

# Mathematical Analysis

枫聆

2021 年 5 月 7 日

## 目录

<b>1</b>	<b>实数</b>	<b>3</b>
1.1	实数连续性 . . . . .	3
1.2	数集的界 . . . . .	5
1.3	欧几里得空间 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>极限论</b>	<b>8</b>
2.1	数列极限 . . . . .	8
2.2	无穷小量 . . . . .	9
2.3	区间套 . . . . .	11
2.4	收敛原理 . . . . .	12
<b>3</b>	<b>一元函数</b>	<b>14</b>
3.1	单调函数的极限 . . . . .	14
3.2	连续函数的性质 . . . . .	15
3.3	函数连续性和间断 . . . . .	16
3.4	单调函数的连续性和间断 . . . . .	17
3.5	连续函数的复合 . . . . .	18
3.6	一个有趣的方程的解 . . . . .	19
3.7	函数连续性在计算极限时的应用 . . . . .	20
3.8	连续函数的性质 . . . . .	21

<b>4</b>	<b>导数及微分</b>	<b>22</b>
4.1	常用导数求法和表示 . . . . .	22
4.2	函数的增量公式 . . . . .	23
4.3	复合函数的导数 . . . . .	24
4.4	高阶导数及高阶微分 . . . . .	25
<b>5</b>	<b>多元函数</b>	<b>25</b>
5.1	多元函数的复合 . . . . .	26

# 实数

## 实数连续性

由于在有理数上划分存在一种边界无法确定的情况，即把数轴上所有有理数划分为  $A|A'$ ，其中要求  $A$  中所有的有理数都小于  $A'$  中的有理数，在  $A$  中无最大有理数，且  $A'$  中无最小有理数，这种情况下无法确定划分两者的边界，例如下组  $A$  取小于  $x^2 < 2$  的所有正有理数，上组  $A'$  取小于  $x^2 > 2$  的所有正有理数。

因此引入了无理数的概念，约定上面这种特殊的划分情况定义了某个无理数的  $\alpha$ ，让这个  $\alpha$  代替缺少的界数，把它插在了  $A$  里面一切数  $a$  和  $A'$  里面一切数  $a'$  中间。

用上面这种思路来理解某个具体的有理数也是可以的，对任意一有理数  $r$  存在两种确定它的划分，还是前面的划分方式即  $a < r$  在下组  $A$  中， $a > r$  在上组  $A'$  中，而有理数  $r$  本身可能含于  $A$  或者  $A'$ ，如果在  $A$  中，即  $A$  中有最大有理数，反之在  $A'$  中，则有最小有理数。为了确定起见，在提及确定有理数  $r$  的时候，常把其置于固定的一组，即  $A$  和  $A'$  任选一个，以后一直用它，在这里取  $r$  在上组。

实数之间的序关系，用划分它集合对应的包含关系来描述，在有理数里面已经有这样的性质了，再看一下无理数，定义划分  $A|A'$  确定无理数  $\alpha$ ，划分  $B|B'$  确定无理数  $\beta$ ，即对应下述三种关系

1.  $\alpha = \beta$ ,  $A = B$  and  $A' = B'$ .
2.  $\alpha > \beta$ ,  $A \supset B$ .
3.  $\alpha < \beta$ ,  $A \subset B$ .

还有一个传递关系  $\alpha > \beta, \beta > \gamma$ , 则  $\alpha > \gamma$ ，这些性质都比较容易证明。

**Lemma 1.1.** 对于不论怎样地两个实数  $\alpha$  和  $\beta$ ，其中  $\alpha > \beta$ ，恒有一个位于它们中间的有理数  $r$ :  $\alpha > r > \beta$ 。

证明. 这个性质更强了，两个实数 ( $\alpha > \beta$ ) 之间不仅有实数，还有有理数。来证明一下，定义  $\alpha$  对应  $A|A'$  有理数域上的划分， $\beta$  对应  $B|B'$ ，因为  $\alpha > \beta$ ，所以有  $A$  包含  $B$ ，所以可以在  $A$  上取一点有理数  $r$  它不含于  $B$ ，于是它属于  $B'$ ，使得  $\beta \leq r < \alpha$ ， $A$  里面没有最大数 (按照前面的统一)，所以把  $r$  取的大一点就可以把等号去掉。□

开始进攻戴德金基本定理)

