Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 805 «Математическая кибернетика»
Дисциплина: «Численные методы»

Лабораторная работа №2
Тема: Решение начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа

Студент:	Хахин Максим
Группа:	80-403
Преподаватель:	Иванов И. Э.
Дата:	
Оценка:	

Москва, 2021

1. **Задание:**
Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

2. **Вариант 9:**

9.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + \sin x \exp(-t),$$
$u(0,t) = \exp(-t)$,
$u(\pi,t) = -\exp(-t)$,
$u(x,0) = \cos x$,
$u_t(x,0) = -\cos x$.
Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t)\cos x$.

3. **Теория:**

Разложение ДУ в ряд.

Диференциальное уравнение с частными производными параболического типа в общем виде записывается следующим образом:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + d\frac{\delta u}{\delta t} = a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b\frac{\delta u}{\delta x} + cu + f(x,t)$$

(a) Для явной разностной схемы.
Воспользуемся методами численного диференциирования и разложим каждый член уравнения имеющий производную в конечную сумму:

- $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2}$, где τ - шаг по временной сетке;
- $d\frac{\delta u}{\delta t} = d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau}$
- $a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = a\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2}$, где h - шаг по пространственной сетке;
- $b\frac{\delta u}{\delta x} = b\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h}$;
- $cu = cu_i^k$;

Переппишем исходное уравнение:

$$\frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2} + d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + b\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + cu_i^k + f(x,t).$$

Сгруппируем коэффиценты при u с одинаковыми индексами:

$$u_i^{k+1}\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{d}{2\tau}\right) = \left(\frac{a}{h^2} - \frac{b}{2h}\right)u_{i-1}^k + \left(c + \frac{2}{\tau^2} - \frac{2a}{h^2}\right)u_i^k + \left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)u_{i+1}^k + f(x,t).$$

Непосредственно из этого уравнения находится значение функции на временном уровне k+1.

(b) Для не явной разностной схемы.
Воспользуемся методами численного диференциирования и разложим каждый член уравнения имеющий производную в конечную сумму:

- $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2}$, где τ - шаг по временной сетке;
- $d\frac{\delta u}{\delta t} = d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau}$
- $a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = a\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2}$, где h - шаг по пространственной сетке;
- $b\frac{\delta u}{\delta x} = b\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h}$;
- $cu = cu_i^{k+1}$;

Переппишем исходное уравнение:

$$\frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2} + d\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\tau} = a\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} + b\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h} + cu_i^{k+1} + f(x,t).$$

Сгруппируем коэффиценты при u с одинаковыми индексами:

$$u_i^{k-1}\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{d}{2\tau}\right) - \frac{2u_i^k}{\tau^2} - f(x,t) = \left(\frac{a}{h^2} - \frac{b}{2h}\right)u_{i-1}^{k+1} + \left(c - \frac{2a}{h^2} - \frac{d}{2\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right)u_i^{k+1} - \left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)u_{i+1}^{k+1}.$$

Для нахождения значений функции u на уровне k+1 необходимо решить систему уравнеий:

$$\begin{cases} i = 1; \quad ... \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad ... \end{cases}$$

где $A = \left(\frac{a}{h^2} - \frac{b}{2h}\right)$, $B = \left(c - \frac{2a}{h^2} - \frac{d}{2\tau} - \frac{1}{\tau^2}\right)$, $C = \left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)$, $d = u_i^{k-1}\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{d}{2\tau}\right) - \frac{2u_i^k}{\tau^2} - f(x,t)$.
Формирование уравнеий при i=1 и i=N рассмотрим в разделе посвященном краевые условия.

Примечание. *Во всех формулах приведенных выше рассматривается* $i \in [2, N-1]$, *где* N *- количекство узлов в сетке по координате* x.

Первый и второй временные слои.

