Mathematical Analysis

枫聆

2021 年 1 月 23 日

目录

实数

实数连续性

由于在有理数上划分存在一种边界无法确定的情况，即把数轴上所有有理数划分为 $A|A'$, 其中要求 A 中所有的有理数都小于 A' 中的有理数，在 A 中无最大有理数，且 A' 中无最小有理数，这种情况下无法确定划分两者的边界，所以引入了无理数的概念，约定上面这种特殊的划分情况定义了某个无理数的 α，让这个 a 代替缺少的界数，把它插在了 A 里面一切数 a 和 A' 里面一切数 a' 中间。

用上面这种思路来理解有理数也是可以的，对任意一有理数 r 存在两种确定它的划分，还是前面的划分方式即 $a < r$ 在下组 A 中,$a > r$ 在上组 A' 中，而有理数 r 本身可能含于 A 或者 A', 如果在 A 中，即 A 中有最大有理数，反之在 A' 中，则有最小有理数. 为了确定起见，在提及确定有理数 r 的时候，常把其置于固定的一组，即 A 和 A' 任选一个，以后一直用它，在这里取 a 在上组.

实数之间的序关系, 用划分它集合对应的包含关系来描述，在有理数里面已经有这样的性质了，再看一下无理数，定义划分 $A|A'$ 确定无理数 α，划分无理数 $B|B'$ 确定 β, 即对应下述三种关系

1. $\alpha = \beta$，A 和 B 重合，A' 和 B' 重合.
2. $\alpha > \beta$, A 包含 A'.
3. $\alpha < \beta$, A' 包含 A.

还有一个传递关系 $\alpha > \beta, \beta > \gamma$, 则 $\alpha > \gamma$，这些性质都比较容易证明。

Lemma 1.1. *对于不论怎样地两个实数 α 和 β, 其中 $\alpha > \beta$, 恒有一个位于它们中间的有理数 r: $\alpha > r > \beta$.*

证明. 这个性质更强了，两个实数 $(\alpha > \beta)$ 之间不仅有实数，还有有理数。来证明一下，定义 α 对应 $A|A'$ 有理数域上的划分，β 对应 $B|B'$，因为 $\alpha > \beta$，所以有 A 包含 B, 所以可以在 A 上取一点有理数 r 它不含于 B, 于是它属于 B', 使得 $\beta \leq r < \alpha$,A 里面没有最大数 (按照前面的统一), 所以把 r 取的大一点就可以把等号去掉. □

开始进攻戴德金基本定理)

Theorem 1.2. *对于实数域内的任一划分 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}'$ 必有产生这划分的实数 β 存在，β 或是下组 $\boldsymbol{A}$ 中最大数，或是上组 $\boldsymbol{A}'$ 中最小数.*

证明. 首先还是先把实数域上的划分规定先拿出来，定义 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 是两个非空集合，每一个实数必落在 $\mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{A}'$ 其中一个里面，且 $\mathbf{A}$ 里面的数都大于 $\mathbf{A}'$ 里面的数.

将 $\mathbf{A}$ 里面的一切有理数记为 A，$\mathbf{A}'$ 里面的一切有理数记为 A'，容易证明这样 $A|A'$ 是一个有理数域上划分，划分确定了一个实数 β. 它应该落在 $\mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{A}'$ 中，假设它落在 $\mathbf{A}$ 上，则它是 $\mathbf{A}$ 中的最大数，假设它不是最大数，则还存在一个 α_0 使得 $\alpha_0 > \beta$, 根据前面的 lemma 两个实数之间又可以确定一个有理数 $\alpha_0 > r > \beta$, 与前提有理数划分的界数矛盾，所以 β 是 $\mathbf{A}$ 中最大数. □

极限论

数列极限

数列，整序傻傻分不清....

Definition 2.1. 若对于每一整数 ε, 不论它怎样小，恒有序号 N, 使在 $n > N$ 时，一切 x_n 的指满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

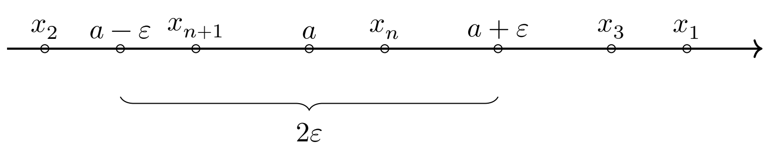
, 则称常数 a 为整序变量 $x = x_n$ 的极限.

a 是整序变量的极限这一事实，记成:

$$\lim x_n = a \text{ 或者 } \lim x = a$$

, 也可以说这个序列收敛于 a

有一个很有趣的几何解释在这里,



以 a 点为中心的线段不论取的多小 (其长度为 2ε), 一切 x_n 点从某点起，必全部落在这线段之内, 这样在线段之外一定只有有限长度个点了, 表示极限的点 a 表示整序变量的数值的点的凝聚中心.

