Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)
Факультет прикладной математики и физики
Кафедра математической кибернетики

Лабораторная работа
по курсу «Математическое моделирование»

Студент: Хахин М. С.
Группа: 80-403Б-18
Преподаватель: Майоров А.Ю.

Москва, 2021

Колебания механической системы описываются уравнением:

$$\ddot{x}+x+\frac{x^3}{(x^2+1)^{(3/2)}}=0 \tag{1}$$

1) Определим потенциальную энергию **П**(x). Для этого необходимо вычислить интеграл вида:

$$\Pi(x)=\int_0^x f(x)dx\ , \tag{2}$$

где функция f(x) получается из уравнения

$$\ddot{x}+f(x)=0 \tag{3}$$

Так как уравнение уже приведено к виду (3), то подставим его в интеграл (2):

$$\Pi(x)=\int_0^x x+\frac{x^3}{(x^2+1)^{(3/2)}}dx \tag{4}$$

Решаем интеграл (4)

$$\Pi(x)=\int x+\frac{x^3}{(x^2+1)^{(3/2)}}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{(x^2+1)^{(1/2)}}+\frac{2}{(x^2+1)^{(1/2)}}$$

$$> \int x+\frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

> П(x)

Исследуем получено уравнение на экстремумы и точки перегиба:

$$\Pi(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{(x^2+1)^{(1/2)}}+\frac{2}{(x^2+1)^{(1/2)}} \tag{5}$$

$$\Pi'(x)=x+\frac{x^3}{(x^2+1)^{(3/2)}}$$

$$x+\frac{x^3}{(x^2+1)^{(3/2)}}=0$$

$$\forall x \quad \sqrt{1+x^2}>0$$

$$x_1=0\,,\,убывает\,на\,[-\infty;0)\,,возрастает\,на\,[0;\infty]$$

$$\Pi''(x)=\frac{3x^2}{(x^2+1)^{1.5}}-\frac{3*x^4}{(x^2+1)^{2.5}}+1 \tag{6}$$

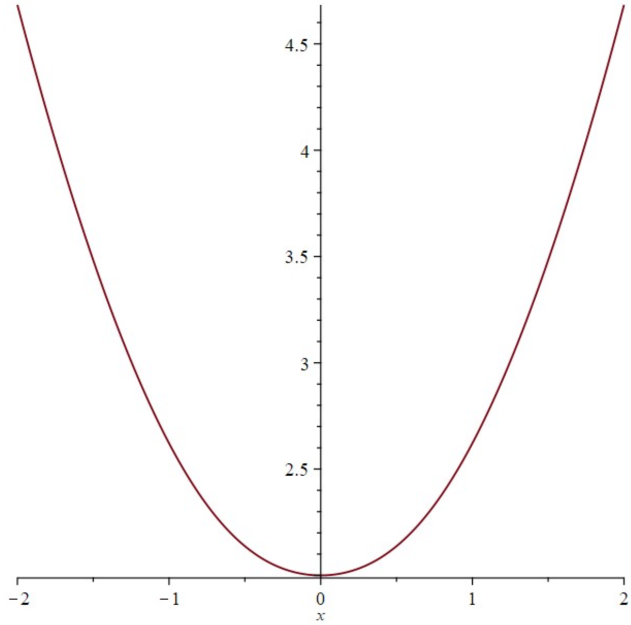
$$\frac{3x^2}{(x^2+1)^{1.5}}-\frac{3*x^4}{(x^2+1)^{2.5}}+1=0$$