**Theorem 1.2.** 对于实数域内的任一划分  $A|A'$  必有产生这划分的实数  $\beta$  存在， $\beta$  或是下组  $A$  中最大数，或是上组  $A'$  中最小数。

证明. 首先还是先把实数域上的划分规定先拿出来，定义  $A$  和  $A'$  是两个非空集合，每一个实数必落在  $A$  或者  $A'$  其中一个里面，且  $A$  里面的数都小于  $A'$  里面的数。

将  $A$  里面的一切有理数记为  $A$ ， $A'$  里面的一切有理数记为  $A'$ ，容易证明这样  $A|A'$  是一个有理数域上划分，划分确定了一个实数  $\beta$ 。它应该落在  $A$  或者  $A'$  中，假设它落在  $A$  上，则它是  $A$  中的最大数，假设它不

是最大数, 则还存在一个  $\alpha_0$  使得  $\alpha_0 > \beta$ , 根据前面的 lemma 两个实数之间又可以确定一个有理数  $\alpha_0 > r > \beta$ , 与前提有理数划分的界数矛盾, 所以  $\beta$  是  $\mathbf{A}$  中最大数.  $\square$

## 数集的界

**Theorem 1.3.** 若实数集  $\mathcal{X} = \{x\}$  上(下)有界, 则它必有上(下)确界.

证明. 我们分两种情况来看待这个问题. 如果  $\mathcal{X}$  存在一个最大数  $\bar{x}$ , 对一切  $x \in \mathcal{X}$  都有  $x \leq \bar{x}$ . 这个时候  $\bar{x}$  是  $\mathcal{X}$  是一个上界同时也是上确界.

如果  $\mathcal{X}$  中不存在这样的最大数, 那么我们取  $\mathcal{X}$  的所有上界  $\alpha'$  构成归入上组  $\mathbf{A}'$ . 一切其他的实数归入下组  $\mathbf{A}$ . 我们知道  $\mathcal{X}$  是都会落在下组  $\mathbf{A}$  中的, 因为对于任意的  $x \in \mathcal{X}$ , 在当前前提下它都不可能是一个上界. 所以现在  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{A}'$  都是非空的. 那么现在实际上弄了实数上的一个划分出来, 根据戴德金定理我们知道这样划分会产生一个界数  $\beta$ , 无论这个界数落在  $\mathbf{A}$  或者  $\mathbf{A}'$  里面也好, 都可以用它作为这个独特的上确界, 因为它确实是  $\mathcal{X}$  的一个上界且一切上界都大于等于它. [注意我们这里并不需要这个确界在  \$\mathcal{X}\$  里面.](#)  $\square$

这里有一个小推论, clearly.

**Corollary 1.4.** 若数集  $\mathcal{X}$  有一个上界  $M$ , 则  $\sup x \leq M$ .

## 欧几里得空间

**Definition 1.5.** 对任意的实数  $k$ , 让  $\mathbb{R}^k$  表示所有  $k$  元有序对

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

构成的集合, 其中  $x_1, \dots, x_k$  均为实数.  $\mathbf{x}$  被称为点 (point) 或者向量 (vector).

**Definition 1.6.** 给定另外一个向量  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$  和实数  $\alpha$ , 定义向量加法和数量乘法如下

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k) \quad (1)$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k). \quad (2)$$

如果还熟悉向量空间定义的话, 其实这就是一个 vector space over  $\mathbb{R}$ . 所以上述两个操作是满足交换律, 结合律和分配律的.

**Definition 1.7.** 定义两个向量的内积 (inner product) 如下

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k x_i y_i.$$

**Definition 1.8.** 定义  $\mathbf{x}$  的范数 (norm) 如下

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Theorem 1.9.** 给定  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$  和  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 则下面所有命题成立

1.  $|\mathbf{x}| \geq 0$ ;
2.  $|\mathbf{x}| = 0$  当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
3.  $|\alpha \mathbf{x}| = |\mathbf{x}| |\alpha|$ ;
4.  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ ;
5.  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ ;
6.  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$ .

证明. (1)-(3) 是比较 trivial 的, (4) 需要你两边平方算一下也是简单的. 我们来计算一下 (5), 同样先平方

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad (3)$$

$$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}. \quad (4)$$

$$\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \quad (5)$$

$$= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \quad (6)$$

等式 3-4 步骤用到比 (4) 更强的结论即  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ , 要证明它还是得两边先平方, 然后把 LHS 拿到右边去凑平方. 要证明 (6) 只需要分别把 (5) 里面的  $\mathbf{x}$  换成  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  和  $\mathbf{y}$  换成  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$  即可, (6) 就是度量空间里面的三角不等式.  $\square$

## 极限论

### 数列极限

数列，整序傻傻分不清....

