

Topology

枫聆

2021 年 1 月 1 日

目录

1	写在最前面	2
2	Topology Space	3
2.1	Definition of Topology Space	3
2.2	Properties of Topology Space	9
2.3	Potency of Set and Countable Set	13
2.4	Continuous Map and Homeomorphism	15
2.5	Product Topology	18
2.6	Subspace Topology	22
2.7	Quotient Map and Quotient Space	24
3	General Topology	33
3.1	Countability	33
3.2	Distinguishable	38

写在最前面

拓扑对我来说是新名字,我对它几乎一无所知,虽然我嘴上总是吵吵着代数拓扑是我的终极目标(~ o ~)~zZ,终于今天抱着巨大的勇气翻开了包志强老师的《点集拓扑和代数拓扑引论》,被文中老师幽默的行文,深深折服了,似乎拓扑也并没有想象中那么难,我想这是还不错的开始,我的第一直观感受拓扑也是给定一堆对象,在上面用一些公理弄些不一样的结构,似乎和代数一样,但是我暂时还不知道这堆结构要拿来干什么?有什么有趣的性质?

好吧,前面的路还很长,路漫漫,不过一想到前路那些绮丽的景色,多少还是有些兴奋的!虽然这路上没有一起分享喜悦的人...

2020 年 11 月 29 日 23:12:17

Topology Space

Definition of Topology Space

预备知识

- 子集族是指 X 幂集的子集, 所有子集族构成的集合则是 $2^{(2^X)}$

拓扑定义的直觉来自于微积分中连续函数的“ $\varepsilon - \delta$ ”语言定义。

Definition 2.1. 如果函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta$, 对 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立。

这个定义需要 $|x - x_0| < \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 这样的度量关系来定义, 但是对于抽象的结构, 不能有这样具体的度量关系, 需要把绝对值和减法拿掉才行, 所以我们抽象的“邻域”来描述两点之前的具体, 把所有接近 x_0 程度为 δ 的点记做 $B_\delta(x_0)$, 这就是邻域的形式化表示, 然后对于各种稀奇古怪的接近标准都可以用这个形式来表示。于是乎上面的连续定义可以稍微变一下了

Proposition 2.2. 如果函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 有 $x \in B_\delta(x_0)$, 使得 $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$, 即 $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$

完美的略掉了度量关系, 在这里 $B_\delta(x_0)$ 表示 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$, 最后那个包含关系是指 $f(x_0)$ 的任何 ε 程度下的原像包含 x_0 的某个 δ 邻域。

是否我们可以通过上面这种定义邻域的方式去把度量空间变成一般拓扑空间呢? 当然是可以的, 但是我们现在还没有给出邻域的一般定义。那邻域是什么? 在邻域之前, 应该先理解基准开邻域结构 (base open neighborhood), 像定义代数结构一样, 基准开邻域结构是一个映射 (算子) $\mathcal{N}: X \rightarrow 2^{(2^X)}$, 把每一个点 $x \in X$ 对应到一个子集族 $\mathcal{N}(x)$ 上, 满足下面几条公理

- $\forall x \in X, \mathcal{N}(x) \neq \emptyset$, 并且 $\forall U \in \mathcal{N}(x), x \in U$
- 若 $U, V \in \mathcal{N}(x)$, 则存在 $W \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $W = U \cap V$
- 若 $y \in U \in \mathcal{N}(x)$, 则存在 $V \in \mathcal{N}(y)$, 使得 $V \subseteq U$

如果 U 是 x 的一个邻域, 则 U 包含了某个 x 基准开邻域。用文字来叙述就是:

- 每一个 x 都一定有基准开邻域, 并且是其任意基准开邻域的元素
- x 的任意两个基准开邻域的交是 x 的邻域
- 任意基准开邻域是其所含每个元素 y 的邻域

这个邻域的定义非常的奇特，那它奇特在什么地方呢？其他地方（"Topology and Groupoids"）关于邻域的定义是这样的：

- 如果 N 是 x 的一个邻域，则 $x \in N$ ；
- 如果 N 是一个包含 x 某个邻域的 X 的子集，则 N 同样是 x 的邻域；
- 两个 x 的邻域的交还是一个 x 的一个邻域；
- 如果 N 是 x 的一个邻域，且 N 包含一个 x 的邻域 M ，则 N 是 M 中所有点的邻域；

我更倾向于后面这种定义邻域的办法，不要用基准开邻域来定义，因为基准开邻域其实是 open neighborhood 的概念，它是指它确实同时满足开和邻域的条件。这里同样可以给一个命题“如果一个子集 N 是 x 的 open neighborhood 当且仅当它是一个基准开邻域”。基准开邻域这个概念似乎非常 old fashion，我在其他书中都没有看见过，奈何包包老师的书里有，所以这里需要好好思考一下。后面用基准开邻域的时候就想一下 open neighborhood.

我们现在可以用邻域的公理来定义拓扑空间，用 \mathbf{N} 表示一个邻域拓扑，即 \mathbf{N} 表示一个所有非空的 $\mathbf{N}(x)$ 构成的邻域族，最后 (X, \mathbf{N}) 表示一个拓扑空间，这种构造方式是 Hausdorff 提出来的，但是一般地经常用开集的公理来定义领域。

用 (X, τ) 表示一个拓扑空间，其中 τ 表示 X 的一个子集族，并且满足下面公理：

- $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
- τ 中任意两个元素的交集仍属于 τ
- τ 中任意多个元素的并集仍属于 τ

则称 τ 里面的元素为开集， τ 表示 X 上的一个拓扑结构。注意这里第二条公理并不是和第三条公理一样是 infinite，这里特指 finite，为什么呢？我举个后面会提及的特殊拓扑结构—余有限拓扑，把这个拓扑结构放到正整数 \mathbb{N} 上，生成的开集如下

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+1\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}$$

它们的闭集都是有限的，然后把这些开集交起来你会发现

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\}$$

，得到的结果并不是一个开集，因为它的闭集并不是有限的。

开集定义的拓扑空间看起来要比邻域定义，要稍微简洁那么一点，两个定义都是等价的，你可以用邻域的推到开集。在邻域上基础上我们定义如果 U 是 X 的一个子集，且 U 是每一个 $x \in U$ 的领域，则称 U 是一开集。基准开邻域的第三条公理告诉我们基准开邻域肯定是一个开集，然后我们给出一个命题

Proposition 2.3. 一个集合是开集当且仅当它是若干个基准开邻域的并集

证明. 如果当一个集合是开集时, 根据开集的定义, 它里面每个元素都有一个邻域, 而每个邻域至少包含一个基准开邻域, 因此所有基准开邻域的并构成了这个开集. 反之若干个基准开邻域的并, 还是一个基准开邻域, 前面说过基准开邻域是一个开集.

注意, 空集也是一族基准开邻域的并, 只不过这个集合族是空族。□

这个命题证明以后, 现在来看看我们用邻域定义得到的开集是否遵循开集的基本公理? 很显然地, 当并集是基准开邻域并的情况下, 是满足上述的开集公理的. 回顾前面的定义, 基准开邻域在这里起了不小作用, 那为什么不一开始使用基准开邻域来定义开集呢? 而是使用邻域? 下面引用一段包老师的话, 写的真好!

基准开邻域结构 (三条公理) 和邻域结构 (四条公理) 都能刻画连续性. 通常邻域结构很多, 并不方便写出来, 而基准邻域结构则是比较容易写出的, 但它的缺点是: 同一种连续性可以用不同的基准开邻域来描述. 打个比方, 邻域结构就是一个线性空间里面所有的向量, 而基准开邻域相对于一个线性空间里面的基, 所以很显然, 在定义拓扑概念时, 我们是希望从具有确定性的邻域结构出发去定义, 等到具体计算的时候再用基准开邻域, 而不是从基准开邻域结构出发去写一个表达式, 用不那么确定的公式作为定义. 当然邻域结构里面仍然包含很多冗余信息, 因此我们最终选择另一套与之相互唯一确定的, 更加简洁齐整的东西, 把它称为拓扑结构 (开集族)

当我们把一个拓扑空间当作一个整体去研究的时候, 用开集公理要比邻域的公理更加方便, 邻域公理似乎更强调 “ x 点附近” 会怎么样了? 但是开集要更抽象一点, 需要花些时间去理解, 好吧我已经花了不少时间了!!!

Example 2.4. 集合 X 上的一个平凡拓扑为 $\{X, \emptyset\}$, 形象一点说就是 “在 X 上无论怎么着都算充分接近”, 即取一个 X 作为 x 的基准开邻域, 平凡拓扑是 X 上最小的拓扑结构。

Example 2.5. 集合 X 上的一个离散拓扑为 $\{X, 2^X\}$, 形象一点说就是 “在 X 上只有等于 x 才算是和 x 充分接近”, 离散拓扑是 X 上最大的拓扑结构. 暂时不理解什么是等于, 而不是包含, 但是最大的子集族确实是 2^X

这里有一个简单的小命题

Proposition 2.6. 如果 (X, τ) 是一个 τ 包含了所有 $x \in X$ 的单点集的拓扑空间, 则它是一个离散拓扑空间.

还有两个比较重要的拓扑结构

Example 2.7. 设 X 含有无穷多个元素, 定义

$$\tau_f = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ 或者 } A^c \text{ 有限}\}$$

则 τ_f 是一个拓扑结构, 称为 X 上的余有限拓扑 (cofinite topology), 它还有一个直观的名字叫 *finite-closed topology*.

Example 2.8. 设 X 含有不可数无穷多个元素, 定义

$$\tau_c = \{ A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ 或者 } A^c \text{ 可数} \}$$

则 τ_c 也是一个拓扑结构, 称为 X 上的余可数拓扑 (*cocountable topology*), 它同样也还有一个直观的名字叫 *countable-closed topology*.

Example 2.9. 如果所有的单点集 $\{x\}$ 都在拓扑空间 (X, τ) 上是闭集, 则称 (X, τ) 是一个 T_1 -space.

Example 2.10. 如果对于任意的 $a, b \in X$ 且 $a \neq b$, 存在一个开集包含 a 而不包含 b 或者包含 b 而不包含 a , 则称 (X, τ) 是一个 T_0 -space.

T_1 -space 一定是 T_0 -space, 反过来就不一定。

Example 2.11. 只含两个元素的拓扑空间, 只有一个单点集是闭集, 则称这个拓扑空间是一个 *Sierpinski space*. 如果跟明确的刻画就是 $X = \{0, 1\}$, 然后在它上面定义拓扑结构为 $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$, 很明显这个就是一个 T_0 -space, 但是它并不是 T_1 -space.

再来思考一个有意思的问题, 如果在 X 上构造出了多个拓扑结构, 然后用它们是否可以做一些运算?

Example 2.12. 定义 X 上的拓扑结构 τ_1 和 τ_2 , 那么 $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$ 不一定是一个拓扑结构. 直观上两个拓扑结构合在一起之后, 并不能保持封闭性, 比如让 $\tau_1 = \{\emptyset, \{1, 3\}, X\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{2, 4\}, X\}$, 很显然它们并起来并不是一个拓扑结构.

但是, 我们接着定义 $\tau_4 = \tau_1 \cap \tau_2$, 现在 τ_4 就是一个拓扑结构了, 证明也很简单, 任取两个 τ_4 里面的开集, 看一下交和并的封闭性就行。

在介绍度量空间之前, 还是有必要先讲一下欧式空间, 度量空间是欧式空间下的一般情况推广, 欧式空间上的拓扑结构怎么表示呢? 我先看一维欧式空间 \mathbb{R}

Definition 2.13. 给定 \mathbb{R} 上的子集 S , 若 $\forall x \in S$, 存在 $a \in \mathbb{R}$ 和 $b \in \mathbb{R}$, 规定 $a < b$, 使得 $x \in (a, b) \subseteq S$, 则 S 是 \mathbb{R} 上欧式拓扑中的开集.

验证上述定义是否满足拓扑结构还是比较简单的, 但是这个定义还是比较抽象的, 我们也可以更直接一点找出一些开集, 例如 \mathbb{R} 上的所有形如 (r, s) , $(-\infty, r)$, $(r, +\infty)$, 其中 $r, s \in \mathbb{R}$ 它们是很显然满足欧式拓扑下开集定义的, 所以 \mathbb{R} 上的所有开区间都是开集, 但是反过来就不一定了, 因为你可以把两个不相交的开区间并起来.

Proposition 2.14. 给定 \mathbb{R} 上的子集 S , S 是开集当且仅当 S 是若干开区间的并。

很自然地, 所有闭区间 $[a, b]$ 都不是开集, 因为两端点, 并不满足上述定义, 但是它们都是闭集, 因为你取它的余集 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 是一个开集. 还有一些特殊的闭集, 例如单点集 $\{a\}$ 和整数集 \mathbb{Z} .

Proposition 2.15. 有理数集 \mathbb{Q} 既不是开集也不是闭集。

证明. 对于任意 $q \in \mathbb{Q}$, 可以找到两个实数 a 和 b , 使得 $q \in (a, b)$, 但是这样的 (a, b) 并不属于 \mathbb{Q} , 因为两个实数中间存在无数个实数, 并不是有理数, 这其中就包括无理数.

为了证明 \mathbb{Q} 同样不是一个闭集, 只需要证明 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 不是一个开集, 取任意的一个开区间 $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 由实数的稠密性, 任意两个实数是可以确定一个有理数的, 但是 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 并不包含有理数, 所以不存在这样的开区间, 证毕. \square

接着我们再了解一下度量空间. 一个度量就是测量空间中两个点之间距离的一个公式. 当然, 为了确保这个公式真的能起到类似距离的作用, 它还需要满足一些基本的公理.

Definition 2.16. X 上的一个度量 (metric) 是一个映射

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

满足

1. **正定性** (positive definite) $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$, 并且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
2. **对称性** (symmetry) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
3. **三角不等式** (triangle inequality)

$$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

X 和 d 合起来叫一个**度量空间** (metric space), 记做 (X, d) .

然后呢, 在度量空间中可以定义一个自然的基准开邻域结构如下: 考虑那些 $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. 我们称之为 x 的 ε -球心邻域 (ε -ball). 取 $\mathcal{N}_d(x) = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$.

