



Instituto de
Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Algoritmos para o Freeze-Tag e Problemas de Robótica de Enxame Relacionados^a

Aluno: Lucas de Oliveira Silva

Orientador: Lehilton Lelis Chaves Pedrosa

Instituto de Computação, Unicamp

10 de Março de 2025

^a Financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo #2022/13435-4

Problemas Estudados

Trabalhos Futuros

Problemas Estudados

Freeze-Tag Problem

Problemas Estudados

Freeze-Tag Problem

Contexto

Resultados Teóricos

Resultados Experimentais

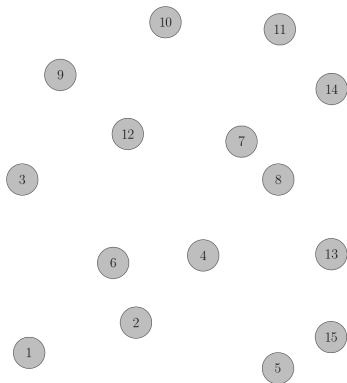
Angular Freeze-Tag Problem

Minimum Scan Cover

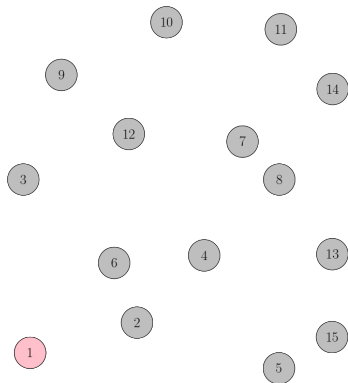
Freeze-Tag Problem

Contexto

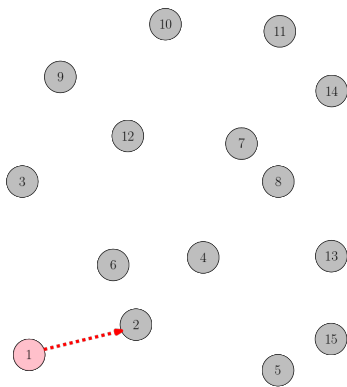
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



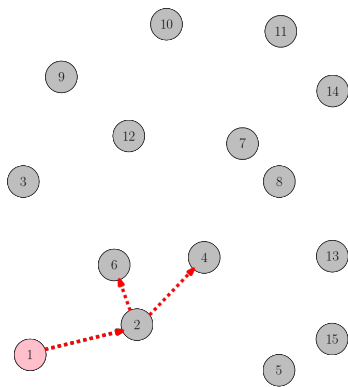
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



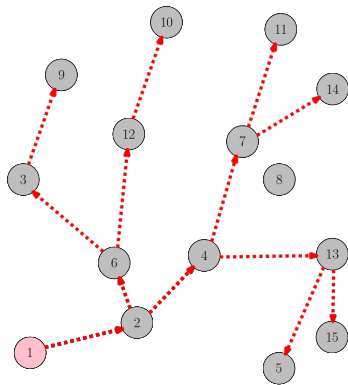
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



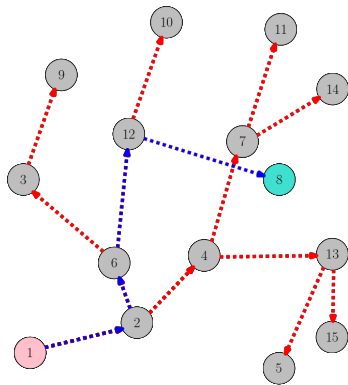
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



- Modela problemas de transmissão de dados e design de redes;

- Modela problemas de transmissão de dados e design de redes;
- Soluções são árvores binárias geradoras de altura mínima;

- Modela problemas de transmissão de dados e design de redes;
- Soluções são árvores binárias geradoras de altura mínima;
- Ligado às árvores de multicast (estruturas de comunicação da camada de aplicação).

- Conjunto de n robôs R ;

- Conjunto de n robôs R ;
- Robô inicial $r_0 \in R$ (**fonte**);

- Conjunto de n robôs R ;
- Robô inicial $r_0 \in R$ (**fonte**);
- Função de distância $\text{dist}: R \times R \rightarrow \mathbb{R}^+$.

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;

O conjunto de movimentos (*schedule* ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o *makespan*, isto é, o tempo total de ativação.

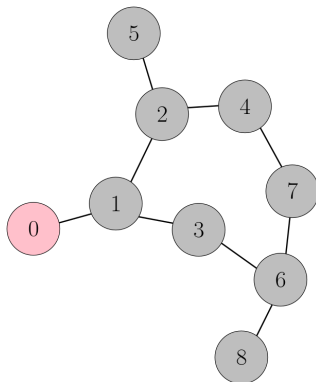
O conjunto de movimentos (*schedule* ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o *makespan*, isto é, o tempo total de ativação.

Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

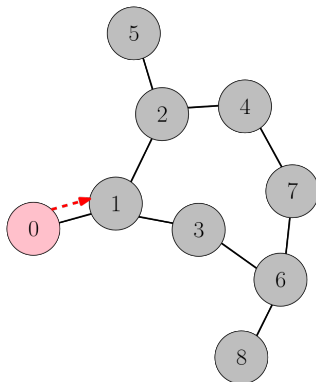
- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

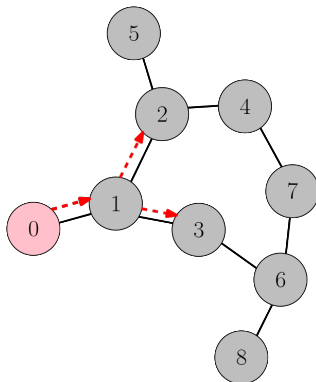
- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

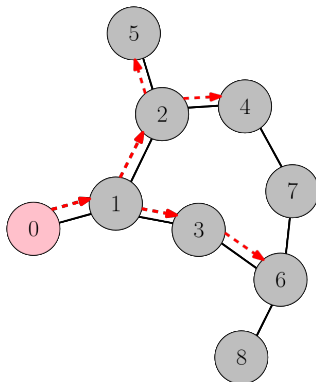
- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

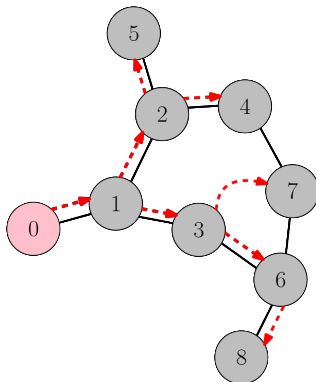
- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

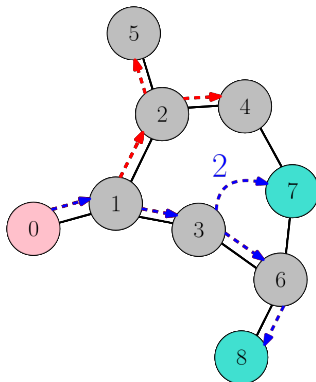
- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária \mathcal{T} enraizada em r_0 que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



Freeze-Tag Problem

Resultados Teóricos

Conjectura (Arkin et al. [ABF⁺06])

O FTP é NP-difícil para as distâncias Euclidiana (L_2) ou de Manhattan (L_1) no plano \mathbb{R}^2 .

Conjectura (Arkin et al. [ABF⁺06])

O FTP é NP-difícil para as distâncias Euclidiana (L_2) ou de Manhattan (L_1) no plano \mathbb{R}^2 .

Problema 35 do *The Open Problems Project* [ODM01].

Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

Existe um EPTAS para o FTP com distâncias L_p em qualquer espaço de dimensão fixa \mathbb{R}^d , com tempo de execução $O(n \log n) + 2^{O((1/\varepsilon)^2 \log 1/\varepsilon)}$.

Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

Existe um EPTAS para o FTP com distâncias L_p em qualquer espaço de dimensão fixa \mathbb{R}^d , com tempo de execução $O(n \log n) + 2^{O((1/\varepsilon)^2 \log 1/\varepsilon)}$.

Teorema (Abel et al. [AAY17])

O FTP é NP-difícil para distância L_2 no plano.

Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

Existe um EPTAS para o FTP com distâncias L_p em qualquer espaço de dimensão fixa \mathbb{R}^d , com tempo de execução $O(n \log n) + 2^{O((1/\varepsilon)^2 \log 1/\varepsilon)}$.

Teorema (Abel et al. [AAY17])

O FTP é NP-difícil para distância L_2 no plano.

Teorema (Demaine e Rudoy [DR17])

O FTP é NP-difícil para distâncias L_p , onde $p > 1$, em 3D.

Teorema (Pedrosa e Silva [PdOS23b])

O FTP é fortemente NP-difícil para distância L_1 em 3D.

Teorema (Pedrosa e Silva [PdOS23b])

O FTP é fortemente NP-difícil para distância L_1 em 3D.

Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23b])

O FTP é NP-difícil em grades 3D sem pesos nas arestas.

Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

O FTP é fortemente NP-difícil em estrelas com pesos nas arestas.

Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23a])

O FTP é NP-difícil em árvores binárias enraizadas, sem pesos nas arestas, com a fonte na raiz e robôs desativados apenas nas folhas.

Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23a])

O FTP é NP-difícil em árvores binárias enraizadas, sem pesos nas arestas, com a fonte na raiz e robôs desativados apenas nas folhas.

Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23a])

O FTP é fortemente NP-difícil em árvores ternárias enraizadas, com pesos nas arestas, a fonte na raiz e um robô desativado em cada outro nó.

Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

É NP-difícil aproximar o FTP em grafos com pesos nas arestas dentro de um fator menor que $5/3$, mesmo se o grafo tiver grau máximo 4 e possuir exatamente um robô em cada nó.

Teorema

É NP-difícil aproximar o FTP em grafos sem pesos nas arestas dentro de um fator de até $3/2$, mesmo se o grafo tiver diâmetro 2 e possuir ao menos um robô em cada nó.

Freeze-Tag Problem

Resultados Experimentais

- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;

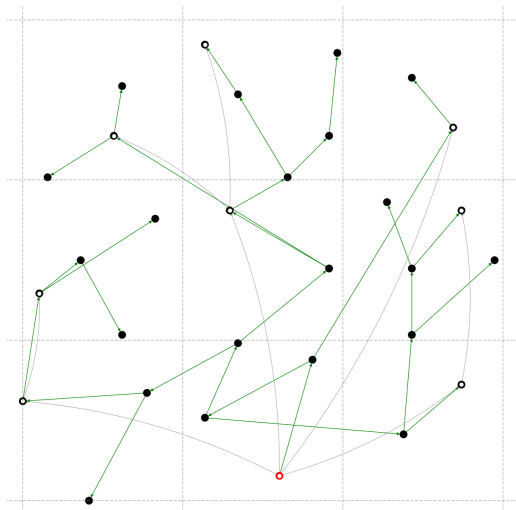
- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;
- Duas formulações MIP implementadas usando Gurobi;

- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;
- Duas formulações MIP implementadas usando Gurobi;
- Uma formulação CP implementada usando o CP-SAT do Google OR-Tools;

- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;
- Duas formulações MIP implementadas usando Gurobi;
- Uma formulação CP implementada usando o CP-SAT do Google OR-Tools;
- Avaliação feita com instâncias usando a distância L_2 em \mathbb{R}^2 .