**Definition 2.1.** 若对于每一整数  $\varepsilon$ , 不论它怎样小, 恒有序号  $N$ , 使在  $n > N$  时, 一切  $x_n$  的指满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

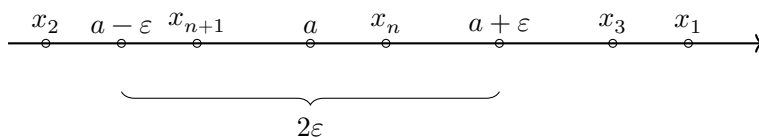
, 则称常数  $a$  为整序变量  $x = x_n$  的极限.

$a$  是整序变量的极限这一事实, 记成:

$$\lim x_n = a \text{ 或者 } \lim x = a$$

, 也可以说这个序列收敛于  $a$

有一个很有趣的几何解释在这里,



以  $a$  点为中心的线段不论取的多小 (其长度为  $2\varepsilon$ ), 一切  $x_n$  点从某点起, 必全部落在这线段之内, 这样在线段之外一定只有有限长度个点了, 表示极限的点  $a$  表示整序变量的数值的点的凝聚中心.



## 无穷小量

**Definition 2.2.** 极限为零的整序变量  $x_n$  称为无穷小量，或简称无穷小。

这里有一个有趣的命题。

**Proposition 2.3.** 无限个无穷小之积不一定是无穷小。

它是一个自然语言的命题，所以里面有一些争议。先看一个一般性构造证明。

证明。取一系列数列：

$$\begin{aligned} \{a_1\} &: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \\ \{a_2\} &: 1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \\ \{a_3\} &: 1, 1, 3^2, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \\ \{a_4\} &: 1, 1, 1, 4^3, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

数列  $\{a_k\}$  的第  $n$  项记为  $a_k(n)$ ，其通项公式为

$$a_k(n) = \begin{cases} 1, & n < k \\ k^{k-1}, & n = k \\ \frac{1}{n}, & n > k \end{cases}$$

显然对于任意的  $k \in \mathbb{Z}^+$  都满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(n) = 0$ 。所以这一系列数列都是无穷小。那么这一系列数列乘积的第  $n$  项为

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} a_k(n) &= \left( \prod_{k=1}^{n-1} a_k(n) \right) a_n(n) \left( \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k(n) \right) \\ &= \left( \frac{1}{n} \right)^{n-1} \cdot n^{n-1} \cdot 1^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_k(n) = 1$ . □

但是有一个奇怪现象是什么呢？ $\prod_{k=1}^n a_k(n)$  中有一项  $a_n(n) = n^{n-1}$  是一个无穷大，并不是无穷小。奇怪的东西乱入了。

再看一个经典的无穷个无穷小之和：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

定义  $b_k(n) = \frac{k}{n^2}$ , 则  $b_n(n) = \frac{n}{n^2}$  还是无穷小. 两个东西对比一下, 你可能需要重新定义命题.

## 区间套

**Lemma 2.4.** 给定单调增数列  $x_n$  和单调减数列  $y_n$ , 且恒有

$$x_n < y_n,$$

若其差  $y_n - x_n$  趋向于 0, 则它们有公共有限极限:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

常用形式是取一个闭区间  $[a, b]$ , 然后在取一个区间  $[a', b']$  使得

$$a \leq a' < b' \leq b$$

, 则  $[a', b']$  是套在  $[a, b]$  里面的.

设有一区间套的无穷序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

后一个总是套在前面一个内, 并且在  $n$  增大时这些区间的长度趋向于 0:

$$\lim b_n - a_n = 0.$$

则区间的两端点  $a_n$  和  $b_n$  趋于共同极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

## 收敛原理

**Theorem 2.5.** 数列变量  $x_n$  有有限极限的充分必要条件是: 对于每一个数  $\varepsilon > 0$ , 存在序号  $N$ , 使得  $n > N$  及  $n' > N$ , 不等式

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

成立.

记录一下用分割法证明其必要性.

