Fourier Analysis

枫聆

2021 年 2 月 3 日

目录

The Genesis of Fourier Analysis

motivation

我们来问一个非常基础的问题: 给定 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(f(0)=f(\pi))$，我们能否找到系数 A_m，使得下面等式成立?

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mx$$

刚遇到这个问题，你会发现有点莫名奇妙的意思. 可能会想为什么会问这个问题? 其实我现在也不知道... 等学的过程中发现了再告诉你. 回到正题，这个问题是后面学习 fourier analysis 的比较重要的东西. 我们两边同乘 $\sin nx$，然后再积分.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx &= \int_0^\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mx\right)\sin nx dx\\ &=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\int_0^\pi \sin mx\sin nx dx = A_n\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

这里用到了一个 fact 即

$$\int_0^\pi \sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0 & \text{if } m\neq m\\ \frac{\pi}{2} & \text{if } m=n\end{cases}$$

这个 fact 左边可以写成:

$$\int_0^\pi\frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}.$$

在这里 m,n 都非负，所以只需要考虑 $m=n$. $cos(mx+nx)$ 在 $[0,\pi]$ 上积分为 0. 因此

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx\sin nx dx.$$

A_n 表示 n^{th} Fourier sine coefficient of f. 如果 f 刚好是一个奇函数函数则我们可以把定义域从 $[0,\pi]$ 扩展到更一般地 $[-\pi,\pi]$ 上. 类似我们可能会想如果 $[-\pi,\pi]$ 上一个偶函数 g，它是否可以表示成 cos 无穷级数呢?

$$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}A'_m\cos mx.$$

更一般地，任意的函数 F 在 $[-\pi,\pi]$ 上都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

$$F(x)=\frac{F(x)-F(-x)}{2}+\frac{F(x)+F(x)}{2}.$$

让 $f(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2}$ 和 $g(x) = \frac{F(x)+F(x)}{2}$. 这时候我们可能会问 F 能否写成下面的形式.

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx + \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \cos mx.$$

这里我们再使用欧拉公式简化一下.

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}.$$

注意这里的负号, 这是因为 $\sin x = \frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}$ 和 $\cos x = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}$ 这两个东西在这. 类似地, 我可以用前面方法两边同时乘上一个 e^{-inx}, 再积分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \right) e^{-inx}dx.$$

这里同样可以用一个 fact.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ 1 & \text{if } n = m \end{cases}$$

因此我们可以得到 a_n.

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx.$$

这个 a_n 就是所谓的第 n 个 F 的傅里叶系数. 所以我们的问题来了: 给定一个 $[-\pi, \pi]$ 上一个 reasonable function $F(x)$. 然后用上面方法构造一系列系数, 那么下面的等式是否成立呢?

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$$

Joseph Fourier 是第一个相信 "任意" 的函数 F 都可以被表示成上述的级数. 也就是说他相信任意的函数都可以表示成 $\cos sinmx$ 和 $\cos nx$ 的线性组合 (有可能是无限个). 对此的第一个证明是 Dirichlet.

傅里叶级数的基本性质

欧拉公式

频繁的出现，总会忘记它的推导，不如一开始就记录下来. 欧拉最早是通过 $e^x, \sin x, \cos x$ 的泰勒展开式观察出来的欧拉公式

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\
sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

把 $x = i\theta$ 带入 e^x 的泰勒展开式.

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned} \tag{1}
$$

简单而优雅，$e^{i\theta}$ 是一个圆周运动.

黎曼可积

Definition 3.1. 定义在 $[O, L]$ 上实数函数 f，如果满足 $f(x)$ 有界，且对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $[0, L]$ 上子划分 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = L$，让 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别表示在这个子划分上的 upper and lower sums of f.

$$
\mathcal{U} = \sum_{j=1}^{N} \left[\sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) \right] (x_j - x_{j-1}).
$$

and

$$
\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \left[\inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) \right] (x_j - x_{j-1}).
$$

使得 $\mathcal{U} - \mathbb{L} < \varepsilon$.，则称这个函数 f 黎曼可积 (Riemann integrable).

直觉上只要如果 f 黎曼可积，只要划分的足够细，总能满足上述条件.

Example 3.2. 定义在 $[0,1]$ 上函数.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},\ n \text{ is odd},\\ 0 & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},\ n \text{ is even},\\ 0 & x=0.\end{cases} \tag{2}$$

虽然这个 f 在 $x=\frac{1}{n}$ 和 0 上并不是连续的，但是这个 f 是黎曼可积. 只要划分足够细，覆盖 $\frac{1}{n}$ 和 0 的子区间就足够小，对应的 upper sum 和 lower sum 的差值就越小.