区间套

Lemma 2.2. 给定单调增数列 x_n 和单调减数列 y_n，且恒有

$$x_n < y_n,$$

若其差 $y_n - x_n$ 趋向于 0，则它们有公共有限极限:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

常用形式是取一个闭区间 $[a, b]$，然后在取一个区间 $[a', b']$ 使得

$$a \leq a' < b' \leq b$$

，则 $[a',b']$ 是套在 $[a,b]$ 里面的.

设有一区间套的无穷序列

$$[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n],\cdots$$

后一个总是套在前面一个内，并且在 n 增大时这些区间的长度趋向于 0:

$$\lim b_n - a_n = 0.$$

则区间的两端点 a_n 和 b_n 趋于共同极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

收敛原理

Theorem 2.3. *数列变量 x_n 有有限极限的充分必要条件是: 对于每一个数 $\varepsilon > 0$，存在序号 N，使得 $n > N$ 及 $n' > N$，不等式*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

成立.

记录一下用分割法证明其必要性.

证明. 设前提条件都已经满足，在全体实数域下构造一个划分. 对于任何实数 α，若 x_n 从某项其满足不等式

$$x_n > \alpha,$$

则取这种实数 α 归入下组 A，其余的 (即不落在 A 里面的) 一起实数归入上组 A'.

首先我们来说明这样确实产生了一个实数上的划分. 由前提条件，对于任意数 $\varepsilon > 0$ 及其对应的 N. 若 $n > N$ 及 $n' > N$，则下面不等式成立

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

. 现在我们可以看到每一个数 $x_{n'} - \varepsilon$ 都是小于 x_n 的，所以它归入下组 A. 另一方面 $x_{n'} + \varepsilon$ 都大于 x_n，所以 $x_{n'} + \varepsilon$ 放不进去 A，那它只能归入 A' 了, 所以 A 和 A' 都是非空的. 我们的划分方式对于每一个数 α 和确定序列 x_n，要么它属于 A 或者属于 A'. 同时 A 中实数都小于 A' 的实数. 如果 $\alpha > \alpha', \alpha \in A, \alpha' \in A'$，则 x_n 从某一项其也都大于 a'，这样就产生矛盾了. 所以确实产生了一个实数上的划分.

根据戴德金基本定理，有实数 a 存在它是这两组数之间的界数，即

$$\alpha \leq a \leq \alpha'.$$

我们注意到当 $n > N$ 时，$x_{n'} - \varepsilon$ 是一个 α, 而 $x_{n'} + \varepsilon$ 是一个 α'. 所以我们有

$$x_{n'} - \varepsilon \leq a <\leq x_{n'} + \varepsilon$$

. 即 $|x_{n'} - a| \leq \varepsilon$，所以 $\lim x_n = a$. □

Theorem 2.4. *B.Bolzano-C.Weierstrass. 任何有界数列内恒能选出收敛于有限极限的部分极限.(有界序列一定有收敛子列)*

证明. 假设一切 x_n 都位于界限 a 与 b 之间. 现在将 $[a,b]$ 分为两半，则必有一半含有无限多个数列 x_n 里面的元素. 因为不是这样则数列 x_n 就有有限多个了. 用 $[a_1,b_1]$ 表示其中含有无限多个数列元素的那半个区间 (若两个区间都含有无限多个数列元素，任取一个即可). 类似的取在区间 $[a_1,a_2]$ 分出它的一半 $[a_2,b_2]$，使得它也含有无限多个 x_n. 继续这种取法至无穷，在第 k 次分出的区间 $[a_k,b_k]$ 内同样也有无穷多个 x_n. 此外，第 k 个区间的长度为

$$\frac{b-a}{2^k}.$$

可以看到这个长度趋于 0 的，然后把区间套用在这里，就可以知道 a_k 和 b_k 是趋于某个公共极限 c.

也就是说从上面我们分出来的区间里面，都挑一个元素出来，构成的子列是取趋于某个极限的. □

利用 BC 定理，我们可以尝试把前面对收敛原理的证明可以写的更简单.

证明. 假设前提条件满足，即对任意的 $\varepsilon>0$，当 $n>N, n'>N$ 时 $|x_n-x_{n'}|<\varepsilon$. 也就是

$$x_{n'}-\varepsilon<x_n<x_{n'}+\varepsilon.$$

可以看到 x_n 是有界的，可以想象把这个界限拉长把前 N 个 x_n 也包含进来.

假设从 $\{x_n\}$ 里面挑出来某个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 c，即

$$|x_{n_k}-c|<\varepsilon.$$

当 $n_k>N, n>N$ 时，我们有

$$|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon.$$

两式联立有

$$|x_n-c|<2\varepsilon.$$

所以 x_n 也是收敛于 c 的. □

一元函数

连续函数的性质

Lemma 3.1. E.Borel. 若闭区间 $[a,b]$ 被一个开区间的无穷系 $\sum=\{\sigma\}$ 所覆盖，则恒能从 $\sum$ 里面选出有限子系

$$\sum^{*}=\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,$$

它同样可以覆盖全区间 $[a,b]$.

证明. H.lebesgue' s. 定义 x^* 为区间 $[a,b]$ 中使得区间 $[a,x^*]$ 能用有限个区间 σ 来覆盖的点. x^* 肯定是存在，因为 a 就是，只要找一个包含 a 的开区间 σ 就行, 这样想的话，又可以找到一群，σ 中接近 a 的都是这样的点.