证明. 设前提条件都已经满足, 在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数  $\alpha$ , 若  $x_n$  从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数  $\alpha$  归入下组  $A$ , 其余的 (即不落在  $A$  里面的) 一起实数归入上组  $A'$ .

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件, 对于任意数  $\varepsilon > 0$  及其对应的  $N$ . 若  $n > N$  及  $n' > N$ , 则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

. 现在我们可以看到每一个数  $x_{n'} - \varepsilon$  都是小于  $x_n$  的, 所以它归入下组  $A$ . 另一方面  $x_{n'} + \varepsilon$  都大于  $x_n$ , 所以  $x_{n'} + \varepsilon$  放不进去  $A$ , 那它只能归入  $A'$  了, 所以  $A$  和  $A'$  都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数  $\alpha$  和确定序列  $x_n$ , 要么它属于  $A$  或者属于  $A'$ . 同时  $A$  中实数都小于  $A'$  的实数. 如果  $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$ , 则  $x_n$  从某一项其也都大于  $\alpha'$ , 这样就产生矛盾了. 所以确实产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理, 有实数  $a$  存在它是这两组数之间的界数, 即

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

我们注意到当  $n > N$  时,  $x_{n'} - \varepsilon$  是一个  $\alpha$ , 而  $x_{n'} + \varepsilon$  是一个  $\alpha'$ . 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \leq a \leq x_{n'} + \varepsilon$$

. 即  $|x_{n'} - a| \leq \varepsilon$ , 所以  $\lim x_n = a$ . □

**Theorem 2.6.** *B.Bolzano-C.Weierstrass.* 任何有界数列内恒能选出收敛于有限极限的部分极限.(有界序列一定有收敛子列)

证明. 假设一切  $x_n$  都位于界限  $a$  与  $b$  之间. 现在将  $[a, b]$  分为两半, 则必有一半含有无限多个数列  $x_n$  里面的元素. 因为不是这样则数列  $x_n$  就有有限多个了. 用  $[a_1, b_1]$  表示其中含有无限多个数列元素的那半个区间 (若两个区间都含有无限多个数列元素, 任取一个即可). 类似的取在区间  $[a_1, a_2]$  分出它的一半  $[a_2, b_2]$ , 使得它也含有

无限多个  $x_n$ . 继续这种取法至无穷, 在第  $k$  次分出的区间  $[a_k, b_k]$  内同样也有无穷多个  $x_n$ . 此外, 第  $k$  个区间的长度为

$$\frac{b-a}{2^k}.$$

可以看到这个长度趋于 0 的, 然后把区间套用在这里, 就可以知道  $a_k$  和  $b_k$  是趋于某个公共极限  $c$ .

也就是说从上面我们分出来的区间里面, 都挑一个元素出来, 构成的子列是取趋于某个极限的. □

利用 BC 定理, 我们可以尝试把前面对收敛原理的证明可以写的更简单.

证明. 假设前提条件满足, 即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > N, n' > N$  时  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ . 也就是

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon.$$

可以看到  $x_n$  是有界的, 可以想象把这个界限拉长把前  $N$  个  $x_n$  也包含进来.

假设从  $\{x_n\}$  里面挑出来某个子列  $\{x_{n_k}\}$  收敛于  $c$ , 即

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon.$$

当  $n_k > N, n > N$  时, 我们有

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

两式联立有

$$|x_n - c| < 2\varepsilon.$$

所以  $x_n$  也是收敛于  $c$  的. □

## 一元函数

### 单调函数的极限

**Definition 3.1.** 单调函数分为广义的单调函数和严格的单调函数. 例如当  $x > x'$  有  $f(x) \geq f(x')$  就是广义单调增函数, 也叫不减函数 (非减). 与之对应的严格单调增函数就需要把前面这个不等式的等号去掉.

**Theorem 3.2.** 设  $f(x)$  在区域  $\mathcal{X}$  内单调增加, 即使是广义的也可以. 区域  $\mathcal{X}$  以大于一切  $x$  的数  $a$  (它可以是有限的, 也可以是  $-\infty$ ) 作为聚点. 若在这时  $f(x)$  上有界:

$$f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{X}.$$

则当  $x \rightarrow a$  时函数有一有限的极限. 在与此相反的场所, 它趋向于  $+\infty$ .