Исходя из формул приведенных выше становится очевидно, что необходимо знать значение функции на временных уровнях $k-1$ и k.
Для вычисления временного уровня 0 воспользуемся начальным условием $\psi_0(x)$:

$$u_i^0 = \psi_0(ih), \text{ где } h - \text{шаг по коорденате } x, \; i \in [0; N).$$

Для вычисления временного уровня 1 необходимо использовать условием $\psi_1(x)$. Поскольку это условие содержит производную восползуемя апроксимацией:

- По 2 точкам с 1 порядком.
$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi_1(ih)$$
$$u_i^1 = u_i^0 + \psi_1(ih)\tau = \psi_0(ih) + \psi_1(ih)\tau$$
- По 2 точкам с 2 порядком.
Разложим в ряд Тейлора:
$$u_i^1 = u_i^0 + \frac{\delta u}{\delta t}\bigg|_i^0 \tau + \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}\bigg|_i^0 \frac{\tau^2}{2}.$$
Из исходного уравнения известно, что $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b\frac{\delta u}{\delta x} + cu + f(x,t) - d\frac{\delta u}{\delta t}$. Подставим:
$$u_i^1 = u_i^0 + \frac{\delta u}{\delta t}\bigg|_i^0 \tau + \left(a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b\frac{\delta u}{\delta x} + cu + f(x,t) - d\frac{\delta u}{\delta t}\right)\bigg|_i^0 \frac{\tau^2}{2}.$$
Подставим граничные условия:
$$u_i^1 = \psi_0(ih) + \psi_1(ih)\tau + \left(a\ddot{\psi}_0(ih) + b\dot{\psi}_0(ih) + c\psi_0(ih) + f(x,t) - d\psi_1(ih)\right)\frac{\tau^2}{2}.$$
Сгруппируем:
$$u_i^1 = \psi_0(ih) + \psi_1(ih)(\tau - d\frac{\tau^2}{2}) + \left(a\ddot{\psi}_0(ih) + b\dot{\psi}_0(ih) + c\psi_0(ih) + f(x,t)\right)\frac{\tau^2}{2}.$$

Краевые условия.

Краевые условия могут принимать вид:

(a) Условия первого рода:
$$\begin{cases} \beta u(0,x) = \phi_l(t) \\ \delta u(l,x) = \phi_r(t) \end{cases}$$
В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:
- Для явной разностной схемы
$u_1^{k+1} = \frac{\phi_l(t)}{\beta}$, $u_N^{k+1} = \frac{\phi_r(t)}{\delta}$.
- Для не явной разностной схемы
$$\begin{cases} i = 1; \quad \beta u_1^{k+1} + 0u_2^{k+1} = \phi_l(t) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad 0u_{N-1}^{k+1} + \delta u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases},$$

(b) Условия второго рода:

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x}(0,x) = \frac{\phi_l(t)}{\alpha} \\ \frac{\delta u}{\delta x}(l,x) = \frac{\phi_r(t)}{\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}(0,x) = \frac{\phi_l(t)}{\alpha} \\ \frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}(l,x) = \frac{\phi_r(t)}{\gamma} \end{cases}$$

В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:

- Для явной разностной схемы $u_1^{k+1} = u_2^{k+1} - h\frac{\phi_l(t)}{\alpha}$, $u_N^{k+1} = u_{N-1}^{k+1} + h\frac{\phi_r(t)}{\gamma}$.
- Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad -\frac{\alpha}{h}u_1^{k+1} + \frac{\alpha}{h}u_2^{k+1} = \phi_l(t) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad -\frac{\gamma}{h}u_{N-1}^{k+1} + \frac{\gamma}{h}u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases},$$

(c) Условия третьего рода:

$$\begin{cases} \alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x) + \beta u(0,x) = \phi_l(t) \\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x) + \delta u(l,x) = \phi_r(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\frac{u_2^{k+1}-u_1^{k+1}}{h}(0,x) + \beta u_1^{k+1} = \phi_l(t) \\ \gamma\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}(l,x) + \delta u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases}$$

В таком случае u_1^{k+1} и u_N^{k+1} находятся по формуле:

- Для явной разностной схемы $u_1^{k+1} = \frac{\phi_l(t) - \frac{\alpha}{h}u_2^{k+1}}{\beta - \frac{\alpha}{h}}$, $u_N^{k+1} = \frac{\phi_r(t) + \frac{\gamma}{h}n_{N-1}^{k+1}}{\delta + \frac{\gamma}{h}}$.
- Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad \left(\beta - \frac{\alpha}{h}\right)u_1^{k+1} + \frac{\alpha}{h}u_2^{k+1} = \phi_l(t) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad -\frac{\gamma}{h}u_{N-1}^{k+1} + \left(\delta + \frac{\gamma}{h}\right)u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases},$$

Теперь рассмотрим аппроксимацию с вторым порядком точности. Поскольку условия первого рода не требую аппроксимации, а условия второго рода являются частным случем условий третьего рода, будем рассматривать случай краевыех условий третиего рода.

(a) По 3 точкам.

$$\begin{cases} \alpha\frac{\delta u}{\delta x}(0,x) + \beta u(0,x) = \phi_l(t) \\ \gamma\frac{\delta u}{\delta x}(l,x) + \delta u(l,x) = \phi_r(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\frac{-3u_1^{k+1}+4u_2^{k+1}-u_3^{k+1}}{2h}(0,x) + \beta u_1^{k+1} = \phi_l(t) \\ \gamma\frac{u_{N-3}^{k+1}-4u_{N-2}^{k+1}+3u_N^{k+1}}{2h}(l,x) + \delta u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases}$$

- Для явной разностной схемы $u_1^{k+1} = \frac{2h\phi_l(t)+\alpha u_3^{k+1}-4\alpha u_2^{k+1}}{2h\beta-3\alpha}$, $u_N^{k+1} = \frac{2h\phi_r(t)+4\gamma u_{N-1}^{k+1}-\gamma u_{N-2}^{k+1}}{2h\delta+3\gamma}$.
- Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad \left(\beta - \frac{3\alpha}{2h}\right)u_1^{k+1} + \frac{2\alpha}{h}u_2^{k+1} - \frac{\alpha}{2h}u_3^{k+1} = \phi_l(t) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} + Cu_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad \left(\delta + \frac{\gamma}{2h}\right)u_{N-3}^{k+1} + \frac{4\gamma}{2h}u_{N-1}^{k+1} - \frac{\alpha}{2h}u_3^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases},$$

(b) По 2 точкам.

$$\begin{cases} \alpha \frac{\delta u}{\delta x}(0,x) = \alpha \left(u_1^{k+1} + \frac{\delta u}{\delta x}\Big|_1^{k+1} h + \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\Big|_1^{k+1} \frac{h^2}{2} \right) \\ \gamma \frac{\delta u}{\delta x}(l,x) = \gamma \left(u_N^{k+1} + \frac{\delta u}{\delta x}\Big|_N^{k+1} h + \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\Big|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} \right) \end{cases}$$

Вычислим все неизвестные компоненты:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\Big|_0^{k+1} = \frac{b}{a}\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{1}{a}\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - \frac{d}{a}\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{c}{a}u + \frac{1}{a}f(x,t)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}\Big|_0^{k+1} = \frac{u_2^{k+1} - u_1^{k+1}}{h}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{u_1^{k-1} - 2u_1^k + u_1^{k+1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{u_1^{k+1} - u_1^{k-1}}{2\tau}$$

сделаем подстановку:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\delta u}{\delta x}(0,x) = \alpha \left(u_2^{k+1} + \left(\frac{b}{a}\frac{u_2^{k+1} - u_1^{k+1}}{h} - \frac{1}{a}\frac{u_1^{k-1} - 2u_1^k + u_1^{k+1}}{\tau^2} - \frac{d}{a}\frac{u_1^{k+1} - u_1^{k-1}}{2\tau} + \frac{c}{a}u_1^{k+1} + \frac{1}{a}f(x,t) \right) \frac{h^2}{2} \right) \\ \gamma \frac{\delta u}{\delta x}(l,x) = \gamma \left(2u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1} + \left(\frac{b}{a}\frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} - \frac{1}{a}\frac{u_N^{k-1} - 2u_N^k + u_N^{k+1}}{\tau^2} - \frac{d}{a}\frac{u_N^{k+1} - u_N^{k-1}}{2\tau} + \frac{c}{a}u_N^{k+1} + \frac{1}{a}f(x,t) \right) \frac{h^2}{2} \right. \end{cases}$$

