Mathematical Analysis

枫聆

2021 年 5 月 5 日

目录

实数

实数连续性

由于在有理数上划分存在一种边界无法确定的情况，即把数轴上所有有理数划分为 $A|A'$, 其中要求 A 中所有的有理数都小于 A' 中的有理数，在 A 中无最大有理数，且 A' 中无最小有理数，这种情况下无法确定划分两者的边界，例如下组 A 取小于 $x^2 < 2$ 的所有正有理数，上组 A' 取小于 $x^2 > 2$ 的所有正有理数.

因此引入了无理数的概念，约定上面这种特殊的划分情况定义了某个无理数的 α，让这个 α 代替缺少的界数，把它插在了 A 里面一切数 a 和 A' 里面一切数 a' 中间。

用上面这种思路来理解某个具体的有理数也是可以的，对任意一有理数 r 存在两种确定它的划分，还是前面的划分方式即 $a < r$ 在下组 A 中,$a > r$ 在上组 A' 中，而有理数 r 本身可能含于 A 或者 A', 如果在 A 中，即 A 中有最大有理数，反之在 A' 中，则有最小有理数. 为了确定起见，在提及确定有理数 r 的时候，常把其置于固定的一组，即 A 和 A' 任选一个，以后一直用它，在这里取 r 在上组.

实数之间的序关系, 用划分它集合对应的包含关系来描述，在有理数里面已经有这样的性质了，再看一下无理数，定义划分 $A|A'$ 确定无理数 α，划分 $B|B'$ 确定无理数 β, 即对应下述三种关系

1. $\alpha = \beta$, $A = B$ and $A' = B'$.
2. $\alpha > \beta$, $A \supset B$.
3. $\alpha < \beta$, $A \subset B$.

还有一个传递关系 $\alpha > \beta, \beta > \gamma$, 则 $\alpha > \gamma$，这些性质都比较容易证明。

Lemma 1.1. *对于不论怎样地两个实数 α 和 β, 其中 $\alpha > \beta$, 恒有一个位于它们中间的有理数 r: $\alpha > r > \beta$.*

证明. 这个性质更强了，两个实数 $(\alpha > \beta)$ 之间不仅有实数，还有有理数。来证明一下，定义 α 对应 $A|A'$ 有理数域上的划分，β 对应 $B|B'$，因为 $\alpha > \beta$, 所以有 A 包含 B, 所以可以在 A 上取一点有理数 r 它不含于 B, 于是它属于 B', 使得 $\beta \le r < \alpha$,A 里面没有最大数 (按照前面的统一), 所以把 r 取的大一点就可以把等号去掉. □

开始进攻戴德金基本定理)

Theorem 1.2. *对于实数域内的任一划分 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}'$ 必有产生这划分的实数 β 存在，β 或是下组 $\boldsymbol{A}$ 中最大数，或是上组 $\boldsymbol{A}'$ 中最小数.*

证明. 首先还是先把实数域上的划分规定先拿出来，定义 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 是两个非空集合，每一个实数必落在 $\mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{A}'$ 其中一个里面，且 $\mathbf{A}$ 里面的数都小于 $\mathbf{A}'$ 里面的数.

将 $\mathbf{A}$ 里面的一切有理数记为 A，$\mathbf{A}'$ 里面的一切有理数记为 A'，容易证明这样 $A|A'$ 是一个有理数域上划分，划分确定了一个实数 β. 它应该落在 $\mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{A}'$ 中，假设它落在 $\mathbf{A}$ 上，则它是 $\mathbf{A}$ 中的最大数，假设它不

是最大数，则还存在一个 α_0 使得 $\alpha_0 > \beta$, 根据前面的 lemma 两个实数之间又可以确定一个有理数 $\alpha_0 > r > \beta$, 与前提有理数划分的界数矛盾，所以 β 是 $\mathbf{A}$ 中最大数. $\square$

数集的界

Theorem 1.3. 若实数集 $\mathcal{X} = \{x\}$ 上 (下) 有界，则它必有上 (下) 确界.

证明. 我们分两种情况来看待这个问题. 如果 $\mathcal{X}$ 存在一个最大数 $\bar{x}$，对一切 $x \in \mathcal{X}$ 都有 $x \leq \bar{x}$. 这个时候 $\bar{x}$ 是 $\mathcal{X}$ 是一个上界同时也是上确界.

