

# Mathematical Analysis

枫聆

2021 年 1 月 24 日

## 目录

<b>1</b>	<b>实数</b>	<b>2</b>
1.1	实数连续性 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>极限论</b>	<b>3</b>
2.1	数列极限 . . . . .	3
2.2	区间套 . . . . .	3
2.3	收敛原理 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>一元函数</b>	<b>6</b>
3.1	连续函数的性质 . . . . .	6
3.2	函数连续性在计算极限时的应用 . . . . .	7
<b>4</b>	<b>导数及微分</b>	<b>8</b>
4.1	常用导数求法和表示 . . . . .	8
4.2	函数的增量公式 . . . . .	9
4.3	复合函数的导数 . . . . .	10
4.4	高阶导数及高阶微分 . . . . .	11

# 实数

## 实数连续性

由于在有理数上划分存在一种边界无法确定的情况，即把数轴上所有有理数划分为  $A|A'$ ，其中要求  $A$  中所有的有理数都小于  $A'$  中的有理数，在  $A$  中无最大有理数，且  $A'$  中无最小有理数，这种情况下无法确定划分两者的边界，所以引入了无理数的概念，约定上面这种特殊的划分情况定义了某个无理数的  $\alpha$ ，让这个  $\alpha$  代替缺少的界数，把它插在了  $A$  里面一切数  $a$  和  $A'$  里面一切数  $a'$  中间。

用上面这种思路来理解有理数也是可以的，对任意一有理数  $r$  存在两种确定它的划分，还是前面的划分方式即  $a < r$  在下组  $A$  中， $a > r$  在上组  $A'$  中，而有理数  $r$  本身可能含于  $A$  或者  $A'$ ，如果在  $A$  中，即  $A$  中有最大有理数，反之在  $A'$  中，则有最小有理数。为了确定起见，在提及确定有理数  $r$  的时候，常把其置于固定的一组，即  $A$  和  $A'$  任选一个，以后一直用它，在这里取  $a$  在上组。

实数之间的序关系，用划分它集合对应的包含关系来描述，在有理数里面已经有这样的性质了，再看一下无理数，定义划分  $A|A'$  确定无理数  $\alpha$ ，划分无理数  $B|B'$  确定  $\beta$ ，即对应下述三种关系

1.  $\alpha = \beta$ ,  $A$  和  $B$  重合,  $A'$  和  $B'$  重合.
2.  $\alpha > \beta$ ,  $A$  包含  $A'$ .
3.  $\alpha < \beta$ ,  $A'$  包含  $A$ .

还有一个传递关系  $\alpha > \beta, \beta > \gamma$ , 则  $\alpha > \gamma$ , 这些性质都比较容易证明。

**Lemma 1.1.** 对于不论怎样地两个实数  $\alpha$  和  $\beta$ , 其中  $\alpha > \beta$ , 恒有一个位于它们中间的有理数  $r$ :  $\alpha > r > \beta$ .

证明. 这个性质更强了, 两个实数 ( $\alpha > \beta$ ) 之间不仅有实数, 还有有理数。来证明一下, 定义  $\alpha$  对应  $A|A'$  有理数域上的划分,  $\beta$  对应  $B|B'$ , 因为  $\alpha > \beta$ , 所以有  $A$  包含  $B$ , 所以可以在  $A$  上取一点有理数  $r$  它不含于  $B$ , 于是它属于  $B'$ , 使得  $\beta \leq r < \alpha$ ,  $A$  里面没有最大数 (按照前面的统一), 所以把  $r$  取的大一点就可以把等号去掉。□

开始进攻戴德金基本定理)

**Theorem 1.2.** 对于实数域内的任一划分  $A|A'$  必有产生这划分的实数  $\beta$  存在,  $\beta$  或是下组  $A$  中最大数, 或是上组  $A'$  中最小数。

证明. 首先还是先把实数域上的划分规定先拿出来, 定义  $A$  和  $A'$  是两个非空集合, 每一个实数必落在  $A$  或者  $A'$  其中一个里面, 且  $A$  里面的数都大于  $A'$  里面的数。

将  $A$  里面的一切有理数记为  $A$ ,  $A'$  里面的一切有理数记为  $A'$ , 容易证明这样  $A|A'$  是一个有理数域上划分, 划分确定了一个实数  $\beta$ . 它应该落在  $A$  或者  $A'$  中, 假设它落在  $A$  上, 则它是  $A$  中的最大数, 假设它不是最大数, 则还存在一个  $\alpha_0$  使得  $\alpha_0 > \beta$ , 根据前面的 lemma 两个实数之间又可以确定一个有理数  $\alpha_0 > r > \beta$ , 与前提有理数划分的界数矛盾, 所以  $\beta$  是  $A$  中最大数。□

# 极限论

## 数列极限

数列，整序傻傻分不清....

