



Instituto de  
Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

# Algoritmos para o Freeze-Tag e Problemas de Robótica de Enxame Relacionados<sup>a</sup>

---

Aluno: Lucas de Oliveira Silva

Orientador: Lehlilton Lelis Chaves Pedrosa

Instituto de Computação, Unicamp

10 de Março de 2025

---

<sup>a</sup> Financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo #2022/13435-4

## Problemas Estudados

- Freeze-Tag Problem

- Angular Freeze-Tag Problem

- Minimum Scan Cover

## Publicações Resultantes

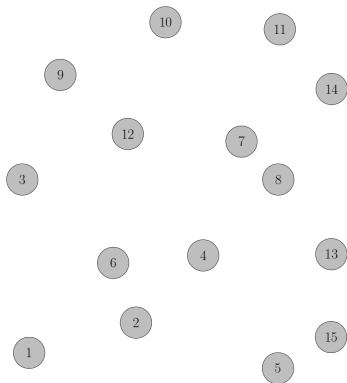
## Trabalhos Futuros

# Freeze-Tag Problem

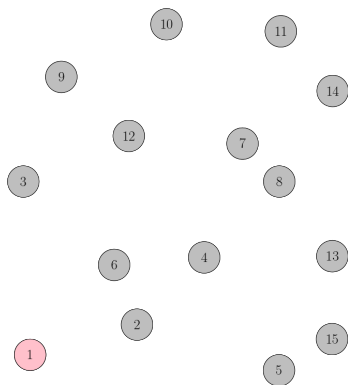
---

## Contexto

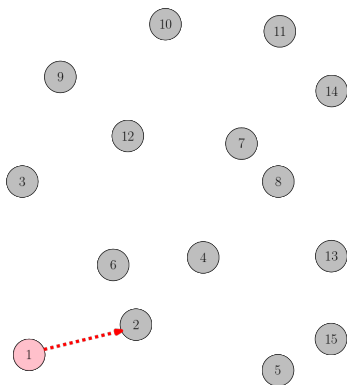
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



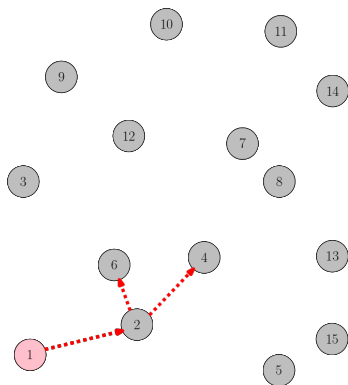
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



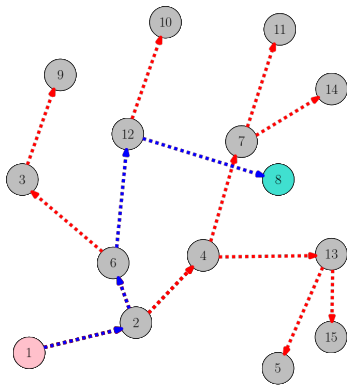
O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



O **Freeze-Tag Problem** (FTP) surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:





- Modela problemas de transmissão de dados e design de redes;

- Modela problemas de transmissão de dados e design de redes;
- Soluções são árvores binárias geradoras de altura mínima;

- Modela problemas de transmissão de dados e design de redes;
- Soluções são árvores binárias geradoras de altura mínima;
- Ligado às árvores de multicast (estruturas de comunicação da camada de aplicação).

- Conjunto de  $n$  robôs  $R$ ;

- Conjunto de  $n$  robôs  $R$ ;
- Robô inicial  $r_0 \in R$  (**fonte**);

- Conjunto de  $n$  robôs  $R$ ;
- Robô inicial  $r_0 \in R$  (**fonte**);
- Função de distância  $\text{dist}: R \times R \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;



O conjunto de movimentos (*schedule* ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o *makespan*, isto é, o tempo total de ativação.

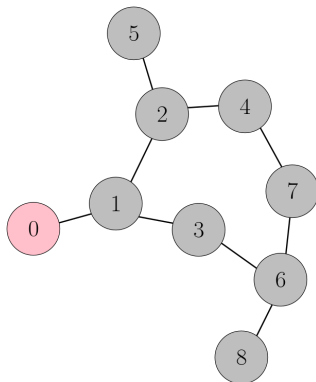
O conjunto de movimentos (*schedule* ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o *makespan*, isto é, o tempo total de ativação.

## Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

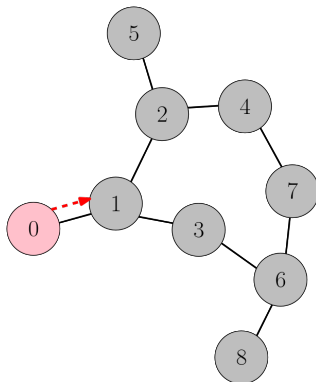
- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



## Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

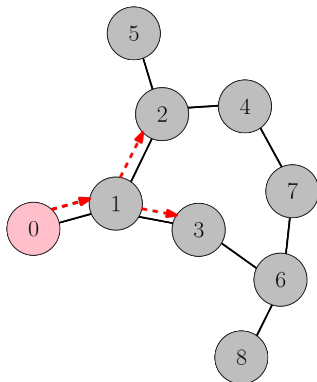
- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



## Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

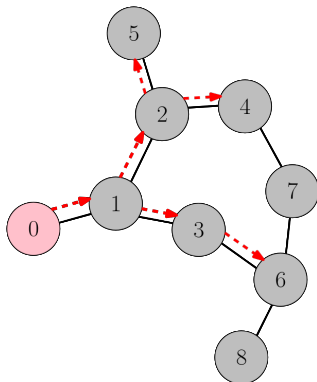
- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



## Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

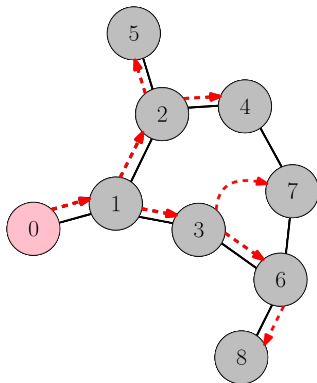
- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



## Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

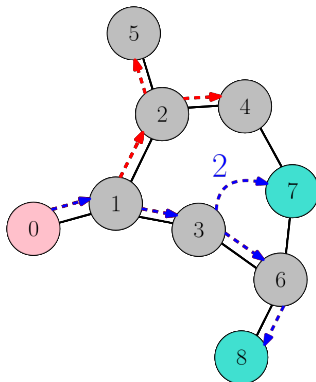
- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.



## Definição - Solução

O conjunto de movimentos (***schedule*** ou **árvore de ativação**):

- Árvore binária  $\mathcal{T}$  enraizada em  $r_0$  que visita todos os robôs;
- Minimizamos o ***makespan***, isto é, o tempo total de ativação.





# Freeze-Tag Problem

---

**Resultados Teóricos: Anteriores e Novos**

## Conjectura (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>06])

*O FTP é NP-difícil para as distâncias Euclidiana ( $L_2$ ) ou de Manhattan ( $L_1$ ) no plano  $\mathbb{R}^2$ .*

## Conjectura (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>06])

*O FTP é NP-difícil para as distâncias Euclidiana ( $L_2$ ) ou de Manhattan ( $L_1$ ) no plano  $\mathbb{R}^2$ .*

Problema 35 do *The Open Problems Project* [ODM01].

### Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])

*Existe um EPTAS para o FTP com distâncias  $L_p$  em qualquer espaço de dimensão fixa  $\mathbb{R}^d$ , com tempo de execução  $O(n \log n) + 2^{O((1/\varepsilon)^2 \log 1/\varepsilon)}$ .*

### **Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])**

*Existe um EPTAS para o FTP com distâncias  $L_p$  em qualquer espaço de dimensão fixa  $\mathbb{R}^d$ , com tempo de execução  $O(n \log n) + 2^{O((1/\varepsilon)^2 \log 1/\varepsilon)}$ .*

### **Teorema (Abel et al. [AAY17])**

*O FTP é NP-difícil para distância  $L_2$  no plano.*

### **Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])**

*Existe um EPTAS para o FTP com distâncias  $L_p$  em qualquer espaço de dimensão fixa  $\mathbb{R}^d$ , com tempo de execução  $O(n \log n) + 2^{O((1/\varepsilon)^2 \log 1/\varepsilon)}$ .*

### **Teorema (Abel et al. [AAY17])**

*O FTP é NP-difícil para distância  $L_2$  no plano.*

### **Teorema (Demaine e Rudoy [DR17])**

*O FTP é NP-difícil para distâncias  $L_p$ , onde  $p > 1$ , em 3D.*

## Teorema (Pedrosa e Silva [PdOS23b])

*O FTP é fortemente NP-difícil para distância  $L_1$  em 3D.*

## **Teorema (Pedrosa e Silva [PdOS23b])**

*O FTP é fortemente NP-difícil para distância  $L_1$  em 3D.*

## **Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23b])**

*O FTP é NP-difícil em grades 3D sem pesos nas arestas.*



### Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])