Function on the circle

有一个周期为 2π 的周期函数和定义在单位元上的函数之间非常自然的关系式.

$$f(\theta)=F(e^{i\theta}).$$

单位圆上的点用 $e^{i\theta}$ 表示. where θ is a real number that is unique up to integer multiples of 2π(这句话我不明白 up to 是什么意思？可能是说 θ 和 $\theta+2k\pi$ 是等价呢？) 其中 F 是定义在单位元上的函数. 然后用每个 δ 作为定义域，构造一个函数 f，可以看出来 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的周期函数. 因为 $f(\theta)=f(\theta+2\pi)$.

它们两者之间会都会保留比较好的性质，例如如果 f 在长度为 2π 区间上可积则 F 也同样在单位圆上可积. 连续，可微也是相同.

主要的定义

开始正式的学习 fourier analysis，首先给出 fourier series 的准确定义.

Definition 3.3. 给定 f 在长度为 L 的区间 $[a,b](L=b-a)$ 上可积. 则 f 的第 n 项的 fourier coefficient 定义为

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{\frac{-2\pi inx}{L}}dx,\ n\in\mathbb{Z}.$$

f 的 fourier series 表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{\frac{2\pi inx}{L}}.$$

为什么这里的 L 被放到了系数上？相对于把周期放缩到了 L. 这样做的目的，我其实还不知道为什么？难道是为了把 $f(x)$ 作为周期为 L 的周期函数扩展到整个 $\mathbb{R}$ 上？

如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 可积，所对应的 fourier coefficient 可以写的更加简洁.

$$\hat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta,\ n \in \mathbb{Z}.$$

完整的 fourier series 为.

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Convergence of Fourier Series

fourier series 属于三角级数的一种. 如果三角级数只有有限多项，则称为一个三角多项式，其最高次项 n 的为其系数 (dergee). $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ 是一个标准的 fourier series，有限多项就是指当 $n > |k|$ 时 $c_n = 0$，这个 $|k|$ 就表示当前的三角多项式的系数.

Definition 3.4. fourier series 的部分和 (partial sum) 表示为.

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

其中 N 是一个正整数.

Example 3.5. 狄利克雷核 N^{th} Dirichlet kernel. $x \in [-\pi, \pi]$.

$$D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx}.$$

注意这里的 fourier coefficient $a_n = 1$ if $n \le N$ and $a_n = 0$ otherwise. 可以推出更简洁的式子，定义 $\omega = e^{ix}$. $D_N(x)$ 可以分解成两个 partial sum.

$$\sum_{0}^{N} \omega^n \text{ and } \sum_{-N}^{-1} \omega^n$$

分别计算这个部分可以得到

$$\frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega} \text{ and } \frac{\omega^{-N}-1}{1-\omega}$$

它们的和为

$$\frac{\omega^{-N}-\omega^{N+1}}{1-\omega} = \frac{\omega^{-N-\frac{1}{2}}-\omega^{N+\frac{1}{2}}}{\omega^{-\frac{1}{2}}-\omega^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}.$$

Example 3.6. 泊松核 Poisson kernel. $\theta \in [-\pi, \pi]$ and $0 \le r \le 1$.

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

好吧关于 fourier series 收敛的主题没有那么简单，至少在这里还没什么可记录的...

Uniqueness of Fourier series

假设 fourier series 在某种合适的 sense 下收敛，现在再问一个问题，一个函数是否可以被其对应的 fourier series 唯一确定呢？也就是现在 f 和 g 有相同的 fourier series，那么 f 和 g 是不是相同的呢？这个问题有可以转换为如果 $\hat{f}(n) = 0$ 对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 成立，则 $f = 0$. 这个命题不能直接下结论，因为如果两个函数只在有限多个不同点上函数值不一样，则它们的黎曼积分还是一样的，所以算出来的 fourier coefficient 都是对应都是一样的. 也就是如果两个只有有限多个点上函数值不同的函数，它们的 fourier series 是相同的. 当然了也有一些非常 positive result.

Theorem 3.7. *Suppose that f is an integrable function on the circle with $f(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Then $f(\theta_0) = 0$ whenever f is continuous at the point θ_0.*

证明. 这个证明可能需要花一点点时间取感受. 假设在满足上述前提下 $f(\theta) \neq 0$. 不妨设 (without loss of generality) 设 $\theta = 0$，$f(\theta) > 0$. 接下来的策略就是构造一系列波峰在 $\theta = 0$ 处的三角多项式 $\{p_k\}$，使得当 $k \to \infty$ 时 $\int p_k(\theta) f(\theta) d\theta \to \infty$.. 这将会和我们的前提条件矛盾，为什么矛盾后面再说.

