Mathematical Analysis

枫聆

2021 年 1 月 18 日

目录

实数

实数连续性

由于在有理数上划分存在一种边界无法确定的情况，即把数轴上所有有理数划分为 $A|A'$, 其中要求 A 中所有的有理数都小于 A' 中的有理数，在 A 中无最大有理数，且 A' 中无最小有理数，这种情况下无法确定划分两者的边界，所以引入了无理数的概念，约定上面这种特殊的划分情况定义了某个无理数的 α，让这个 a 代替缺少的界数，把它插在了 A 里面一切数 a 和 A' 里面一切数 a' 中间。

用上面这种思路来理解有理数也是可以的，对任意一有理数 r 存在两种确定它的划分，还是前面的划分方式即 $a < r$ 在下组 A 中,$a > r$ 在上组 A' 中，而有理数 r 本身可能含于 A 或者 A', 如果在 A 中，即 A 中有最大有理数，反之在 A' 中，则有最小有理数. 为了确定起见，在提及确定有理数 r 的时候，常把其置于固定的一组，即 A 和 A' 任选一个，以后一直用它，在这里取 a 在上组.

实数之间的序关系, 用划分它集合对应的包含关系来描述，在有理数里面已经有这样的性质了，再看一下无理数，定义划分 $A|A'$ 确定无理数 α，划分无理数 $B|B'$ 确定 β, 即对应下述三种关系

1. $\alpha = \beta$，A 和 B 重合，A' 和 B' 重合.
2. $\alpha > \beta$, A 包含 A'.
3. $\alpha < \beta$, A' 包含 A.

还有一个传递关系 $\alpha > \beta, \beta > \gamma$, 则 $\alpha > \gamma$，这些性质都比较容易证明。

Lemma 1.1. *对于不论怎样地两个实数 α 和 β, 其中 $\alpha > \beta$, 恒有一个位于它们中间的有理数 r: $\alpha > r > \beta$.*

证明. 这个性质更强了，两个实数 $(\alpha > \beta)$ 之间不仅有实数，还有有理数。来证明一下，定义 α 对应 $A|A'$ 有理数域上的划分, β 对应 $B|B'$，因为 $\alpha > \beta$，所以有 A 包含 B, 所以可以在 A 上取一点有理数 r 它不含于 B, 于是它属于 B', 使得 $\beta \le r < \alpha$,A 里面没有最大数 (按照前面的统一), 所以把 r 取的大一点就可以把等号去掉. □

开始进攻戴德金基本定理)

Theorem 1.2. *对于实数域内的任一划分 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}'$ 必有产生这划分的实数 β 存在，β 或是下组 $\boldsymbol{A}$ 中最大数，或是上组 $\boldsymbol{A}'$ 中最小数.*

证明. 首先还是先把实数域上的划分规定先拿出来，定义 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 是两个非空集合，每一个实数必落在 $\mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{A}'$ 其中一个里面，且 $\mathbf{A}$ 里面的数都大于 $\mathbf{A}'$ 里面的数.

将 $\mathbf{A}$ 里面的一切有理数记为 A，$\mathbf{A}'$ 里面的一切有理数记为 A'，容易证明这样 $A|A'$ 是一个有理数域上划分，划分确定了一个实数 β. 它应该落在 $\mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{A}'$ 中，假设它落在 $\mathbf{A}$ 上，则它是 $\mathbf{A}$ 中的最大数，假设它不是最大数，则还存在一个 α_0 使得 $\alpha_0 > \beta$, 根据前面的 lemma 两个实数之间又可以确定一个有理数 $\alpha_0 > r > \beta$, 与前提有理数划分的界数矛盾，所以 β 是 $\mathbf{A}$ 中最大数. □

极限论

数列极限

数列，整序傻傻分不清....

Definition 2.1. *若对于每一整数 ε, 不论它怎样小，恒有序号 N, 使在 $n > N$ 时，一切 x_n 的指满足不等式*

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

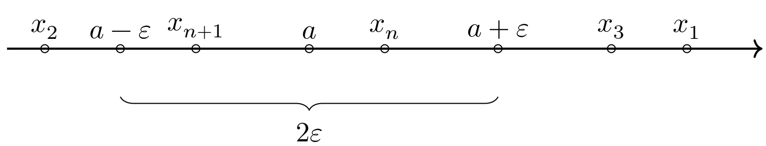
, 则称常数 a 为整序变量 $x = x_n$ 的极限.

a 是整序变量的极限这一事实，记成:

$$\lim x_n = a \text{ 或者 } \lim x = a$$

, 也可以说这个序列收敛于 a

有一个很有趣的几何解释在这里,



以 a 点为中心的线段不论取的多小 (其长度为 2ε), 一切 x_n 点从某点起，必全部落在这线段之内, 这样在线段之外一定只有有限长度个点了, 表示极限的点 a 表示整序变量的数值的点的凝聚中心.