Proposition 2.17. 其中 \mathcal{N}_d 确实是 X 上的一个基准开邻域结构. 由 \mathcal{N}_d 生成的拓扑 τ_d 称为度量空间 (X, d) 上的度量拓扑 (metric topology).

证明. 需要证明 \mathcal{N}_d 满足基准开邻域结构的三条公理:

1. $x \in B_\varepsilon(x)$, 显然地;
2. $B_{\min(\varepsilon, \delta)}(x) = B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(x)$
3. 任取 $y \in B_\varepsilon(x)$, 要给它也找一个基准开邻域 $B_\delta(y)$ 包含于 $B_\varepsilon(x)$, 那么 $B_\delta(y)$ 里面的点也应该是属于 $B_\varepsilon(x)$, 我们不妨再设一点 $z \in B_\delta(y)$, 即 $d(y, z) < \delta$, 确定合适的 δ 要求 $d(x, z) < \varepsilon$, 由三角不等式我们有

下面不等式

$$\begin{cases} d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \\ d(y, z) < \delta \\ d(x, z) < \varepsilon \end{cases}$$

由 (1) 和 (2) 可得 $d(x, z) < \delta + d(x, y)$, 所以我们只需要取 $\delta = \varepsilon - d(x, y)$ 即可.

□

Definition 2.18. 设 τ_ε 是 \mathbb{R}^n 上欧式度量所决定的拓扑, 则拓扑空间 $(\mathbb{R}^n, \tau_\varepsilon)$ 为一个 n 维**欧式空间** (*Euclidean space*), 记为 \mathbb{E}^n .

Properties of Topology Space

一般的基本定义都会从开集出发，如何从开集出发去定义邻域呢？

Proposition 2.19. 一个子集 A 是 x 的邻域当且仅当存在开集 U ，使得 $x \in U \subseteq A$ 。

证明. 从左边证右边，很显然，因为当 A 是 x 的邻域时，可以找到一个 x 的一个基准开邻域，这个基准开邻域也是一个开集，这个还可以用 interior 来证明，interior 就是一个开集。

从右边证左边，稍微有点繁琐但是呢，也好证，先给定邻域子集族

$$\mathcal{N}(x) = \{ A \mid A \supseteq U, U \text{ 是一个开集} \}$$

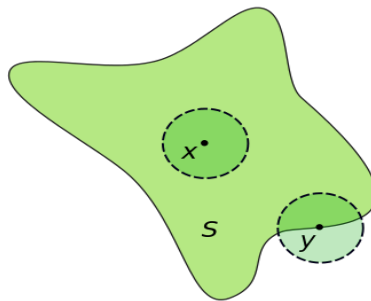
，然后从邻域的 4 条公理出发：

1. $x \in U \subseteq A$ ，这个很显然.
2. $A' \subseteq A \subseteq U$ ，所以 $A' \in \mathcal{N}(x)$.
3. 给定一个 $A' \subseteq U'$ ，其中 U' 也是一个开集，然后呢我再设 $U'^c = A' \setminus U'$ ，相同地 $U^c = A \setminus U$ ，那么 $A' \cap A = (U'^c \cup U') \cap (U^c \cup U) = (U'^c \cap U^c) \cup (U'^c \cap U) \cup (U' \cap U^c) \cup (U' \cap U)$. 其中 $U' \cap U$ 是一个开集，所以 $A' \cap A \in \mathcal{N}(x)$.
4. 任意的 $x \in A$ ，总能找到一个 $A' = \{x\} \cup U \subseteq A$ ，且 $A' \in \mathcal{N}(x)$.

终于完整证完了，其他书上的证明都很简单，给我一种循环论证的感觉。 □

Definition 2.20. 如果 A 是 x 的邻域，则称 x 为 A 的**内点** (*interior point*). 全体内点构成的集合称为**内部** (*interior*), 记做 A°

内点和内部的概念，需要建立在具体的拓扑结构上，取不同的拓扑结构会得到完全不同的结论。



interior 有一个性质很重要就是 interior 是其内部所有点的邻域，所以 interior 也是一个开集。

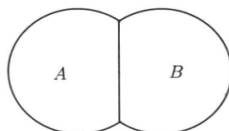
证明. 假设 M 是 x 的基准开邻域, 且 $M \subseteq A$, 那么 M 里面的所有点都有一个邻域含于 M , 也含于 A , 所以 A 是 M 中所有点的邻域, 自然地 $M \subseteq A^\circ$, 所以 A° 是 x 的邻域, 这里的 x 是任意地。 \square

Proposition 2.21. 集合的内部具有以下基本性质:

- $A^\circ = A$ 当且仅当 A 是开集;
- A° 是 A 包含的所有开集的并集, 也是 A 中最大的开集;
- 若 $A \subseteq B$, 则 $A^\circ \subseteq B^\circ$;
- $(A_1 \cap \dots \cap A_n)^\circ = A_1^\circ \cap \dots \cap A_n^\circ$;
- $\left(\bigcup_{i \in n} A_i\right)^\circ \supseteq \bigcup_{i \in n} A_i^\circ$

证明. 1. 这个性质根据从邻域出发给出的开集定义很显然。

2. 如果 A 的子集是一个开集, 这个子集很显然也是属于 A° , 所以 A 里面的所有开集含于 A° , 如何证明 A° 是一个开集呢? 任取 A° 中一点 x , A 是 x 的邻域, 那么一定存在一个包含 x 的基准开邻域, 我们知道基准开邻域是一个并集, 根据基准开邻域的定义, 这个基准邻域肯定也是属于 A° , 由于 x 的任意性, 这样的 x 基准开邻域都并起来就是 A° , 所以 A° 是一个开集。再来证明它是 A 内最大的开集, 假设如果它不是 A 内最大的开集, 那么存在一个更大的开集 $A' \supset A^\circ$, A' 是其所有点的邻域 (根据开集定义), 所有 $A' \subseteq A^\circ$, 这样产生了矛盾, 所以 A° 是最大的开集。
3. 根据邻域的最后一条公理, 邻域的超集还是邻域, 所以 B 是 A° 中所有点的邻域, 所以很自然的 $A^\circ \subseteq B^\circ$
4. 等式的左边表示, 所有集合的交的内部, 等式的右边表示, 所有集合的内部的交, 这里为什么等价呢? 这个关系用图来说是非常明显的, 怎么用文字呢? 应该用数学归纳法来证明, 我先证明对两个集合是成立的, 首先利用第 2 个性质, $(A_1 \cap A_2)^\circ = U_1 \cup \dots \cup U_n$, 其中 $U_1, \dots, U_n \in A_1 \cap A_2$, 很显然它们也属于 A_1° 和 A_2° , 即 $(A_1 \cap A_2)^\circ \subseteq A_1^\circ \cap A_2^\circ$, 反过来 $A_1^\circ \cap A_2^\circ$ 是一个开集, 并且属于 $(A_1 \cap A_2)$, 所以 $A_1^\circ \cap A_2^\circ \subseteq (A_1 \cap A_2)^\circ$, 两边一夹所以, $(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ$, 再用一下数学归纳法, 即可。
5. 这个也需要数学归纳法来证明, 这里只证明两个集合的情况下, $A_1^\circ \cup A_2^\circ \subseteq (A_1 \cup A_2)^\circ$ 这还是显然的, 用第三条性质就可以知道。但是反过来不一样成立, A_1 和 A_2 的”公共边界”上的点, 完全有可能变成 $A_1 \cup A_2$ 内部的点。



□

Definition 2.22. 如果在拓扑空间 (X, τ) 中, 子集 A 的余集 A^c 是开集, 则称 A 为**闭集** (*closed set*)

其中余集 $A^c = X \setminus A$, 在平凡拓扑中, 闭集就是 \emptyset 和 X ; 在离散拓扑中, 任何子集都是闭集; 闭集和开集互为余集, 也可以从闭集出发定义拓扑结构:

Definition 2.23. X 的子集族 σ 是某个拓扑结构下全体闭集构成的集合当且仅当它满足下述三条公理:

- $X \in \sigma, \emptyset \in \sigma$;
- σ 中任意多个元素的交集仍属于 σ ;
- σ 中任意两个元素的并集仍属于 σ ;

我们尝试来推一下开集公理, 第一个公理很显然, 主要看第二个和第三个, 开集和闭集互为余集, 如果 A 和 B 为闭集, 则 A^c 和 B^c 为开集, 根据 De Morgan 定律

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c, A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

, 根据闭集公理, 上面两个等式结果都是开集。

Definition 2.24. 如果 x 每个邻域中都含有 $A \setminus \{x\}$ 中的点, 则称 x 为 A 的聚点或者极限点 (*limit point* 或 *cluster point* 或 *point of accumulation*), 全体聚点构成的集合 A' 称之为 A 的导集 (*derived set*), $\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的闭包 (*closure*). 换言之, $x \in \overline{A}$ 当且仅当 x 的每个邻域中都含有 A 中的点。

突然多了很多定义, 让人触不及防, 因为一开始不知道它们的深刻含义。这个定义感觉很模糊, 因为没有给 A 到底是什么东西, x 和 A 关系是什么?

假设 A 是任意给定一个 X 的子集, 那么 x 也是任意取的, 所以两者并没有直接关系, 而是靠上面刻画了几个关系, 首先把用聚点的定义, 把 x 和 A 联系起来, 然后把这样的 x 都找出来, 于是就有全体聚点这个概念, 再给它一个定义为导集, 把导集和 A 本身并起来, 再给一个定义就是闭包。

上面重新解读了一下定义, 那么再研究一下这个闭包有什么性质? 闭包 \overline{A} 中任意一点 x , 如果 $x \in A'$, 则 x 的每个邻域都含有 A 中的点。如果 $x \in A$, 怎么推出和前面一样的结论呢? 注意这样好像只需要含有就行, 不需要全含, 所以 x 本身在 A 里面这个条件是天然成立的。

Proposition 2.25. 设 A 是 X 的一个子集, 则 $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$.

证明. 这个命题在说明内部和闭包的关系, 从右边出发好像简单一点, A 的闭包的余集, 是指那些点 x 的邻域都不包括 A 中的点。换句话说就是指点 x 有一个邻域都只包含 A^c 的点, 则这个邻域是含于 A^c , 根据内点的定义, 点 x 是 A^c 的内点, 所有这样的点, 就是 $(A^c)^\circ$. 总结一下就是 A 的闭包和 A^c 的内部互为余集。□

我们前面已经证明了每个内部都是一个开集，所以闭包是一个闭集。

于是，所有关于内部的性质都可以用 De Morgan 定律翻译成闭包的性质

- $\overline{A} = A$, 当且仅当 A 是闭集。
- \overline{A} 是包含 A 的所有闭集的交集，也是包含 A 的最小闭集。
- 若 $A \subseteq B$, 则 $\overline{A} \subseteq \overline{B}$
- $(A_1 \cup \dots \cup A_n)^\circ = A_1^\circ \cup \dots \cup A_n^\circ$;
- $\left(\bigcap_{i \in n} A_i\right)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in n} \overline{A_i}$

证明. 我尝试用 $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$, 来简单证明一下第一条, 若 $\overline{A} = A$, 则 $(\overline{A})^c = A^c = (A^c)^\circ$, 后面这个等号根据内部的性质则 A^c 是开集, 所以 A 为闭集 (开集和闭集互为余集)。□

Definition 2.26. 如果 $\overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中稠密 (*dense*)。如果 X 有只含有可数多个元素的稠密子集, 则称 X 可分 (*separable*)。

这个定义有点抽象, 第一个话是指, 定义 X 某个子集 A , 如果对 X 中任意的点 x , 要么属于 A 或者是 A 的一个聚点, 则称 A 在 X 中是稠密的。非正式说法是, 对于 X 中任意的点 x , 要么属于 A 或者“任意接近” A 中的某个点。

Example 2.27. 有理数集是实数集一个稠密集, 因为每一个实数, 可能是一个有理数或者存在一个任意接近它的有理数 (丢番图近似)。

Example 2.28. 用 τ_f 表示 \mathbb{R} 上的余有限拓扑, 则 (\mathbb{R}, τ_f) 可分, \mathbb{N} 就是它的一个可数稠密子集。但是为什么呢? 首先 \mathbb{N} 可数, 那么为什么 \mathbb{N} 是稠密的呢? 根据闭包的性质, $\overline{\mathbb{N}}$ 等于所有包含 \mathbb{N} 闭集的交集。再根据余有限拓扑的定义, 除了 \mathbb{R} 其上闭集是有限的, 但是不存在包含 \mathbb{N} 的有限闭集, 那包含 \mathbb{N} 的闭集只有 \mathbb{R} 了, 所以 $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$ 。

Example 2.29. 用 τ_c 表示 \mathbb{R} 上的余可数拓扑, 则 (\mathbb{R}, τ_c) 不可分。任意的 \mathbb{R} 的可数子集 U , 在余可数拓扑上都是闭集, 而闭集的闭包是自己, $U \neq \mathbb{R}$, 所以不存在这样的可数子集。

下面是一些来自《topology without tears》中的补充性质

Definition 2.30. 如果拓扑空间 (X, τ) 某一个子集 A , 它同时满足开集和闭集, 则称它是 *clopen*。

Potency of Set and Countable Set

对于一个空间来说，比拓扑性质和概念更基本的是它作为集合的那些性质和概念。

Definition 2.31. 设 A, B 是两个集合。如果存在双射 $f: A \rightarrow B$ ，则称 A 和 B 的基数 (cardinality) 或者势 (potency) 相等，记做 $|A| = |B|$ 。

Lemma 2.32. 如果 A, B 是有限集，则 $|A| = |B|$ 当且仅当它们所含的元素相等。

Lemma 2.33. 如果 A 是无限集，则它必有一个可数无限集

证明。按顺序每次取一个就行。 □

Proposition 2.34. 集合 A 无限当且仅当它与一个真子集基数相等。

证明。这个命题值得证明一下，从前面第一个 lemma 我们知道，如果 A 和真子集基数相等，那它肯定不是有限集。反过来 A 如果不是有限集，则它是无限集，第二 lemma 可知，我们可以构造一个可数无限集 $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ ，然后对它再分一个类：

$$S_1 = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}, S_2 = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$$

再建立一个 S 和 S_1 之间的双射 $a_n \leftrightarrow a_{2n-1}$ ，然后再把这个双射扩展到 $S \cup (A \setminus S) = T$ 和 $S_1 \cup (A \setminus S) = A \setminus S_2$ ，都并上了 $A \setminus S$ ，所以把 $a \in A \setminus S$ 映到它自己就行，还是维持 S 和 S_1 的映射。所以现在建立了一个 A 与 $A \setminus S_1$ 的双射。这个证明看起来就没有那么违反直觉，不错不错。 □

Theorem 2.35. Cantor-Schroder-Bernstein, if $|A| \leq |B|$ and $|B| \leq |A|$, then $|A| = |B|$.