сгруппируем:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\delta u}{\delta x}(0,x) = \alpha \left(u_1^{k+1} \left[\frac{ch^2}{2a} - \frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau} - \frac{bh}{2a} \right] - u_1^{k-1} \left[\frac{h^2}{2a\tau^2} + \frac{dh^2}{4a\tau} \right] + u_1^k \frac{h^2}{a\tau^2} + u_2^{k+1} \left[1 + \frac{bh}{2a} \right] + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right. \\ \gamma \frac{\delta u}{\delta x}(l,x) = \gamma \left(u_N^{k+1} \left[2 + \frac{bh}{2a} - \frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau} + \frac{ch^2}{2a} \right] + u_N^{k-1} \left[\frac{dh^2}{4a\tau} - \frac{h^2}{2a\tau^2} \right] + u_N^k \frac{h^2}{a\tau^2} - u_{N-1}^{k+1} \left[1 + \frac{bh}{2a} \right] + f(x, \right. \end{cases}$$

Для краткости введем обозначения:
$m_0 = \frac{ch^2}{2a} - \frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau} - \frac{bh}{2a};\ z_0 = -\frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau};\ s_0 = 1 + \frac{bh}{2a};$
$m_l = 2 + \frac{bh}{2a} - \frac{h^2}{2a\tau^2} - \frac{dh^2}{4a\tau} + \frac{ch^2}{2a};\ z_l = \frac{dh^2}{4a\tau} - \frac{h^2}{2a\tau^2};\ s_l = 1 + \frac{bh}{2a};$

$$\begin{cases} \alpha \left(u_1^{k+1} m_0 + u_1^{k-1} z_0 + u_1^k \frac{h^2}{a\tau^2} + u_2^{k+1} s_0 + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right) + \beta u_1^{k+1} = \phi_l(t) \\ \gamma \left(u_N^{k+1} m_l + u_N^{k-1} z_l + u_N^k \frac{h^2}{a\tau^2} - u_{N-1}^{k+1} s_l + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right) + \delta u_N^{k+1} = \phi_r(t) \end{cases}$$

- Для явной разностной схемы
  $u_1^{k+1}(\alpha m_0 + \beta) = \phi_l(t) - \alpha \left(u_1^{k-1} z_0 + u_1^k \frac{h^2}{a\tau^2} + u_2^{k+1} s_0 + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right),$
  $u_N^{k+1}(\gamma m_l + \delta) = \phi_r(t) - \gamma \left(u_N^{k-1} z_l + u_N^k \frac{h^2}{a\tau^2} - u_{N-1}^{k+1} s_l + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right)$
- Для не явной разностной схемы

$$\begin{cases} i = 1; \quad u_1^{k+1}(\alpha m_0 + \beta) + \alpha u_2^{k+1} s_0 = \phi_l(t) - \alpha \left(u_1^{k-1} z_0 + u_1^k \frac{h^2}{a\tau^2} + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right) \\ i = \overline{2, N-1}; \quad A u_{i-1}^{k+1} + B u_i^{k+1} + C u_{i+1}^{k+1} = d_i \\ i = N; \quad u_N^{k+1}(\gamma m_l + \delta) - \gamma u_{N-1}^{k+1} s_l = \phi_r(t) - \gamma \left(u_N^{k-1} z_l + u_N^k \frac{h^2}{a\tau^2} + f(x,t)\frac{h^2}{2a} \right) \end{cases}$$

