Разложение ДУ в ряд.

Диференциальное уравнение с частными производными параболического типа в общем виде записывается следующим образом:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + d\frac{\delta u}{\delta t} = a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b\frac{\delta u}{\delta x} + cu + f(x,t)$$

1. Для явной разностной схемы.
   Воспользуемся методами численного диференциирования и разложим каждый член уравнения имеющий производную в конечную сумму:

   - $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2}$, где τ - шаг по временной сетке;
   - $d\frac{\delta u}{\delta t} = d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau}$
   - $a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = a\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2}$, где h - шаг по пространственной сетке;
   - $b\frac{\delta u}{\delta x} = b\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}$;
   - $cu = cu_i^k$;

   Переппишем исходное уравнение:

   $$\frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2} + d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + b\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + cu_i^k + f(x,t).$$

   Сгруппируем коэффиценты при u с одинаковыми индексами:

   $$u_i^{k+1}\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{d}{2\tau}\right) = \left(\frac{a}{h^2} - \frac{b}{2h}\right)u_{i-1}^k + \left(c + \frac{2}{\tau^2} - \frac{2a}{h^2}\right)u_i^k + \left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)u_{i+1}^k + f(x,t).$$

   Непосредственно из этого уравнения находится значение функции на временном уровне k+1.

2. Для не явной разностной схемы.
   Воспользуемся методами численного диференциирования и разложим каждый член уравнения имеющий производную в конечную сумму:

   - $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2}$, где τ - шаг по временной сетке;
   - $d\frac{\delta u}{\delta t} = d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau}$
   - $a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = a\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2}$, где h - шаг по пространственной сетке;
   - $b\frac{\delta u}{\delta x} = b\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h}$;
   - $cu = cu_i^{k+1}$;

   Переппишем исходное уравнение:

   $$\frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2} + d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} + b\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h} + cu_i^{k+1} + f(x,t).$$

Сгруппируем коэффиценты при u с одинаковыми индексами:

$$u_i^{k-1}\left(\frac{1}{\tau^2}-\frac{d}{2\tau}\right)-\frac{2u_i^k}{\tau^2}-f(x,t)=\left(\frac{a}{h^2}-\frac{b}{2h}\right)u_{i-1}^{k+1}+\left(c-\frac{2a}{h^2}-\frac{d}{2\tau}-\frac{1}{\tau^2}\right)u_i^{k+1}-\left(\frac{a}{h^2}+\frac{b}{2h}\right)u_{i+1}^{k+1}.$$

Для нахождения значений функции u на уровне k+1 необходимо решить систему уравнеий:

$$\begin{cases} i=1; & ... \\ i=\overline{2,N-1}; & Au_{i-1}^{k+1}+Bu_i^{k+1}+Cu_{i+1}^{k+1}=d_i \\ i=N; & ... \end{cases}$$

где $A=\left(\frac{a}{h^2}-\frac{b}{2h}\right)$, $B=\left(c-\frac{2a}{h^2}-\frac{d}{2\tau}-\frac{1}{\tau^2}\right)$, $C=\left(\frac{a}{h^2}+\frac{b}{2h}\right)$, $d=u_i^{k-1}\left(\frac{1}{\tau^2}-\frac{d}{2\tau}\right)-\frac{2u_i^k}{\tau^2}-f(x,t)$.
Формирование уравнеий при i=1 и i=N рассмотрим в разделе посвященном краевые условия.

Примечание. *Во всех формулах приведенных выше рассматривается $i\in[2,N-1]$, где N - количекство узлов в сетке по координате x.*

Первый и второй временные слои.