证明。定义两个单射 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow A$ 。想象下面的序列：

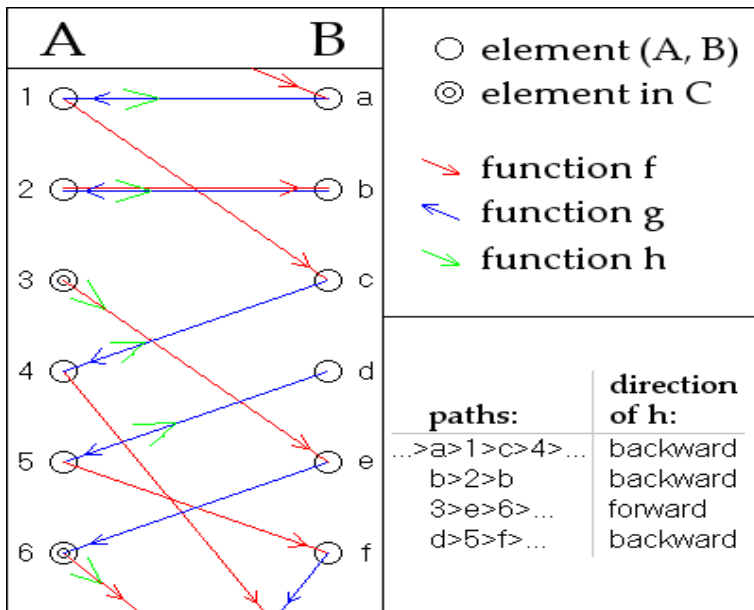
$$\dots \rightarrow f^{-1}(g^{-1}(a)) \rightarrow g^{-1}(a) \rightarrow a \rightarrow f(a) \rightarrow g(f(a)) \rightarrow \dots$$

，其中 $a \in A$ ，从 a 点往左好理解，就是重复使用 f, g ，那从 a 点往右呢？也很好理解，就是重复使用 f^{-1} 和 g^{-1} ，但是呢它可能到某个位置就停了，因为有可能某个地方它们没有定义了，因为我们只保证了 f 和 g 是一个单射。先理解这个性质，我们再来想办法用 f 和 g 构造一个 $h: A \rightarrow B$ 的双射。

按照上面的理解，这个序列有三种情况：

- 从 a 点出发转一圈，有转回来了。其实就是指这条路径上的 f^{-1} 和 g^{-1} 都有定义。
- 想象一直往左边看，如果某个点 f^{-1} 没有定义，那么其实就在某个 $x \in B$ 位置停下了。
- 想象一直往左边看，如果某个点 g^{-1} 没有定义，那么其实就是在某个 $x \in A$ 位置停下了。

先看后面两种情况，如果在 B 点停下了，那么我们就让 $h(x)$ 在这点 $h^{-1}(x) = g(x)$ ，即 $h(x) = g^{-1}(x)$ ，现在我们确定了一个点的对应关系，为什么可以这样取呢？因为 $g(x)$ 是单射，确定这点对应的两点之前关系是唯一的，也就是 $g(x)$ 引出的箭头是唯一的（因为 f^{-1} ）在这点没有定义了，我们考虑这点的 g^{-1} 。对应的如果在 A 点停下了，我们就让 $h(x) = f(x)$ 。那么是一个循环序列我们怎么吗？那么对应这个循环序列里面连着的两点，统一用 g^{-1} 或者 f 来表示对应关系，即可。下图，做一个形象记忆，采自 wiki。



König's definition of a bijection $h:A \rightarrow B$ from given example injections $f:A \rightarrow B$ and $g:B \rightarrow A$. An element in A and B is denoted by a number and a letter, respectively. The sequence $3 \rightarrow e \rightarrow 6 \rightarrow \dots$ is an A-stopper, leading to the definitions $h(3) = f(3) = e$, $h(6) = f(6)$, The sequence $d \rightarrow 5 \rightarrow f \rightarrow \dots$ is a B-stopper, leading to $h(5) = g^{-1}(5) = d$, The sequence $\dots \rightarrow a \rightarrow 1 \rightarrow c \rightarrow 4 \rightarrow \dots$ is doubly infinite, leading to $h(1) = g^{-1}(1) = a$, $h(4) = g^{-1}(4) = c$, The sequence $b \rightarrow 2 \rightarrow b$ is cyclic, leading to $h(2) = g^{-1}(2) = b$.

□

Definition 2.36. 若 $\|A\| \leq \|\mathbb{N}\|$ ，则称 $\|A\|$ 可数。

显然可数集的子集一定也是可数集，并且可数无限集一定和 \mathbb{N} 基数相等。

著名的连续统假设， $\|\mathbb{R}\|$ 是不是就是紧挨着 $\|\mathbb{N}\| = \aleph_0$ 的最小基数呢？

Continuous Map and Homeomorphism

Definition 2.37. 设 X, Y 是两个拓扑空间. 如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足: 任取 $f(x_0)$ 的邻域 $V, f^{-1}(V)$ 都是 x_0 的邻域, 则称 f 在 x_0 处**连续** (continuous). 在定义域上处处都连续的映射称为**连续映射** (continuous map).

这个定义要注意的是, 连续的条件是“邻域的原像是邻域”, 而不是“邻域的像是邻域”, 这个地方要想一想, 参考函数连续, 出发是从 $f(a)$ 的接近程度来找到合适的 x 接近 a .

Example 2.38. 不论 X, Y 是什么拓扑空间, 取定 $b \in Y$, **常值映射** (constant map)

$$e_b: X \rightarrow Y, x \mapsto b$$

是连续映射, 因为 b 的任意邻域的原像都是全空间 X .

这个逆映射的定义是啥? 奇奇怪怪的, 直接找原像不就完了吗? :)

Example 2.39. 拓扑空间 X 上的**恒同映射** (identity map)

$$id_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$$

是连续映射, 因为每个邻域的原像都是它本身. 注意这里的定义域和值域都是相同的拓扑结构。

Proposition 2.40. 对 X 和 Y 分别取定能生成对应结构的基准开邻域结构, 则 f 在 x_0 处处连续的充分必要条件是: $f(x_0)$ 的任何基准开邻域 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 包含一个 x_0 的基准开邻域.

证明. 基准开邻域也是一个邻域, 必要性比较显然, 主要看充分性如何证明, $f(x_0)$ 的任意邻域 U 都有一个基准开邻域 U_0 , 即 $U \supseteq U_0$, 那么 $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(U_0)$, 所以 $f^{-1}(U)$ 同样包含一个基准开邻域, 即 f 在 x_0 处连续. \square

Example 2.41. 设 X, Y 都是度量拓扑空间, 则上述命题说明 $f: X \rightarrow Y$ 在 $x_0 \in X$ 连续当且仅当 $f(x_0)$ 的任意球形邻域的原像, 包含一个 x_0 的球形邻域, 这个条件可以进一步改写为:

$$\forall \vartheta, \exists \delta, \text{ 使得 } d_X(x, x_0) < \delta \text{ 蕴含 } d_Y(f(x), f(x_0)) < \vartheta$$

Proposition 2.42. 若 $f: X \rightarrow Y$ 在 x 点连续, $g: Y \rightarrow Z$ 在 $f(x)$ 点连续, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 在 x 点连续。

证明. 这个命题说明连续的复合还是连续, 按照定义来证明, 任取 $g(f(x))$ 的邻域 U , 则 $g^{-1}(U)$ 是 $f(x)$ 的邻域, 接着 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是 x 的邻域, 因为 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$, 证毕. \square

前面用了太多邻域的概念, 不妨用本原开集来定义一下连续的概念

Theorem 2.43. 考虑一个映射 $f: X \rightarrow Y$, 下述两个条件都是 f 为连续映射的充分必要条件:

1. Y 中任意开集关于 f 的完全原像都是 X 中的开集.

2. Y 中任意闭集关于 f 的完全原像都是 X 中的闭集.

证明. 从邻域定义的开集出发, 先证 (1) 必要性: 任取 Y 中的开集 U , 对 $\forall f(x) \in U$, 有 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域 (U 是 $f(x)$ 的邻域, 再根据 f 连续), 由于 x 是任意的, 所以 $f^{-1}(U)$ 是一个开集 (根据开集的定义).

再证 (1) 的充分性: 任取 $x \in X$ 以及 $f(x)$ 的邻域 V , 则存在开集 U 使得 $f(x) \in U \subseteq V$, 根据命题 $f^{-1}(U)$ 也是一个开集, 而 $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$, 所以 $f^{-1}(V)$ 是一个邻域.

(2) 的充分必要性, 由一个有趣的事实决定:

$$f^{-1}(U)^c = f^{-1}(U^c)$$

, 如果 U^c 是一个开集, 那么 $f^{-1}(U)$ 就是一个闭集, 同样 U 也是一个闭集. □

Definition 2.44. 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是一个双射, 并且 f 和 f^{-1} 都连续, 则称 f 为**同胚** (homeomorphism), 并且称 X 与 Y **同胚** (homeomorphic) 或者**拓扑等价**, 记为 $X \cong Y$.

同胚的空间具有本质上一样的连续性. 仔细想想这个定义可能在刚开始, 会有一并且对于每个指标 $\lambda \in \Lambda$, 取定一个拓扑空间 $(Y_\lambda, \tau_\lambda)$ 以及一个映射 $\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ 些疑惑, 在 \mathbb{R} 上, 如果一个 f 是双射, 且 f 连续, 那为什么还要保证 f^{-1} 连续呢? 直觉上前两个条件似乎可以直接保证 f 的逆映射是连续的.

注意这里是连续是拓扑结构上的概念, 两个集合之前的一一对应, 再确定分别确定两个集合上的拓扑结构之前, 啥也保证不了. 只有再两个对应的拓扑结构确定以后, 我们再来讨论这里的连续到底是什么. 举个很显然的例子, 说明 f 是双射, f 是连续的, 但是 f 的逆并不连续.

Example 2.45. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个双射, 然后我取 X 上的拓扑结构为离散拓扑, Y 上的拓扑结构为平凡拓扑. 显然在 f 上是连续的, 因为不管 $f(x)$ 取什么, 其原像对应的子集都是开集, 但是反过来 f^{-1} , 就可能不是连续了, 因为 Y 上拓扑就两个元素, 我大可以找很多 X 上的邻域, 对应到 Y 上, 并不在这样拓扑里面.

这样看来同胚, 其实就是我们在给定一一对应的集合映射上, 需要再去关注拓扑结构之间的关系, 也就是所谓的连续.

Theorem 2.46. 同胚是拓扑空间之间的等价关系. 我们称一个关系 \cong 是**等价关系** (equivalence relation), 如果它满足: 并且对于每个指标 $\lambda \in \Lambda$, 取定一个拓扑空间 $(Y_\lambda, \tau_\lambda)$ 以及一个映射 $\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$

1. 自反性 (reflexivity) $X \cong X$

2. 对称性 (symmetry) 如果 $X \cong Y$, 则 $Y \cong X$

3. 传递性 (transitivity) 如果 $X \cong Y$, 则 $Y \cong Z$, 则 $X \cong Z$

证明. 1. 恒同映射 $id_X: X \rightarrow X$.

2. 同胚的定义.

3. 前面的提到连续的复合映射, 就可以用到这里.

□

注意前面的 X, Y, Z 都表示拓扑空间, 就是指对应的各自已经先确定好了拓扑, 在这里不要造成歧义。

Definition 2.47. 在同胚下保持不变的性质叫拓扑性质 (*topological property*), 在同胚下保持不变的概念称为**拓扑概念** (*topological concept*), 在同胚下保持不变的量称为**拓扑不变量** (*topological invariant*).

对各种类型的拓扑空间进行同胚分类, 是拓扑学最基本的研究课题之一。证明两个空间同胚, 只要想办法把同胚映射构造出来就行了。而要区分两个空间不同胚, 只需要证明一个空间满足某种性质, 而另一空间不满足该性质, 或者证明对两个空间算某种拓扑不变量的时候, 计算结果不同。

Product Topology

这章主要讲如何构造一个拓扑结构？这里有一种非常有趣的定义拓扑结构的方法。设有一个映射 $f: X \rightarrow Y$ ，集合 X 上尚未确定具体的拓扑结构，而集合 Y 上有个拓扑结构 μ ，则可以利用 f 把这个拓扑“向左转移”到 X 上，即取 τ 为 X 上使得 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ 连续的最小拓扑（最小的概念是指最小的 X 的子集族）。

这个方法可以推广到一族映射 $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ 上，相应地得到的拓扑就是 X 上所谓的“弱拓扑”。类似地，也有一套利用映射“向右转移”拓扑结构的方法，相应地得到的拓扑就是 Y 上的“强拓扑”。弱拓扑和强拓扑作用，都是利用映射把一个空间上的拓扑结构以最能充分利用该映射的方式转移到另一个空间上去。

弱拓扑和强拓扑的观点主要是让我们理解这些拓扑“为什么这样定义”。

Definition 2.48. 考虑一个集合 X 。设 Λ 是一个指标集，并且对于每个指标 $\lambda \in \Lambda$ ，取定一个拓扑空间 $(Y_\lambda, \tau_\lambda)$ 以及一个映射 $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ 。则 X 上满足条件每个 $\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ 都连续的最小拓扑 τ 称为由这些 f_λ 决定的**弱拓扑** (weak topology)。

注意前面已经提到过的最小的含义，如果更形式化的理解是：如果有其他拓扑 μ 也满足上述条件，则 $\tau \subseteq \mu$ 。

那么如何构造这个弱拓扑呢？很显然有一个拓扑是天然满足的上述条件的，那就是离散拓扑。但是我们寻找是符合这样条件的一个最小的拓扑。上述条件也可以理解为要求每个 Y_λ 中开集的原像都是开集，所以 τ 是包含这些原像的，但是只包含这些原像是不够的，因为我们并不能保证这些原像的交或者并是满足开集公理的，解决办法是把这些有限原像的交和任意的原像的并也取做开集。

Proposition 2.49. 设 Λ 是一个指标集，并且对于每个指标 $\lambda \in \Lambda$ ，取定一个拓扑空间 $(Y_\lambda, \tau_\lambda)$ 以及一个映射 $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ 。取

$$\mathcal{U}(x) = \{f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, f_\lambda(x) \in U_\lambda \in \tau_\lambda\}$$

，然后取

$$\mathcal{N}(x) = \{\mathcal{U}(x) \text{ 中有限个元素的交集}\}$$

，这样得到的 \mathcal{N} 是一个基准开邻域结构。并且由它生产的拓扑就是 X 上由这些 f_λ 决定的弱拓扑

证明。这里命题言下之意其实就直接把 Y_λ 中开集原像直接拿来当基准开邻域用，基准开邻域结构的公理是显然满足的。

然后我们来说明它是最小的拓扑，只需要证明它是含于 X 上的任意拓扑，任意 X 上的拓扑 τ ，则当 $U_\lambda \in \tau_\lambda$ ，则 $f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \tau$ ，因此 $\mathcal{N}(x)$ 中基准开邻域均属于 τ ，而由 \mathcal{N} 生成的拓扑中的开集都是若干基准开邻域的并，所以也是属于 τ ，这说明 \mathcal{N} 生成的拓扑是 τ 的子族。□

生成弱拓扑的过程简而言之就是

$$\{U_\lambda\} \xrightarrow{\cap_{finite}} \mathcal{N} \xrightarrow{\cup_{arbitrary}} \tau$$

Example 2.50. 设 (Y, μ) 是一个拓扑空间, X 是一个集合, 考虑 X 到 Y 的所有映射构成的集合 Y^X . 任取 $x \in X$ 可以定义赋值函数

$$e_x: Y^X \rightarrow Y, e_x(f) = f(x).$$

于是 Y^X 上就有一个由所有这些 e_x 决定的弱拓扑. 这种弱拓扑刻画的映射空间的“连续性”, 是数学分析里面函数序列的“逐点收敛”概念的拓扑推广.

