boldsymbol{D}_n = b^n$; 当 $b = 0$ 时，$\boldsymbol{D}_n = a^n$.

矩阵相似

相似判定

Proposition 2.1. 常用判定矩阵相似的方法，遇题依次向下使用下述方法.

1. 必要条件: 相似必行列值相等;
2. 必要条件: 特征值相等;

3. 充分条件: 对于都可对角化的矩阵，判定其特征值是否相同;
4. 否命题的充分条件: 一个可对角化，一个不可对角化，则它们不相似;
5. 对于都不可对角的矩阵，同一个特征值的特征子空间的维数相同;
6. 对于都不可对角的矩阵，则对应的特征向量满足: 若 $\boldsymbol{B}$ 对应 λ 的特征向量 λ，则 $\boldsymbol{A}$ 对应 λ 的特征向量为 $P\alpha$. 这里需要求出可逆矩阵 P

对角化判定

Proposition 2.2. 常用判定对角化的方法，遇题依次向下使用下述方法

1. 实对称矩阵一定相似于对角矩阵;
2. 有 n 个不同的特征值，那么一定相似于对角矩阵;
3. n 重特征值对应特征子空间是否为 n 维;

二次型

正定性的判定