*O FTP é fortemente NP-difícil em estrelas com pesos nas arestas.*

## Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23a])

*O FTP é NP-difícil em árvores binárias enraizadas, sem pesos nas arestas, com a fonte na raiz e robôs desativados apenas nas folhas.*

## **Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23a])**

*O FTP é NP-difícil em árvores binárias enraizadas, sem pesos nas arestas, com a fonte na raiz e robôs desativados apenas nas folhas.*

## **Corolário (Pedrosa e Silva [PdOS23a])**

*O FTP é fortemente NP-difícil em árvores ternárias enraizadas, com pesos nas arestas, a fonte na raiz e um robô desativado em cada outro nó.*

### **Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])**

*É NP-difícil aproximar o FTP em grafos com pesos nas arestas dentro de um fator menor que  $5/3$ , mesmo se o grafo tiver grau máximo 4 e possuir exatamente um robô em cada nó.*

## Teorema

*É NP-difícil aproximar o FTP em grafos sem pesos nas arestas dentro de um fator de até  $3/2$ , mesmo se o grafo tiver diâmetro 2 e possuir ao menos um robô em cada nó.*

# Freeze-Tag Problem

---

## Resultados Experimentais

- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;

- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;
- Duas formulações MIP implementadas usando Gurobi;



- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;
- Duas formulações MIP implementadas usando Gurobi;
- Uma formulação CP implementada usando o CP-SAT do Google OR-Tools;

- Experimentos foram realizados devido à ausência de implementações exatas;
- Duas formulações MIP implementadas usando Gurobi;
- Uma formulação CP implementada usando o CP-SAT do Google OR-Tools;
- Avaliação feita com instâncias usando a distância  $L_2$  em  $\mathbb{R}^2$ .

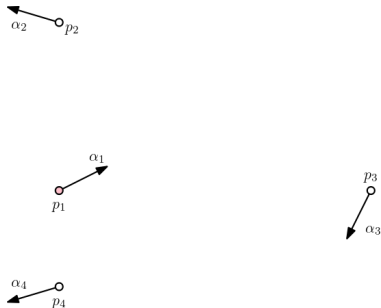
Implementamos o EPTAS de Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>06], substituindo a enumeração lenta do algoritmo por nossa formulação CP.

# Angular Freeze-Tag Problem

---

## Contexto

O **Angular Freeze-Tag Problem** (AFTP) surge como um problema de ***broadcast*** entre satélites em 2018 [FK18]:



- Recursos limitados restringem o movimento dos satélites;

- Recursos limitados restringem o movimento dos satélites;
- Grandes distâncias impossibilitam um *broadcast* simultâneo;

- Recursos limitados restringem o movimento dos satélites;
- Grandes distâncias impossibilitam um *broadcast* simultâneo;
- O crescimento das constelações de satélites.



- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  de posições distintas;

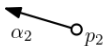
- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  de posições distintas;
- Cada  $p_i$  corresponde a um satélite associado a  $\alpha_i$ ;

- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  de posições distintas;
- Cada  $p_i$  corresponde a um satélite associado a  $\alpha_i$ ;
- Inicialmente, apenas  $p_1$  contém um dado a ser propagado.

As sequências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:

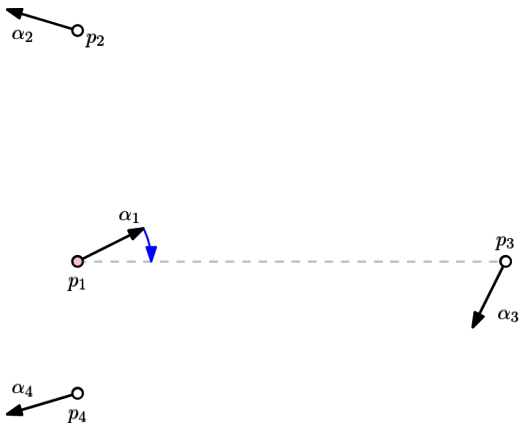
# Definição - Solução

As sequências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:



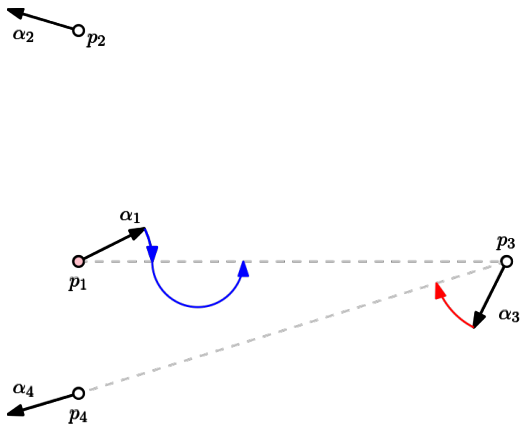
## Definição - Solução

As seqüências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:



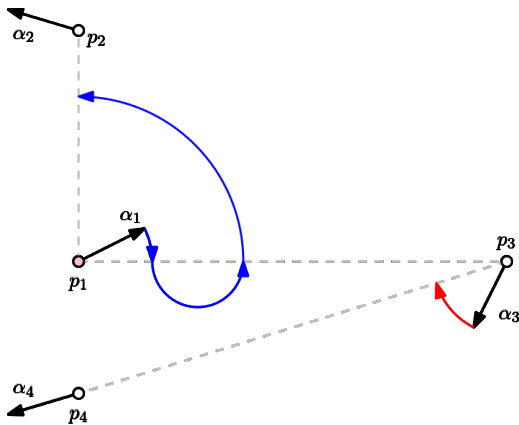
# Definição - Solução

As seqüências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:



# Definição - Solução

As seqüências de rotações onde o objetivo é minimizar o *makespan*:





# Angular Freeze-Tag Problem

---

Resultados Anteriores e Novos

### Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

*É NP-difícil aproximar o AFTP em 2D dentro de um fator menor que  $5/3$ .*

### **Teorema (Fekete e Krupke [FK18])**

*É NP-difícil aproximar o AFTP em 2D dentro de um fator menor que  $5/3$ .*

### **Teorema (Fekete e Krupke [FK18])**

*Existe uma 9-aproximação para o AFTP em 2D, assumindo um limite inferior de  $\varepsilon > 0$  para a rotação inicial de qualquer satélite que rotacione sua antena.*

Chamamos de **energia total** de uma solução a soma da rotação total realizada por todos os satélites.

Chamamos de **energia total** de uma solução a soma da rotação total realizada por todos os satélites.

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP em 2D,  $F$  um número real e  $k$  um inteiro positivo. Então, existe um algoritmo que roda em tempo  $(n \frac{Fk}{\epsilon})^{O(\frac{Fk}{\epsilon})}$  e ou prova que toda solução ótima requer mais de  $F$  de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo  $(1 + 1/k)OPT(I)$ .*

# Nossos Resultados

Chamamos de **energia total** de uma solução a soma da rotação total realizada por todos os satélites.

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP em 2D,  $F$  um número real e  $k$  um inteiro positivo. Então, existe um algoritmo que roda em tempo  $(n^{\frac{Fk}{\epsilon}})^{O(\frac{Fk}{\epsilon})}$  e ou prova que toda solução ótima requer mais de  $F$  de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo  $(1 + 1/k)OPT(I)$ .*

## Teorema

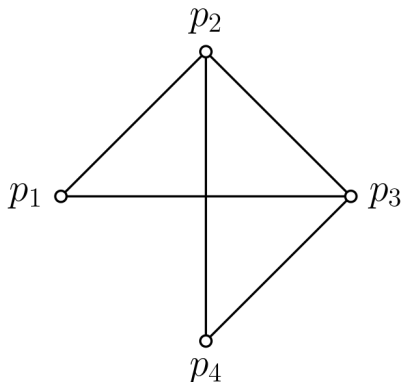
*Para todo inteiro positivo  $k$ , existe uma  $(1 + 1/k)$ -aproximação para o AFTP em 2D com o objetivo de minimizar a energia total, que roda em tempo  $(n^{\frac{k}{\epsilon}})^{O(\frac{k}{\epsilon})}$ .*

# Minimum Scan Cover

---

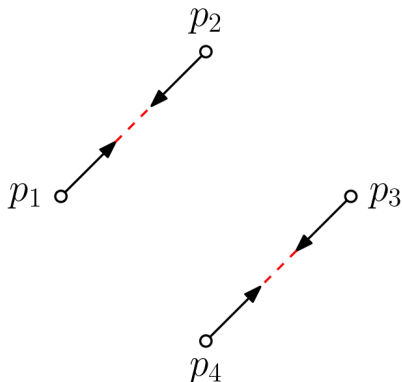
Contexto

O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:

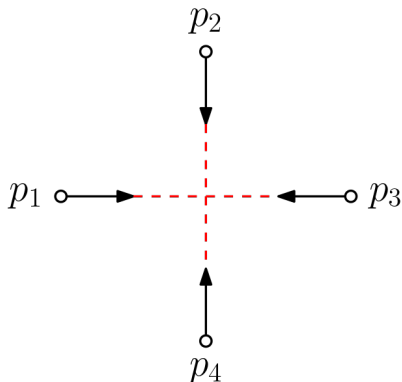




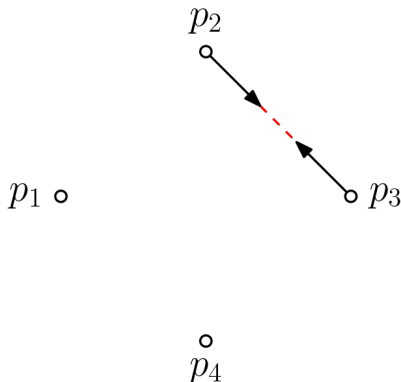
O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



O **Minimum Scan Cover** (MSC) foi introduzido em 2021 [FKK21] como um problema de comunicação ponto a ponto entre satélites:



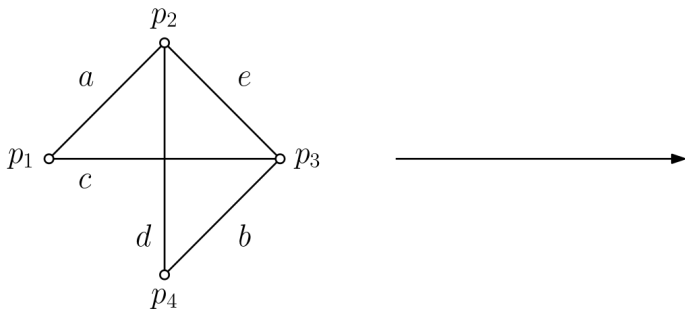
- É possível usar tanto transmissão direcional quanto recepção omnidirecional;

- É possível usar tanto transmissão direcional quanto recepção omnidirecional;
- Mas exige duas antenas, aumentando custo e complexidade.

- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  de posições distintas;

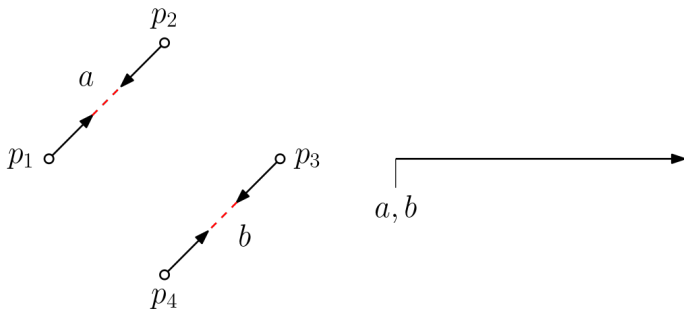
- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  de posições distintas;
- Grafo  $G = (P, E)$  onde  $E \subseteq P \times P$ .

**Escalonamento**  $\mathcal{S}: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde queremos minimizar  $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$ :

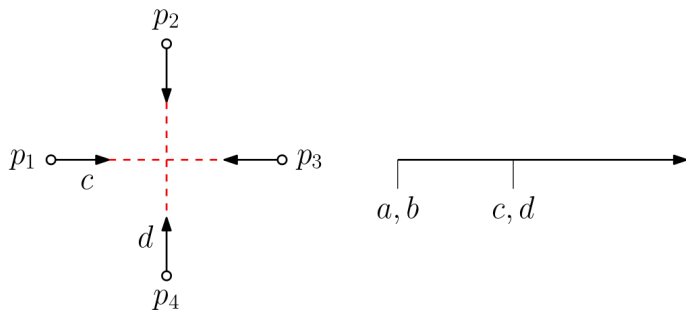




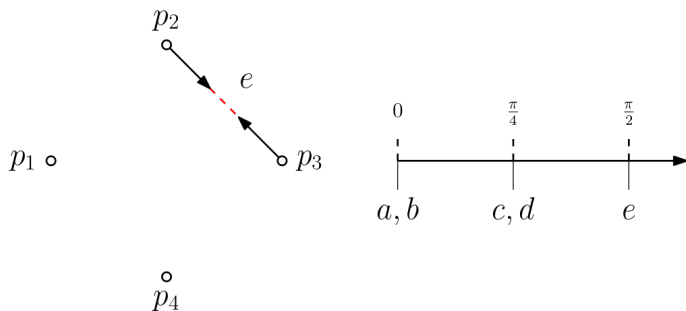
**Escalonamento**  $\mathcal{S}: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde queremos minimizar  $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$ :



