Fourier Analysis

枫聆

2021 年 1 月 24 日

目录

The Genesis of Fourier Analysis

傅里叶级数的基本性质

欧拉公式

频繁的出现，总会忘记它的推导，不如一开始就记录下来. 欧拉最早是通过 $e^x, \sin x, \cos x$ 的泰勒展开式观察出来的欧拉公式

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\
sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

把 $x = i\theta$ 带入 e^x 的泰勒展开式.

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}
\tag{1}
$$

简单而优雅，$e^{i\theta}$ 是一个圆周运动.

黎曼可积

Definition 2.1. 定义在 $[O, L]$ 上实数函数 f，如果满足 $f(x)$ 有界，且对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $[0, L]$ 上子划分 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = L$，让 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别表示在这个子划分上的 upper and lower sums of f.

$$
\mathcal{U} = \sum_{j=1}^{N} \left[\sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)\right](x_j - x_{j-1}).
$$

and

$$
\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \left[\inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)\right](x_j - x_{j-1}).
$$

使得 $\mathcal{U} - \mathbb{L} < \varepsilon$.，则称这个函数 f 黎曼可积 (Riemann integrable).

直觉上只要如果 f 黎曼可积，只要划分的足够细，总能满足上述条件.

Example 2.2. 定义在 $[0,1]$ 上函数.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n},\ n \text{ is odd},\\ 0 & \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n},\ n \text{ is even},\\ 0 & x=0.\end{cases} \tag{2}$$

虽然这个 f 在 $x=\frac{1}{n}$ 和 0 上并不是连续的，但是这个 f 是黎曼可积. 只要划分足够细，覆盖 $\frac{1}{n}$ 和 0 的子区间就足够小，对应的 upper sum 和 lower sum 的差值就越小.