Tornando um PTAS mais Prático

Implementamos o EPTAS de Arkin et al. [ABF⁺06], substituindo a enumeração lenta do algoritmo por nossa formulação CP.



Problemas Estudados

Angular Freeze-Tag Problem

Problemas Estudados

Freeze-Tag Problem

Angular Freeze-Tag Problem

Contexto

Resultados Teóricos

Minimum Scan Cover

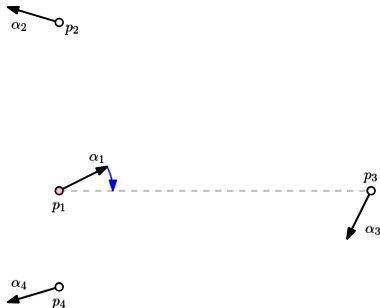
Angular Freeze-Tag Problem

Contexto

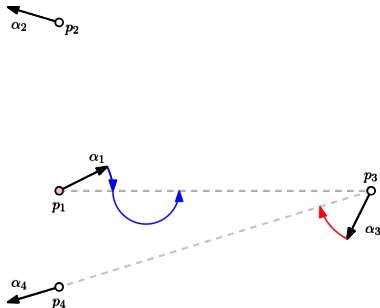
O **Angular Freeze-Tag Problem** (AFTP) surge como um problema de ***broadcast*** entre satélites em 2018 [FK18]:



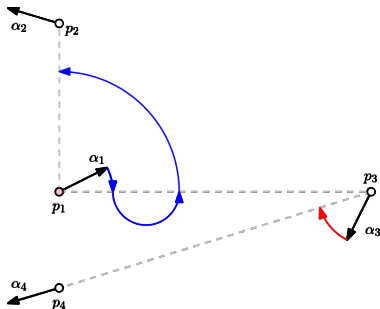
O **Angular Freeze-Tag Problem** (AFTP) surge como um problema de ***broadcast*** entre satélites em 2018 [FK18]:



O **Angular Freeze-Tag Problem** (AFTP) surge como um problema de ***broadcast*** entre satélites em 2018 [FK18]:



O **Angular Freeze-Tag Problem** (AFTP) surge como um problema de ***broadcast*** entre satélites em 2018 [FK18]:



- Recursos limitados restringem o movimento dos satélites;

- Recursos limitados restringem o movimento dos satélites;
- Grandes distâncias impossibilitam um *broadcast* simultâneo;

- Recursos limitados restringem o movimento dos satélites;
- Grandes distâncias impossibilitam um *broadcast* simultâneo;
- O crescimento das constelações de satélites exige protocolos eficientes de transmissão de dados.

- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ de posições distintas;

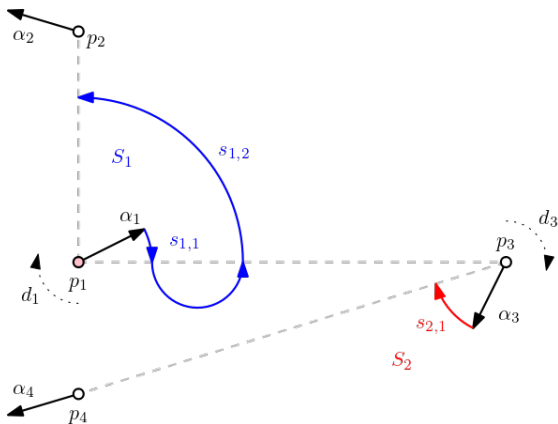
- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ de posições distintas;
- Cada p_i corresponde a um satélite associado a α_i ;

- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ de posições distintas;
- Cada p_i corresponde a um satélite associado a α_i ;
- Inicialmente, apenas p_1 contém um dado a ser propagado.

As sequências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:

Definição - Solução

As sequências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:



Angular Freeze-Tag Problem

Resultados Teóricos

Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

É NP-difícil aproximar o AFTP em 2D dentro de um fator menor que $5/3$.

Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

É NP-difícil aproximar o AFTP em 2D dentro de um fator menor que $5/3$.

Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

Existe uma 9-aproximação para o AFTP em 2D, assumindo um limite inferior de $\varepsilon > 0$ para a rotação inicial de qualquer satélite que rotacione sua antena.

Chamamos de **energia total** de uma solução a soma da rotação total realizada por todos os satélites.

Chamamos de **energia total** de uma solução a soma da rotação total realizada por todos os satélites.

Teorema

Seja I uma instância do AFTP em 2D, E um número real e k um inteiro positivo. Então, existe um algoritmo que roda em tempo $(n^{\frac{Ek}{\epsilon}})^{O(\frac{Ek}{\epsilon})}$ e ou prova que toda solução ótima requer mais de E de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo $(1 + 1/k)OPT(I)$.