直接给定 $p(\theta)$ 吧.

$$p(\theta) = \epsilon + \cos\theta.$$

自然地，对应的 $p_k(\theta)$ 为

$$p_k(\theta) = (\epsilon + \cos\theta)^k.$$

三角级数就是 cos 和 sin 的线性组合再加上一个常数. 这一点要理解! 我们要使得 $p(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 时大于 1 才行，这样在 $k \to \infty$ 时，$p_k(\theta)$ 才能趋于 ∞.

f 在 $\theta = 0$ 处连续，我们可以找到一个 $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$，使得当 $|\theta| < \delta$ 时，$f(\theta) > \frac{f(0)}{2}$. in fact.

$$|f(0) - f(\delta)| < f(\delta)$$

这是根据 $\varepsilon - \delta$ 连续的定义让 $\varepsilon = f(\delta)$. 然后把 $p(\theta)$ 中的 ϵ 取的足够小，多小呢? 让 $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ 时 $|p(\theta)| \leq |1 - \frac{\epsilon}{2}|$. in fact.

$$|\epsilon + \cos\theta| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$$
$$-\frac{\epsilon}{2} - 1 < \cos\theta < 1 - \frac{3\epsilon}{2}$$

因为 $\delta > 0$，则 $\cos\delta < 1$. 所以这样的 $\epsilon < \frac{2}{3}(1 - \cos\delta)$ 是可以取到的. 搞了半天取了一个 $p(\theta) < 0$，不急接着来. 我们可以再取一个正数 $\eta < \delta$，可以使得当 $|\theta| < \eta$ 时 $p(\theta) \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}$. in fact.

$$\cos\theta \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

前面我们有了在 $|\theta| > 0$ 时，$\cos\theta < 1 - \frac{3}{2}$. 现在这个 ε 是 fixed. 所以 $1 - \frac{\epsilon}{2}$ 也是 fixed. 只要让 η 尽可能的靠近 0，这也是可以让上面的式子成立的. 注意这里我们是不能直接取 $p(\theta) > 1 + \epsilon$ 的，因为根据 $p(\theta)$ 的定义这是取不到的.

所以前置工作都完成了，最终我们找到了一个正整数 η，现在当 $|\theta| < \eta$ 时，我们都有 $p(\theta) > 0$. 对应的 $k \to \infty$ 时，有 $p_k(\theta) \to \infty$. 现在我们下面的不等式成立

$$\int_{|\theta|<\eta} f(\theta)p_k(\theta)d\theta \geq 2\eta\frac{f(0)}{2}(1+\frac{\epsilon}{2})^k.$$

这里我们可能终于明白最前面 δ 为什么要取得使 $f(\theta) > \frac{f(0)}{2}$，因为 $\theta = 0$ 处连续，可以取到周围也有一部分函数值大于 0 的点. 前提条件是 $\hat{f} = 0$，所以这里必须有 $\int_{|\theta|<\eta} f(\theta)p_k(\theta)d\theta = 0$，这是为什么呢？它看起来并不像 fourier coefficient 的表示形式啊？in fact. 我们来看看 $p(\theta)$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_1(\theta)d\theta = \epsilon\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(\theta)d\theta.$$

RHS 的第一个积分其实就是 $\epsilon\hat{f}(0)$ 即 $(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{i0\theta}d\theta)$，所以第一个积分值等于 0. 第二个积分需要变换一下

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}(f(\theta)e^{i\theta})d\theta = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{i\theta}d\theta\right) = \mathrm{Re}\hat{f}(1) = 0.$$

其实也可以下面这样变

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})d\theta = \hat{f}(1) + \hat{f}(-1) = 0.$$

同理 $p_k(\delta)$ 展开之后都可以被消成 0.

如果 f 是一个 complex valued 函数，即 $f(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$，其中 u 和 v 是 real valued 函数. 这个时候它还是不是在满足上述条件下 $f = 0$？定义 f 的共轭形式 $\bar{f}(\theta) = \overline{f(\theta)}$. $u(\theta)$ 和 $v(\theta)$ 就可以分别用它和原函数来表示

$$u(\theta) = \frac{f(\theta) + \overline{f(\theta)}}{2}$$
$$v(\theta) = \frac{f(\theta) - \overline{f(\theta)}}{2i}$$

f 可积则 $\bar{f}$ 也是可积的. 然后我们看看 $\overline{f(\theta)}$ 的 fourier coefficient.

$$\hat{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta \tag{3}$$
$$= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-i(-n)\theta}\,d\theta} \tag{4}$$
$$= \overline{\hat{f}(-n)} \tag{5}$$

注意第二部的变换，你可以直接把 f 和 $e^{-i(-n)\theta}$ 都展开来验证. 对应的我们有

$$\hat{u}(n) = \frac{\hat{f}(n) + \overline{\hat{f}(-n)}}{2}$$
$$\hat{v}(n) = \frac{\hat{f}(n) - \overline{\hat{f}(-n)}}{2i}$$

其中 $\frac{\hat{f}(n)=\overline{\hat{f}(-n)}}{2}=0$，所以 $\hat{u}(n)=\hat{v}(n)=0$ 对任意的 n 都成立. 现在就转化成了两个 real value 函数的 fourier coefficient 的系数是 0 的情况，根据前面我们已经证明过的 real value 函数的 case，再用一遍就行.

$\square$