

# Mathematical Analysis

枫聆

2020 年 12 月 26 日

## 目录

<b>1</b>	<b>实数</b>	<b>2</b>
1.1	实数连续性 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>极限论</b>	<b>3</b>
2.1	数列极限 . . . . .	3

# 实数

## 实数连续性

由于在有理数上划分存在一种边界无法确定的情况，即把数轴上所有有理数划分为  $A|A'$ ，其中要求  $A$  中所有的有理数都小于  $A'$  中的有理数，在  $A$  中无最大有理数，且  $A'$  中无最小有理数，这种情况下无法确定划分两者的边界，所以引入了有理数的概念，约定上面这种特殊的划分情况定义了某个无理数的  $\alpha$ ，让这个  $\alpha$  代替缺少的界数，把它插在了  $A$  里面一切数  $a$  和  $A'$  里面一切数  $a'$  中间。

用上面这种思路来理解有理数也是可以的，对任意一有理数  $r$  存在两种确定它的划分，还是前面的划分方式即  $a < r$  在下组  $A$  中， $a > r$  在上组  $A'$  中，而有理数  $r$  本身可能含于  $A$  或者  $A'$ ，如果在  $A$  中，即  $A$  中有最大有理数，反之在  $A'$  中，则有最小有理数。为了确定起见，在提及确定有理数  $r$  的时候，常把其置于固定的一组，即  $A$  和  $A'$  任选一个，以后一直用它，在这里取  $a$  在上组。

实数之间的序关系，用划分它集合对应的包含关系来描述，在有理数里面已经有这样的性质了，再看一下无理数，定义划分  $A|A'$  确定无理数  $\alpha$ ，划分无理数  $B|B'$  确定  $\beta$ ，即对应下述三种关系

1.  $\alpha = \beta$ ,  $A$  和  $B$  重合,  $A'$  和  $B'$  重合.
2.  $\alpha > \beta$ ,  $A$  包含  $A'$ .
3.  $\alpha < \beta$ ,  $A'$  包含  $A$ .

还有一个传递关系  $\alpha > \beta, \beta > \gamma$ , 则  $\alpha > \gamma$ , 这些性质都比较容易证明。

**Lemma 1.1.** 对于不论怎样地两个实数  $\alpha$  和  $\beta$ , 其中  $\alpha > \beta$ , 恒有一个位于它们中间的有理数  $r$ :  $\alpha > r > \beta$ .

证明. 这个性质更强了, 两个实数 ( $\alpha > \beta$ ) 之间不仅有实数, 还有有理数。来证明一下, 定义  $\alpha$  对应  $A|A'$  有理数域上的划分,  $\beta$  对应  $B|B'$ , 因为  $\alpha > \beta$ , 所以有  $A$  包含  $B$ , 所以可以在  $A$  上取一点有理数  $r$  它不含于  $B$ , 于是它属于  $B'$ , 使得  $\beta \leq r < \alpha$ ,  $A$  里面没有最大数 (按照前面的统一), 所以把  $r$  取的大一点就可以把等号去掉.  $\square$

开始进攻戴德金基本定理)

**Theorem 1.2.** 对于实数域内的任一划分  $A|A'$  必有产生这划分的实数  $\beta$  存在,  $\beta$  或是下组  $A$  中最大数, 或是上组  $A'$  中最小数.

证明. 首先还是先把实数域上的划分规定先拿出来, 定义  $A$  和  $A'$  是两个非空集合, 每一个实数必落在  $A$  或者  $A'$  其中一个里面, 且  $A$  里面的数都大于  $A'$  里面的数.

将  $A$  里面的一切有理数记为  $A$ ,  $A'$  里面的一切有理数记为  $A'$ , 容易证明这样  $A|A'$  是一个有理数域上划分, 划分确定了一个实数  $\beta$ . 它应该落在  $A$  或者  $A'$  中, 假设它落在  $A$  上, 则它是  $A$  中的最大数, 假设它不是最大数, 则还存在一个  $\alpha_0$  使得  $\alpha_0 > \beta$ , 根据前面的 lemma 两个实数之间又可以确定一个有理数  $\alpha_0 > r > \beta$ , 与前提有理数划分的界数矛盾, 所以  $\beta$  是  $A$  中最大数.  $\square$

## 极限论

### 数列极限

数列，整序傻傻分不清....

**Definition 2.1.** 若对于每一整数  $\varepsilon$ , 不论它怎样小, 恒有序号  $N$ , 使在  $n > N$  时, 一切  $x_n$  的指满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

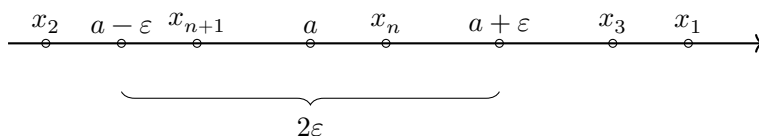
, 则称常数  $a$  为整序变量  $x = x_n$  的极限.

$a$  是整序变量的极限这一事实, 记成:

$$\lim x_n = a \text{ 或者 } \lim x = a$$

, 也可以说这个序列收敛于  $a$

有一个很有趣的几何解释在这里,



以  $a$  点为中心的线段不论取的多小 (其长度为  $2\varepsilon$ ), 一切  $x_n$  点从某点起, 必全部落在这线段之内, 这样在线段之外一定只有有限长度个点了, 表示极限的点  $a$  表示整序变量的数值的点的凝聚中心.