Nossos Resultados

Chamamos de **energia total** de uma solução a soma da rotação total realizada por todos os satélites.

Teorema

Seja I uma instância do AFTP em 2D, E um número real e k um inteiro positivo. Então, existe um algoritmo que roda em tempo $(n^{\frac{Ek}{\epsilon}})^{O(\frac{Ek}{\epsilon})}$ e ou prova que toda solução ótima requer mais de E de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo $(1 + 1/k)OPT(I)$.

Teorema

Para todo inteiro positivo k , existe uma $(1 + 1/k)$ -aproximação para o AFTP em 2D com o objetivo de minimizar a energia total, que roda em tempo $(n^{\frac{k}{\epsilon}})^{O(\frac{k}{\epsilon})}$.

Problemas Estudados

Minimum Scan Cover

Problemas Estudados

Freeze-Tag Problem

Angular Freeze-Tag Problem

Minimum Scan Cover

Contexto

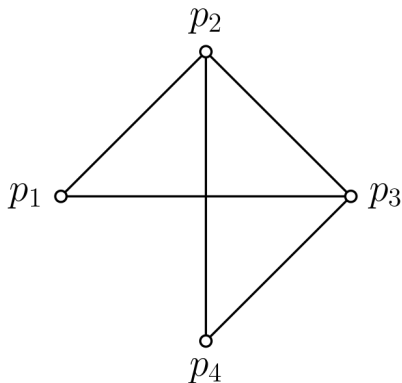
Resultados Teóricos para 1D

Resultados Teóricos para 2D

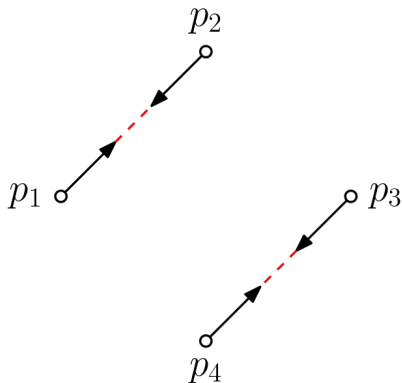
Minimum Scan Cover

Contexto

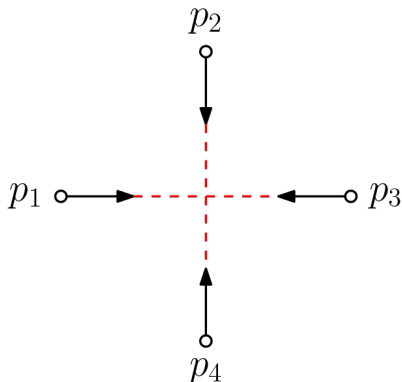
O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



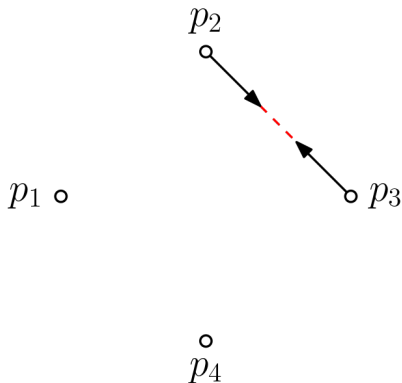
O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



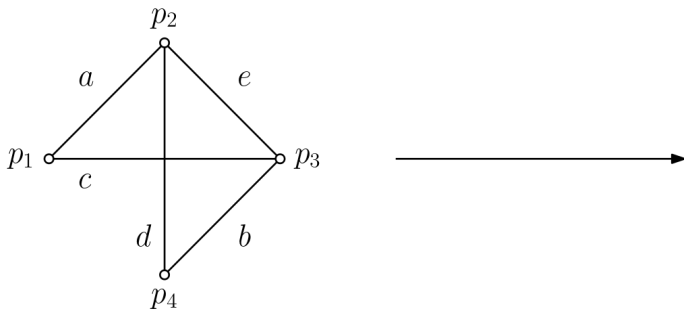
- É possível usar tanto transmissão direcional quanto recepção omnidirecional;

- É possível usar tanto transmissão direcional quanto recepção omnidirecional;
- Mas exige duas antenas, aumentando custo e complexidade.

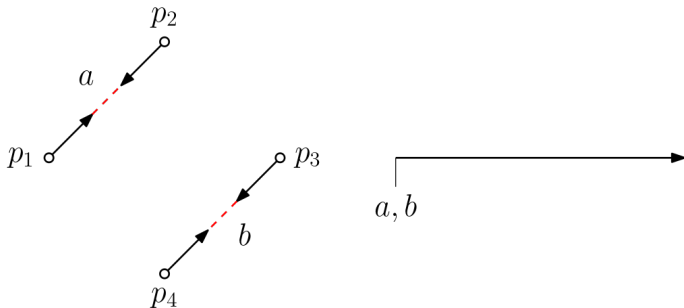
- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ de posições distintas;

- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ de posições distintas;
- Grafo $G = (P, E)$ onde $E \subseteq P \times P$.