**Definition 2.1.** 若对于每一整数  $\varepsilon$ ，不论它怎样小，恒有序号  $N$ ，使在  $n > N$  时，一切  $x_n$  的指满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

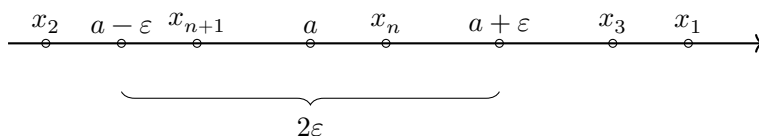
，则称常数  $a$  为整序变量  $x = x_n$  的极限.

$a$  是整序变量的极限这一事实，记成：

$$\lim x_n = a \text{ 或者 } \lim x = a$$

，也可以说这个序列收敛于  $a$

有一个很有趣的几何解释在这里，



以  $a$  点为中心的线段不论取的多小 (其长度为  $2\varepsilon$ )，一切  $x_n$  点从某点起，必全部落在这线段之内，这样在线段之外一定只有有限长度个点了，表示极限的点  $a$  表示整序变量的数值的点的凝聚中心.

## 区间套

**Lemma 2.2.** 给定单调增数列  $x_n$  和单调减数列  $y_n$ ，且恒有

$$x_n < y_n,$$

若其差  $y_n - x_n$  趋向于 0，则它们有公共有限极限：

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

常用形式是取一个闭区间  $[a, b]$ ，然后在取一个区间  $[a', b']$  使得

$$a \leq a' < b' \leq b$$

, 则  $[a', b']$  是套在  $[a, b]$  里面的.

设有一区间套的无穷序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

后一个总是套在前面一个内, 并且在  $n$  增大时这些区间的长度趋向于 0:

$$\lim b_n - a_n = 0.$$

则区间的两端点  $a_n$  和  $b_n$  趋于共同极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

## 收敛原理

**Theorem 2.3.** 数列变量  $x_n$  有有限极限的充分必要条件是: 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在序号  $N$ , 使得  $n > N$  及  $n' > N$ , 不等式

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

成立.

记录一下用分割法证明其必要性.

证明. 设前提条件都已经满足, 在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数  $\alpha$ , 若  $x_n$  从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数  $\alpha$  归入下组  $A$ , 其余的 (即不落在  $A$  里面的) 一起实数归入上组  $A'$ .

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件, 对于任意数  $\varepsilon > 0$  及其对应的  $N$ . 若  $n > N$  及  $n' > N$ , 则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

. 现在我们可以看到每一个数  $x_{n'} - \varepsilon$  都是小于  $x_n$  的, 所以它归入下组  $A$ . 另一方面  $x_{n'} + \varepsilon$  都大于  $x_n$ , 所以  $x_{n'} + \varepsilon$  放不进去  $A$ , 那它只能归入  $A'$  了, 所以  $A$  和  $A'$  都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数  $\alpha$  和确定序列  $x_n$ , 要么它属于  $A$  或者属于  $A'$ . 同时  $A$  中实数都小于  $A'$  的实数. 如果  $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$ , 则  $x_n$  从某一项其也都大于  $\alpha'$ , 这样就产生矛盾了. 所以确实产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理, 有实数  $a$  存在它是这两组数之间的界数, 即

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

我们注意到当  $n > N$  时,  $x_{n'} - \varepsilon$  是一个  $\alpha$ , 而  $x_{n'} + \varepsilon$  是一个  $\alpha'$ . 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \leq a \leq x_{n'} + \varepsilon$$

. 即  $|x_{n'} - a| \leq \varepsilon$ , 所以  $\lim x_n = a$ . □

**Theorem 2.4.** *B.Bolzano-C.Weierstrass.* 任何有界数列内恒能选出收敛于有限极限的部分极限.(有界序列一定有收敛子列)

证明. 假设一切  $x_n$  都位于界限  $a$  与  $b$  之间. 现在将  $[a, b]$  分为两半, 则必有一半含有无限多个数列  $x_n$  里面的元素. 因为不是这样则数列  $x_n$  就有有限多个了. 用  $[a_1, b_1]$  表示其中含有无限多个数列元素的那半个区间 (若两个区间都含有无限多个数列元素, 任取一个即可). 类似的取在区间  $[a_1, a_2]$  分出它的一半  $[a_2, b_2]$ , 使得它也含有无限多个  $x_n$ . 继续这种取法至无穷, 在第  $k$  次分出的区间  $[a_k, b_k]$  内同样也有无穷多个  $x_n$ . 此外, 第  $k$  个区间的长度为

$$\frac{b-a}{2^k}.$$

可以看到这个长度趋于 0 的, 然后把区间套用在这里, 就可以知道  $a_k$  和  $b_k$  是趋于某个公共极限  $c$ .