证明.  $f(x)$  有上界必有上确界  $A$ . 给定任意的  $\varepsilon > 0$  所以必存在一点  $x' < a$  使得  $f(x') > A - \varepsilon$ . 另一方面我们永远都有  $f(x) \leq A < A + \varepsilon$ . 故对满足上述条件的  $x$  有下面的不等式存在

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

由于  $f(x)$  单调增函数, 所以当  $x > x'$  时有  $f(x) > f(x')$ , 即  $f(x) > f(x') > A - \varepsilon$ . 这就是极限的定义  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

反过来你可以取  $a$  小于一切  $x \in \mathcal{X}$ .  $f(x)$  下有界, 类似的下确界  $A'$  也可以得到类似的不等式  $|f(x) - A'| < \varepsilon$ . □

## 连续函数的性质

**Lemma 3.3.** E.Borel. 若闭区间  $[a, b]$  被一个开区间的无穷系  $\Sigma = \{\sigma\}$  所覆盖, 则恒能从  $\Sigma$  里面选出有限子系

$$\Sigma^* = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n,$$

它同样可以覆盖全区间  $[a, b]$ .

证明. H.lebesgue's. 定义  $x^*$  为区间  $[a, b]$  中使得区间  $[a, x^*]$  能用有限个区间  $\sigma$  来覆盖的点.  $x^*$  肯定是存在, 因为  $a$  就是, 只要找一个包含  $a$  的开区间  $\sigma$  就行, 这样想的话, 又可以找到一群,  $\sigma$  中接近  $a$  的都是这样的点.

所以我们的任务是证明  $b$  也是这样的一个  $x^*$ . 因为一切  $x^* \leq b$ , 故亦有

$$\sup\{x^*\} = c \leq b.$$

, 因为  $c$  也是  $[a, b]$  中一点, 同样可以找到包含它的开区间  $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$ . 但依据上确界的性质, 我们还可以找到  $x^*$  使得  $\alpha < x^* \leq c$ . 所以现在把  $\sigma_0$  来在加到有限个区间  $\sigma$  里面去, 现在就可以覆盖区间  $[a, c]$ , 也就是说上确界  $c$  也是  $x^*$ .

而且  $c$  是不能小于  $b$  的, 如果  $c$  小于  $b$ , 如果是这样  $c$  和  $\beta$  也可以找到一点  $x^*$ , 这与  $c$  是上确界矛盾的. 这样, 必须有  $c = b$ , 即  $b$  也是属于  $x^*$ . 所以  $[a, b]$  可以被有限覆盖.  $\square$

为什么  $(a, b)$  不是紧致的呢? 考虑  $(a + \frac{b-a}{n}, b)$ , 任何一个  $(a, b)$  的真子集都可以被它覆盖, 但是它不能有限覆盖  $(a, b)$ , 因为如果有限就意味着我们能找到一个最大的开区间属于  $(a, b)$ , 实际上这样的开区间并不存在. 但是如果加上  $a$  和  $b$ , 这种方式已经无法覆盖  $a$  和  $b$  两点了.

Compact means small. It is a peculiar kind of small, but at its heart, compactness is a precise way of being small in the mathematical world. The smallness is peculiar because, as in the example of the open and closed intervals  $(0, 1)$  and  $[0, 1]$ , a set can be made “smaller” (that is, compact) by adding points to it, and it can be made “larger” (non-compact) by taking points away.

## 函数连续性和间断

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处右连续或者左连续

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (7)$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0). \quad (8)$$

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有右间断或者左间断是指对应的上式不成立. 例如第一个式子不成立则是右间断.

函数连续的充要条件可以变成函数在点  $x_0$  处连续就是等于说它在这一点是同时左连续和右连续的.

如果  $f(x)$  在  $x_0$  处有有限极限  $f(x_0 + 0)$  和  $f(x_0 - 0)$  存在, 但是它们均不等于  $f(x_0)$ , 则称  $x_0$  是这里是一个普通间断点或者第一类间断点 (跃度). 若极限  $f(x_0 + 0)$  或者  $f(x_0 - 0)$  是无穷或者根本不存在, 则称  $x_0$  这里是第二类间断点.

**Example 3.4.**  $f(x)$  定义在区间  $[0, 1]$  上: 若  $x$  是无理数则  $f(x) = 0$ ; 若  $x$  是有理数表示为不可约通分数  $\frac{p}{q}$  则  $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{p}$ . 可以得到一个有趣的结论:  $f(x)$  在任一有理数有普通间断点, 任一无理数上连续.

