

Fourier Analysis

枫聆

2021 年 2 月 2 日

目录

1	The Genesis of Fourier Analysis	2
2	motivation	2
3	傅里叶级数的基本性质	4
3.1	欧拉公式	4
3.2	黎曼可积	4
3.3	Function on the circle	5
3.4	主要的定义	5
3.5	Convergence of Fourier Series	6
3.6	Uniqueness of Fourier series	7

The Genesis of Fourier Analysis

motivation

我们来问一个非常基础的问题: 给定 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(f(0) = f(\pi))$, 我们能否找到系数 A_m , 使得下面等式成立?

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$$

刚遇到这个问题, 你会发现有点莫名奇妙的意思. 可能会想为什么会问这个问题? 其实我现在也不知道... 等学的过程中发现了再告诉你. 回到正题, 这个问题是后面学习 fourier analysis 的比较重要的东西. 我们两边同乘 $\sin nx$, 然后再积分.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx \right) \sin nx dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = A_n \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

这里用到了一个 fact 即

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

这个 fact 左边可以写成:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)}{2}.$$

在这里 m, n 都非负, 所以只需要考虑 $m = n$. $\cos(mx + nx)$ 在 $[0, \pi]$ 上积分为 0. 因此

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx.$$

A_n 表示 n^{th} Fourier sine coefficient of f . 如果 f 刚好是一个奇函数函数则我们可以把定义域从 $[0, \pi]$ 扩展到更一般地 $[-\pi, \pi]$ 上. 类似我们可能会想如果 $[-\pi, \pi]$ 上一个偶函数 g , 它是否可以表示成 \cos 无穷级数呢?

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \cos mx.$$

更一般地, 任意的函数 F 在 $[-\pi, \pi]$ 上都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

$$F(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2} + \frac{F(x) + F(-x)}{2}.$$

让 $f(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2}$ 和 $g(x) = \frac{F(x)+F(-x)}{2}$. 这时候我们可能会问 F 能否写成下面的形式.

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx + \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \cos mx.$$

这里我们再使用欧拉公式简化一下.

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}.$$

注意这里的负号, 这是因为 $\sin x = \frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}$ 和 $\cos x = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}$ 这两个东西在这. 类似地, 我可以用前面方法两边同时乘上一个 e^{-inx} , 再积分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \right) e^{-inx} dx.$$

这里同样可以用一个 fact.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ 1 & \text{if } n = m \end{cases}$$

因此我们可以得到 a_n .

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx.$$

这个 a_n 就是所谓的第 n 个 F 的傅里叶系数. 所以我们的问题来了: 给定一个 $[-\pi, \pi]$ 上一个 reasonable function $F(x)$. 然后用上面方法构造一系列系数, 那么下面的等式是否成立呢?

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$$

Joseph Fourier 是第一个相信 “任意” 的函数 F 都可以被表示成上述的级数. 也就是说他相信任意的函数都可以表示成 $\cos sin mx$ 和 $\cos nx$ 的线性组合 (有可能是无限个). 对此的第一个证明是 Dirichlet.

傅里叶级数的基本性质

欧拉公式

频繁的出现，总会忘记它的堆导，不如一开始就记录下来. 欧拉最早是通过 $e^x, \sin x, \cos x$ 的泰勒展开式观察出来的欧拉公式

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots\end{aligned}$$

把 $x = i\theta$ 带入 e^x 的泰勒展开式.

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}\tag{1}$$

简单而优雅, $e^{i\theta}$ 是一个圆周运动.

黎曼可积

Definition 3.1. 定义在 $[O, L]$ 上实数函数 f , 如果满足 $f(x)$ 有界, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $[0, L]$ 上子划分 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$, 让 \mathcal{U} 和 \mathcal{L} 分别表示在这个子划分上的 upper and lower sums of f .

$$\mathcal{U} = \sum_{j=1}^N \left[\sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \right] (x_j - x_{j-1}).$$

and

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \left[\inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \right] (x_j - x_{j-1}).$$

使得 $\mathcal{U} - \mathcal{L} < \varepsilon$, 则称这个函数 f 黎曼可积 (Riemann integrable).

直觉上只要如果 f 黎曼可积, 只要划分的足够细, 总能满足上述条件.