4. **Код:**

```
        \\Define the initial boundary conditions

double phi0(double x)
{
    return exp(-x);
}
double phil(double x)
{
    return -exp(-x);
}
double ksi0(double x)
{
    return sin(x);
}
double ksi0_der(double x)
{
    return cos(x);
}
double ksi0_der2(double x)
{
    return -sin(x);
}
double ksil(double x)
{
    return -sin(x);
}
double f(double x, double t)
{
    return -cos(x)*exp(-t);
}


        \\explicit_solwer


void explicit_solwer(int pr, int k, int N, double l, double T,
double *args1,double *args2, matrix *grid,
double(*f_args[6])(double), double(*f)(double, double))
{
    /*
    f_args[0] = phi0(t)
    f_args[1] = phil(t)
    f_args[2] = ksi0(x)
    f_args[3] = ksil(x)
```

```
    f_args[4] = ksi0'(x)
    f_args[5] = ksi0''(x)
    */
    double tau = T/(k-1), h = l/(N-1);
    for(int i=0; i<N; i++)
        *get_element(grid, 0, i) = f_args[2](i*h);
    switch (pr)
    {
        for(int i=0; i<N; i++)
            *get_element(grid, 1, i) =
            f_args[2](i*h)+f_args[3](i*h)*tau;
        break;

        default:
        for(int i=0; i<N; i++)
            *get_element(grid, 1, i) = f_args[2](i*h) + f_args[3](i*h)*
            (tau-args1[3]*pow(tau,2)/2) + (args1[0]*f_args[5](i*h) +
            args1[1]*f_args[4](i*h) + args1[2]*f_args[2](i*h)+f(i*h, tau))*
            (pow(tau,2)/2);
        break;
    }
    for(int i=2; i<k; i++)
    {
        for(int j=1; j<N-1; j++)
            *get_element(grid, i, j) = ( *get_element(grid, i-1, j-1)*
            (args1[0]/pow(h,2) - args1[1]/(2*h)) + *get_element(grid, i-1, j)
            *(args1[2] + 1/pow(tau,2) - 2*args1[0]/pow(h,2)) +
            *get_element(grid, i-1, j+1)*(args1[0]/pow(h,2) + args1[1]/(2*h))
            +f(j*h, i*tau) ) / (1/pow(tau,2) + args1[3]/(2*tau));
        switch (pr)
        {
            case 1:
            *get_element(grid, i, 0) = (f_args[0](i*tau) - args2[0]/h *
            (*get_element(grid, i, 1)))/(args2[1]-args2[0]/h);
            *get_element(grid, i, N-1) = (f_args[1](i*tau) - args2[2]/h *
            (*get_element(grid, i, N-2)))/(args2[3]+args2[2]/h);
            break;

            case 2:
            *get_element(grid, i, 0) = (2*h*f_args[0](i*tau) +
            *get_element(grid, i, 2)*args2[0] - *get_element(grid, i, 1)*
            4*args2[0])/(2*h*args2[1]-3*args2[0]);
            *get_element(grid, i, N-1) = (2*h*f_args[1](i*tau) +
            *get_element(grid, i, N-2)*4*args2[2] -
            *get_element(grid, i, N-3)*args2[2])/(3*args2[2]+2*h*args2[3]);
            break;
```

```
            case 3:
            *get_element(grid, i, 0) = (f_args[0](i*tau) - args2[0]/h *
            (*get_element(grid, i, 1)))/(args2[1]-args2[0]/h);
            *get_element(grid, i, N-1) = (f_args[1](i*tau) - args2[2]/h *
            (*get_element(grid, i, N-2)))/(args2[3]+args2[2]/h);
            break;
        }
    }
}

                \\implicit_solwer


void implicit_solwer(int pr, int k, int N, double l, double T,
 double *args1, double *args2, matrix *grid,
  double(*f_args[6])(double), double(*f)(double, double))
{
    /*
    f_args[0] = phi0(t)
    f_args[1] = phil(t)
    f_args[2] = ksi0(x)
    f_args[3] = ksil(x)
    f_args[4] = ksi0'(x)
    f_args[5] = ksi0''(x)
    */
    double tau = T/(k-1), h = l/(N-1);
    matrix system = create_matrix(N, N);
    matrix D = create_matrix(1,N);

    for(int i=0; i<N; i++)
        *get_element(grid, 0, i) = f_args[2](i*h);

    switch (pr)
    {
        case 1:
        for(int i=0; i<N; i++)
            *get_element(grid, 1, i) = f_args[2](i*h)+ f_args[3](i*h)*tau;
            printf("1");
        break;

        default:
        for(int i=0; i<N; i++)
            *get_element(grid, 1, i) = f_args[2](i*h) +
            f_args[3](i*h)*(tau-args1[3]*pow(tau,2)/2) +
            (args1[0]*f_args[5](i*h) + args1[1]*f_args[4](i*h) +
            args1[2]*f_args[2](i*h)+f(i*h, tau))*(pow(tau,2)/2);
        break;
```