有了弱拓扑的概念, 我们可以尝试去理解一下乘积拓扑“为什么它要这么构造”.

Definition 2.51. 设 (X, τ_X) , (Y, τ_Y) 是两个拓扑空间. 令

$$\tau = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda) \mid \forall U_\lambda \in \tau_X, \forall V_\lambda \in \tau_Y \right\},$$

则 τ 是 $X \times Y$ 上的一个拓扑结构, 称为 τ_X 和 τ_Y 的**乘积拓扑** (*product topology*). 拓扑空间 $(X \times Y, \tau)$ 称为这两个空间的**乘积空间** (*product space*), 记为 $(X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$.

简而言之, $X \times Y$ 中的子集开当且仅当它是形如 $(U \times V)$ 的子集的并集, 这里要求 U, V 分别是 X 和 Y 上开集, 但是为什么要这样定义?

Proposition 2.52. 设 (X, τ_X) , (Y, τ_Y) 是两个拓扑空间. 考虑集合 X 和 Y 的直积 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, 在其上定义**投影** (*canonical projection*)

$$\begin{aligned} j_X: X \times Y &\rightarrow X, (x, y) \mapsto x; \\ j_Y: X \times Y &\rightarrow Y, (x, y) \mapsto y; \end{aligned}$$

则 $X \times Y$ 上由 j_X , j_Y 决定的弱拓扑就是乘积拓扑.

有点小疑问, 这里的一组映射值域和前面提到的似乎有点不同啊? 弱拓扑并没有要求映射的值域是相同的, 定义域是相同的即可.

证明. 分别取 X 和 Y 的开集 U 和 V , 注意到 $j_X^{-1}(U) \cap j_Y^{-1}(V) = (U \times V)$, 并且

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

后面性质为了进一步保证我们交出来的结果没问题. 这个按照用基准开邻域刻画刻画的弱拓扑, 我们有

$$\mathcal{N}(x) = \{(p_x, p_y) \mid p_x \in U \in \tau_X, p_y \in V \in \tau_Y\}.$$

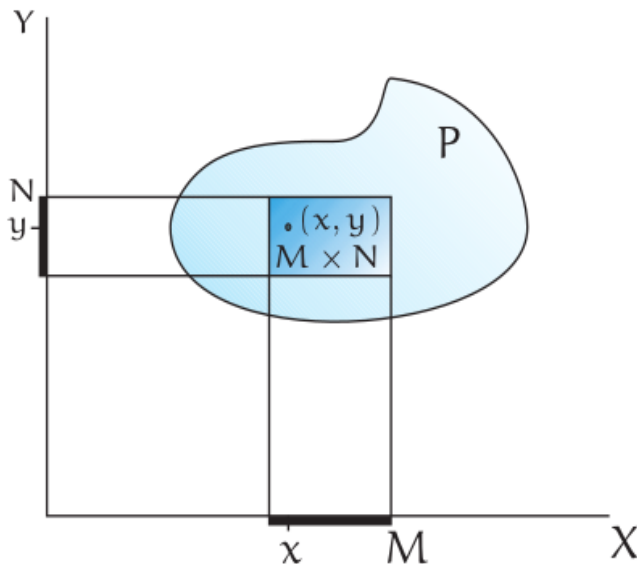
□

Example 2.53. 设 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 是两个度量空间, 则在 $X \times Y$ 上可以定义度量 d 如下: 任取两点 $p = (p_x, p_y), q = (q_x, q_y)$,

$$d(p, q) = \max(d_X(p_x, q_x), d_Y(p_y, q_y))$$

并且该度量决定的度量拓扑就是 $X \times Y$ 上的乘积拓扑.

在证明上述命题之前, 我们可以简单思考一下 d 确实是一个度量, 有趣的为什么不能把 \max 换成 \min ?



证明. 先写一下我们的证明思路, 要证明上述度量诱导出来的拓扑是乘积拓扑: (1) 在乘积拓扑中找邻域, 这个邻域在 d 度量诱导的拓扑里面 (2) 在 d 度量诱导的拓扑里面找邻域, 这个邻域在乘积拓扑里面.

(1) 在乘积拓扑下, 如果一个子集 $A \subseteq X \times Y$ 是 $p(p_x, p_y)$ 邻域, 那么存在一个开集含于它, 所以我们必须找到这样一个 $X \times Y$ 乘积拓扑里面的开集, 乘积拓扑上的开集为 $\bigcup(U, V)$, 其中 $U \in \tau_X, V \in \tau_Y$. 这样不好操作啊, 怎么把前面个 bigcup 去掉呢? 其实可以比较从容的去掉, 因为点 p 肯定属于某个 X 开集, 开集自包含, 同样是 p 的一个邻域. 那么我们的命题可以变成下面的样子:

A 是邻域的充分必要条件是: 分别存在 X 中的开集 U 和 Y 中的开集 V , 使得 $p \in U \times V \subseteq A$. 如果我们能找到这样的 U, V , 进一步我们可以分别找到它们里面分别关于 p_x 的邻域 $B_\zeta(p_x)$ 和 p_y 的邻域 $B_\delta(p_y)$. 然后我们知道

$$B_{\min(\zeta, \delta)}(p) \subseteq B_\zeta(p_x) \times B_\delta(p_y)$$

其中 $B_{\min(\zeta, \delta)}(p)$ 就是一个 d 度量下的邻域, A 包含它, 所以 A 也是 d 度量诱导的拓扑下的邻域.

(2) 在 d 度量诱导的拓扑下, 任意的 A 邻域包含一个 $p = (p_x, p_y)$ 的一个邻域 $B_\varepsilon(p)$, 而

$$B_\varepsilon(p) = B_\varepsilon(p_x) \times B_\varepsilon(p_y)$$

, 其中 $B_\varepsilon(p_x)$ 和 $B_\varepsilon(p_y)$ 分别是 X 和 Y 下的邻域, 各自在找一个开集, 所以 A 也是乘积拓扑下的邻域. \square

Definition 2.54. 对于一个映射 $f: A \rightarrow X \times Y$, 设

$$f_X = j_X \circ f, \quad f_Y = j_Y \circ f,$$

换言之 $f(a) \equiv (f_X(a), f_Y(a))$, 则称 f_X, f_Y 为 f 的分量 (*component*).

Theorem 2.55. 映射 $f: A \rightarrow X \times Y$ 连续的充分必要条件是分量 f_X 和 f_Y 都连续.

证明. 如果 f 连续, 由复合映射的连续性可知, f_X 和 f_Y 也都连续. 反过来如果 f_X 和 f_Y 都连续, $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$, 开集的交还是开集, 所以 f 连续. \square

Example 2.56. 考察平面上的一条参数曲线 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. 上面定理告诉我们, x 连续当且仅当 x_1, x_2 都连续.

乘积拓扑? 弱拓扑? 奇妙...

Subspace Topology

拓扑空间 X 的一个子集 A 上可以很简单地定义一种非常自然的拓扑结构, 称为子空间拓扑. 子空间拓扑也是使得包含映射 $i: A \hookrightarrow X$ 连续的最弱拓扑.

Definition 2.57. 设 (X, τ) 是个拓扑空间, $A \subseteq X$, 令

$$\tau|_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$$

, 则 $\tau|_A$ 是 A 上的一个拓扑, 称为 A 上的**子空间拓扑** (*subspace topology*), 而拓扑空间 $(A, \tau|_A)$ 称为 (X, τ) 的**子空间** (*subspace*).

Proposition 2.58. 设 A 是拓扑空间 (X, τ) 上的子集, $i: A \rightarrow X$ 是一个包含映射, 则 A 上由 i 决定的弱拓扑就是子空间拓扑.

证明. 这个命题还是比较显然的, 因为 $i^{-1}(U) = U \cap A$. □

注意区分子空间上开集并不直接等价于原拓扑空间上的开集.

Lemma 2.59. 设 A 是 X 的子空间, 如果 U 是 A 上的开集, 同时 A 也是 X 上的开集, 则 U 也是 X 上的开集.

还有下面几个比较简单的性质:

Proposition 2.60. 1. 如果 $B \subseteq A \subseteq X$, 则 $\tau|_B = (\tau|_A)|_B$.

2. U 是 $(A, \tau|_A)$ 里的开集当且仅当存在 (X, τ) 中的开集 V 使得 $U = V \cap A$.

3. U 是 $(A, \tau|_A)$ 里的闭集当且仅当存在 (X, τ) 中的闭集 V 使得 $U = V \cap A$.

这里需要非常注意一个东西, 无论是开集还是闭集, 一定要讲清楚是相对哪个拓扑而言的, 这一点非常重要.

Example 2.61. 我们来思考一个度量空间上的自然的子空间是什么呢? 设 (X, d) 是一个度量空间, 度量拓扑为 τ . A 是 X 的子集, 则可以在 A 上规定一个自然的度量 d_A , 使得任取 $x, y \in A, d_A(x, y) = d(x, y)$. 任取 $a \in A$, 考察它在 X 中的一个 ε 球形邻域 $B_\varepsilon = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$, 你会发现

$$B_\varepsilon \cap A = \{x \in A \mid d(a, x) < \varepsilon\}.$$

恰好就是 a 在 A 中关于度量 d_A 的 ε 球形邻域.

Example 2.62. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, A 是 X 的子空间. 此时可以考虑一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 A 上的**限制映射** (*restriction map*)

$$f|_A: A \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Lemma 2.63. 粘接引理 (pasting lemma) 设 $\{C_1, \dots, C_n\}$ 是 X 的一个有限覆盖 (finite closed cover), 即由有限多个 X 的闭子集构成的子集族, 满足 $C_1 \cup \dots \cup C_n = X$. 如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 使得每个 $f|_{C_k}$ 都连续, 则 f 连续.

证明. 任取 Y 中的闭集 A ,

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}(A) \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n) \\ &= (f^{-1}(A) \cap C_1) \cup \dots \cup (f^{-1}(A) \cap C_n). \end{aligned}$$

第一行是简单的变换, 整理成子空间拓扑形式, 其实就是 A 在 $f|_{C_k}$ 的原像, 因为每个 $f|_{C_k}$ 都连续, 所以按照定义 $f|_{C_k}^{-1}(A) = D_k \cap C_k = f^{-1}(A) \cap C_k$ 在 C_k 中也是闭的, 其中 D_k 也是某个闭集, 然和有限多个闭集并还是闭集, 即 $f^{-1}(A)$ 是闭集. \square

Definition 2.64. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续单射, 在 $f(X) \subseteq Y$ 取子空间拓扑, 然后考虑映射

$$g: X \rightarrow f(X), x \mapsto f(x).$$

如果 g 是同胚, 则称 f 为**嵌入** (embedding).

嵌入是同胚的推广. 含入映射就是嵌入的典型例子.

Quotient Map and Quotient Space

和弱拓扑相对应地, 有另外一种非常自然的定义拓扑结构的方法叫“强拓扑”, 就是利用映射 $f: X \rightarrow Y$ 把集合 X 上的拓扑结构 τ “向右转移”到集合 Y 上去. 那么这里为什么叫强拓扑呢? 因为使得 f 连续的 Y 上的最小拓扑是平凡拓扑 $\{Y, \emptyset\}$. 与弱拓扑相反的是取使得 f 连续的 Y 上最强的拓扑 (即在对于集合族中是最大的).

Definition 2.65. 设有一族拓扑空间 $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ 及映射 $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$. 则 Y 上满足条件使得每个 f_λ 都连续的最大拓扑 τ 称为由这些 f_λ 决定的强拓扑 (*strong topology*).

最大的意思是: 如果有其他拓扑 μ 也满足上述条件, 则 $\tau \supseteq \mu$. 那么如何构造最强拓扑?

Definition 2.66. 设有一族拓扑空间 $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ 及映射 $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$. 则 Y 上使得所有 f_λ 都连续的最强拓扑为

$$\tau = \{U \subseteq Y \mid \forall f_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda\}$$

上面的命题就说把 Y 里面在所有 f_λ 下原像都是开集的子集搞到一块就是最强拓扑.