事实上无论  $x$  取任意数  $x_0$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 要使得  $f(x) < \varepsilon$ , 只需要取  $p > \frac{1}{\varepsilon}$ . 不满足这样的正整数  $p$  只有有限多个. 我们找一个  $x_0$  的邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  把这些点排除在外, 那么所有在这个邻域里面的点 (排除  $x_0$ ) 都可以满足  $|f(x)| < \varepsilon$ . 即意味着

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若  $x_0$  是一个有理数, 则  $x_0$  是一个普通间断点. 反之若  $x_0$  是一个无理数则在  $x_0$  处连续.



## 单调函数的连续性和间断

**Theorem 3.5.** 单调增 (减) 函数  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  内若有间断, 只能是第一种间断, 即跃度.

证明. 取  $\mathcal{X}$  上任意一点  $x_0$ , 并设它不是  $\mathcal{X}$  的左端点. 则当  $x < x_0$  时有  $f(x) \leq f(x_0)$ , 此时  $f(x)$  是有界的, 根据我们前面证明的单调函数的极限定理,  $f(x)$  在  $x_0$  这里是有左极限存在  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \leq f(x_0)$  (上确界小于任意的上界).

设  $x$  也不是右端点, 那么右极限当  $x > x_0$ , 有  $f(x) \geq f(x_0)$ . 也有极限  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \geq f(x_0)$ . 如果左右极限都等于  $f(x_0)$  则  $f(x)$  在这点连续.  $\square$

**Theorem 3.6.** 若单调函数  $f(x)$  在区间  $\mathcal{X}$  上对应的函数值充满整个区间  $\mathcal{Y}$  (任意  $y \in \mathcal{Y}$  都至少有一个  $f(x_0)$  与之对应), 则  $f(x)$  在  $\mathcal{X}$  上连续.

证明. 假设  $f(x)$  在  $\mathbf{X}$  上存在一间断点  $x_0$ , 我们知道这样的间断点只能是第一间断点. 即在  $x_0$  这一点两边都有极限但是不等于  $f(x_0)$ . 在这种情况下我们需要找到一点  $y_0 \in \mathcal{Y}$  它并不能被  $f(x)$  覆盖从而推出矛盾. 当  $x < x_0$  时有  $f(x) < f(x_0)$ . 这里我们就找出了这样  $y$  属于  $f(x) < y < f(x_0)$ .  $\square$

这个定理非常的有用, 它可以很简单直接来描述一些单调初等函数的连续性, 而不需要用定义来刻画.

## 连续函数的复合

## 一个有趣的方程的解

**Example 3.7.** 求定义在区间  $(-\infty, +\infty)$  上满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

的一切连续函数  $f(x)$ .

证明. 这个函数只能是  $f(x) = cx$ .

□

## 函数连续性在计算极限时的应用

有三个比较重要的极限.

1.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e$

直接用对数函数的性质, 把  $\alpha$  放到对数函数里面就行, 对数函数里面的极限是  $e$ . 当  $a = e$  时极限的结果就是很漂亮的 1.

2.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$

遇到这样略微有些复杂的表达式, 直接考虑换元. 让  $\beta = a^\alpha - 1$ , 则  $\beta \rightarrow 0$ . 原式就变成了  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta}{\log_a(\beta+1)}$ . 变成了上面我们熟悉样子.

3.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu$

还是考虑换元, 但是不要换的太彻底, 适可而止即可.  $\beta = (1+\alpha)^\mu - 1$ , 其中  $\beta \rightarrow 0$ . 我们可以得到一个有趣的等式  $\mu \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta)$ . 到这里就够了, 不用把  $\beta$  把  $\alpha$  表示出来. 我们把原式现在整理如下

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

又变成了我们熟悉的样子, 两边的极限都是 1, 所以最后的整体的极限为  $\mu$ .

## 连续函数的性质

零点定理或者 Bolzano-Cauchy 第一定理.

**Theorem 3.8.** 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$  即两端函数值异号. 则存在一点  $c$  使得  $f(c) = 0$ .

证明. 在这里可以用上区间套, 取  $c = \frac{a+b}{2}$ , 如果  $f(c)$  正好等于 0 那就太好了, 我们一下子就找到了它. 如果  $f(c)$  并不等于 0, 那么  $[a, \frac{a+b}{2}]$  和  $[\frac{a+b}{2}, b]$  必有一个区间两端异号, 我们再取这个区间的中间值. by induction, 我们只需要研究最差的情况有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则存在极限  $\lim a_n = \lim b_n = c$ . 再根据我们的取法还有  $f(a_n) < 0$  和  $f(b_n) > 0$ . 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $c$  点是有极限存在的, 并且左右极限是相等的, 那么只能  $\lim f(c) = 0$ .  $\square$

上面定理其实还有一种证法, 但是需要给出一个小 lemma. 也就是连续保号的性质.