所以我们的任务是证明 b 也是这样的一个 x^*. 因为一切 $x^*\leq b$, 故亦有

$$\sup\{x^*\}=c\leq b.$$

, 因为 c 也是 $[a,b]$ 中一点, 同样可以找到包含它的开区间 $\sigma_0=(\alpha,\beta)$. 但依据上确界的性质，我们还可以找到 x^* 使得 $\alpha<x^*\leq c$. 所以现在把 σ_0 来在加到有限个区间 σ 里面去, 现在就可以覆盖区间 $[a,c]$，也就是说上确界 c 也是 x^*.

而且 c 是不能小于 b 的，如果 c 小于 b, 如果是这样 c 和 β 也可以找到一点 x^*，这与 c 是上确界矛盾的. 这样，必须有 $c=b$，即 b 也是属于 x^*. 所以 $[a,b]$ 可以被有限覆盖. □

为什么 (a,b) 不是紧致的呢? 考虑 $(a+\frac{b-a}{n},b)$，任何一个 (a,b) 的真子集都可以被它覆盖，但是它不能有限覆盖 (a,b)，因为如果有限就意味着我们能找到一个最大的开区间属于 (a,b)，实际上这样的开区间并不存在. 但是如果我们加上 a 和 b，这种方式已经无法覆盖 a 和 b 两点了.

Compact means small. It is a peculiar kind of small, but at its heart, compactness is a precise way of being small in the mathematical world. The smallness is peculiar because, as in the example of the open and closed intervals $(0,1)$ and $[0,1]$, a set can be made “smaller” (that is, compact) by adding points to it, and it can be made “larger” (non-compact) by taking points away.

函数连续性在计算极限时的应用

有三个比较重要的极限.

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e$

   直接用对数函数的性质，把 α 放到对数函数里面就行，对数函数里面的极限是 e. 当 $a=e$ 时极限的结果就是很漂亮的 1.

2. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a$

   遇到这样略微有些复杂的表达式，直接考虑换元. 让 $\beta=a^{\alpha}-1$, 则 $\beta\to 0$. 原式就变成了 $\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(\beta+1)}$. 变成了上面我们熟悉样子.

3. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu$

   还是考虑换元，但是不要换的太彻底，适可而止即可. $\beta=(1+\alpha)^{\mu}-1$，其中 $\beta\to 0$. 我们可以得到一个有趣的等式 $\mu\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta)$. 到这里就够了，不用把 β 把 α 表示出来. 我们把原式现在整理如下

   $$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

   又变成了我们熟悉的样子，两边的极限都是 1，所以最后的整体的极限为 μ.

导数及微分

导数常用的表示法.

1. $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x_0)}{dx}$ 莱布尼茨 (G.W.Leibniz)p;
2. y' 或者 $f'(x_0)$ 拉格朗日 (J.L.Lagrange);
3. Dy 或者 $Df(x_0)$ 柯西 (A.L.Cauchy).

常用导数求法和表示

1. 常函数的导数等于 0. 这个就非常 trivial 了.
2. $y = x^n$, 其中 n 是自然数. $y' = nx^{n-1}$.

   $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$ 这个式子二项式展开即可. 即 $x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-1} + \cdots$.
3. $y = \frac{1}{x}$. $y' = -\frac{1}{x^2}$. 直接用导数的基本定义就行.
4. $y = \sqrt{x}$. $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. 直接用导数的基本定义就行.
5. $y = x^\mu$, 其中 μ 是任意实数. $y' = \mu x^{\mu-1}$.

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{u-1} \cdot \frac{(x+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$. 其中左边极限是我们前面写过的一个重要极限值为 μ.
6. $y = a^x$, 其中 $a > 0$. $y' = a^x \cdot \ln a$.

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. 最后等式做边又是我们熟悉的极限.

高阶导数及高阶微分

二阶微分记为:

$$d^2y = d(dy).$$

二阶微分的微分记为:

$$d^3y = d(d^2y).$$

一般地说，函数 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶微分的微分称为函数 $y = f(x)$ 的 n 阶微分

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

在求高阶微分时很重要的一件事，是要记住 dx 是不依赖于 x 的任意的数，关于 x 而微分时必须把它看成常数因子. 在这种情形，将有

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2,$$
$$d^3y = d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y''' \cdot dx) \cdot dx^2 = y''' \cdot dx^3.$$

很容易可以猜出普遍规律是

$$d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n.$$

由它可以进一步推得

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

但是高阶微分没有形式不变性，即若 $x = \varphi(t)$，于是 y 可以看成 t 的复合函数 $y = f(\varphi(t))$. 它关于 t 的一阶微分可以写成

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

其中 $dx = x'_t \cdot dt$. 再求它关于 t 的二阶微分

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx) = y'' \cdot dx + y'_x \cdot d^2x.$$

这才是二阶微分的一般形式. 之前的高阶微分形式 x 是自变量，所以 $d^2x = 0$.