证明. 现在来证明这个 τ 确实是个拓扑结构, 很明显 $\emptyset \in \tau$ 和 $Y \in \tau$. 有

$$f_\lambda^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f_\lambda^{-1}(U_\alpha).$$

所以当 $U_\alpha \in \tau$, 则 $f_\lambda^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) \in \tau$. 同理, 有

$$f_\lambda^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} f_\lambda^{-1}(U_\alpha).$$

所以当 $U_\alpha \in \tau$, 则 $f_\lambda^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} U_\alpha\right) \in \tau$. 然后再说明这个拓扑是最强的, 取满足上述条件任意拓扑 μ , 任取 $U \in \mu$, 则每个 $f_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda$, 所以 $U \in \tau$, 由于 U 是任意的, 所以 $\mu \subseteq \tau$. \square

Definition 2.67. 设 $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ 是两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个满射, 并且 τ_Y 恰好是 f 所决定的强拓扑, 即 $U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $f^{-1}(U) \subseteq \tau_X$, 则称 f 为商空间.

Proposition 2.68. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个满射, 则 f 是商映射的充分必要条件是: U 是闭集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是闭集.

Proposition 2.69. 两个商映射的复合映射还是商映射.

Proposition 2.70. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是个连续满射, 则下列两个条件都是 f 是商映射的充分非必要条件:

1. f 是开映射 (*open map*), 即任意开集 $A \subseteq X$ 在 f 下的像集是 Y 中的开集.

2. f 是闭映射 (closed map), 即任意闭集 $A \subseteq X$ 在 f 下的像集是 Y 中的闭集.

证明. 当 f 是一个满射时, $U = f(f^{-1}(U))$, 其中 $U \in Y$, 在开映射的条件下若 $f^{-1}(U)$ 是一个开集, 那么 U 也是一个开集, 同时 f 连续, 所以 U 开, 那么 $f^{-1}(U)$ 开, 证毕. 为什么这是充分条件呢? 因为商映射的定义是我们在 Y 里面挑子集, 如果它的原像是开集, 就把它放到 τ_Y 里面, 当我们挑完 Y 所有子集的时候, 可能也只对应了一部分 X 中的开集, 现在如果要求 X 所有开集都映射到 Y 上, 毫无疑问这时候我们只需要把 X 上的开集的像放到 τ_Y 就行了, 这个过程就完全确定了. \square

显然同胚是一个商映射. 那么如何形象的理解商映射呢? 在代数里面有商群和商环, 但是它们都有一个比较特殊的性质就是构造了很多的等价类, 相当于把两个在某种等价关系的刻画下放到了一个等价类里面, 如果把这种性质类比到商映射, 其实也有类似的性质, 商映射带来了一种“拓扑粘合”的观点: 我们可以把被 f 映射到同一个像上的 X 中的点理解成是被粘在了一起, 然后把 $f(X)$ 整体理解成是用 f 把 X 粘起来的空间.

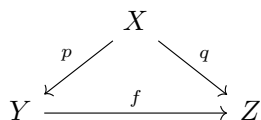
生活中我们可以用一些小纸片涂上胶水粘出复杂的手工艺品, 或者把积木插在一起搭出复杂的大模型. 商映射就是拓扑空间的胶水, 它让我们可以去刻画以前无法想象的复杂空间, 把它们分解成简单直观的小块, 并为分解和重新组装等操作提供严谨可靠的拓扑解释.

这种理解很是奇妙, 需要靠例子来细细品尝...

Theorem 2.71. 设 $p: X \rightarrow Y$ 是商映射, 则任取映射 $f: Y \rightarrow Z$, f 连续当且仅当 $f \circ p: X \rightarrow Z$ 连续.

证明. 若 f 连续, 任取 $U \in Z$, 其中 U 是开集, 所以 $f^{-1}(U)$ 是开集, p 是商映射, 那么 $p^{-1}(f^{-1}(U))$ 也是开集, 所以 $f \circ p$ 连续. 若 $f \circ p$ 连续, 还是任取 Z 中的开集 U , 则 $p^{-1}(f^{-1}(U))$ 是开集, p 是商映射, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集, 所以 f 连续. \square

Theorem 2.72. 如果 $p: X \rightarrow Y$ 和 $q: X \rightarrow Z$ 都是商映射, 并且 $p(x) = p(x')$ 当且仅当 $q(x) = q(x')$, 则 Y 和 Z 同胚.



证明. 终于有一点范畴的东西了, 这里要说明 Y 和 Z 同胚, 需要先构造 Y 和 Z 之间的映射 f , 上述命题已经给出了一个非常显然的命题, p 和 q 给出的等价类是一一对应的, 那我们定义这样一种映射 $f: Y \rightarrow Z$, 即 Y 中任意元素对应于 $p(x)$, f 把它映到 $q(x)$, 任取 Z 中开集 U , 其中 $q(x) \in U$ 对应 $p(x) \in f^{-1}(U)$, f 是双射, 有”并且 $p(x) = p(x')$ 当且仅当 $q(x) = q(x')$ ”保证, 即它们的原像 A 是一样的, 因为 q 是商映射, 所以 A 是 X 中的开集, 作用到同样是商映射的 p 上, 我们就可以得到一个 Y 上的开集 $p(A)$, 同理再证一下 f^{-1} , 这样 f 下的 Y 和 Z 是同胚的. \square

Definition 2.73. 称 \mathbb{R}^3 中过原点的直线为中心直线. 所有中心直线构成的拓扑空间

$$\mathbb{RP}^2 = \{\mathbb{R}^3 \text{ 里的中心直线}\}$$

称为实射影平面，简称射影平面，其上的拓扑定义为如下度量所决定的度量拓扑：任取两条中心直线 $\downarrow_1, \downarrow_2$ ， $d(\downarrow_1, \downarrow_2)$ 等于两条直线夹角的弧度（取介于 0 到 $\pi/2$ 弧度之间的那个夹角）。

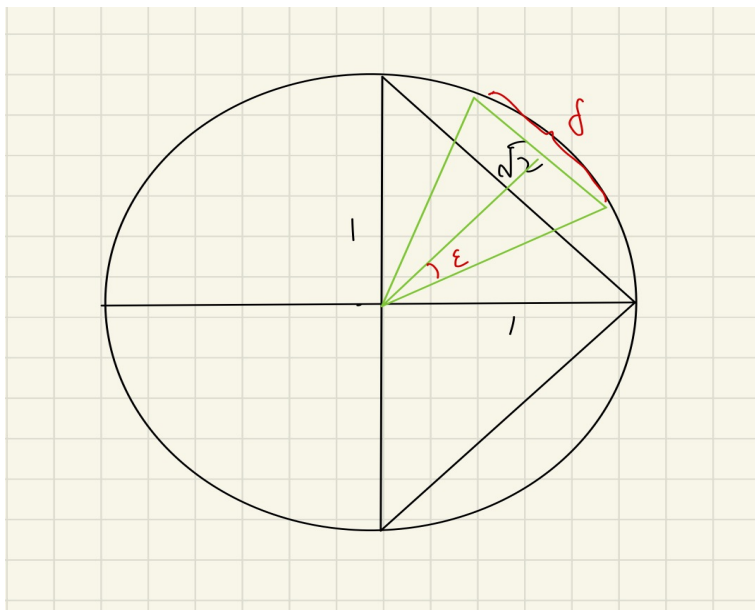
射影平面，这个概念源于射影几何。设想有一只拓扑的“眼镜”位于欧式空间中的原点，用它去观察全空间。此时每条过原点的直线可以称为一条视线，这条视线上的点在那只眼镜看来都是重叠的，或者说会被当做视野里的同一个点。

怎么直观的去理解这个“平面”？过原点的全部直线可以分为两类，一类是与 xy 平面 ($z = 0$) 有非零倾角的；另一类是位于 xy 平面上的。我们可以任取一个在 R^3 中与 xy 平面平行单不重合的平面，例如 $z = 1$ ，则前一类直线都和这个平面有且仅有一个交点，另一类 xy 上过原点的直线，并不会和 $z = 1$ 平面相交。但是在射影平面中，为了统一这些直线，可以将它们与 $z = 1$ 平面的交点定在“无穷远”，这种说法可以看做是过原点直线与 xy 平面倾角趋于 0 的极限情况。

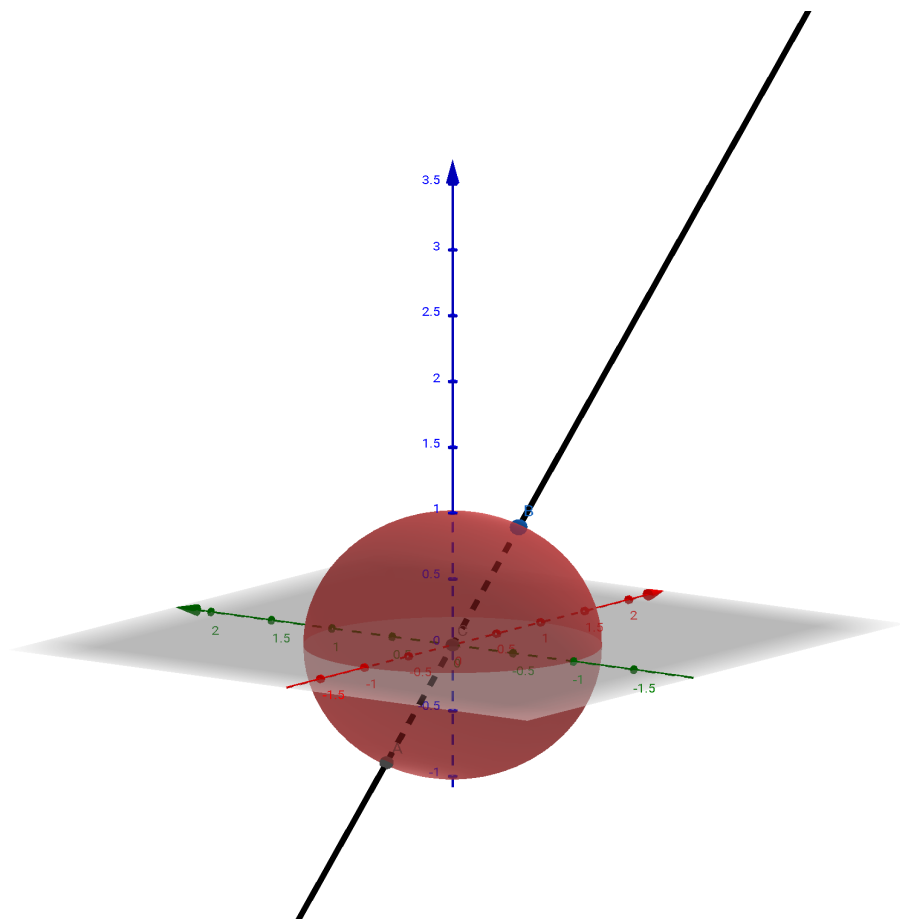
想把 \mathbb{RP}^2 嵌入 \mathbb{E}^3 是不可能的，这一点我现在还不知道为什么：(，但是我们可以借助商映射在球面上观察它。考虑连续满射

$$\downarrow: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, (x, y, z) \mapsto \{(tx, ty, tz) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

，即把每个点 P 映为 P 所在的中心直线 \downarrow_P 。



如何来说明它是一个商映射呢？我们只需要考虑上半球面，即当 $\delta < \sqrt{2}$ 时， \downarrow 把每一个 P 在 S^2 每个球形邻域 $B_\delta(P)$ 都变成 \downarrow_P 在 \mathbb{RP}^2 中的球形邻域 $B_\epsilon(\downarrow_P)$ ，从上图里面我们可以知道 $\delta = 2 \sin(\frac{\epsilon}{2})$ ，即这是一个开映射，所以 \downarrow 是一个商映射。



对于球面上的每个点 $P = (x, y, z), Q = (-x, -y, -z)$ 称其为**对跖点** (antipodal point), 注意 $\downarrow_P = \downarrow_Q$ 当且仅当 $P = Q$ 或者 P, Q 互为对跖点, 因此可以直观的说, 射影平面就是“把球面的每一对对跖点粘合成一个点”所得的拓扑空间.

在 \mathbb{E}^3 不能把直线掰弯, 关于在 \mathbb{E}^4 中怎么做, 留到后面再说...

现在我用前面提到的等价关系来看待”粘合”即商空间, 集合上等价关系的定义在这里不想再累述了, 我们直接用等价关系来刻画“粘合规则”, 那就是: 两个点粘在一起当且仅当它们在同一个等价类里面.

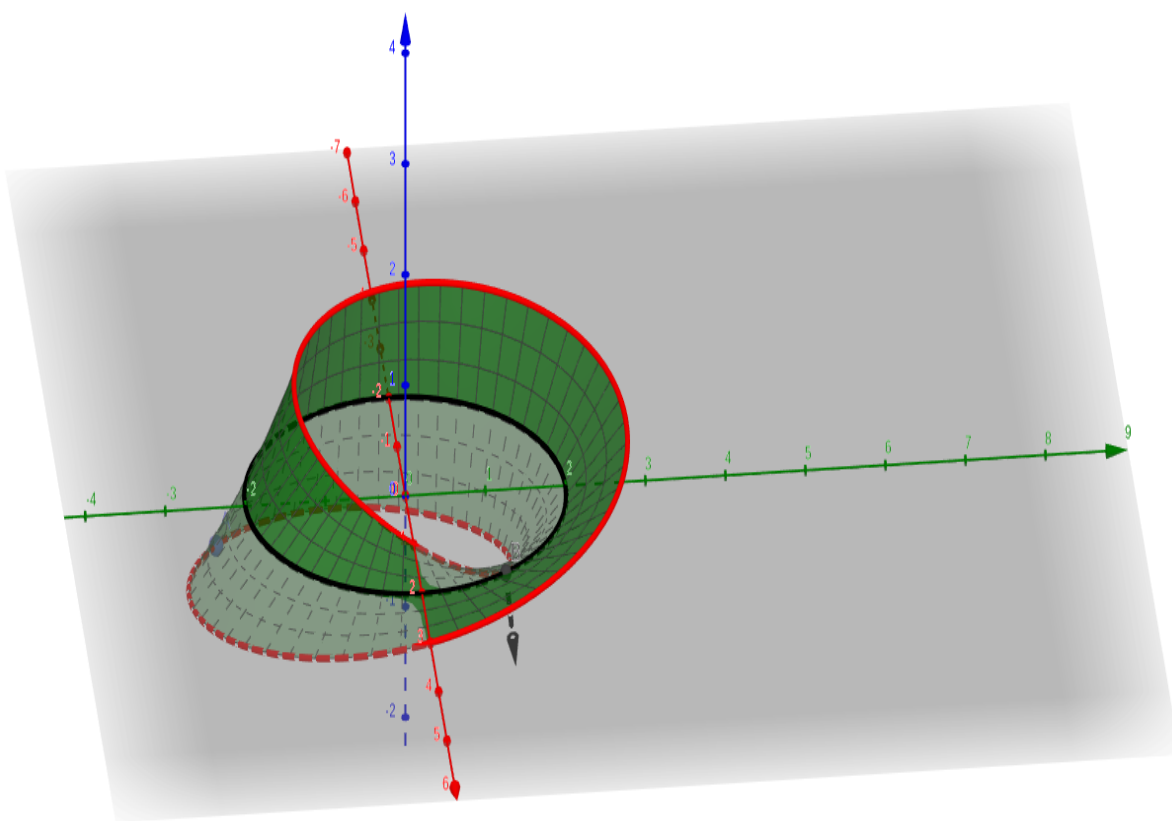
Definition 2.74. 设 \sim 是集合 X 上的一个等价关系, 则所有等价类构成的集合称为 X 关于 \sim 的**商集** (quotient set), 记做 X/\sim . 称映射

$$p: X \rightarrow X/\sim, x \mapsto \langle x \rangle$$

为**粘合映射** (gluing map). 若 X 上有拓扑 τ , 则称 p 在 X/\sim 上决定的相应的强拓扑为**商拓扑** (quotient topology), 记做 τ/\sim . 称拓扑空间 $(X/\sim, \tau/\sim)$ 为 (X, τ) 的**商空间** (quotient space), 记做 $(X, \tau)/\sim$.