Исходя из формул приведенных выше становится очевидно, что необходимо знать значение функции на временных уровнях $k-1$ и k.
Для вычисления временного уровня 0 воспользуемся начальным условием $\psi_0(x)$:

$$u_i^0=\psi_0(ih),\ \text{где}\ h-\text{шаг по коорденате}\ x,\ i\in[0;N).$$

Для вычисления временного уровня 1 необходимо использовать условием $\psi_1(x)$. Поскольку это условие содержит производную восползуемя апроксимацией:

- По 2 точкам с 1 порядком.

$$\frac{u_i^1-u_i^0}{\tau}=\psi_1(ih)$$
$$u_i^1=u_i^0+\psi_1(ih)\tau=\psi_0(ih)+\psi_1(ih)\tau$$

- По 2 точкам с 2 порядком.
  Разложим в ряд Тейлора:

$$u_i^1=u_i^0+\left.\frac{\delta u}{\delta t}\right|_i^0\tau+\left.\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}\right|_i^0\frac{\tau^2}{2}.$$

  Из исходного уравнения известно, что $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}=a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+b\frac{\delta u}{\delta x}+cu+f(x,t)-d\frac{\delta u}{\delta t}$. Подставим:

$$u_i^1=u_i^0+\left.\frac{\delta u}{\delta t}\right|_i^0\tau+\left.\left(a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+b\frac{\delta u}{\delta x}+cu+f(x,t)-d\frac{\delta u}{\delta t}\right)\right|_i^0\frac{\tau^2}{2}.$$

  Подставим граничные условия:

$$u_i^1=\psi_0(ih)+\psi_1(ih)\tau+\left(a\ddot{\psi}_0(ih)+b\dot{\psi}_0(ih)+c\psi_0(ih)+f(x,t)-d\psi_1(ih)\right)\frac{\tau^2}{2}.$$

  Сгруппируем:

$$u_i^1=\psi_0(ih)+\psi_1(ih)(\tau-d\frac{\tau^2}{2})+\left(a\ddot{\psi}_0(ih)+b\dot{\psi}_0(ih)+c\psi_0(ih)+f(x,t)\right)\frac{\tau^2}{2}.$$

Краевые условия.

Краевые условия могут принимать вид:

1. Условия первого рода:
$$\begin{cases}\beta u(0,x)=\phi_l(t)\\ \delta u(l,x)=\phi_r(t)\end{cases}$$
В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:
   - Для явной разностной схемы $u_1^{k+1}=\frac{\phi_l(t)}{\beta}$, $u_N^{k+1}=\frac{\phi_r(t)}{\delta}$.
   - Для не явной разностной схемы
$$\begin{cases}i=1;\quad \beta u_1^{k+1}+0u_2^{k+1}=\phi_l(t)\\ i=\overline{2,N-1};\quad Au_{i-1}^{k+1}+Bu_i^{k+1}+Cu_{i+1}^{k+1}=d_i\\ i=N;\quad 0u_{N-1}^{k+1}+\delta u_N^{k+1}=\phi_r(t)\end{cases},$$
2. Условия второго рода:
$$\begin{cases}\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)=\frac{\phi_l(t)}{\alpha}\\ \frac{\delta u}{\delta x}(l,x)=\frac{\phi_r(t)}{\gamma}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}(0,x)=\frac{\phi_l(t)}{\alpha}\\ \frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}(l,x)=\frac{\phi_r(t)}{\gamma}\end{cases}$$
В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:
   - Для явной разностной схемы $u_1^{k+1}=u_2^{k+1}-h\frac{\phi_l(t)}{\alpha}$, $u_N^{k+1}=u_{N-1}^{k+1}+h\frac{\phi_r(t)}{\gamma}$.
   - Для не явной разностной схемы
$$\begin{cases}i=1;\quad -\frac{\alpha}{h}u_1^{k+1}+\frac{\alpha}{h}u_2^{k+1}=\phi_l(t)\\ i=\overline{2,N-1};\quad Au_{i-1}^{k+1}+Bu_i^{k+1}+Cu_{i+1}^{k+1}=d_i\\ i=N;\quad -\frac{\gamma}{h}u_{N-1}^{k+1}+\frac{\gamma}{h}u_N^{k+1}=\phi_r(t)\end{cases},$$
3. Условия третьего рода:
$$\begin{cases}\alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)+\beta u(0,x)=\phi_l(t)\\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x)+\delta u(l,x)=\phi_r(t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}(0,x)+\beta u_1^{k+1}=\phi_l(t)\\ \gamma\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}(l,x)+\delta u_N^{k+1}=\phi_r(t)\end{cases}$$
В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:
   - Для явной разностной схемы $u_1^{k+1}=\frac{\phi_l(t)-\frac{\alpha}{h}u_2^{k+1}}{\beta-\frac{\alpha}{h}}$, $u_N^{k+1}=\frac{\phi_r(t)+\frac{\gamma}{h}n_{N-1}^{k+1}}{\delta+\frac{\gamma}{h}}$.
   - Для не явной разностной схемы
$$\begin{cases}i=1;\quad \left(\beta-\frac{\alpha}{h}\right)u_1^{k+1}+\frac{\alpha}{h}u_2^{k+1}=\phi_l(t)\\ i=\overline{2,N-1};\quad Au_{i-1}^{k+1}+Bu_i^{k+1}+Cu_{i+1}^{k+1}=d_i\\ i=N;\quad -\frac{\gamma}{h}u_{N-1}^{k+1}+\left(\delta+\frac{\gamma}{h}\right)u_N^{k+1}=\phi_r(t)\end{cases},$$