Example 3.2. 定义在 $[0, 1]$ 上函数.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \text{ is odd,} \\ 0 & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \text{ is even,} \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

虽然这个 f 在 $x = \frac{1}{n}$ 和 0 上并不是连续的, 但是这个 f 是黎曼可积. 只要划分足够细, 覆盖 $\frac{1}{n}$ 和 0 的子区间就足够小, 对应的 upper sum 和 lower sum 的差值就越小.

Function on the circle

有一个周期为 2π 的周期函数和定义在单位圆上的函数之间非常自然的关系式.

$$f(\theta) = F(e^{i\theta}).$$

单位圆上的点用 $e^{i\theta}$ 表示. where θ is a real number that is unique up to integer multiples of 2π (这句话我不明白 up to 是什么意思? 可能是说 θ 和 $\theta + 2k\pi$ 是等价呢?) 其中 F 是定义在单位圆上的函数. 然后用每个 δ 作为定义域, 构造一个函数 f , 可以看出来 f 是 \mathbb{R} 上周期为 2π 的周期函数. 因为 $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$.

它们两者之间会都会保留比较好的性质, 例如如果 f 在长度为 2π 区间上可积则 F 也同样在单位圆上可积. 连续, 可微也是相同.

主要的定义

开始正式的学习 fourier analysis, 首先给出 fourier series 的准确定义.

Definition 3.3. 给定 f 在长度为 L 的区间 $[a, b]$ ($L = b - a$) 上可积. 则 f 的第 n 项的 fourier coefficient 定义为

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

f 的 fourier series 表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

为什么这里的 L 被放到了系数上? 相对于把周期放缩到了 L . 这样做的目的, 我其实还不知道为什么? 难道是为了把 $f(x)$ 作为周期为 L 的周期函数扩展到整个 \mathbb{R} 上?

如果 f 在 $[-\pi, \pi]$ 可积, 所对应的 fourier coefficient 可以写的更加简洁.

$$\hat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

完整的 fourier series 为.

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Convergence of Fourier Series

fourier series 属于三角级数的一种. 如果三角级数只有有限多项, 则称为一个三角多项式, 其最高次项 n 的为其系数 (degree). $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ 是一个标准的 fourier series, 有限多项就是指当 $n > |k|$ 时 $c_n = 0$, 这个 $|k|$ 就表示当前的三角多项式的系数.

Definition 3.4. fourier series 的部分和 (partial sum) 表示为.

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

其中 N 是一个正整数.

Example 3.5. 狄利克雷核 N^{th} Dirichlet kernel. $x \in [-\pi, \pi]$.

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

注意这里的 fourier coefficient $a_n = 1$ if $n \leq N$ and $a_n = 0$ otherwise. 可以推出更简洁的式子, 定义 $\omega = e^{ix}$. $D_N(x)$ 可以分解成两个 partial sum.

$$\sum_0^N \omega^n \text{ and } \sum_{-N}^{-1} \omega^n$$

分别计算这个部分可以得到

$$\frac{1 - \omega^{N+1}}{1 - \omega} \text{ and } \frac{\omega^{-N} - 1}{1 - \omega}$$

它们的和为

$$\frac{\omega^{-N} - \omega^{N+1}}{1 - \omega} = \frac{\omega^{-N-\frac{1}{2}} - \omega^{N+\frac{1}{2}}}{\omega^{-\frac{1}{2}} - \omega^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}.$$

Example 3.6. 泊松核 Poisson kernel. $\theta \in [-\pi, \pi]$ and $0 \leq r \leq 1$.

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

好吧关于 fourier series 收敛的主题没有那么简单, 至少在这里还没什么可记录的...

Uniqueness of Fourier series

假设 fourier series 在某种合适的 sense 下收敛, 现在再问一个问题, 一个函数是否可以被其对应的 fourier series 唯一确定呢? 也就是现在 f 和 g 有相同的 fourier series, 那么 f 和 g 是不是相同的呢? 这个问题有可以转换为如果 $\hat{f}(n) = 0$ 对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 则 $f = 0$. 这个命题不能直接下结论, 因为如果两个函数只在有限多个不同点上函数值不一样, 则它们的黎曼积分还是一样的, 所以算出来的 fourier coefficient 都是对应都是一样的. 也就是如果两个只有有限多个点上函数值不同的函数, 它们的 fourier series 是相同的. 当然了也有一些非常 positive result.