Example 2.75. 把一条很长的带子两端粘合起来可以得到平环 $S^1 \times [0, 1]$ 或者 *Mobius* 带. 利用商空间的语言, 现在可以数学上严格地重新定义 *Mobius* 带为如下的粘合结果: 考虑 (x, y) 即 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的子集族

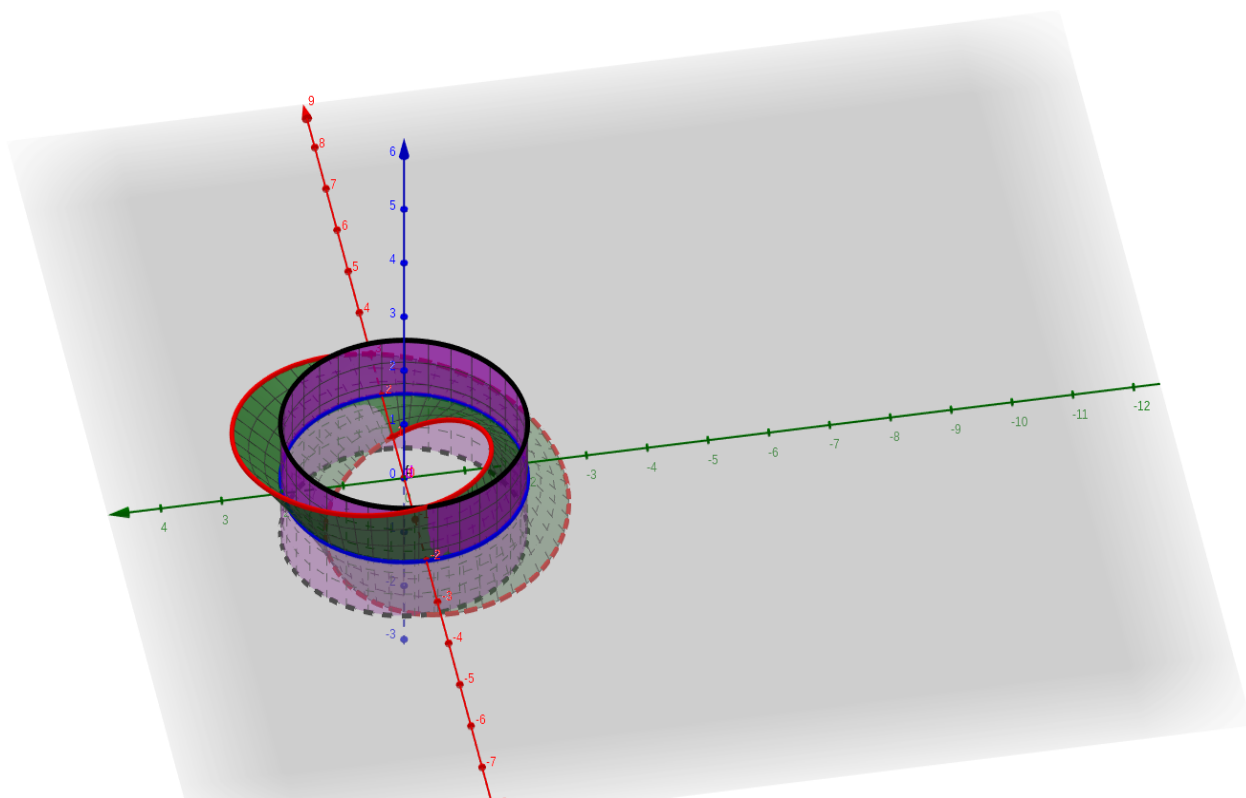
$$\mathcal{U}_M = \{ \{(0, y), (1, (1 - y))\} \mid y \in [0, 1] \} \cup \{ (x, y) \mid x \in (0, 1), y \in [0, 1] \}$$



在 *Mobius* 带上, 我们考虑把带子两边上的点拧半圈, 然后粘合到一起, 从上面的图可以尝试形象的理解一下. 按照 \mathcal{U}_M 里面划分的等价类, 商空间 $([0, 1] \times [0, 1]) / \sim_M$ 就称为 *Mobius* 带. 另一方我们考虑下面这种划分方式

$$\mathcal{U}_A = \{ \{(0, y), (1, y)\} \mid y \in [0, 1] \} \cup \{ (x, y) \mid x \in (0, 1), y \in [0, 1] \}$$

, 这种划分方式就是把带子两边直觉对着粘起来, 参考下面图中紫色的部分, 而商空间 $([0, 1] \times [0, 1]) / \sim_A$ 就是平环.



Proposition 2.76. 商空间里面的子集开当且仅当其关于粘合映射的原像开, 言下之意粘合映射是商映射.

上面这个命题很显然了, 强拓扑加满射 (等价关系的基本定义).

Theorem 2.77. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是商映射, \sim_f 是 X 上的等价关系, 满足 $f(x) = f(x')$ 当且仅当 $x \sim_f x'$. 则商空间 X / \sim_f 与 Y 同胚.

证明. 它来了, 同态第一定理? 同胚第一定理? 哈哈), f 和 p 都是商映射, 且 $f(x) = f(x')$ 当且仅当 $p(x) = p(x')$, 由定义 2.62, X / \sim_f 和 Y 同胚. \square

商空间和商映射本质上考虑的是一样的问题, 只不过出发点不同, 考虑不同空间之间的映射和相互关系时商映射比较好用, 而单纯为了理解空间本身的时候, 商空间就比较好用一些. 上述定理给出了两者之间的联系, 当

我们为一个空间给出了一种“粘合”式的构造方法时，并且想严格说明得到的空间和这个空间原本具有的另一个定义一致 (即同胚) 时，应用该定理也是一种标准的做法.

还需要一些例子来好好理解一下

Example 2.78. 考虑两个不相交的圆的并集

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 = 1 \text{ 或者 } (x-2)^2 + y^2 = 1 \}$$

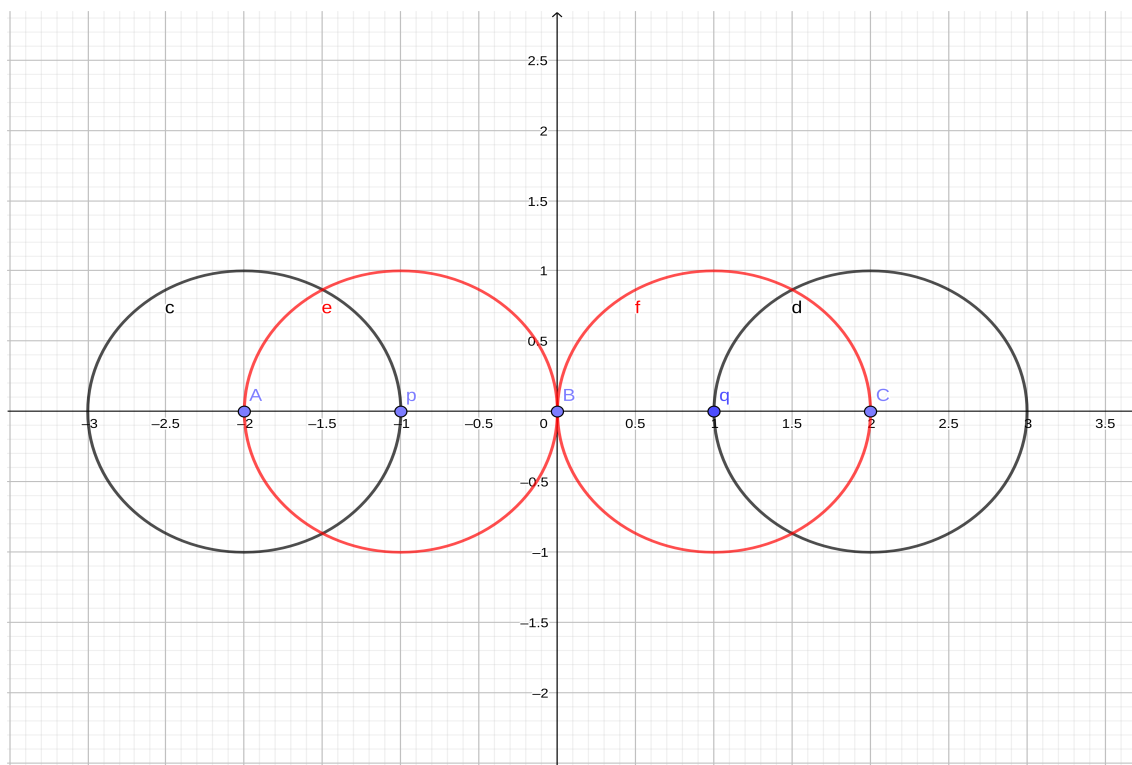
} 在这两个圆上各取一点 $p = (-1, 0), q = (1, 0)$, 然后把这两个点粘到一起, 得到的空间 $S^1 \vee S^1$ 称为两个圆的一点并 (one-point union). 用商空间的语言来讲, $S^1 \vee S^1 = A / \sim$, 这里若两点等价 $a \sim b$ 当且仅当 $a = b$ 或者 $a, b = p, q$. 在代数里面要理解关于商的东西, 并不直观, 例如商环等等, 只有通过同构来间接的描述, 同样在这里我觉得也是这样的思想, 所以可以另取一个空间

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ 或者 } (x-1)^2 + y^2 = 1 \}$$

两圆相切于一点的并集, 然后考虑如下映射

$$f: A \rightarrow B, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y), & x < 0 \\ (x-1, y), & x > 0 \end{cases}$$

容易验证该映射是一个连续满射, 考虑 A 中任意点 P 球形邻域, 对应 B 中点 P 球形邻域, 有点麻烦, 但是可以对应上, 这样说明它是一个商映射, 从上述定理可知 $A / \sim_f = B$. \sim_f 和 f 确立的等价关系是相同的, 所以 $A / \sim = B$.



我们再来用商空间的重新定义一下射影平面, 利用商空间的语言, 可以把它解释成 $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim$, 这里 \sim 每一个等价类都是过原点的直线, 但是每个等价类都不能相交, 所以拿掉了原点, 也就是说点 (x, y, z) 所在的等价类是 $\{(tx, ty, tz) \mid t \neq 0\}$. 然后再把这个概念推广到高维的情况下.

Definition 2.79. 称一个向量空间中的一维子空间为一条**中心直线** (line through origin). 在 $\mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中任取 $x = (x_0, \dots, x_n)$, 记其所在的中心直线为 $\downarrow_x = \{(tx_0, \dots, tx_n) \mid t \in \mathcal{R}\}$. 则集合族

$$\mathcal{U} = \{\downarrow_x \setminus \{0\} \mid x \in \mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

定义了 $\mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上的一个等价关系 $\sim_{\mathcal{U}}$. 商空间

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{E}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_{\mathcal{U}}$$

称为 n 维实射影空间. 特别地, \mathbb{RP}^2 就是射影平面.

想想我们之前定义的射影平面, 里面的度量是两条直线的夹角, 然后我们建立了一个 S^2 和 \mathbb{RP}^2 的商映射, 用邻域的形式说明了它. 在这里我们用“粘合”的观点来看一下它

Example 2.80. 射影平面同胚于球面粘合对跖点。

证明. 考虑映射

$$p: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, x \mapsto \langle x \rangle.$$

, 其中 \mathbb{RP}^2 现在是 \mathbb{E}^3 下的商空间。我们任取 S^2 中的开集 U , 这里记 \mathbb{E}^3 到商空间 \mathbb{RP}^2 的粘合映射为 $\downarrow, p(U)$ 是若干等价类的并, $l^{-1}(p(U))$ 对应锥形是 \mathbb{E}^3 中的开集, 所以 $p(U)$ 开集, 即 p 是开映射, 从而是商映射。

\mathbb{RP}^2 中每个点 x 的原像集 $p^{-1}(x)$ 恰好由球面上的一对对跖点构成。因此球面粘合对跖点所得商空间是同胚于 \mathbb{RP}^2 . □

General Topology

Countability

Definition 3.1. 拓扑空间 X 中点 x 的一个邻域基 (neighborhood base) 指由 x 的邻域构造成的子集族 \mathcal{N}_x , 使得 x 的任何邻域均包含 \mathcal{N} 中的某个邻域.

回想一下前面定义的基准开邻域, 包含一个基准开邻域的子集是邻域, 所以基准开邻域结构天然构造了一个邻域基.

Definition 3.2. 如果点 x 的一个邻域基 \mathcal{N}_x 只含有可数个成员, 则称之为 x 的可数邻域基 (countable neighborhood base). 如果拓扑空间 X 中的每个点都拥有一个可数邻域基, 则称 X 为第一可数空间, 该条件称为第一可数公理.