如果 $\mathcal{X}$ 中不存在这样的最大数，那么我们取 $\mathcal{X}$ 的所有上界 α' 构成归入上组 $\mathbf{A}'$. 一切其他的实数归入下组 $\mathbf{A}$. 我们知道 $\mathcal{X}$ 是都会落在下组 $\mathbf{A}$ 中的，因为对于任意的 $x \in \mathcal{X}$，在当前前提下它都不可能是一个上界. 所以现在 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 都是非空的. 那么现在实际上弄了实数上的一个划分出来，根据戴德金定理我们知道这样划分会产生一个界数 β，无论这个界数落在 $\mathbf{A}$ 或者 **A'** 里面也好，都可以用它作为这个独特的上确界，因为它确实是 $\mathcal{X}$ 的一个上界且一切上界都大于等于它. 注意我们这里并不需要这个确界在 $\mathcal{X}$ 里面. $\square$

这里有一个小推论,clearly.

Corollary 1.4. *若数集 $\mathcal{X}$ 有一个上界 M，则 $\sup x \leq M$.*

欧几里得空间

Definition 1.5. 对任意的实数 k，让 $\mathbb{R}^k$ 表示所有 k 元有序对

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

构成的集合，其中 $x_1, \cdots, x_k$ 均为实数. $\mathbf{x}$ 被称为点 (point) 或者向量 (vector).

Definition 1.6. 给定另外一个向量 $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ 和实数 α，定义向量加法和数量乘法如下

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_k + y_k) \tag{1}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_k). \tag{2}$$

如果还熟悉向量空间定义的话，其实这就是一个 vector space over $\mathbb{R}$. 所以上述两个操作是满足交换律，结合律和分配律的.

Definition 1.7. 定义两个向量的内积 (inner product)如下

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i.$$

Definition 1.8. 定义 $\mathbf{x}$ 的范数 (norm)如下

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem 1.9. 给定 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，则有下面所有命题成立

1. $|\mathbf{x}| \geq 0$;
2. $|\mathbf{x}| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
3. $|\alpha \mathbf{x}| = |\mathbf{x}|\alpha|\mathbf{x}|$;
4. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \cdot \mathbf{y}$;
5. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$;
6. $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

证明. (1)-(3) 是比较 trivial 的，(4) 需要你两边平方算一下也是简单的. 我们来计算一下 (5)，同样先平方

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) && (3)\\
&= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\mathbf{y}. && (4)\\
&\leq |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2 && (5)\\
&= (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2 && (6)
\end{aligned}
$$

等式 3-4 步骤用到比 (4) 更强的结论即 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\leq|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$，要证明它还是得两边先平方，然后把 LHS 拿到右边去凑平方. 要证明 (6) 只需要分别把 (5) 里面的 $\mathbf{x}$ 换成 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y}$ 换成 $\mathbf{y}-\mathbf{z}$ 即可，(6) 就是度量空间里面的三角不等式. □

极限论

数列极限

数列，整序傻傻分不清....

Definition 2.1. 若对于每一整数 ε, 不论它怎样小，恒有序号 N, 使在 $n > N$ 时，一切 x_n 的指满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

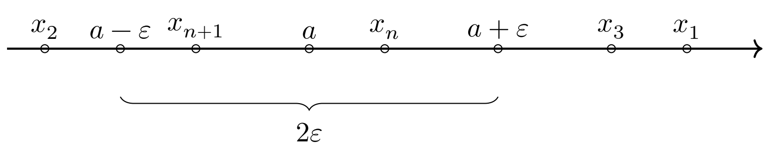
, 则称常数 a 为整序变量 $x = x_n$ 的极限.

a 是整序变量的极限这一事实，记成:

$$\lim x_n = a \text{ 或者 } \lim x = a$$

, 也可以说这个序列收敛于 a

有一个很有趣的几何解释在这里,



以 a 点为中心的线段不论取的多小 (其长度为 2ε), 一切 x_n 点从某点起，必全部落在这线段之内, 这样在线段之外一定只有有限长度个点了, 表示极限的点 a 表示整序变量的数值的点的凝聚中心.

无穷小量

Definition 2.2. 极限为零的整序变量 x_n 称为无穷小量，或简称无穷小.

这里有一个有趣的命题.

Proposition 2.3. 无限个无穷小之积不一定是无穷小.

它是一个自然语言的命题，所以里面有一些争议. 先看一个一般性构造证明.