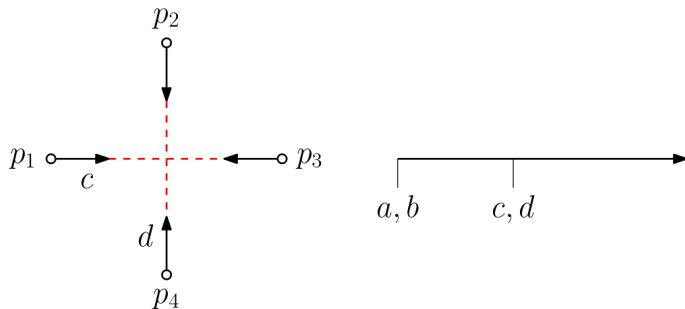
Escalonamento $\mathcal{S}: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ onde queremos minimizar $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$:



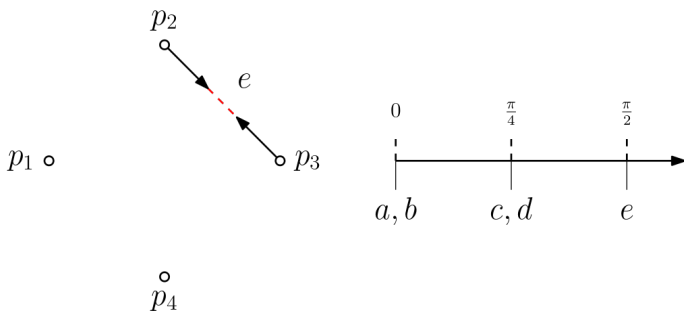
Escalonamento $\mathcal{S}: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ onde queremos minimizar $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$:



Escalonamento $\mathcal{S}: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ onde queremos minimizar $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$:



Escalonamento $S: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ onde queremos minimizar $\max_{e \in E} S(e)$:



$$S(a) = S(b) = 0, S(c) = S(d) = \frac{\pi}{4} \text{ e } S(e) = \frac{\pi}{2}$$

Minimum Scan Cover

Resultados Teóricos para 1D

Teorema (Fekete et al. [FKK21])

Mesmo em 1D, para todo $\gamma \geq 1$, uma γ -aproximação para o MSC implica que $P = NP$.

Teorema

Existe um algoritmo FPT para o MSC em 1D, parametrizado pela largura de árvore k , que roda em tempo $k^{O(k)} \cdot n$.

Teorema

Existe um algoritmo \mathcal{FPT} para o MSC em 1D, parametrizado pela largura de árvore k , que roda em tempo $k^{O(k)} \cdot n$.

Corolário

Existe uma 3-aproximação para o MSC em 1D em grafos planares, que roda em tempo $O(n^2)$.

Minimum Scan Cover

Resultados Teóricos para 2D

Teorema (Fekete et al. [FKK21])

Mesmo em 2D, para todo $\gamma < 3/2$, uma γ -aproximação para o MSC em grafos bipartidos implica que $P = NP$.

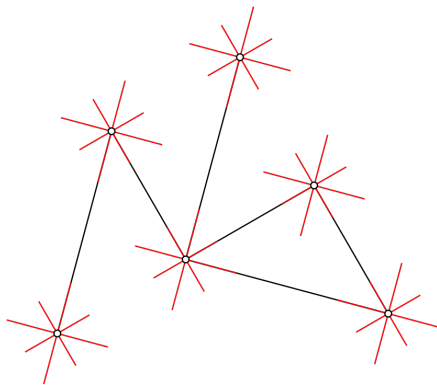
Teorema (Fekete et al. [FKK21])

Mesmo em 2D, para todo $\gamma < 3/2$, uma γ -aproximação para o MSC em grafos bipartidos implica que $P = NP$.

Teorema (Fekete et al. [FKK21])

Existe uma $\frac{9}{2}$ -aproximação para o MSC em 2D em grafos bipartidos.

Uma instância usando $\ell = 8$ direções:



Teorema

Existe um algoritmo FPT para MSC em 2D, parametrizado pela largura de árvore k e ℓ , que roda em tempo $k^{O(k\ell \log(\ell))} \cdot n$.

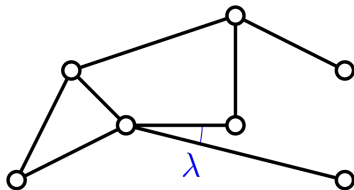
Teorema

Existe um algoritmo FPT para MSC em 2D, parametrizado pela largura de árvore k e ℓ , que roda em tempo $k^{O(k\ell \log(\ell))} \cdot n$.

Corolário

Existe uma 3-aproximação para MSC em 2D em grafos planares parametrizada por ℓ , que roda em tempo $\ell^{O(\ell)} \cdot n + O(n^2)$.

Uma instância de ângulo mínimo não nulo λ :



Teorema

Existe uma 2-aproximação para o MSC em 2D parametrizada pela largura de árvore k e $\lceil 1/\lambda \rceil$, que roda em tempo $\lambda^{-O(k^2 + \frac{k \log k}{\lambda})} \cdot (\log k)^{O(k^2)} \cdot n$.

- Seja $\mathcal{I} = (P, G)$ uma instância de ângulo mínimo não nulo λ ;

- Seja $\mathcal{I} = (P, G)$ uma instância de ângulo mínimo não nulo λ ;
- Recebemos uma decomposição em árvore de G com largura k ;

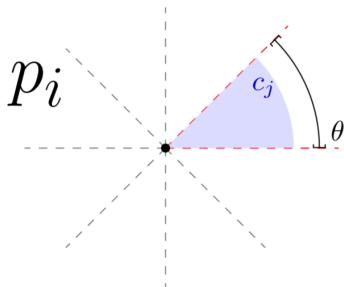
- Seja $\mathcal{I} = (P, G)$ uma instância de ângulo mínimo não nulo λ ;
- Recebemos uma decomposição em árvore de G com largura k ;
- *WLOG*, considere que $\lambda < \pi$.