Example 3.3. 度量拓扑空间都是第一可数空间, 因为对每个点 x 来说, $\mathcal{N}(x) = \{B_{\frac{1}{n+1}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 就是它的一个可数邻域基.

怎么理解上面例子呢? 任取 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 且大于 0, 然后取 ε 最高位, 发现它都可以包含一个有理数, 而有理数是可数的.

上面这个例子也说明可数公理与这个空间是否只含可数个点并没有什么关系. 反过来只含有可数多个点的空间也可以不满足第一可数公理, 比如 Appert 构造的下述反例

Example 3.4. 让 X 为正整数集, 让 $N(n, E)$ 表示 $E \subseteq X$ 中小于等于 n 的元素个数. 在它基础上定义 Apperts 拓扑, 若 E 属于该拓扑, 则 $1 \notin E$ 或者 $1 \in E$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n, H)}{n} = 1$, 这个拓扑空间不是满足第一可数公理.

证明. 怎么理解这个拓扑空间呢? 它是满足基准开邻域的, 不要去想它的内部东西, 直接套公理即可, 是容易证明的.

如何证明它不满足第一可数公理呢? 我们去一个特殊的子集 $\{2^n \mid n \geq 1\}$, 这是一个无限集, 其中每个点都是独立离散的, 所以每个点至少有一个不同的基准邻域, 所以弄在一起邻域基是可数的. \square

当然了, 很多实际应用中遇到的空间都满足第一可数公理 (比如度量空间). 当一个空间满足第一可数公理时, 我们可以对每个点的邻域使用数学归纳法, 从而得到一些漂亮的结果.

Proposition 3.5. 若 x 有一个可数邻域基, 则 x 有一个可数邻域基 V_1, V_2, \dots , 使得当 $m > n$, 总有 $V_m \subseteq V_n$

这个命题反过来似乎在告诉我们, 可数邻域基可以由一个最小的邻域, 不断的填充, 变成新的邻域, 再把这些邻域合起来就是新的邻域基, 那么如何取最小的邻域呢? 所有这样的邻域交一下不就是吗? 下面严格证明.

证明. 若 x 有一个可数邻域集, 则 x 有一个可数邻域基 $\{U_1, U_2, \dots\}$, 令 $V_n = U_1 \cap \dots \cap U_n$, 这样当 $m > n$ 是, 一定有 $V_m \subseteq V_n$, 然后再证明它是一组邻域基, 由已知的邻域基有任取 x 邻域 U , 存在某个正整数 n , 使得 $U_n \subseteq U$, 因为 $V_n \subseteq U_n$, 所以 $V_n \subseteq U$. \square

这个命题让邻域基有一种序的关系，这有作用呢？把邻域基想象成圆环套圆环的图形，每个圆环在无限的“逼近”圆心，也就是相当于圆心的有任意长度的圆心，一个圆环就是一个邻域，如果我在每个圆环里面取一个点，构成一个点列，这列点列将无限的靠近圆心。我们遵循这个思路来想想下面的东西。

下面一些包包老师书的掺杂邻域的东西，感觉很模糊，但是还是记录一下，比较不同的视角也许能发现一些新的东西。

Definition 3.6. 设 x_n 是一个点列，若点 x 满足任取 x 的邻域 U ，存在自然数 N ，使得当 $n > N$ 时每个 x_n 都在 U 中，则称 x 为点列 x_n 的一个**极限** (*limit*)。

数学分析中的数列极限的推广，把里面的 ε 变成了一般性的邻域 U 可刻画。在数学分析中聚点的定义是若点 a 的任意去心邻域内都有数集 A 中的点，就称点 a 就是数集 A 的聚点 (accumulating point)。用形式语言来描述就是

$$\forall \delta > 0, \exists x \in A: 0 < |x - a| < \delta.$$

在拓扑学里面来描述就是在拓扑空间 X 下，若 A 是 X 的某个子集，取 $x \in X$ ，若 x 的每个邻域都含有 $A \setminus \{x\}$ 的点，则称 x 是 A 的聚点。这里有一个聚点另外一种形式的刻画

Proposition 3.7. 设 $x \in X$ 有可数邻域基， $A \subseteq X$ ，则 x 是 A 的聚点当且仅当存在由 $A \setminus \{x\}$ 中的点构成的点列 x_n 以 x 为极限。

证明。从数分里面的定义，看起来确实像可以取定一个数列，它的极限点。来严格证明一下，若 x 是 A 的聚点，怎么来构造一个点列让它的极限是 x 呢？从上一个命题里面我们可以找一个 x 的可数邻域为 $\{V_1, V_2, \dots\}$ 使得 $m > n$ 时 $V_m \subseteq V_n$ ，然后在分别在 $V_n \cap A$ 取一点 $x_n \neq x$ (聚点的定义是每个邻域都有 A 中的点)，则以点列 x_n 以 x 为极限。

反过来存在 $A \setminus \{x\}$ 中的点列 x_n 以 x 为极限，则当 $n > N$ 时， x 的任何邻域都要包含某个 $x_n \in A \setminus \{x\}$ ，因此 x 是 A 的聚点。□

聚点和极限本质上刻画的是同一个东西，都是有无穷多个点聚在某处，数分里面的聚点是针对某个数列，而现在直接给你一个子集，要说明子集的聚点？这个就不唯一了，你可以从这个子集里面取很多个点列出来。

还有一个用极限来刻画连续的命题

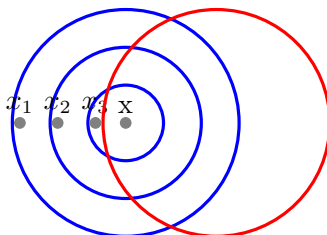
Proposition 3.8. 设 $x \in X$ 有可数邻域基，则映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 x 点处连续的充分必要条件是：任取以 x 为极限的点列 $\{x_n\}$ ，点列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $f(x)$ 为极限。

证明。很优雅结论，若 f 连续且取以 x 为极限的点列 x_n 和 $f(x)$ 的邻域 $U, f^{-1}(x)$ 的邻域，根据极限的定义，则存在当 $n > N$ 是 $x_n \in f^{-1}(U)$ ，从而 $f(x_n) \in U$ ，则以 $\{f(x_n)\}$ 为点列的极限是 $f(x)$ 。

反过来，取 x 的可数邻域基 $\{V_1, V_2, \dots\}$ 使得 $m > n$ 时总有 $V_m \subseteq V_n$ ，任取 $f^{-1}(x)$ 的邻域 U ，假设 $f(U)$ 不是 x 的邻域，则我们可以在前面可数邻域基里面取这样一组点 $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(U)$ ，为什么可以取到这样一组

点呢? 因为当 $f^{-1}(U)$ 不是 x 邻域的时候 $f^{-1}U$ 不包含任何可数邻域基里面的成员. 取到这样的一组点同样是以 x 为极限的点列, 但是它 $f(x_n)$ 并不含于 U , 所以 $\{f(x_n)\}$ 以 $f(x)$ 为极限不成立, 与条件矛盾, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域. \square

如何来理解和记忆这个命题呢? 这个证明也很绕, 有没有一种很直观的理解来描述这一奇特的连续条件呢?



如果 $f^{-1}(U)$ 不是 x 的邻域, 则它不包含任何邻域基里面的成员, 也就是如上图, 接着我们可以找到以 x 为极限的点列 $\{x_n\}$ 它不在 $f^{-1}(U)$, 随之 $f(x_n)$ 也不在 U 里面.

注意上面命题的开头都是 x 有可数邻域基, 主要是为了取可数点列.

邻域基是一种挑出一部分邻域来“代表”所有邻域的机制, 类似地, 也有一种挑出一部分开集来“代表”所有开集的机制, 称为拓扑基.

Definition 3.9. 设 \mathcal{B} 是集合 X 上的一个子集族, 称子集族

$$\bar{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ 是 } \mathcal{B} \text{ 中若干成员的并集}\}$$

为 \mathcal{B} 生成 (generate) 的子集族, 若 $\bar{\mathcal{B}}$ 恰好是拓扑空间 (X, τ) 上的拓扑结构 τ , 则称 \mathcal{B} 为其**拓扑基** (topological base).

设 \mathcal{N} 是 X 上一个生成拓扑结构 τ 的基准开领域结构, 则 $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{N}(x)$ 就是一个拓扑基.

那么问题来了, 如果我们给定 X 上的一个子集族, 如何判定这个子集族是不是一个拓扑基?

Proposition 3.10. 设 \mathcal{B} 是集合 X 上的一个子集族, 则 $\bar{\mathcal{B}}$ 是 X 上拓扑结构的充分必要条件是

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 \in \bar{\mathcal{B}}$

想想 $\bar{\mathcal{B}}$ 本身的性质, 其中 \emptyset 肯定在里面, 因为 empty union, 任意的并也是封闭, 所以只需要保证 $X \in \tau$ 且 $\bar{\mathcal{B}}$ 在交运算下封闭, 这就是上述的命题主要刻画的剩余条件. 这个命题很有作用, 能帮我们快速的判定一些拓扑基.

Example 3.11. 给定 \mathbb{R}^2 上一块不带边的长方形 $a < x < b, c < y < d$, 让 $\mathcal{B} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, a < x < b, c < y < d \}$ 表示所有 (x, y) 和 (a, c) 确定 "open rectangles", 则 \mathcal{B} 是这块长方形的一个欧式拓扑, 用上面命题检验一下.

Definition 3.12. 如果拓扑基 \mathcal{B} 只含可数多个成员, 则称之为**可数拓扑基** (countable topological base). 若某拓扑空间上存在可数拓扑基, 则称其拓扑空间为**第二可数空间** (second-countable space) 或者满足**第二可数公理** (second axiom of countability)

相比于第一可数公理, 第二可数公理是相对于整个拓扑空间来说的.

Example 3.13. n 维欧式空间 \mathbb{R}^n 是第二可数空间: 令

$$\mathcal{B} = \{ B_{\frac{1}{k+1}}(x_1, \dots, x_n) \mid k \in \mathbb{N}, \text{ 每个 } x_i \in \mathbb{Q} \}$$

则它就是就是一个可数拓扑基 (注意这里是 \mathbb{Q} 不是 \mathbb{R})

证明. 每一个的 $p \in \mathbb{R}^n$ 的领域, 都可以找到一个 $x \in \mathbb{Q}^n$ 包含这个点 p , \mathbb{Q}^n 球形领域是可数的. □

Example 3.14. \mathbb{R} 上的离散拓扑不满足第二可数公理. 对于它的任何拓扑基 \mathcal{B} 来说, 每个单点集 $\{x\}$ 因为是开集且它们是含于是 \mathcal{B} , 而这样的单点集有不可数多个 (因为 \mathbb{R} 不可数), 则 \mathbb{R} 也有不可数多个成员.

第二可数空间一定是可数第一空间, 但是反过来不一定成立, 离散拓扑可以由度量拓扑诱导出来, 而度量空间一定是第一可数空间, \mathbb{R} 上离散拓扑就刚好是这个反例.

Proposition 3.15. 第二可数空间可分.

证明. 回顾一下可分的概念, 就是指 X 上存在可数稠密子集, 稠密是指这个子集的闭包等于全空间. 那么我们先构造一个这样的子集, 设 $\mathcal{B} = U_1, U_2, \dots$ 是一个可数拓扑基, 然后分别从其成员 U_n 取一个 x_n , 构成一个子集 $A = x_1, x_2, \dots$, X 上的所有开集都要包含 A 中的某个点, 这就说明 X 中的每个点都是 A 闭包中的点, 即子集 A 是稠密. □

Proposition 3.16. 可分度量空间是第二可数空间

证明. 设 A 是 X 上的一个稠密子集, 我们构造一个可数的拓扑基

$$\mathcal{B} = \{ B_{\frac{1}{n+1}}(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \}$$

, 然后我们来证明 X 上的任意开集 U 都是它们并起来的.

任取 $x \in U$, 是存在合适的 n 使得 $B_{\frac{1}{n}} \subseteq U$, 因为 A 是稠密的, 所以我们取的到 $a \in B_{\frac{1}{n}} \cap A$, 也是可以找到合适的 n' 使得 $x \in B_{\frac{1}{n'}}(a) \subseteq U$, 由于 x 是任意的, 把这些 $B_{\frac{1}{n'}}(a)$ 都并起来就是 U . □

延伸一下拓扑基相关概念，前面我们知道了怎么去判定一个子集族是不是拓扑基，也就是去检验这个子集族能不能构造出某个拓扑结构，这种情况下有可能不同的拓扑基对应不同拓扑结构。那么现在我如果给定一个先给定 X 上的一个拓扑结构 τ ，让你去找 τ 的拓扑基，这个时候应该怎么找呢？或者换句话说，我们构造了一个拓扑基，我们怎么判定这个拓扑基生成的拓扑是不是恰好 τ ？

Proposition 3.17. 给定一个拓扑空间 (X, τ) ，如果 X 上开子集族 \mathcal{B} 是 τ 的拓扑基当且仅当任取 τ 的任意一个开集 U ，再任取 $x \in U$ ，总存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$ 。

证明. 若 \mathcal{B} 是 τ 的一个拓扑基，则对于任意 $U \in \tau$ ，有 $U = \bigcup_k B_k$ ，其中 $B_k \in \mathcal{B}$ ，若取 $x \in U$ ，则能找到某个 $x \in B_k$ ，所以 $x \in B_k \subseteq U$ 。

若任取 τ 中开集 U ， $x \in U$ ，总有 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$ ，取遍 U 里面的所有元素，则 $U = \bigcup_k B_k$ ，则 \mathcal{B} 是一个拓扑基。□

还有一个用拓扑基来判定开集的一个命题：

Proposition 3.18. 定义 \mathcal{B} 为 (X, τ) 的一个拓扑基，若 X 上某个子集 U 开当且仅当 $\forall x \in U$ ，总存在一个 $B \in \mathcal{B}$ ，使得 $x \in B \subseteq U$ 。

我们再考虑一种非常特殊的情况，我们知道拓扑基是不唯一，若 \mathcal{B} 是 (X, τ) 上的拓扑基，往 \mathcal{B} 里面再加几个开集，它还是一个拓扑基，这个很显然。那么现在我有两个拓扑基 \mathcal{B}_1 和 \mathcal{B}_2 ，如何判定它们生成是同一个拓扑结构还是不同的拓扑结构？

Proposition 3.19. 定义拓扑基 \mathcal{B}_1 和 \mathcal{B}_2 分别是拓扑结构 τ_1 和 τ_2 的拓扑基，若 $\tau_1 = \tau_2$ 当且仅当

1. $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1$ 和 $\forall x \in B_1$ ，总是存在 $B_2 \in \mathcal{B}_2$ ，使得 $x \in B_2 \subseteq B_1$ ；
2. $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2$ 和 $\forall x \in B_2$ ，总是存在 $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ，使得 $x \in B_1 \subseteq B_2$

经典的两边相互包含证相等，这个命题非常有趣，例如 n 维欧式空间上的开等边三角形 (open equilateral triangle) 拓扑基和开长方形 (open rectangle) 拓扑基都可以生成欧式拓扑。就可以用上述的命题来刻画它们分别定义的拓扑结构关系，非常有趣。

Distinguishable

这一章主要刻画的是分离公理，分离公理的原意是指是否可以用拓扑结构分离空间中的两个原本不应该重叠的部分. 按照对“不该重叠的两部分”理解不同以及区分方法的不同，有很多种不同判定方法和条件，每一种条件被称为一种**分离公理** (separation axiom).