区间套

Lemma 2.2. *给定单调增数列 x_n 和单调减数列 y_n，且恒有*

$$x_n < y_n,$$

若其差 $y_n - x_n$ 趋向于 0，则它们有公共有限极限:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

常用形式是取一个闭区间 $[a, b]$，然后在取一个区间 $[a', b']$ 使得

$$a \le a' < b' \le b$$

，则 $[a',b']$ 是套在 $[a,b]$ 里面的.

设有一区间套的无穷序列

$$[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n],\cdots$$

后一个总是套在前面一个内，并且在 n 增大时这些区间的长度趋向于 0:

$$\lim b_n - a_n = 0.$$

则区间的两端点 a_n 和 b_n 趋于共同极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

收敛原理

Theorem 2.3. *数列变量 x_n 有有限极限的充分必要条件是: 对于每一个数 $\varepsilon > 0$，存在序号 N，使得 $n > N$ 及 $n' > N$，不等式*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

成立.

记录一下用分割法证明其必要性.

证明. 设前提条件都已经满足，在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数 α，若 x_n 从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数 α 归入下组 A，其余的 (即不落在 A 里面的) 一起实数归入上组 A'.

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件，对于任意数 $\varepsilon > 0$ 及其对应的 N. 若 $n > N$ 及 $n' > N$，则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

. 现在我们可以看到每一个数 $x_{n'} - \varepsilon$ 都是小于 x_n 的，所以它归入下组 A. 另一方面 $x_{n'} + \varepsilon$ 都大于 x_n，所以 $x_{n'} + \varepsilon$ 放不进去 A，那它只能归入 A' 了, 所以 A 和 A' 都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数 α 和确定序列 x_n，要么它属于 A 或者属于 A'. 同时 A 中实数都小于 A' 的实数. 如果 $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$，则 x_n 从某一项其也都大于 a'，这样就产生矛盾了. 所以确实产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理，有实数 a 存在它是这两组数之间的界数，即

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

我们注意到当 $n > N$ 时，$x_{n'} - \varepsilon$ 是一个 α, 而 $x_{n'} + \varepsilon$ 是一个 α'. 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \leq a << x_{n'} + \varepsilon$$

. 即 $|x_{n'} - a| \leq \varepsilon$，所以 $\lim x_n = a$. □

Theorem 2.4. *B.Bolzano-C.Weierstrass.* 任何有界数列内恒能选出收敛于有限极限的部分极限.*(有界序列一定有收敛子列)*

一元函数

连续函数的性质

Lemma 3.1. E.Borel. 若闭区间 $[a,b]$ 被一个开区间的无穷系 $\sum = \{\sigma\}$ 所覆盖，则恒能从 $\sum$ 里面选出有限子系

$$\sum^{*} = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n,$$

它同样可以覆盖全区间 $[a,b]$.

证明. H.lebesgue' s. 定义 x^* 为区间 $[a,b]$ 中使得区间 $[a,x^*]$ 能用有限个区间 σ 来覆盖的点. x^* 肯定是存在，因为 a 就是，只要找一个包含 a 的开区间 σ 就行, 这样想的话，又可以找到一群，σ 中接近 a 的都是这样的点.

所以我们的任务是证明 b 也是这样的一个 x^*. 因为一切 $x^* \leq b$, 故亦有

$$\sup\{x^*\} = c \leq b.$$

, 因为 c 也是 $[a,b]$ 中一点, 同样可以找到包含它的开区间 $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$. 但依据上确界的性质，我们还可以找到 x^* 使得 $\alpha < x^* \leq c$. 所以现在把 σ_0 来在加到有限个区间 σ 里面去, 现在就可以覆盖区间 $[a,c]$，也就是说上确界 c 也是 x^*.

而且 c 是不能小于 b 的，如果 c 小于 b, 如果是这样 c 和 β 也可以找到一点 x^*，这与 c 是上确界矛盾的. 这样，必须有 $c = b$，即 b 也是属于 x^*. 所以 $[a,b]$ 可以被有限覆盖. □

为什么 (a,b) 不是紧致的呢? 考虑 $(a + \frac{b-a}{n}, b)$，任何一个 (a,b) 的真子集都可以被它覆盖，但是它不能有限覆盖 (a,b)，因为如果有限就意味着我们能找到一个最大的开区间属于 (a,b)，实际上这样的开区间并不存在. 但是如果我们加上 a 和 b，这种方式已经无法覆盖 a 和 b 两点了.

Compact means small. It is a peculiar kind of small, but at its heart, compactness is a precise way of being small in the mathematical world. The smallness is peculiar because, as in the example of the open and closed intervals $(0,1)$ and $[0,1]$, a set can be made "smaller" (that is, compact) by adding points to it, and it can be made "larger" (non-compact) by taking points away.