也就是说从上面我们分出来的区间里面, 都挑一个元素出来, 构成的子列是取趋于某个极限的. □

利用 BC 定理, 我们可以尝试把前面对收敛原理的证明可以写的更简单.

证明. 假设前提条件满足, 即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > N, n' > N$  时  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ . 也就是

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon.$$

可以看到  $x_n$  是有界的, 可以想象把这个界限拉长把前  $N$  个  $x_n$  也包含进来.

假设从  $\{x_n\}$  里面挑出来某个子列  $\{x_{n_k}\}$  收敛于  $c$ , 即

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon.$$

当  $n_k > N, n > N$  时, 我们有

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

两式联立有

$$|x_n - c| < 2\varepsilon.$$

所以  $x_n$  也是收敛于  $c$  的. □

## 一元函数

### 连续函数的性质

**Lemma 3.1.** E.Borel. 若闭区间  $[a, b]$  被一个开区间的无穷系  $\Sigma = \{\sigma\}$  所覆盖, 则恒能从  $\Sigma$  里面选出有限子系

$$\Sigma^* = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n,$$

它同样可以覆盖全区间  $[a, b]$ .

证明. H.lebesgue's. 定义  $x^*$  为区间  $[a, b]$  中使得区间  $[a, x^*]$  能用有限个区间  $\sigma$  来覆盖的点.  $x^*$  肯定是存在, 因为  $a$  就是, 只要找一个包含  $a$  的开区间  $\sigma$  就行, 这样想的话, 又可以找到一群,  $\sigma$  中接近  $a$  的都是这样的点.

所以我们的任务是证明  $b$  也是这样的一个  $x^*$ . 因为一切  $x^* \leq b$ , 故亦有

$$\sup\{x^*\} = c \leq b.$$

, 因为  $c$  也是  $[a, b]$  中一点, 同样可以找到包含它的开区间  $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$ . 但依据上确界的性质, 我们还可以找到  $x^*$  使得  $\alpha < x^* \leq c$ . 所以现在把  $\sigma_0$  来在加到有限个区间  $\sigma$  里面去, 现在就可以覆盖区间  $[a, c]$ , 也就是说上确界  $c$  也是  $x^*$ .

而且  $c$  是不能小于  $b$  的, 如果  $c$  小于  $b$ , 如果是这样  $c$  和  $\beta$  也可以找到一点  $x^*$ , 这与  $c$  是上确界矛盾的. 这样, 必须有  $c = b$ , 即  $b$  也是属于  $x^*$ . 所以  $[a, b]$  可以被有限覆盖.  $\square$

为什么  $(a, b)$  不是紧致的呢? 考虑  $(a + \frac{b-a}{n}, b)$ , 任何一个  $(a, b)$  的真子集都可以被它覆盖, 但是它不能有限覆盖  $(a, b)$ , 因为如果有限就意味着我们能找到一个最大的开区间属于  $(a, b)$ , 实际上这样的开区间并不存在. 但是如果加上  $a$  和  $b$ , 这种方式已经无法覆盖  $a$  和  $b$  两点了.

Compact means small. It is a peculiar kind of small, but at its heart, compactness is a precise way of being small in the mathematical world. The smallness is peculiar because, as in the example of the open and closed intervals  $(0, 1)$  and  $[0, 1]$ , a set can be made “smaller” (that is, compact) by adding points to it, and it can be made “larger” (non-compact) by taking points away.

## 函数连续性在计算极限时的应用

有三个比较重要的极限.

1.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e$

直接用对数函数的性质, 把  $\alpha$  放到对数函数里面就行, 对数函数里面的极限是  $e$ . 当  $a = e$  时极限的结果就是很漂亮的 1.

2.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$

遇到这样略微有些复杂的表达式, 直接考虑换元. 让  $\beta = a^\alpha - 1$ , 则  $\beta \rightarrow 0$ . 原式就变成了  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta}{\log_a(\beta+1)}$ . 变成了上面我们熟悉样子.

3.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu$

还是考虑换元, 但是不要换的太彻底, 适可而止即可.  $\beta = (1+\alpha)^\mu - 1$ , 其中  $\beta \rightarrow 0$ . 我们可以得到一个有趣的等式  $\mu \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta)$ . 到这里就够了, 不用把  $\beta$  把  $\alpha$  表示出来. 我们把原式现在整理如下

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

又变成了我们熟悉的样子, 两边的极限都是 1, 所以最后的整体的极限为  $\mu$ .

## 导数及微分

导数常用的表示法.