**Lemma 3.9.** 若函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 且  $f(x_0)$  不等于 0, 则对于充分接近  $x_0$  的一切  $x$  的函数值  $f(x)$  仍保持着在  $f(x_0)$  的函数值.

证明. 根据连续的定义, 任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $|x - x_0| < \delta$  使得  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  成立. 若  $f(x_0) > 0$ , 我们把这个不等式左边的绝对值拿到我们有  $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ , 只要我们让这个  $\varepsilon$  取的足够小, 就能使得  $f(x_0) - \varepsilon > 0$ . 即  $\varepsilon < f(x_0)$  就行. 反之若  $f(x_0) < 0$ , 有  $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ , 同样只要这个  $\varepsilon$  取的足够小, 可以使得  $f(x_0) + \varepsilon < 0$ . 即  $\varepsilon < -f(x_0)$ .  $\square$

利用这个 lemma 再给出一种证明, 这个证明也是我中意的.

证明. 现在我们从任意一个端点出发, 例如我选点  $a$ . 先假设没有这样的点  $c$  存在使得  $f(c) = 0$ . 并设  $f(a) < 0$ , 我们可以选一个特殊的区间出来  $[a, d]$ , 有上面这个 lemma 我们可以让这个区间里面所有的  $x$  都有  $f(x) < 0$ , 那么这个  $d$  最大可以取到哪里呢? 肯定存在一个最大值, 因为  $f(b) > 0$ , 所以一定有  $d < b$ . 我们现在考虑在这种情况下, 充分接近  $d$  右边的  $x$  一定都有  $f(x) > 0$ , 如果不是这样我们可以取更大的  $d$ . 那么在  $d$  点这里, 有  $\lim_{x \rightarrow d-0} < 0$  和  $\lim_{x \rightarrow d+0} > 0$ , 这表示在这  $d$  这一点并不连续, 与假设矛盾.

上面是我们子集的论证过程, 其实有点模糊, 再记录一下更正规的论证方式. 还是设  $f(a) < 0$ , 我们可以取出所有  $f(\bar{x}) < 0$  这样的  $x$ . 因为  $f(b) > 0$ , 所以  $\{\bar{x}\}$  上有界, 我们取  $c = \sup\{\bar{x}\}$ . 我们来探讨一下  $f(c)$  的大小, 若是  $f(c) < 0$ , 根据前面的 lemma 在充分接近  $c$  的右边也存在  $x$  使得  $f(x) < 0$ , 这就和  $c$  是上确界矛盾了. 同样  $f(c) > 0$ , 我们也可以在  $c$  的左边找到  $f(x) > 0$ , 这也和  $c$  是上确界矛盾.  $\square$

## 导数及微分

导数常用的表示法.

1.  $\frac{dy}{dx}$  或  $\frac{df(x_0)}{dx}$  莱布尼茨 (G.W.Leibniz);
2.  $y'$  或者  $f'(x_0)$  拉格朗日 (J.L.Lagrange);
3.  $Dy$  或者  $Df(x_0)$  柯西 (A.L.Cauchy).

### 常用导数求法和表示

1. 常函数的导数等于 0. 这个就非常 trivial 了.

2.  $y = x^n$ , 其中  $n$  是自然数.  $y' = nx^{n-1}$ .

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$  这个式子二项式展开即可. 即  $x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots$ .

3.  $y = \frac{1}{x}$ .  $y' = -\frac{1}{x^2}$ . 直接用导数的基本定义就行.

4.  $y = \sqrt{x}$ .  $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ . 直接用导数的基本定义就行.

5.  $y = x^\mu$ , 其中  $\mu$  是任意实数.  $y' = \mu x^{\mu-1}$ .

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{(x+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$ . 其中左边极限是我们前面写过的一个重要极限值为  $\mu$ .

6.  $y = a^x$ , 其中  $a > 0$ .  $y' = a^x \cdot \ln a$ .