证明. 取一系列数列:

$$
\begin{array}{llllllll}
\{a_1\}: & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \cdots \\
\{a_2\}: & 1, & 2, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \cdots \\
\{a_3\}: & 1, & 1, & 3^2, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \cdots \\
\{a_4\}: & 1, & 1, & 1, & 4^3, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \cdots \\
\quad\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

数列 $\{a_k\}$ 的第 n 项记为 $a_k(n)$，其通项公式为

$$
a_k(n) = \begin{cases} 1, & n < k \\ k^{k-1}, & n = k \\ \frac{1}{n}, & n > k \end{cases}
$$

显然对于任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$ 都满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_k(n) = 0$. 所以这一系列数列都是无穷小. 那么这一系列数列乘积的第 n 项为

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} a_k(n) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k(n)\right) a_n(n) \left(\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k(n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot n^{n-1} \cdot 1^{\infty} = 1.
\end{aligned}
$$

因此 $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_k(n) = 1$. □

但是有一个奇怪现象是什么呢? $\prod_{k=1}^{n} a_k(n)$ 中有一项 $a_n(n) = n^{n-1}$ 是一个无穷大，并不是无穷小. 奇怪的东西乱入了.

再看一个经典的无穷个无穷小之和:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

定义 $b_k(n)=\frac{k}{n^2}$，则 $b_n(n)=\frac{n}{n^2}$ 还是无穷小. 两个东西对比一下，你可能需要重新定义命题.

区间套

Lemma 2.4. *给定单调增数列 x_n 和单调减数列 y_n，且恒有*

$$x_n < y_n,$$

若其差 $y_n - x_n$ 趋向于 0，则它们有公共有限极限:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

常用形式是取一个闭区间 $[a, b]$，然后在取一个区间 $[a', b']$ 使得

$$a \le a' < b' \le b$$

，则 $[a', b']$ 是套在 $[a, b]$ 里面的.

设有一区间套的无穷序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

后一个总是套在前面一个内，并且在 n 增大时这些区间的长度趋向于 0:

$$\lim b_n - a_n = 0.$$

则区间的两端点 a_n 和 b_n 趋于共同极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

收敛原理

Theorem 2.5. *数列变量 x_n 有有限极限的充分必要条件是：对于每一个数 $\varepsilon > 0$，存在序号 N，使得 $n > N$ 及 $n' > N$，不等式*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

成立.

记录一下用分割法证明其必要性.

证明. 设前提条件都已经满足，在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数 α，若 x_n 从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数 α 归入下组 A，其余的 (即不落在 A 里面的) 一起实数归入上组 A'.

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件，对于任意数 $\varepsilon > 0$ 及其对应的 N. 若 $n > N$ 及 $n' > N$，则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

. 现在我们可以看到每一个数 $x_{n'} - \varepsilon$ 都是小于 x_n 的，所以它归入下组 A. 另一方面 $x_{n'} + \varepsilon$ 都大于 x_n，所以 $x_{n'} + \varepsilon$ 放不进去 A，那它只能归入 A' 了, 所以 A 和 A' 都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数 α 和确定序列 x_n，要么它属于 A 或者属于 A'. 同时 A 中实数都小于 A' 的实数. 如果 $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$，则 x_n 从某一项其也都大于 a'，这样就产生矛盾了. 所以确实产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理，有实数 a 存在它是这两组数之间的界数，即

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

我们注意到当 $n > N$ 时，$x_{n'} - \varepsilon$ 是一个 α, 而 $x_{n'} + \varepsilon$ 是一个 α'. 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \leq a <\leq x_{n'} + \varepsilon$$

. 即 $|x_{n'} - a| \leq \varepsilon$，所以 $\lim x_n = a$. □

Theorem 2.6. *B.Bolzano-C.Weierstrass. 任何有界数列内恒能选出收敛于有限极限的部分极限.(有界序列一定有收敛子列)*

证明. 假设一切 x_n 都位于界限 a 与 b 之间. 现在将 $[a, b]$ 分为两半，则必有一半含有无限多个数列 x_n 里面的元素. 因为不是这样则数列 x_n 就有有限多个了. 用 $[a_1, b_1]$ 表示其中含有无限多个数列元素的那半个区间 (若两个区间都含有无限多个数列元素，任取一个即可). 类似的取在区间 $[a_1, a_2]$ 分出它的一半 $[a_2, b_2]$，使得它也含有

无限多个 x_n. 继续这种取法至无穷，在第 k 次分出的区间 $[a_k, b_k]$ 内同样也有无穷多个 x_n. 此外，第 k 个区间的长度为

$$\frac{b-a}{2^k}.$$

可以看到这个长度趋于 0 的，然后把区间套用在这里，就可以知道 a_k 和 b_k 是趋于某个公共极限 c.