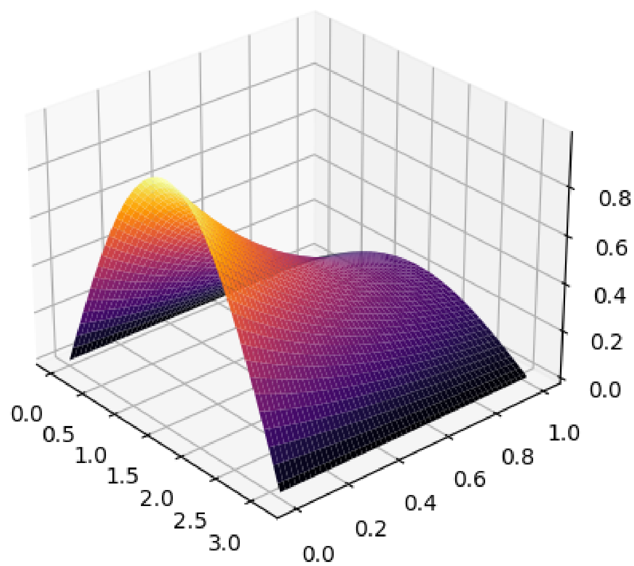
```
    }

    for (int i=1; i<N-1; i++)
    {
        *get_element(&system, i, i-1) = args1[0]/pow(h,2)-args1[1]/(2*h);
        *get_element(&system, i, i) = args1[2]-2*args1[0]/pow(h,2)-
        args1[3]/(2*tau)-1/pow(tau,2);
        *get_element(&system, i, i+1) = args1[0]/pow(h,2)+args1[1]/(2*h);
    }
    switch (pr)
    {
    case 1:
        *get_element(&system, 0, 0) = args2[1] - args2[0] / h;
        *get_element(&system, 0, 1) = args2[0] / h;
        *get_element(&system, N-1, N-2) = - args2[2] / h;
        *get_element(&system, N-1, N-1) = args2[3] + args2[2] / h;
        break;
    case 2:
        *get_element(&system, 0, 0) = args2[1] - 3*args2[0]/ h/ 2;
        *get_element(&system, 0, 1) = 2 * args2[0]/h;
        *get_element(&system, 0, 2) = - args2[0] / h /2;
        *get_element(&system, N-1, N-3) = args2[2] / h /2;
        *get_element(&system, N-1, N-2) = -2 * args2[2]/h;
        *get_element(&system, N-1, N-1) = args2[3] + 3*args2[2]/ h/ 2;
        break;
    case 3:
        *get_element(&system, 0, 0) = args2[1] - args2[0] / h;
        *get_element(&system, 0, 1) = args2[0] / h;
        *get_element(&system, N-1, N-2) = - args2[2] / h;
        *get_element(&system, N-1, N-1) = args2[3] + args2[2] / h;
        break;
    }

    for(int i=2; i<k; i++)
    {
        for(int j=1; j<N-1; j++)
            *get_element(&D, 0, j) = *get_element(grid, i-2, j)*
            (1/pow(tau,2)-args1[3]/(2*tau)) - *get_element(grid, i-1, j)*
            2/pow(tau,2) - f(j*h, i*tau);
        switch (pr)
        {
        case 1:
            *get_element(&D, 0, 0) = f_args[0](i*tau);
            *get_element(&D, 0, N-1) = f_args[1](i*tau);
            insert_matrix_line(grid, run_method(system, D, N), i);
            break;
```