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ . 最后等式做边又是我们熟悉的极限.

## 函数的增量公式

设  $y = f(x)$ . 在  $x$  的定义域上固定一个  $x_0$ , 用  $\Delta x \leq 0$  表示  $x$  的任意增量. 于是对应的函数的增量为

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

若  $y = f(x)$  在  $x_0$  处有有限的导数  $y'_x = f'(x_0)$ . 则函数的增量可以表示如下的形式.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

或者更简短地

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

式中的  $\alpha$  是依赖  $\Delta x$  的变量, 且随着  $\Delta x$  一同趋于零.

这个  $\alpha$  是怎么来的呢? 在导数的定义中,  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'_x.$$

故令

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x.$$

这里可以看出来  $\alpha \rightarrow 0$ . 通过这个等式把  $\Delta y$  表示出来就是前面的等式.

因为  $\alpha \cdot \Delta x$  是比  $\Delta$  更高阶的无穷小. 故上面的等式还可以改成写

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

这个式子相对来说就非常简洁了.

## 复合函数的导数

设函数  $\mu = \varphi(x)$  在某一点  $x_0$  处有导数  $u'_x = \varphi'(x_0)$ . 函数  $y = f(\mu)$  在对应的  $\mu_0 = \varphi(x_0)$  也有导数  $y'_u = f'(u_0)$ . 于是复合函数  $y = f(\varphi(x))$  在  $x_0$  处亦有导数

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

证明. 先根据导数的定义来求  $\Delta y$ . 给  $x$  以任意增量  $\Delta x$ ,  $\Delta u$  是函数  $u = \varphi(x)$  对应增量, 最后  $\Delta y$  是由增量  $\Delta u$  所引起的函数  $y = f(u)$  的增量. 根据函数增量公式我们有

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u.$$

然后两边都除以  $\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\Delta u}{\Delta x}$  就是  $u'_x$ , 而  $\alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$  是一个趋于 0 高阶无穷小. 所以最后

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

□

这个式子也是我们常说的链式法则 (记得在以前在看 mit 的微积分的时候, 那个代课老师在讲链式法则的时候, 突然拿了一条真的链子出来. 说这个法则的强大在于让我们挣脱了链子的束缚...), 可以推广到任意有限个函数复合的情形. 我们可以尝试来推一下二阶链式法则.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)' &= \left(\frac{dy}{du}\right)' \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)' \\ &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \\ &= \frac{d^2y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \end{aligned} \tag{9}$$



## 高阶导数及高阶微分

二阶微分记为:

$$d^2y = d(dy).$$

二阶微分的微分记为:

$$d^3y = d(d^2y).$$

一般地说, 函数  $y = f(x)$  的  $(n-1)$  阶微分的微分称为函数  $y = f(x)$  的  $n$  阶微分

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

在求高阶微分时很重要的一件事, 是要记住  $dx$  是不依赖于  $x$  的任意的数, 关于  $x$  而微分时必须把它看成常数因子. 在这种情形, 将有

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2, \\ d^3y &= d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y''' \cdot dx) \cdot dx^2 = y''' \cdot dx^3. \end{aligned}$$

很容易可以猜出普遍规律是

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n.$$

由它可以进一步推得

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

但是高阶微分没有形式不变性, 即若  $x = \varphi(t)$ , 于是  $y$  可以看成  $t$  的复合函数  $y = f(\varphi(t))$ . 它关于  $t$  的一阶微分可以写成

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

其中  $dx = x'_t \cdot dt$ . 再求它关于  $t$  的二阶微分

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx) = y'' \cdot dx + y'_x \cdot d^2x.$$

这才是二阶微分的一般形式. 之前的高阶微分形式  $x$  是自变量, 所以  $d^2x = 0$ .

## 多元函数

### 多元函数的复合

**Definition 5.1.** 给定某多元函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 现在假定在  $m$  维空间的某一点集  $\mathcal{P}$  内给定  $m$  个变量  $t_1, t_2, \dots, t_m$  的  $n$  个函数

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

若假定点  $(t_1, \dots, t_m)$  在  $\mathcal{P}$  范围内变动时, 与之对应的  $(x_1, \dots, x_n)$  总是不越出  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的定义域. 那么  $u$  就可以看做以  $t_1, \dots, t_m$  为自变量的复合函数

$$u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_m)).$$

要注意这里  $m$  和  $n$  是不一样的.