也就是说从上面我们分出来的区间里面，都挑一个元素出来，构成的子列是取趋于某个极限的. □

利用 BC 定理，我们可以尝试把前面对收敛原理的证明可以写的更简单.

证明. 假设前提条件满足，即对任意的 $\varepsilon > 0$，当 $n > N, n' > N$ 时 $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$. 也就是

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon.$$

可以看到 x_n 是有界的，可以想象把这个界限拉长把前 N 个 x_n 也包含进来.

假设从 $\{x_n\}$ 里面挑出来某个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 c，即

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon.$$

当 $n_k > N, n > N$ 时，我们有

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

两式联立有

$$|x_n - c| < 2\varepsilon.$$

所以 x_n 也是收敛于 c 的. □

一元函数

单调函数的极限

Definition 3.1. 单调函数分为广义的单调函数和严格的单调函数. 例如当 $x > x'$ 有 $f(x) \geq f(x')$ 就是广义单调增函数，也叫不减函数 (非砖). 与之对应的严格单调增函数就需要把前面这个不等式的等号去掉.

Theorem 3.2. 设 $f(x)$ 在区域 $\mathcal{X}$ 内单调增加，即使是广义的也可以. 区域 X 以大于一切 x 的数 a(它可以是有限的，也可以是 $-\infty$) 作为聚点. 若在这时 $f(x)$ 上有界:

$$f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{X}.$$

则当 $x \to a$ 时函数有一有限的极限. 在与此相反的场合，它趋向于 $+\infty$.

证明. $f(x)$ 有上界必有上确界 A. 给定任意的 $\varepsilon > 0$ 所以必存在一点 $x' < a$ 使得 $f(x') > A - \varepsilon$. 另一方面我们永远都有 $f(x) \leq A < A + \varepsilon$. 故对满足上述条件的 x 有下面的不等式存在

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

由于 $f(x)$ 单调增函数，所以当 $x > x'$ 时有 $f(x) > f(x')$，即 $f(x) > f(x') > A - \varepsilon$. 这就是极限的定义 $\lim\limits_{x \to a} = A$.

反过来你可以取 a 小于一切 $x \in \mathcal{X}$. $f(x)$ 下有界，类似的下确界 A' 也可以得到类似的不等式 $|f(x) - A'| < \varepsilon$. □

连续函数的性质

Lemma 3.3. E.Borel. 若闭区间 $[a,b]$ 被一个开区间的无穷系 $\sum = \{\sigma\}$ 所覆盖，则恒能从 $\sum$ 里面选出有限子系

$$\sum^{*} = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n,$$

它同样可以覆盖全区间 $[a,b]$.

证明. H.lebesgue' s. 定义 x^* 为区间 $[a,b]$ 中使得区间 $[a,x^*]$ 能用有限个区间 σ 来覆盖的点. x^* 肯定是存在，因为 a 就是，只要找一个包含 a 的开区间 σ 就行, 这样想的话，又可以找到一群，σ 中接近 a 的都是这样的点.

所以我们的任务是证明 b 也是这样的一个 x^*. 因为一切 $x^* \le b$, 故亦有

$$\sup\{x^*\} = c \le b.$$

, 因为 c 也是 $[a,b]$ 中一点, 同样可以找到包含它的开区间 $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$. 但依据上确界的性质，我们还可以找到 x^* 使得 $\alpha < x^* \le c$. 所以现在把 σ_0 来在加到有限个区间 σ 里面去, 现在就可以覆盖区间 $[a,c]$，也就是说上确界 c 也是 x^*.

而且 c 是不能小于 b 的，如果 c 小于 b, 如果是这样 c 和 β 也可以找到一点 x^*，这与 c 是上确界矛盾的. 这样，必须有 $c = b$，即 b 也是属于 x^*. 所以 $[a,b]$ 可以被有限覆盖. □

为什么 (a,b) 不是紧致的呢? 考虑 $(a + \frac{b-a}{n}, b)$，任何一个 (a,b) 的真子集都可以被它覆盖，但是它不能有限覆盖 (a,b)，因为如果有限就意味着我们能找到一个最大的开区间属于 (a,b)，实际上这样的开区间并不存在. 但是如果我们加上 a 和 b，这种方式已经无法覆盖 a 和 b 两点了.