Теперь рассмотрим аппроксимацию с вторым порядком точности. Поскольку условия первого рода не требую аппроксимации, а условия второго рода являются частным случем условий третьего рода, будем рассматривать случай краевыех условий третиего рода.

1. По 3 точкам.

$$\begin{cases} \alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)+\beta u(0,x)=\phi_l(t) \\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x)+\delta u(l,x)=\phi_r(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\frac{-3u_1^{k+1}+4u_2^{k+1}-u_3^{k+1}}{2h}(0,x)+\beta u_1^{k+1}=\phi_l(t) \\ \gamma\frac{u_{N-3}^{k+1}-4u_{N-2}^{k+1}+3u_N^{k+1}}{2h}(l,x)+\delta u_N^{k+1}=\phi_r(t) \end{cases}$$

   - Для явной разностной схемы
     $u_1^{k+1}=\frac{2h\phi_l(t)+\alpha u_3^{k+1}-4\alpha u_2^{k+1}}{2h\beta-3\alpha}$, $u_N^{k+1}=\frac{2h\phi_r(t)+4\gamma u_{N-1}^{k+1}-\gamma u_{N-2}^{k+1}}{2h\delta+3\gamma}$.
   - Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i=1; \quad \left(\beta-\frac{3\alpha}{2h}\right)u_1^{k+1}+\frac{2\alpha}{h}u_2^{k+1}-\frac{\alpha}{2h}u_3^{k+1}=\phi_l(t) \\ i=\overline{2,N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1}+Bu_i^{k+1}+Cu_{i+1}^{k+1}=d_i \\ i=N; \quad \left(\delta+\frac{\gamma}{2h}\right)u_{N-3}^{k+1}+\frac{4\gamma}{2h}u_{N-1}^{k+1}-\frac{\alpha}{2h}u_3^{k+1}=\phi_r(t) \end{cases},$$

2. По 2 точкам.

$$\begin{cases} \alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)=\alpha\left(u_1^{k+1}+\frac{\delta u}{\delta x}\Big|_1^{k+1}h+\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\Big|_1^{k+1}\frac{h^2}{2}\right) \\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x)=\gamma\left(u_N^{k+1}+\frac{\delta u}{\delta x}\Big|_N^{k+1}h+\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\Big|_N^{k+1}\frac{h^2}{2}\right) \end{cases}$$

   Вычислим все неизвестные компоненты:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\Big|_0^{k+1}=\frac{b}{a}\frac{\delta u}{\delta x}-\frac{1}{a}\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}-\frac{d}{a}\frac{\delta u}{\delta t}+\frac{c}{a}u+\frac{1}{a}f(x,t)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}\Big|_0^{k+1}=\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}=\frac{u_1^{k-1}-2u_1^k+u_1^{k+1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{u_1^{k+1}-u_1^{k-1}}{2\tau}$$

