Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
Дисциплина: «Математическое моделирование»

Лабораторная работа №2
Тема: Метод Линдштедта

Студент:	Хахин Максим
Группа:	80-403
Преподаватель:	Майоров А. Ю.
Дата:	
Оценка:	

Москва, 2021

Колебания механической системы описываются уравнением:

$$\ddot{x} + x + \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0. \tag{1}$$

a) Разложим функцию $f(x) = x + \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ в ряд Тейлора в окрксности точки равновесия $x^* = 0$:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2}(x-x^*)^2 + \frac{f'''(x^*)}{6}(x-x^*)^3 + \mathrm{O}((x-x^*)^4$$

- $f'(x) = \frac{3x^2}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{3x^4}{(1+x^2)^{5/2}} + 1;\ f'(0) = 1$
- $f''(x) = \frac{15x^5}{(1+x^2)^{7/2}} - \frac{21x^3}{(1+x^2)^{5/2}} + \frac{6x}{(1+x^2)^{3/2}};\ f''(0) = 0$
- $f'''(x) = -\frac{105x^6}{(1+x^2)^{9/2}} + \frac{180x^3}{(1+x^2)^{7/2}} - \frac{81x}{(1+x^2)^{5/2}} + \frac{6}{(1+x^2)^{3/2}};\ f'''(0) = 6$

$$f(x) = x - x^3 + \mathrm{O}(x^5) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + x = x + x^3. \tag{2}$$

Сделаем замены.

1. Подставим $x = \varepsilon y,\ \ddot{x} = \varepsilon\ddot{y}$ и запишем уравнение движеия:

$$\varepsilon\ddot{y} + \varepsilon y + (\varepsilon y)^3 = 0$$

2. $t = \omega\tau$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2}{d\tau^2}$$

$$\omega^2\varepsilon\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} + \varepsilon y + (\varepsilon y)^3 = 0. \tag{3}$$

Сократив в (3) ε, становитя очевидно, что это уравнение вида:

$$\omega^2 y'' + \omega_0 y = \varepsilon f(y),$$

откуда $\omega_0 = 1$.
Зная, что $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3$ запишем (3) в виде:

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3)^2\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} + y - \varepsilon^2y^3 = 0. \tag{4}$$

Теперь в (4) сделаем замену $y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)$

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3)^2\frac{d^2}{d\tau^2}(y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)) + (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)) +$$
$$+\varepsilon^2(y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau))^3 = 0$$

Сгруппируем (5) по степеням ε, а затем применим разложение по малому:

– Решим Задачу коши для части уравнения без ε:

$$\begin{cases} \omega_0^2 \ddot{y}_0(\tau) + y_0(\tau) = 0 \\ y_0(0) = y_0 \\ \dot{y}_0(0) = 0 \end{cases}$$

решением этой задачи имеет вид: $y_0(t) = A * cos(t)$.

– Решим Задачу коши для части уравнения с ε^1:

$$\begin{cases} 2\omega_1 \frac{d^2}{d\tau^2} A * cos(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} y_1(\tau) + y_1(\tau) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{cases}$$

решением этой задачи имеет вид: $y_1(\tau) = \omega_1 A * sin(\tau)\tau$. Подставив $y_1(\tau)$ в исходное определим: $\omega_1 = 0$

– Решим Задачу коши для части уравнения с ε^2:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\tau^2} y_2(\tau) + 2\omega_2 A \frac{d^2}{d\tau^2} cos(\tau) + y_2(\tau) + A^3 cos(\tau)^3 = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_2(0) = 0 \end{cases}$$

решением этой задачи имеет вид:

$$y_2(\tau) = cos(\tau)\left(\frac{1}{4}A^3 - \omega_2 A\right) - \frac{3A}{8}\left(-\frac{A^2 cos(\tau)^3}{3} + \left(A^2 - \frac{8\omega_2}{3}\right)cos(\tau) + sin(\tau)\tau\left(A^2 - \frac{8\omega_2}{3}\right)\right).$$

Занулим коэффициент при сикулярном члене $sin(\tau)\tau$ и вычислим ω_2:

$$A^2 - \frac{8\omega_2}{3} = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{3A^2}{8}.$$

Таким образом, после всех подстановок получаем:

$$y_0(\tau) = cos(\tau)A, \;\; y_1(\tau) = 0, \;\; y_2(\tau) = -\frac{cos(\tau)A^3}{8} + \frac{cos(\tau)^3 A^3}{8} \tag{6}$$

В таком случае получаем приблеженное решение вида:

$$y(\tau) = cos(\tau)A - \frac{cos(\tau)A^3}{8} + \frac{cos(\tau)^3 A^3}{8}. \tag{7}$$

Сделаем обратные замены $\tau = \omega_0 t = t$ и $y(t) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau)$:

$$y(t) = cos(t)A - \varepsilon^2\left(\frac{cos(t)A^3}{8} - \frac{cos(t)^3 A^3}{8}\right). \tag{8}$$

b) Подставим в (8) $c = 0.001$, $\varepsilon = 0.01$:

$$y(t) = 0.001cos(t) + 1.25 \times 10^{-14}cos^3(t). \tag{9}$$

Пострим график (9) в промежутках [0,10] и [0,100]:

Рис. 1: График численного решения.

При помощи математического пакета Maple, построим график функции $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{x(t)^3}{\sqrt{(1+x(t)^2)^3}} + x(t) = 0$ в тех же промежутках:

Рис. 2: График точного решения.

Наложим полученые графики друг на друга, для визуальной оценки погрешности:

Рис. 3: Совмещенный графики.