- Seja $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$;

- Seja $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$;
- O disco ao redor de cada $p_i \in P$ é dividido em $4M$ **setores**:

- Seja $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$;
- O disco ao redor de cada $p_i \in P$ é dividido em $4M$ **setores**:

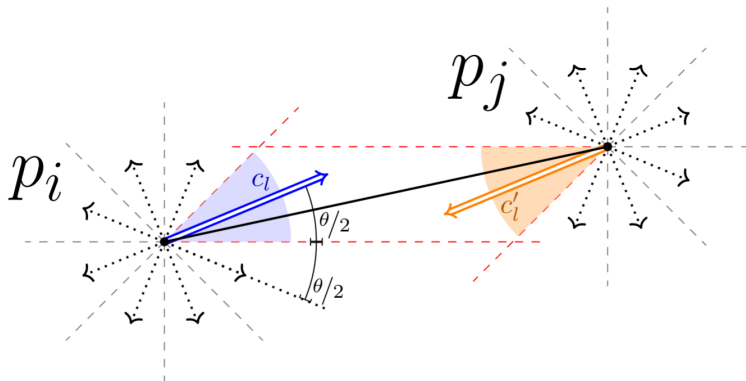
- Seja $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$;
- O disco ao redor de cada $p_i \in P$ é dividido em $4M$ **setores**:



$\theta := \frac{\pi}{2M} < \lambda$ e os setores são c_j para
 $j \in \{0, \dots, 4M - 1\} = [4M - 1]$

Consideramos uma relaxação $\hat{\mathcal{I}} := \mathcal{I}$ dependendo de θ :

Consideramos uma relaxação $\hat{\mathcal{I}} := \mathcal{I}$ dependendo de θ :



Observação

Cada solução ótima de custo $N\theta$ corresponde a uma função $\hat{h}: P \rightarrow [4M - 1]^{N+1}$.

Observação

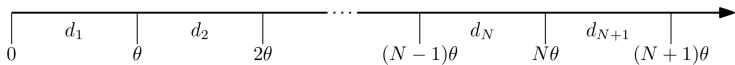
Seja t^ o ótimo de \mathcal{I} . Então, $t^* \leq 3\pi \lceil \log_2(k+1) \rceil$*

Pela 2ª Observação, existe uma solução de $\hat{\mathcal{I}}$ com custo $N\theta$, onde:

$$N \leq \frac{3\pi \lceil \log_2(k+1) \rceil}{\theta} = 6 \lfloor \pi/\lambda \rfloor \lceil \log_2(k+1) \rceil$$

Particionamos o intervalo de tempo $[0, (N + 1)\theta)$:

Particionamos o intervalo de tempo $[0, (N + 1)\theta]$:



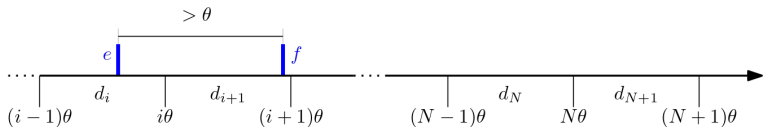
Lema

Existe uma solução de custo no máximo $\lfloor t^/\theta \rfloor \theta$ para $\hat{\mathcal{I}}$, que mapeia arestas para pontos em $\{i \cdot \theta \mid i \in [N]\}$.*

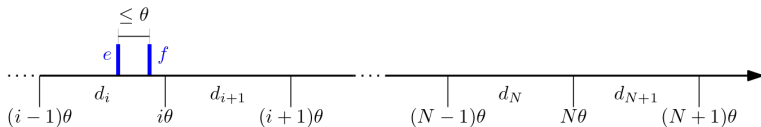
Seja \mathcal{S}^* uma solução ótima para \mathcal{I} .

Se o ângulo entre \mathbf{e} e \mathbf{f} não é zero, então ele é ao menos $\lambda > \theta$:

Se o ângulo entre **e** e **f** não é zero, então ele é ao menos $\lambda > \theta$:

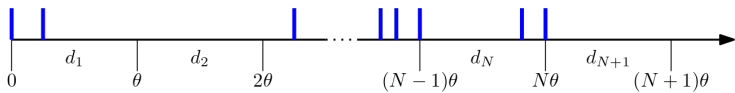


Caso contrário, o ângulo entre \mathbf{e} e \mathbf{f} é zero:

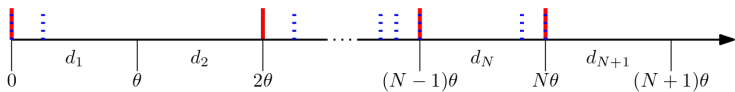


Construímos uma solução $\hat{\mathcal{S}}$ para $\hat{\mathcal{I}}$ a partir de \mathcal{S}^* :

Construímos uma solução $\hat{\mathcal{S}}$ para $\hat{\mathcal{I}}$ a partir de \mathcal{S}^* :



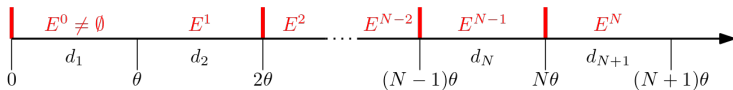
Construímos uma solução $\hat{\mathcal{S}}$ para $\hat{\mathcal{I}}$ a partir de \mathcal{S}^* :