Compact means small. It is a peculiar kind of small, but at its heart, compactness is a precise way of being small in the mathematical world. The smallness is peculiar because, as in the example of the open and closed intervals $(0,1)$ and $[0,1]$, a set can be made “smaller” (that is, compact) by adding points to it, and it can be made “larger” (non-compact) by taking points away.

函数连续性和间断

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或者左连续

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x+0}f(x)=f(x_0) \tag{7}$$

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x-0}f(x)=f(x_0). \tag{8}$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 有右间断或者左间断是指对应的上式不成立. 例如第一个式子不成立则是右间断.

函数连续的充要条件可以变成函数在点 x_0 处连续就是等于说它在这一点是同时左连续和右连续的.

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有有限极限 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 存在，但是它们均不等于 $f(x_0)$，则称 x_0 是这里是一个普通间断点或者第一类间断点 (跃度). 若极限 $f(x_0+0)$ 或者 $f(x_0-0)$ 是无穷或者根本不存在，则称 x_0 这里是第二类间断点.

Example 3.4. *$f(x)$ 定义在区间 $[0,1]$ 上: 若 x 是无理数则 $f(x)=0$; 若 x 是有理数表示为不可约通分数 $\frac{p}{q}$ 则 $f(\frac{p}{q})=\frac{1}{p}$. 可以得到一个有趣的结论: $f(x)$ 在任一有理数有普通间断点，任一无理数上连续.*

事实上无论 x 取任意数 x_0，对于任意的 $\varepsilon>0$，要使得 $f(x)<\varepsilon$，只需要取 $p>\frac{1}{\varepsilon}$. 不满足这样的正整数 p 只有有限多个. 我们找一个 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 把这些点排除在外，那么所有在这个邻域里面的点 (排除 x_0) 都可以满足 $|f(x)|<\varepsilon$. 即意味着

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 是一个有理数，则 x_0 是一个普通间断点. 反之若 x_0 是一个有理数则在 x_0 处连续.

单调函数的连续性和间断

Theorem 3.5. 单调增 (减) 函数 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 内若有间断，只能是第一种间断，即跃度.

证明. 取 $\mathcal{X}$ 上任意一点 x_0，并设它不是 $\mathcal{X}$ 的左端点. 则当 $x < x_0$ 时有 $f(x) \leq f(x_0)$，此时 $f(x)$ 是有界的，根据我们前面证明的单调函数的极限定理，$f(x)$ 在 x_0 这里是有左极限存在 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \leq f(x_0)$(上确界小于任意的上界).

设 x 也不是右端点，那么右极限当 $x > x_0$，有 $f(x) \geq f(x_0)$. 也有极限 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \geq f(x_0)$. 如果左右极限都等于 $f(x_0)$ 则 $f(x)$ 在这点连续. $\square$

Theorem 3.6. 若单调函数 $f(x)$ 在区间 $\mathcal{X}$ 上对应的函数值充满整个区间 $\mathcal{Y}$(任意 $y \in \mathcal{Y}$ 都至少有一个 $f(x_0)$ 与之对应)，则 $f(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上连续.

证明. 假设 $f(x)$ 在 $\mathbf{X}$ 上存在一间断点 x_0，我们知道这样的间断点只能是第一间断点. 即在 x_0 这一点两边都有极限但是不等于 $f(x_0)$. 在这种情况下我们需要找到一点 $y_0 \in \mathcal{Y}$ 它并不能被 $f(x)$ 覆盖从而推出矛盾. 当 $x < x_0$ 时有 $f(x) < f(x_0)$. 这里我们就找出了这样 y 属于 $f(x) < y < f(x_0)$. $\square$

这个定理非常的有用，它可以很简单直接来描述一些单调初等函数的连续性，而不需要用定义来刻画.

连续函数的复合

一个有趣的方程的解

Example 3.7. 求定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的一切连续函数 $f(x)$.

证明. 这个函数只能是 $f(x)=cx$. $\square$

函数连续性在计算极限时的应用

有三个比较重要的极限.