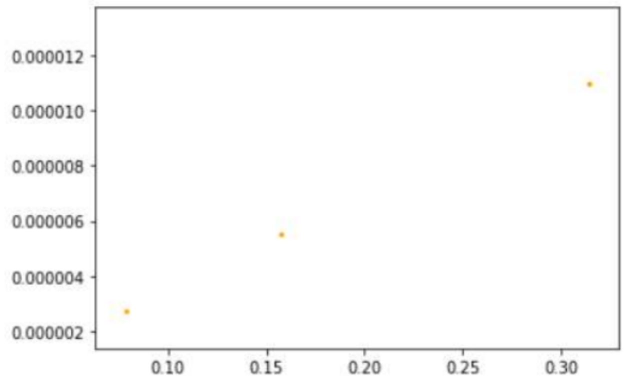
```
            case 2:
                *get_element(&D, 0, 0) = f_args[0](i*tau);
                *get_element(&D, 0, N-1) = f_args[1](i*tau);
                insert_matrix_line(grid, LU_method(system, D, N), i);
                break;
            case 3:
                *get_element(&D, 0, 0) = f_args[0](i*tau);
                *get_element(&D, 0, N-1) = f_args[1](i*tau);
                insert_matrix_line(grid, run_method(system, D, N), i);
                break;
        }
    }
}
```

5. **Результат:**
   Неявный метод:

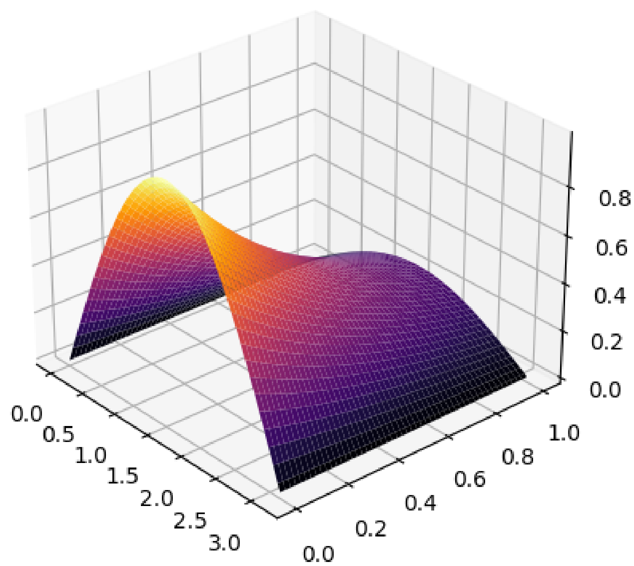


Изменение ошибки в зависимости от размера шага по пространству из

$$\frac{\pi}{100}, \frac{\pi}{1000} \text{ и } \frac{\pi}{10000}:$$

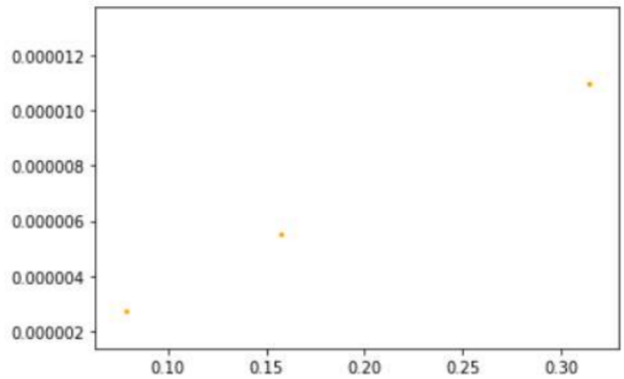


Явный метод:



Изменение ошибки в зависимости от размера шага по пространству из

$$\frac{\pi}{100}, \frac{\pi}{1000} \text{ и } \frac{\pi}{10000}:$$



6. **Вывод:**
   Были реализованы два численных метода на Си для решения задачи гиперболического типа.
   Первый – Явный метод. Он использует в правой части значения только с предыдущего временного слоя, и получает явной выражения для решения на новом временном слое.
   Второй – Неявный метод. Использует в правой части значения с текущего слоя, что приводит к решению СЛАУ с помощью метода прогонки.
   Оба метода дали хорошую сходимость. Ошибка решений падает с уменьшением размеров шагов по времени и пространству.
   Были построены графики решений и ошибок по сравнению с аналитическим решением.