**Московский авиационный институт**
**(Национальный исследовательский университет)**

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
Дисциплина: «Математическое моделирование»

Лабораторная работа №2
Тема: Метод Линдштедта

Студент: Мукин Юрий
Группа: 80-404
Преподаватель: Красильников П. С.
Дата:
Оценка:

Москва, 2021

Колебания механической системы описываются уравнением:

$$\ddot{x} = x - \frac{2xl}{\sqrt{l^2 + x^2}}. \tag{1}$$

a) Разложим функцию $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x$ в ряд Тейлора в окркsности точки равновесия $x^* = 0$:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2}(x - x^*)^2 + \frac{f'''(x^*)}{6}(x - x^*)^3 + \mathrm{O}((x - x^*)^4$$

- $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^{3/2}} - 1;\ f'(0) = 1$
- $f''(x) = \frac{6x^3}{(1+x^2)^{5/2}} - \frac{-6x}{(1+x^2)^{3/2}};\ f''(0) = 0$
- $f'''(x) = \frac{36x^2}{(1+x^2)^{5/2}} - \frac{30x^4}{(1+x^2)^{7/2}} - \frac{6}{(1+x^2)^{3/2}};\ f'''(0) = -6$

$$f(x) = x - x^3 + \mathrm{O}(x^4) \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x = x - x^3. \tag{2}$$

Сделаем замены.

1. Подставим $x = \varepsilon y,\ \ \ddot{x} = \varepsilon\ddot{y}$ и запишем уравнение движеия:

$$\varepsilon\ddot{y} + \varepsilon y - (\varepsilon y)^3 = 0$$

2. $t = \omega\tau$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2}{d\tau^2}$$

$$\omega^2\varepsilon\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} + \varepsilon y - (\varepsilon y)^3 = 0. \tag{3}$$

Сократив в (3) $\varepsilon$, становитя очевидно, что это уравнение вида:

$$\omega^2 y'' + \omega_0 y = \varepsilon f(y),$$

откуда $\omega_0 = 1$.
Зная, что $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3$ запишем (3) в виде:

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3)^2\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} + y - \varepsilon^2 y^3 = 0. \tag{4}$$

Теперь в (4) сделаем замену $y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)$

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3)^2\frac{d^2}{d\tau^2}(y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)) + (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \\ + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau)) - \varepsilon^2(y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \varepsilon^3 y_3(\tau))^3 = 0. \tag{5}$$

Сгруппируем (5) по степеням $\varepsilon$, а затем применим разложение по малому:

– Решим Задачу коши для части уравнения без $\varepsilon$:

$$\begin{cases} \omega_0^2 \ddot{y}_0(\tau) + y_0(\tau) = 0 \\ y_0(0) = y_0 \\ \dot{y}_0(0) = 0 \end{cases}$$

решением этой задачи имеет вид: $y_0(t) = c * cos(t)$.

– Решим Задачу коши для части уравнения с $\varepsilon^1$:

$$\begin{cases} 2\omega_1 \frac{d^2}{d\tau^2} c * cos(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} y_1(\tau) + y_1(\tau) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{cases}$$

решением этой задачи имеет вид: $y_1(\tau) = \omega_1 c * sin(\tau)\tau$. Подставив $y_1(\tau)$ в исходное определим: $\omega_1 = 0$

– Решим Задачу коши для части уравнения с $\varepsilon^2$:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\tau^2} y_2(\tau) + 2\omega_2 c \frac{d^2}{d\tau^2} cos(\tau) + y_2(\tau) - c^3 cos(\tau)^3 = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_2(0) = 0 \end{cases}$$

решением этой задачи имеет вид:

$$y_1(\tau) = cos(\tau)\left(-\frac{1}{4}c^3 - \omega_2 c\right) + \frac{3c}{8}\left(-\frac{c^2 cos(\tau)^3}{3} + \left(c^2 + \frac{8\omega_2}{3}\right) cos(\tau) + sin(\tau)\tau\left(c^2 + \frac{8\omega_2}{3}\right)\right).$$

Занулим коэффициент при сикулярном члене $sin(\tau)\tau$ и вычислим $\omega_2$:

$$c^2 + \frac{8\omega_2}{3} = 0 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{3c^2}{8}.$$

Таким образом, после всех подстановок получаем:

$$y_0(\tau) = cos(\tau)c, \;\; y_1(\tau) = 0, \;\; y_2(\tau) = \frac{cos(\tau)c^3}{8} - \frac{cos(\tau)^3 c^3}{8} \tag{6}$$

В таком случае получаем приблеженное решение вида:

$$y(\tau) = cos(\tau)\mathrm{c} + \frac{cos(\tau)c^3}{8} - \frac{cos(\tau)^3 c^3}{8}. \tag{7}$$

Сделаем обратные замены $\tau = \omega_0 t = t$ и $y(t) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau)$:

$$y(t) = cos(t)\mathrm{c} + \varepsilon^2\left(\frac{cos(t)c^3}{8} - \frac{cos(t)^3 c^3}{8}\right). \tag{8}$$

b) Подставим в (8) $c = 0.001$, $\varepsilon = 0.01$:

$$y(t) = 0.001cos(t) - 1.25 \times 10^{-14} cos^3(t). \tag{9}$$

Пострим график (9) в промежутках [0,10] и [0,100]:


Рис. 1: График численного решения.

При помощи математического пакета Maple, построим график функции $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{2x(t)}{\sqrt{1+x(t)^2}} - x(t) = 0$ в тех же промежутках:


Рис. 2: График точного решения.

Наложим полученые графики друг на друга, для визуальной оценки погрешности:


Рис. 3: Совмещенный графики.