Разложение ДУ в ряд.

Диференциальное уравнение с частными производными параболического типа в общем виде записывается следующим образом:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b\frac{\delta u}{\delta x} + cu + f(x,t)$$

1. Для явной разностной схемы.
Воспользуемся методами численного диференциирования и разложим каждый член уравнения имеющий производную в конечную сумму:
   - $\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}$, где τ - шаг по временной сетке;
   - $a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = a\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2}$, где h - шаг по пространственной сетке;
   - $b\frac{\delta u}{\delta x} = b\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}$;
   - $cu = cu_i^k$;

   Переппишем исходное уравнение:

   $$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = a\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + b\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + cu_i^k + f(x,t).$$

   Сгруппируем коэффиценты при u с одинаковыми индексами:

   $$u_i^{k+1} = \left(\frac{a}{h^2} - \frac{b}{2h}\right)u_{i-1}^k\tau + \left(c + \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2}\right)u_i^k\tau + \left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)u_{i+1}^k\tau + f(x,t)\tau.$$

   Непосредственно из этого уравнения находится значение функции на временном уровне k+1.

2. Для не явной разностной схемы.
Воспользуемся методами численного диференциирования и разложим каждый член уравнения имеющий производную в конечную сумму:
   - $\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}$, где τ - шаг по временной сетке;
   - $a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = a\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2}$, где h - шаг по пространственной сетке;
   - $b\frac{\delta u}{\delta x} = b\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h}$;
   - $cu = cu_i^{k+1}$;

   Переппишем исходное уравнение:

   $$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = a\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} + b\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h} + cu_i^{k+1} + f(x,t).$$

   Сгруппируем коэффиценты при u с одинаковыми индексами:

   $$u_i^k + f(x,t)\tau = \left(\frac{b}{2h} - \frac{a}{h^2}\right)u_{i-1}^{k+1}\tau + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2a}{h^2} - c\right)u_i^{k+1}\tau - \left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)u_{i+1}^{k+1}\tau.$$

Для нахождения значений функции u на уровне k+1 необходимо решить систему уравнеий:

$$\begin{cases} i = 1; \quad ... \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad ... \end{cases}$$

где $A = \left(\frac{b}{2h} - \frac{a}{h^2}\right)\tau$, $B = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2a}{h^2} - c\right)\tau$, $C = -\left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)\tau$, $d = u_i^k + f(x,t)\tau$.
Формирование уравнеий при i=1 и i=N рассмотрим в разделе посвященном краевые условия.

Примечание. *Во всех формулах приведенных выше рассматривается* $i \in [2, N-1]$*, где* N *- количекство узлов в сетке по координате* x*.*

Краевые условия.

Краевые условия могут принимать вид:

1. Условия первого рода:

$$\begin{cases} \beta u(0,x) = \phi_l(t) \\ \delta u(l,x) = \phi_r(t) \end{cases}$$

   В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:

   - Для явной разностной схемы
     $u_1^{k+1} = \frac{\phi_l(t)}{\beta}$, $u_N^{k+1} = \frac{\phi_r(t)}{\delta}$.
   - Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad \beta u_1^{k+1} + 0u_2^{k+1} = \phi_l(t) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad 0u_{N-1}^{k+1} + \delta u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases},$$

2. Условия второго рода:

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x}(0,x) = \frac{\phi_l(t)}{\alpha} \\ \frac{\delta u}{\delta x}(l,x) = \frac{\phi_r(t)}{\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_2^{k+1} - u_1^{k+1}}{h}(0,x) = \frac{\phi_l(t)}{\alpha} \\ \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h}(l,x) = \frac{\phi_r(t)}{\gamma} \end{cases}$$

   В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:

   - Для явной разностной схемы
     $u_1^{k+1} = u_2^{k+1} - h\frac{\phi_l(t)}{\alpha}$, $u_N^{k+1} = u_{N-1}^{k+1} + h\frac{\phi_r(t)}{\gamma}$.
   - Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad -\frac{\alpha}{h}u_1^{k+1} + \frac{\alpha}{h}u_2^{k+1} = \phi_l(t) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad -\frac{\gamma}{h}u_{N-1}^{k+1} + \frac{\gamma}{h}u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases},$$

3. Условия третьего рода:

$$\begin{cases}\alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)+\beta u(0,x)=\phi_l(t)\\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x)+\delta u(l,x)=\phi_r(t)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}(0,x)+\beta u_1^{k+1}=\phi_l(t)\\ \gamma\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}(l,x)+\delta u_N^{k+1}=\phi_r(t)\end{cases}$$

В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:

- Для явной разностной схемы
  $u_1^{k+1}=\frac{\phi_l(t)-\frac{\alpha}{h}u_2^{k+1}}{\beta-\frac{\alpha}{h}}$, $u_N^{k+1}=\frac{\phi_r(t)+\frac{\gamma}{h}n_{N-1}^{k+1}}{\delta+\frac{\gamma}{h}}$.
- Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases}i=1; \quad \left(\beta-\frac{\alpha}{h}\right)u_1^{k+1}+\frac{\alpha}{h}u_2^{k+1}=\phi_l(t)\\ i=\overline{2,N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1}+Bu_i^{k+1}+Cu_{i+1}^{k+1}=d_i\\ i=N; \quad -\frac{\gamma}{h}u_{N-1}^{k+1}+\left(\delta+\frac{\gamma}{h}\right)u_N^{k+1}=\phi_r(t)\end{cases},$$

Примечание. *в разборе приведена апроксимация краевых условий с производной по 2 точкам с 1 порядком точности. Так же можно апроксимировать краевое условие по 3 точкам с точностью 2 и по 2 точкам с точностью 2.*