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e$
   直接用对数函数的性质，把 α 放到对数函数里面就行，对数函数里面的极限是 e. 当 $a=e$ 时极限的结果就是很漂亮的 1.

2. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\ln a$
   遇到这样略微有些复杂的表达式，直接考虑换元. 让 $\beta=a^\alpha-1$, 则 $\beta\to 0$. 原式就变成了 $\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(\beta+1)}$. 变成了上面我们熟悉样子.

3. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu-1}{\alpha}=\mu$
   还是考虑换元，但是不要换的太彻底，适可而止即可. $\beta=(1+\alpha)^\mu-1$，其中 $\beta\to 0$. 我们可以得到一个有趣的等式 $\mu\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta)$. 到这里就够了，不用把 β 把 α 表示出来. 我们把原式现在整理如下
   $$\frac{(1+\alpha)^\mu-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$
   又变成了我们熟悉的样子，两边的极限都是 1，所以最后的整体的极限为 μ.

连续函数的性质

零点定理或者 Bolzano-Cauchy 第一定理.

Theorem 3.8. *函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 即两端函数值异号. 则存在一点 c 使得 $f(c)=0$.*

证明. 在这里可以用上区间套，取 $c=\frac{a+b}{2}$，如果 $f(c)$ 正好等于 c 那就太好了，我们一下子就找到了它. 如果 $f(c)$ 并不等于 0，那么 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 必有一个区间两端异号，我们再取这个区间的中间值. by induction, 我们只需要研究最差的情况有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在极限 $\lim a_n=\lim b_n=c$. 再根据我们的取法还有 $f(a_n)<0$ 和 $f(b_n)>0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 c 点是有极限存在的，并且左右极限是相等的，那么只能 $\lim f(c)=0$. $\square$

上面定理其实还有一种证法，但是需要给出一个小 lemma. 也就是连续保号的性质.

Lemma 3.9. *若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $f(x_0)$ 不等于 0，则对于充分接近 x_0 的一切 x 的函数值 $f(x)$ 仍保持着在 $f(x_0)$ 的函数值.*

证明. 根据连续的定义，任意的 $\varepsilon>0$，存在 $|x-x_0|<\delta$ 使得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 若 $f(x_0)>0$，我们把这个不等式左边的绝对值拿到我们有 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$，只要我们让这个 ε 取的足够小，就能使得 $f(x_0)-\varepsilon>0$. 即 $\varepsilon<f(x_0)$ 就行. 反之若 $f(x_0)<0$，有 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$，同样只要这个 ε 取的足够小，可以使得 $f(x_0)+\varepsilon<0$. 即 $\varepsilon<-f(x_0)$. $\square$

利用这个 lemma 再给出一种证明，这个证明也是我中意的.

证明. 现在我们从任意一个端点出发，例如我选点 a. 先假设没有这样的点 c 存在使得 $f(c)=0$. 并设 $f(a)<0$，我们可以选一个特殊的区间出来 $[a,d]$，有上面这个 lemma 我们可以让这个区间里面所有的 x 都有 $f(x)<0$，那么这个 d 最大可以取到哪里呢？肯定存在一个最大值，因为 $f(b)>0$，所以一定有 $d<b$. 我们现在考虑在这种情况下，充分接近 d 右边的 x 一定都有 $f(x)>0$，如果不是这样我们可以取更大的 d. 那么在 d 点这里，有 $\lim\limits_{x\to d-0}<0$ 和 $\lim\limits_{x\to d+0}>0$，这表示在这 d 这一点并不连续，与假设矛盾.

上面是我们子集的论证过程，其实有点模糊，再记录一下更正规的论证方式. 还是设 $f(a)<0$，我们可以取出所有 $f(\bar{x})<0$ 这样的 x. 因为 $f(b)>0$，所以 $\{\bar{x}\}$ 上有界，我们取 $c=\sup\{\bar{x}\}$. 我们来探讨一下 $f(c)$ 的大小，若是 $f(c)<0$，根据前面的 lemma 在充分接近 c 的右边也存在 x 使得 $f(x)<0$，这就和 c 是上确界矛盾了. 同样 $f(c)>0$，我们也可以在 c 的左边找到 $f(x)>0$，这也和 c 是上确界矛盾. $\square$

导数及微分

导数常用的表示法.