Usando programação dinâmica sobre a decomposição em árvore calculamos uma solução ótima para $\hat{\mathcal{I}}$ em tempo:

$$N^{O(k^2)} \cdot M^{O(Nk)} \cdot k^{O(1)} \cdot n = \lambda^{-O(k^2 + \frac{k \log k}{\lambda})} \cdot (\log k)^{O(k^2)} \cdot n$$

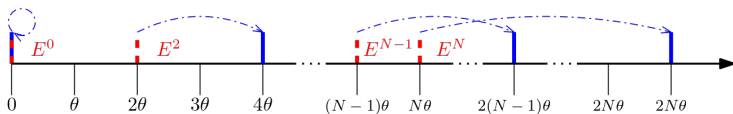
Seja $\hat{\mathcal{S}}^*$ uma solução ótima para $\hat{\mathcal{I}}$:



- Se o ângulo entre \mathbf{e} e \mathbf{f} não é zero, então é maior que θ ;

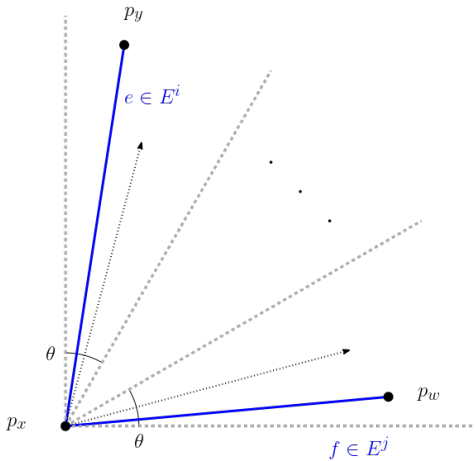
- Se o ângulo entre \mathbf{e} e \mathbf{f} não é zero, então é maior que θ ;
- Logo, $|\hat{\mathcal{S}}^*(\mathbf{e}) - \hat{\mathcal{S}}^*(\mathbf{f})| > \theta$, e não pertencem ao mesmo E^i .

Construímos uma solução \mathcal{S} para \mathcal{I} a partir de $\hat{\mathcal{S}}^*$:

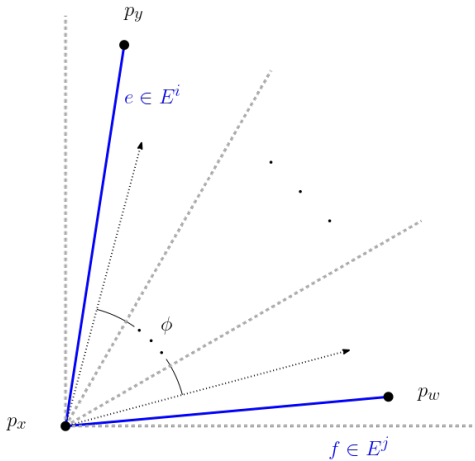


Arestas no mesmo E^i ✓

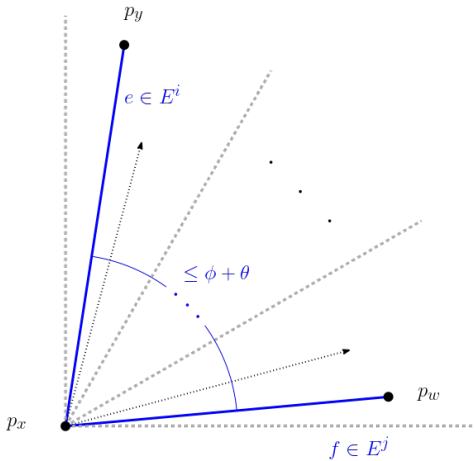
$\mathbf{e} \in E^i$ e $\mathbf{f} \in E^j$ onde $i \neq j$:



$\mathbf{e} \in E^i$ e $\mathbf{f} \in E^j$ onde $i \neq j$:

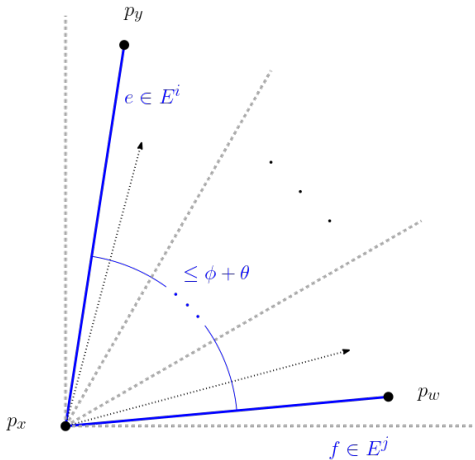


$\mathbf{e} \in E^i$ e $\mathbf{f} \in E^j$ onde $i \neq j$:



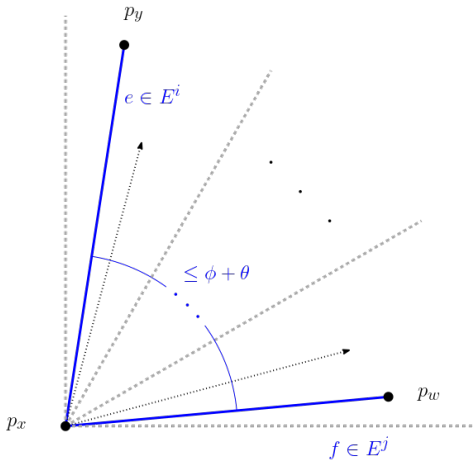
$\mathbf{e} \in E^i$ e $\mathbf{f} \in E^j$ onde $i \neq j$:

Sabemos que $|\hat{\mathcal{S}}^*(e) - \hat{\mathcal{S}}^*(f)| = |i - j| \cdot \theta \geq \phi$



$\mathbf{e} \in E^i$ e $\mathbf{f} \in E^j$ onde $i \neq j$:

Logo, por definição, $|\mathcal{S}(\mathbf{e}) - \mathcal{S}(\mathbf{f})| = 2|i - j| \cdot \theta \geq \phi + \theta$



Arestas no mesmo E^i ✓

$\mathbf{e} \in E^i$ e $\mathbf{f} \in E^j$ onde $i \neq j$ ✓

Então, \mathcal{S} é válido.

Portanto, pelo 1º Lema, o custo de \mathcal{S} é no máximo $2\lfloor t^*/\theta \rfloor \theta \leq 2t^*$ \square

Corolário

Existe uma 5-aproximação para o MSC em 2D em grafos planares parametrizada por $\lceil 1/\lambda \rceil$, que roda em tempo $\lambda^{-O(1/\lambda)} \cdot n + O(n^2)$.

Trabalhos Futuros

Freeze-Tag Problem

- NP-dificuldade do FTP para a distância L_1 no plano;

- NP-dificuldade do FTP para a distância L_1 no plano;
- Aproximação de fator constante para métricas gerais ou árvores;

- NP-dificuldade do FTP para a distância L_1 no plano;
- Aproximação de fator constante para métricas gerais ou árvores;
 - O melhor fator conhecido é $O(\sqrt{\log n})$ [KLS05].

- NP-dificuldade do FTP para a distância L_1 no plano;
- Aproximação de fator constante para métricas gerais ou árvores;
 - O melhor fator conhecido é $O(\sqrt{\log n})$ [KLS05].
- Combinação CP + PTAS com outros problemas NP-difíceis.

- **E** e/ou **k** no expoente do tempo de execução das aproximações;

Angular Freeze-Tag Problem

- **E** e/ou **k** no expoente do tempo de execução das aproximações;
- Dificuldade do AFTP para minimização da energia total;

Angular Freeze-Tag Problem

- E e/ou k no expoente do tempo de execução das aproximações;
- Dificuldade do AFTP para minimização da energia total;
- Uma aproximação para 3D.

- Eliminar a dependência de λ , melhorar o fator para $1 + \varepsilon$ ou obter um \mathcal{FPT} exato;

- Eliminar a dependência de λ , melhorar o fator para $1 + \varepsilon$ ou obter um \mathcal{FPT} exato;
- Algum limite inferior/superior não trivial para 3D.

Obrigado a todos pela atenção...

Obrigado a todos pela atenção...

Fim.

- [AAY17] Zachary Abel, Hugo A. Akitaya, and Jingjin Yu.
Freeze tag awakening in 2D is NP-hard.
In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry, pages 105–107, 2017.
31, 32, 33
- [ABF⁺02] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Martin Skutella.
The Freeze-Tag Problem: How to Wake up a Swarm of Robots.
In Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pages 568–577. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
6, 7, 8, 9, 10, 11, 31, 32, 33, 36, 39
- [ABF⁺06] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Martin Skutella.
The Freeze-Tag Problem: How to Wake Up a Swarm of Robots.
Algorithmica, 46(2):193–221, 2006.
29, 30, 46
- [DR17] Erik D. Demaine and Mikhail Rudoy.
Freeze tag is hard in 3D.
In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry, 2017.
31, 32, 33
- [FK18] Sándor P. Fekete and Dominik Krupke.
Beam it up, Scotty: Angular freeze-tag with directional antennas.
EuroCG 2018 Berlin, 2018.
50, 51, 52, 53, 63, 64
- [FKK21] Sándor P. Fekete, Linda Kleist, and Dominik Krupke.
Minimum scan cover with angular transition costs.
SIAM Journal on Discrete Mathematics, 35(2):1337–1355, 2021.
71, 72, 73, 74, 84, 88, 89

- [KLS05] Jochen Könemann, Asaf Levin, and Amitabh Sinha.
Approximating the degree-bounded minimum diameter spanning tree problem.
Algorithmica, 41(2):117–129, February 2005.
132, 133, 134, 135
- [ODM01] Joseph O'Rourke, Erik D. Demaine, and Joseph S. B. Mitchell.
TOPP: Problem 35: Freeze-Tag: Optimal Strategies for Awakening a Swarm of Robots —
topp.openproblem.net.
<https://topp.openproblem.net/p35>, 2001.
[Accessed 04-12-2024].
29, 30
- [PdOS23a] Lehlilton Lelis Chaves Pedrosa and Lucas de Oliveira Silva.
Freeze-Tag Remains NP-hard on Binary and Ternary Trees.
In *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023)*. Sociedade Brasileira de Computação
- SBC, August 2023.
37, 38
- [PdOS23b] Lehlilton Lelis Chaves Pedrosa and Lucas de Oliveira Silva.
Freeze-Tag is NP-Hard in 3D with L_1 distance.
In *Proceedings of the XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*. Elsevier
BV, 2023.
34, 35