   сделаем подстановку:

$$\begin{cases} \alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)=\alpha\left(u_2^{k+1}+\left(\frac{b}{a}\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}-\frac{1}{a}\frac{u_1^{k-1}-2u_1^k+u_1^{k+1}}{\tau^2}-\frac{d}{a}\frac{u_1^{k+1}-u_1^{k-1}}{2\tau}+\frac{c}{a}u_1^{k+1}+\frac{1}{a}f(x,t)\right)\frac{h^2}{2}\right) \\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x)=\gamma\left(2u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}+\left(\frac{b}{a}\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}-\frac{1}{a}\frac{u_N^{k-1}-2u_N^k+u_N^{k+1}}{\tau^2}-\frac{d}{a}\frac{u_N^{k+1}-u_N^{k-1}}{2\tau}+\frac{c}{a}u_N^{k+1}+\frac{1}{a}f(x,t)\right)\frac{h^2}{2}\right) \end{cases}$$

   сгруппируем:

$$\begin{cases} \alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x)=\alpha\left(u_1^{k+1}\left[\frac{ch^2}{2a}-\frac{h^2}{2a\tau^2}-\frac{dh^2}{4a\tau}-\frac{bh}{2a}\right]+u_1^{k-1}\left[-\frac{h^2}{2a\tau^2}-\frac{dh^2}{4a\tau}\right]+u_1^k\frac{h^2}{a\tau^2}+u_2^{k+1}\left[1+\frac{bh}{2a}\right]+f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right) \\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x)=\gamma\left(u_N^{k+1}\left[2+\frac{bh}{2a}-\frac{h^2}{2a\tau^2}-\frac{dh^2}{4a\tau}+\frac{ch^2}{2a}\right]+u_N^{k-1}\left[\frac{dh^2}{4a\tau}-\frac{h^2}{2a\tau^2}\right]+u_N^k\frac{h^2}{a\tau^2}-u_{N-1}^{k+1}\left[1+\frac{bh}{2a}\right]+f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right) \end{cases}$$

Для краткости введем обозначения:
$m_0 = \frac{ch^2}{2a} - \frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau} - \frac{bh}{2a}$; $z_0 = -\frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau}$; $s_0 = 1 + \frac{bh}{2a}$;
$m_l = 2 + \frac{bh}{2a} - \frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau} + \frac{ch^2}{2a}$; $z_l = \frac{dh^2}{4a\tau} - \frac{h^2}{2a\tau^2}$; $s_l = 1 + \frac{bh}{2a}$;

$$\begin{cases} \alpha\left(u_1^{k+1}m_0 + u_1^{k-1}z_0 + u_1^k\frac{h^2}{a\tau^2} + u_2^{k+1}s_0 + f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right) + \beta u_1^{k+1} = \phi_l(t) \\ \gamma\left(u_N^{k+1}m_l + u_N^{k-1}z_l + u_N^k\frac{h^2}{a\tau^2} - u_{N-1}^{k+1}s_l + f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right) + \delta u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases}$$

- Для явной разностной схемы
  $u_1^{k+1}(\alpha m_0 + \beta) = \phi_l(t) - \alpha\left(u_1^{k-1}z_0 + u_1^k\frac{h^2}{a\tau^2} + u_2^{k+1}s_0 + f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right)$,
  $u_N^{k+1}(\gamma m_l + \delta) = \phi_r(t) - \gamma\left(u_N^{k-1}z_l + u_N^k\frac{h^2}{a\tau^2} - u_{N-1}^{k+1}s_l + f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right)$
- Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad u_1^{k+1}(\alpha m_0 + \beta) + \alpha u_2^{k+1}s_0 = \phi_l(t) - \alpha\left(u_1^{k-1}z_0 + u_1^k\frac{h^2}{a\tau^2} + f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad u_N^{k+1}(\gamma m_l + \delta) - \gamma u_{N-1}^{k+1}s_l = \phi_r(t) - \gamma\left(u_N^{k-1}z_l + u_N^k\frac{h^2}{a\tau^2} + f(x,t)\frac{h^2}{2a}\right) \end{cases}$$