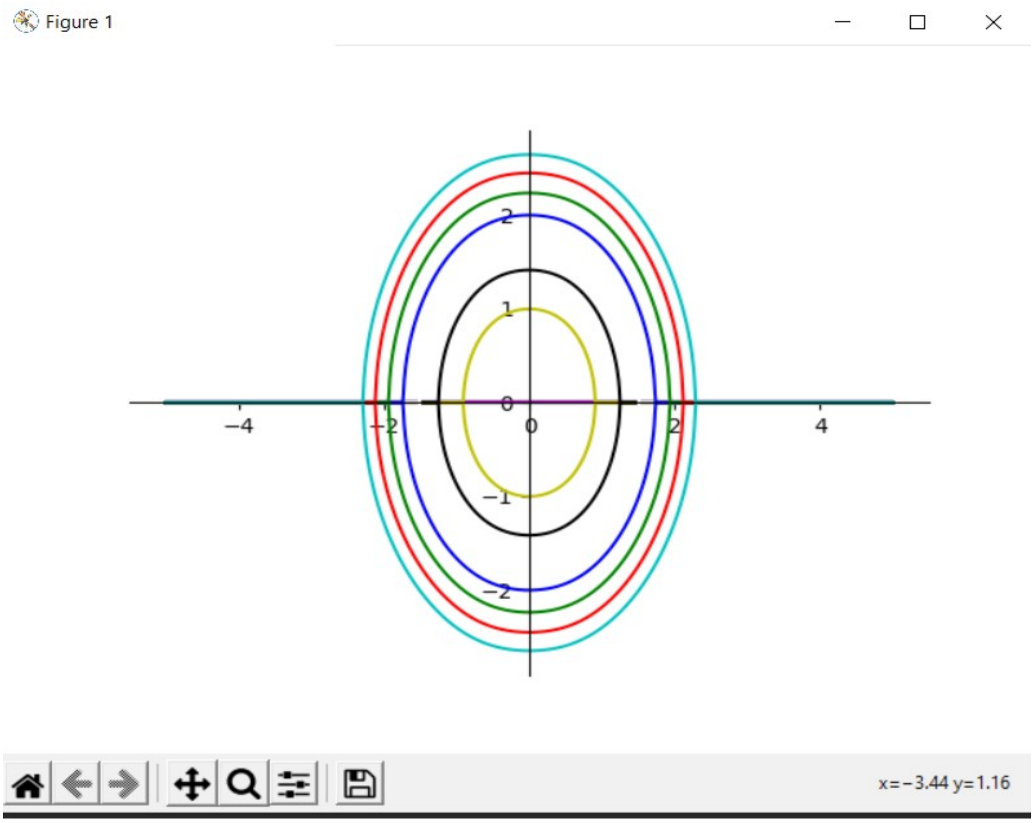
Асимптот нет, действительных корней у второй производной нет, поэтому исследование можно считать законченным.

Построим график функции (5)

> $\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{\mathrm{sqrt}(x^2+1)} + \frac{2}{\mathrm{sqrt}(x^2+1)}$

> *PlotBuilder*((1/2)*x^2 + x^2/sqrt(x^2 + 1) + 2/sqrt(x^2 + 1))





Далее необходимо построить фазовый портрет в осях $\dot{x}$, x .

$$\dot{x} = \sqrt{2C - 2\Pi(x)}$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2C - x^2 - \frac{2x^2+4}{(x^2+1)^{(1/2)}}} \qquad (7)$$

Код используемый для отрисовки графика на языке python

```
def di(args):
   try:
      return math.sqrt(2*args[0]-args[1]**2-(2*args[1]**2 + 4)/math.sqrt(1+args[1]**2))
   except:
      return 0


def main():
   cl = color()
   C=0
   while C < 6:
      x= np.arange(-5,5.01,0.01)
      y1 = [float(di([C,x[i]])) for i in range(len(x))]
      y2 = [float(-di([C,x[i]])) for i in range(len(x))]
      lc = cl.next()
      plt.plot(x,y1, color = lc)
      plt.plot(x,y2, color = lc)
      C+=0.5
   ax = plt.gca()
   ax.spines['left'].set_position('center')
   ax.spines['bottom'].set_position('center')
   ax.spines['top'].set_visible(False)
   ax.spines['right'].set_visible(False)
   plt.show()
```

Уравнение (7) имеет одно положение равновесия: устойчивое x = 0, $x^{\cdot}$ = 0 (отвечающее константе C = 0). Подсчитаем период T этих колебаний в зависимости от параметра C.

$$\frac{\dot{x}}{2}+\Pi(x)=C$$

$$T=2\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(2C-2\Pi)}}$$

$$T=2\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{2C-x^2-\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^{(1/2)}}}}$$

Значение постоянной C находится из интеграла энергии: $2C=a^2+\frac{2a^2+4}{(a^2+1)^{(1/2)}}$. Период колебаний зависит от константы C, следовательно, он зависит от амплитуды колебаний, т.е. T = T(a). Построим график T:

```
C=0
f = lambda x: 1/np.sqrt(2*C- x**2 - (2*x**2+4)/np.sqrt(x**2 + 1))
C0 = lambda x: x**2/2 +(x**2 + 2)/np.sqrt(x**2 + 1)
y = []
x = np.arange(0.1,1.74,0.02)
for a in x:
   C=C0(a)
   y.append(2*scipy.integrate.quad(f, -a, a)[0])
   print(a,y[-1])
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, y)
ax.grid()
```

```
ax.set_xlabel('a')
ax.set_ylabel('T')
plt.show()
```