1. $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x_0)}{dx}$ 莱布尼茨 (G.W.Leibniz);
2. y' 或者 $f'(x_0)$ 拉格朗日 (J.L.Lagrange);
3. Dy 或者 $Df(x_0)$ 柯西 (A.L.Cauchy).

常用导数求法和表示

1. 常函数的导数等于 0. 这个就非常 trivial 了.
2. $y = x^n$，其中 n 是自然数. $y' = nx^{n-1}$.

   $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$ 这个式子二项式展开即可. 即 $x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-1} + \cdots$.
3. $y = \frac{1}{x}$. $y' = -\frac{1}{x^2}$. 直接用导数的基本定义就行.
4. $y = \sqrt{x}$. $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. 直接用导数的基本定义就行.
5. $y = x^\mu$，其中 μ 是任意实数. $y' = \mu x^{\mu-1}$.

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{u-1} \cdot \frac{(x+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$. 其中左边极限是我们前面写过的一个重要极限值为 μ.
6. $y = a^x$，其中 $a > 0$. $y' = a^x \cdot \ln a$.

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. 最后等式做边又是我们熟悉的极限.

函数的增量公式

设 $y=f(x)$. 在 x 的定义域上固定一个 x_0，用 $\Delta x \lesseqgtr 0$ 表示 x 的任意增量. 于是对应的函数的增量为

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

若 $y=f(x)$ 在 x_0 处有有限的导数 $y'_x=f'(x_0)$. 则函数的增量可以表示如下的形式.

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$$

或者更简短地

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$$

式中的 α 是依赖 Δx 的变量，且随着 Δx 一同趋于零.

这个 α 是怎么来的呢？在导数的定义中,$\Delta x\to 0$ 时, 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'_x.$$

故令

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'_x.$$

这里可以看出来 $\alpha\to 0$. 通过这个等式把 Δy 表示出来就是前面的等式.

因为 $\alpha\cdot\Delta x$ 是比 Δ 更高阶的无穷小. 故上面的等式还可以改成写

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+o(\Delta x).$$

这个式子相对来说就非常简洁了.

复合函数的导数

设函数 $\mu = \varphi(x)$ 在某一点 x_0 处有导数 $u'_x = \varphi'(x_0)$. 函数 $y = f(\mu)$ 在对应的 $\mu_0 = \varphi(x_0)$ 也有导数 $y'_u = f'(u_0)$. 于是复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x_0 处亦有导数

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

证明. 先根据导数的定义来求 Δy. 给 x 以任意增量 Δx, Δu 是函数 $u = \varphi(x)$ 对应增量, 最后 Δy 是由增量 Δu 所引起的函数 $y = f(u)$ 的增量. 根据函数增量公式我们有

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u.$$

然后两边都除以 Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 就是 u'_x, 而 $\alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ 是一个趋于 0 高阶无穷小. 所以最后

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

□

这个式子也是我们常说的链式法则 (记得在以前在看 mit 的微积分的时候, 那个代课老师在讲链式法则的时候, 突然拿了一条真的链子出来. 说这个法则的强大在于让我们挣脱了链子的束缚...), 可以推广到任意有限个函数复合的情形. 我们可以尝试来推一下二阶链式法则.

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)' &= \left(\frac{dy}{du}\right)' \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)' \\ &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \\ &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}\end{aligned} \tag{9}$$

高阶导数及高阶微分

二阶微分记为:

$$d^2y = d(dy).$$

二阶微分的微分记为:

$$d^3y = d(d^2y).$$

一般地说，函数 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶微分的微分称为函数 $y = f(x)$ 的 n 阶微分

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

在求高阶微分时很重要的一件事，是要记住 dx 是不依赖于 x 的任意的数，关于 x 而微分时必须把它看成常数因子. 在这种情形，将有

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2,$$
$$d^3y = d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y''' \cdot dx) \cdot dx^2 = y''' \cdot dx^3.$$

很容易可以猜出普遍规律是

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n.$$

由它可以进一步推得

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

但是高阶微分没有形式不变性，即若 $x = \varphi(t)$，于是 y 可以看成 t 的复合函数 $y = f(\varphi(t))$. 它关于 t 的一阶微分可以写成

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

其中 $dx = x'_t \cdot dt$. 再求它关于 t 的二阶微分

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx) = y'' \cdot dx + y'_x \cdot d^2x.$$

这才是二阶微分的一般形式. 之前的高阶微分形式 x 是自变量，所以 $d^2x = 0$.