Theorem 3.7. Suppose that f is an integrable function on the circle with $\hat{f}(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Then $f(\theta_0) = 0$ whenever f is continuous at the point θ_0 .

证明. 这个证明可能需要花一点点时间去感受. 假设在满足上述前提下 $f(\theta) \neq 0$. 不妨设 (without loss of generality) 设 $\theta = 0$, $f(\theta) > 0$. 接下来的策略就是构造一系列波峰在 $\theta = 0$ 处的三角多项式 $\{p_k\}$, 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\int p_k(\theta)f(\theta)d\theta \rightarrow \infty$. 这将会和我们的前提条件矛盾, 为什么矛盾后面再说.

直接给定 $p(\theta)$ 吧.

$$p(\theta) = \epsilon + \cos \theta.$$

自然地, 对应的 $p_k(\theta)$ 为

$$p_k(\theta) = (\epsilon + \cos \theta)^k.$$

三角级数就是 \cos 和 \sin 的线性组合再加上一个常数. 这一点要理解! 我们要使得 $p(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 时大于 1 才行, 这样在 $k \rightarrow \infty$ 时, $p_k(\theta)$ 才能趋于 ∞ .

f 在 $\theta = 0$ 处连续, 我们可以找到一个 $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$, 使得当 $|\theta| < \delta$ 时, $f(\theta) > \frac{f(0)}{2}$. in fact.

$$|f(0) - f(\delta)| < f(\delta)$$

这是根据 ε - δ 连续的定义让 $\varepsilon = f(\delta)$. 然后把 $p(\theta)$ 中的 ϵ 取的足够小, 多小呢? 让 $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ 时 $|p(\theta)| \leq |1 - \frac{\epsilon}{2}|$. in fact.

$$\begin{aligned} |\epsilon + \cos \theta| &< 1 - \frac{\epsilon}{2} \\ -\frac{\epsilon}{2} - 1 &< \cos \theta < 1 - \frac{3\epsilon}{2} \end{aligned}$$

因为 $\delta > 0$, 则 $\cos \delta < 1$. 所以这样的 $\epsilon < \frac{2}{3}(1 - \cos \delta)$ 是可以取到的. 搞了半天取了一个 $p(\theta) < 0$, 不急接着来. 我们可以再取一个正数 $\eta < \delta$, 可以使得当 $|\theta| < \eta$ 时 $p(\theta) \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}$. in fact.

$$\cos \theta \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

前面我们有了在 $|\theta| > 0$ 时, $\cos \theta < 1 - \frac{3}{2}\epsilon$. 现在这个 ϵ 是 fixed. 所以 $1 - \frac{\epsilon}{2}$ 也是 fixed. 只要让 η 尽可能的靠近 0, 这也就是也是可以让上面的式子成立的.

所以前置工作都完成了，最终我们找到了一个正整数 η ，现在当 $|\theta| < \eta$ 时，我们都有 $p(\theta) > 0$ 。对应的 $k \rightarrow \infty$ 时，有 $p_k(\theta) \rightarrow \infty$ 。再因为 f 可积，则 f 有界，即对应任意的 θ 有 $|f(\theta)| \leq B$ 。现在我们下面的不等式成立

$$\int_{|\theta| < \eta} f(\theta) p_k(\theta) d\theta \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} (1 + \frac{\epsilon}{2})^k.$$

这里我们可能终于明白最前面 δ 为什么要取得使 $f(\theta) > \frac{f(0)}{2}$ ，因为 $\theta = 0$ 处连续，可以取到周围也有一部分函数值大于 0 的点。前提条件是 $\hat{f} = 0$ ，所以这里必须有 $\int_{|\theta| < \eta} f(\theta) p_k(\theta) d\theta = 0$ ，这是为什么呢？它看起来并不像 fourier coefficient 的表示形式啊？in fact. 我们来看看 $p(\theta)$ 。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) p_1(\theta) d\theta = \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(\theta) d\theta.$$

RHS 的第一个积分其实就是 $\epsilon \hat{f}(0)$ 即 $(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in \cdot 0} d\theta)$ ，所以第一个积分值等于 0。第二个积分需要变换一下

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos \theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(f(\theta) e^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{i\theta} d\theta \right) = \operatorname{Re} \hat{f}(1) = 0.$$

□