1.  $\frac{dy}{dx}$  或  $\frac{df(x_0)}{dx}$  莱布尼茨 (G.W.Leibniz);
2.  $y'$  或者  $f'(x_0)$  拉格朗日 (J.L.Lagrange);
3.  $Dy$  或者  $Df(x_0)$  柯西 (A.L.Cauchy).

### 常用导数求法和表示

1. 常函数的导数等于 0. 这个就非常 trivial 了.

2.  $y = x^n$ , 其中  $n$  是自然数.  $y' = nx^{n-1}$ .

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$  这个式子二项式展开即可. 即  $x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots$ .

3.  $y = \frac{1}{x}$ .  $y' = -\frac{1}{x^2}$ . 直接用导数的基本定义就行.

4.  $y = \sqrt{x}$ .  $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ . 直接用导数的基本定义就行.

5.  $y = x^\mu$ , 其中  $\mu$  是任意实数.  $y' = \mu x^{\mu-1}$ .

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{(x+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$ . 其中左边极限是我们前面写过的一个重要极限值为  $\mu$ .

6.  $y = a^x$ , 其中  $a > 0$ .  $y' = a^x \cdot \ln a$ .

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ . 最后等式做边又是我们熟悉的极限.



## 函数的增量公式

设  $y = f(x)$ . 在  $x$  的定义域上固定一个  $x_0$ , 用  $\Delta x \leq 0$  表示  $x$  的任意增量. 于是对应的函数的增量为

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

若  $y = f(x)$  在  $x_0$  处有有限的导数  $y'_x = f'(x_0)$ . 则函数的增量可以表示如下的形式.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

或者更简短地

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

式中的  $\alpha$  是依赖  $\Delta x$  的变量, 且随着  $\Delta x$  一同趋于零.

这个  $\alpha$  是怎么来的呢? 在导数的定义中,  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'_x.$$

故令

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x.$$

这里可以看出来  $\alpha \rightarrow 0$ . 通过这个等式把  $\Delta y$  表示出来就是前面的等式.

因为  $\alpha \cdot \Delta x$  是比  $\Delta$  更高阶的无穷小. 故上面的等式还可以改成写

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

这个式子相对来说就非常简洁了.

## 复合函数的导数

设函数  $\mu = \varphi(x)$  在某一点  $x_0$  处有导数  $u'_x = \varphi'(x_0)$ . 函数  $y = f(\mu)$  在对应的  $\mu_0 = \varphi(x_0)$  也有导数  $y'_u = f'(u_0)$ . 于是复合函数  $y = f(\varphi(x))$  在  $x_0$  处亦有导数

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

证明. 先根据导数的定义来求  $\Delta y$ . 给  $x$  以任意增量  $\Delta x$ ,  $\Delta u$  是函数  $u = \varphi(x)$  对应增量, 最后  $\Delta y$  是由增量  $\Delta u$  所引起的函数  $y = f(u)$  的增量. 根据函数增量公式我们有

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u.$$

然后两边都除以  $\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\Delta u}{\Delta x}$  就是  $u'_x$ , 而  $\alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$  是一个趋于 0 高阶无穷小. 所以最后

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

□

这个式子也是我们常说的链式法则 (记得在以前在看 mit 的微积分的时候, 那个代课老师在讲链式法则的时候, 突然拿了一条真的链子出来. 说这个法则的强大在于让我们挣脱了链子的束缚...), 可以推广到任意有限个函数复合的情形. 我们可以尝试来推一下二阶链式法则.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)' &= \left(\frac{dy}{du}\right)' \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)' \\ &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \\ &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \end{aligned} \tag{1}$$

## 高阶导数及高阶微分

二阶微分记为:

$$d^2y = d(dy).$$

二阶微分的微分记为:

$$d^3y = d(d^2y).$$

一般地说, 函数  $y = f(x)$  的  $(n-1)$  阶微分的微分称为函数  $y = f(x)$  的  $n$  阶微分

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

在求高阶微分时很重要的一件事, 是要记住  $dx$  是不依赖于  $x$  的任意的数, 关于  $x$  而微分时必须把它看成常数因子. 在这种情形, 将有

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2, \\ d^3y &= d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y''' \cdot dx) \cdot dx^2 = y''' \cdot dx^3. \end{aligned}$$

很容易可以猜出普遍规律是

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n.$$

由它可以进一步推得

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

但是高阶微分没有形式不变性, 即若  $x = \varphi(t)$ , 于是  $y$  可以看成  $t$  的复合函数  $y = f(\varphi(t))$ . 它关于  $t$  的一阶微分可以写成

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

其中  $dx = x'_t \cdot dt$ . 再求它关于  $t$  的二阶微分

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx) = y'' \cdot dx + y'_x \cdot d^2x.$$

这才是二阶微分的一般形式. 之前的高阶微分形式  $x$  是自变量, 所以  $d^2x = 0$ .