

# 凸函数的世界

凸分析和凸优化

枫聆

2021 年 6 月 19 日

## 目录

1	数学优化问题	2
2	基本概念	3
2.1	仿射集 (affine set) . . . . .	3

## 数学优化问题

**Definition 1.1.** 数学优化问题或者说优化问题可以写成如下形式

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{array}$$

其中向量  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  称为问题的优化变量, 函数  $f_0: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  称为目标函数, 函数  $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  被称为约束函数, 常数  $b_i$  称为约束上限或者约束边界.

**Definition 1.2.** 那些满足约束的向量  $z$ , 即使得上述不等式成立的向量, 它们构成一个解集  $Z$ . 这个解集中使得  $f_0(z)$  最小的那些  $x^*$  称为当前优化问题的最优解, 即

$$\forall z \in Z, f_i(z) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ and } f(x^*) \leq f(z).$$

## 基本概念

### 仿射集 (affine set)

**Definition 2.1.** ( $\mathbf{R}^n$  上直线的定义) 对任意两个  $\mathbf{R}^n$  中不同两个  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$ , 形如

$$\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \lambda \in \mathbf{R}$$

的点集被称为过  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的直线.

**Definition 2.2.** 对于  $\mathbf{R}^n$  中的子集  $M$ , 如果对于任意的  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  和  $\lambda \in \mathbf{R}$  都有  $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in M$ , 则称  $M$  为  $\mathbf{R}^n$  中的仿射集(affine set). 相关书与仿射集同义的名词有仿射流形(affine manifold), 仿射变量(affine variety), 线性变量(linear variety) 或者flat(平坦的).