前面我们提到过的 T_0 或者 T_1 就在这里出现了，数学家意识到这些性质有共同之处，值得放在一起研究之前，每个数学家在需要某种形式的此类性质时，都会根据自己的具体需要去写相关的条件，于是赋予了这些分离公理各种不同的名字. 不过现在人们用 T 加数字下标来对它们统一命名. 字母 T 来自于德语的分离公理 “das Trennungsaxiom”. 这些公理相互之间没有谁蕴含谁的关系，不过在假设单点集是闭集的前提下编号越大的公理要求越强.

回忆一下 T_0 空间，对于任意的两点 x 和 y ，存在一个开集只含有 x, y 中的一个点. 对于存在开集只含有 x, y 中一个点，这种条件下，称 x 和 y 可拓扑区分 (topologically distinguishable). T_0 公理就可以简化为任意两点都可以拓扑区分，这是一个非常弱的条件，虽然弱就意味着很多空间满足它，但是也有缺点，就是用起来很不方便：当我们讲一个开集“区分”了 x 和 y 的时候，只看这句话甚至无法推断出 U 到底是包含 x 还是 y .

Definition 3.20. 任取 $x \neq y \in X$ ，存在开集 U, V 使得 $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ ，简单来说就是不同的点存在不相交的开邻域，这个条件称为 T_2 公理. 满足 T_2 公理称为 **Hausdorff** 空间.

Proposition 3.21. Hausdorff 空间中的每个单点集 $\{x\}$ 都是闭集。

证明. 我们只需要说明 $X \setminus \{x\}$ 是一个开集，即 $X \setminus \{x\}$ 是其中每个点的邻域，任取一个 $x \in X$ ，然后再任取 $y \neq x \in X$ ，由 T_2 公理， y 必有邻域包含于 $\{x\}^c$ ，由于 y 是任意的，所以 $X \setminus \{x\}$ 是一个开集，从而 $\{x\}$ 是一个闭集. \square

Example 3.22. 度量空间都是 Hausdorff 空间，因为任取 $x \neq y$ ，只需要令 $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ 即可，想象两个相切的圆.

证明. 严格证明一下上述取法得到的确实是两个不相交的邻域，假设有一点 p 在同时在这两个邻域里面，则

$$d(x, p) + d(y, p) \leq 2\varepsilon$$

这与度量空间中的三角不等式矛盾，所以不存在这样的点. \square

再来一个 T_3 公理

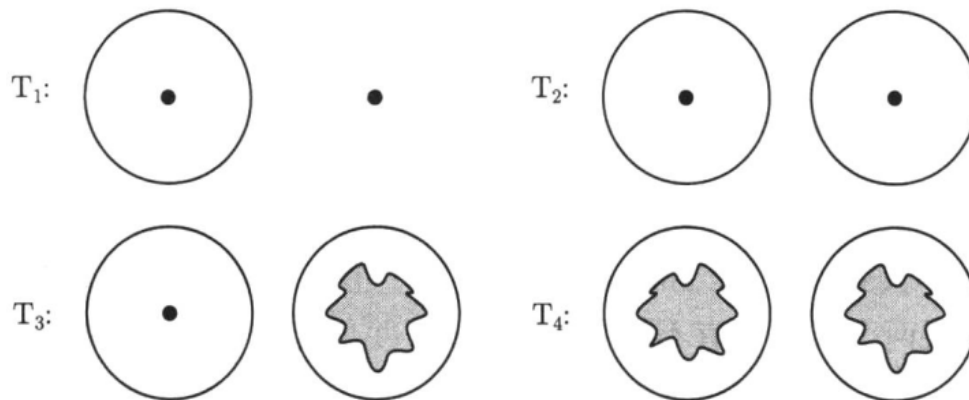
Definition 3.23. 如果对任意的闭集 A 和其外一点 p ，存在不相交的开集 U 和 V 使得 $A \subseteq U, p \in V$ ，则该空间也叫 **regular** space.

Definition 3.24. 若 Hausdorff 空间 X 的每个点都有一个邻域同胚于 \mathbb{R}^n 的开子集，则称 X 为一个 (不带边界的) **流形** (manifold)， n 称为这个流形的**维数** (dimension).

与 T_2 公理类似还有一个 T_4 公理, 但是 T_4 要用拓扑信息区分的对象不是点了, 而是不相交的闭集.

Definition 3.25. 任取闭集 A, B 使得 $A \cap B = \emptyset$, 存在开集 U, V 使得 $A \subseteq U, B \subseteq V$ 并且 $U \cap V = \emptyset$. 简而言之就是不相交的闭集有分别包含它们的不相交的邻域, 称为 T_4 公理. 满足 T_4 的空间称为**正规空间** (normal space).

这几个分离公理条件是越来越强, 可以用下面一张图来形象的描述



Proposition 3.26. 度量空间是正规 (normal) 空间

证明. 设 X 是个度量空间, 任取两个不相交的闭集 C_1, C_2 , 怎么来形象的刻画两个闭集不相交呢? 首先定义两个闭集的距离 $d(C_1, C_2) = \inf\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ (可以思考一下这里为什么要取下确界, 不能取 \min 呢?), 所以 $d(C_1, C_2) > 0$, 我们可以定义两个分别包含它们的开集

$$U_1 = \bigcup_{x \in C_1} \frac{B_{d(C_1, C_2)}(x)}{3} \quad (1)$$

$$U_2 = \bigcup_{x \in C_2} \frac{B_{d(C_1, C_2)}(x)}{3} \quad (2)$$

为了说明 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, 假设它们相交, 任取一点 $y \in U_1 \cap U_2$, 则肯定存在 $x_1 \in C_1$ 和 $x_2 \in C_2$ 使得

$$y \in \frac{B_{d(C_1, C_2)}(x_1)}{3} \cap \frac{B_{d(C_1, C_2)}(x_2)}{3}$$

, 从而可以得到 $d(y, x_1) < \frac{B_{d(C_1, C_2)}(x_1)}{3}$ 和 $d(y, x_2) < \frac{B_{d(C_1, C_2)}(x_2)}{3}$, 所以有下面连续的不等式

$$\frac{2B_{d(C_1, C_2)}}{3} > d(y, x_1) + d(y, x_2) > d(x_1, x_2) \geq d(C_1, C_2)$$

这里就产生了一个矛盾, 所以假设不成立, 从而 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. □

我们已经证明了度量空间是满足 normal 和 Hausdorff 的性质，同时还有第一可数公理，那我们反过来想想什么时候可以说一个空间是一个度量空间或者说是可度量的？跟直接一点，能不能根据现有的拓扑结构诱导出度量拓扑？仅靠上述这些我们已经证明的过的条件是否已经够了呢？

点集拓扑里面一个不那么 trivial 的定理就要出现了!!! 那就是著名的 Urysohn Metrization Theorem.

在证明这个定理之前，首先需要引出 Urysohn Lemma, 它的存在对 Urysohn Metrization Theorem 的证明起到至关重要的作用，它的出现说明了我们可以用一个连续函数来区分两个闭子集，来代替用拓扑的信息区分。

Lemma 3.27. 拓扑空间 X 是正规空间 (normal) 的充分必要条件是任取不相交的闭子集 A, B , 存在连续映射 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 满足 $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$.

先试一个关于 normal space 的命题

Proposition 3.28. 拓扑空间 X 是正规空间当且仅当对任意的开集 U , 和任意的闭子集 $A \subseteq U$, 存在一个开集 V 使得 $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

证明. 当 X 是一个正规空间, 给定一个开集 U 和闭子集 $A \subseteq U$, 再取一个闭集 $B = X \setminus U$, 根据 normal 的定义, 存在两个不相交的开集 $A \subseteq U_A$ 和 $B \subseteq U_B$, 我们肯定希望这个 U_A 正好属于 U , 开始我们有 $U_A \cap U_B = \emptyset$, 从而我们有 $U_A \cap B = \emptyset$, 所以 $U_A \subseteq X \setminus B = U$, 类似的 $\bar{U}_A \cap U_B = \emptyset$, 如果有一点 $p \in \bar{U}_A \cap U_B$ 那 p 只能是 U_A 的聚点了, 但是 U_B 是 p 的邻域, 它和 U_A 并没有交点, 造成了矛盾. 这样 $\bar{U}_A \subseteq U$, 而 $U_A \subseteq \bar{U}_A$ 是 trivial 的。

反过来的话, 留下以后再证, 全力追逐 Urysohn Lemma 中 \square

开始证明 Urysohn Lemma

证明. 设 $(\Leftarrow) f: X \rightarrow [0, 1]$ 是一个连续函数, A, B 是两个不相交的闭集, 很自然的有 $A \subseteq f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ 和 $B \subseteq f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$, 由于 f 是连续的, 所以 $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ 和 $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ 都是开集且分别包含 A 和 B , 所以 X 是一个 normal space.

(\Rightarrow) 这个方向的难度在于你要构造一个连续函数 f 出来。

假设拓扑空间 X 是一个 normal space, 给定两个不为空的闭集 A 和 B , 让开集 $U_1 = X$, 因为 $X \setminus B$ 开且包含 A , 我们可以再用前面已经证明的命题再找一个开集 U_0 , 使得

$$A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq X \setminus B,$$

然后继续再找一个开集 $U_{\frac{1}{2}}$, 因为 \bar{U}_0 也是一个闭集, 所以我们再用前面的命题

$$A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq X \setminus B$$

. 我们构造了三个开集出来: $U_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq U_1$, 而且我们有

$$A \subseteq U_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq X \setminus B \subseteq U_1 = X$$

现在我们可以尝试用这些开集来定义一个函数，初探一下后面连续函数构造的 idea，定义一个函数 $g: X \rightarrow [0, 1]$, $g(x) = \min\{p: x \in U_p\}$. 由于我们只定义了有限三个开集，函数值也只有 $0, \frac{1}{2}, 1$, 但是足够我们窥得一丝其中构造的思路，因为 $A \subseteq U_0$, 所以 $\forall x \in A, g(x) = 0$, 相似地因为 $B \subseteq U_1$, 所以 $\forall x \in B, g(x) = 1$. 现在这个函数并不是一个连续的，因为如果考虑 $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 的原像为 $U_{\frac{1}{2}} \setminus U_0$, 并不能保证它是 X 里面的一个开集，如果想要让这个函数连续的话，需要定义更多的类似 $U_{\frac{1}{2}}$ 的开集，来满足任意一个 $[0, 1]$ 里面的开集的原像都能对应上我们构造出来的开集。

利用上述 idea 的直觉我们来尝试归纳的构造出一系列开集，这些开集将会 indexed by $[0, 1]$ 里面所有的有理数，即 $\{U_p \mid p \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$, 将 $[0, 1]$ 里面的有理数用集合 $Q = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 表示，所以 Q 是可数的，从而可以把 Q 枚举 $Q = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 为了方便起见我们直接让 $p_0 = 1, p_1 = 0$.

还是和前面一样，让 $U_1 = X \setminus B$, 然后利用 X 是 normal 的性质，让 U_0 表示开集

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$$

. 这是初始条件，然后按照下面性质开始归纳

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

, 初始条件显然是满足上面性质的. 现在假设我们定义好了 U_{p_k} , for $k = 1, 2, \dots, n$ 满足上述性质，我们来考虑 $U_{p_{n+1}}$ 的定义，设 $P = p_1, p_2, \dots, p_n, r = p_{n+1}$, 现在我们要把 U_r 插到已经定义好的 n 个开集里面，把 P 里面的元素按大小线性排列，然后考虑有理数序的关系，总可以把 r 有一个立即前驱 p 和一个立即后继 q , 我们在开始阶段已经把 0 和 1 都扔到 P 里面取了，所以总可以找到这样的一对数. 即开集 U_r 表示为

$$\overline{U_p} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_q$$

, 这样就完成了归纳过程。

我们为什么要取 Q ? , 因为 Q 可数才是保证我们的归纳过程，最后我们得到了一族开集 $\{U_p \mid p \in Q\}$, 现在把它扩展到整个有理数上，如果 $p \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$, 则 $U_p = \emptyset$, 如果 $p \in (1, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, 则 $U_p = X$, 扩展得到的 $\{U_p \mid p \in \mathbb{Q}\}$ 仍然满足

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

.

前面一系列的工作已经做完了，现在开始思考我们的连续函数如何定义，我们先定义一个函数 $\mathbb{Q}(x) := \{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}$, 然后思考一下这个函数的函数值， $\mathbb{Q}(x)$ 的中的最小值只能是 0 , 因为如果 $p < 0$, 则 $U_p = \emptyset$, No x for it! 同时 \mathbb{Q} 最大值不存在，因为 $\forall x \in X = U_p, p > 1$, 换句话说就是任意的 $\mathbb{Q}(x)$ 都包含所有大于 1 的有理数，现在我们对 \mathbb{Q} 的函数值有了全貌上的了解，所有 $\mathbb{Q}(x)$ 中的元素必有一个下确界，正主来了，我们定义 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 如下

$$f(x) = \inf(\mathbb{Q}(x)) = \inf\{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}.$$