**Escalonamento**  $\mathcal{S}: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde queremos minimizar  $\max_{e \in E} \mathcal{S}(e)$ :



**Escalonamento**  $S: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde queremos minimizar  $\max_{e \in E} S(e)$ :



$$S(a) = S(b) = 0, S(c) = S(d) = \frac{\pi}{4} \text{ e } S(e) = \frac{\pi}{2}$$

## Minimum Scan Cover

---

**Resultados Anteriores e Novos para 1D**

### Teorema (Fekete et al. [FKK21])

*Mesmo em 1D, para todo  $\gamma \geq 1$ , uma  $\gamma$ -aproximação para o MSC implica que  $P = NP$ .*

## Teorema

*Existe um algoritmo FPT para o MSC em 1D, parametrizado pela largura de árvore  $k$ , que roda em tempo  $k^{O(k)} \cdot n$ .*

## Teorema

*Existe um algoritmo  $\mathcal{FPT}$  para o MSC em 1D, parametrizado pela largura de árvore  $k$ , que roda em tempo  $k^{O(k)} \cdot n$ .*

## Corolário

*Existe uma 3-aproximação para o MSC em 1D em grafos planares, que roda em tempo  $O(n^2)$ .*

## Minimum Scan Cover

---

**Resultados Anteriores e Novos para 2D**



### **Teorema (Fekete et al. [FKK21])**

*Mesmo em 2D, para todo  $\gamma < 3/2$ , uma  $\gamma$ -aproximação para o MSC em grafos bipartidos implica que  $P = NP$ .*

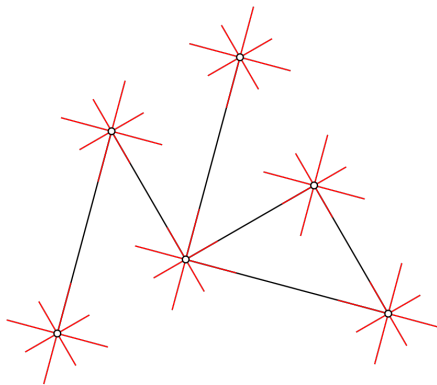
### **Teorema (Fekete et al. [FKK21])**

*Mesmo em 2D, para todo  $\gamma < 3/2$ , uma  $\gamma$ -aproximação para o MSC em grafos bipartidos implica que  $P = NP$ .*

### **Teorema (Fekete et al. [FKK21])**

*Existe uma  $\frac{9}{2}$ -aproximação para o MSC em 2D em grafos bipartidos.*

Uma instância usando  $\ell = 8$  direções:



## Teorema

*Existe um algoritmo FPT para MSC em 2D, parametrizado pela largura de árvore  $k$  e  $\ell$ , que roda em tempo  $k^{O(k\ell \log(\ell))} \cdot n$ .*

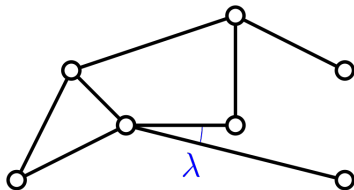
## Teorema

*Existe um algoritmo FPT para MSC em 2D, parametrizado pela largura de árvore  $k$  e  $\ell$ , que roda em tempo  $k^{O(k\ell \log(\ell))} \cdot n$ .*

## Corolário

*Existe uma 3-aproximação para MSC em 2D em grafos planares parametrizada por  $\ell$ , que roda em tempo  $\ell^{O(\ell)} \cdot n + O(n^2)$ .*

Uma instância de ângulo mínimo não nulo  $\lambda$ :



## Teorema

*Existe uma 2-aproximação para o MSC em 2D parametrizada pela largura de árvore  $k$  e  $\lceil 1/\lambda \rceil$ , que roda em tempo  $\lambda^{-O(k^2 + \frac{k \log k}{\lambda})} \cdot (\log k)^{O(k^2)} \cdot n$ .*

- Seja  $\mathcal{I} = (P, G)$  uma instância de ângulo mínimo não nulo  $\lambda$ ;



- Seja  $\mathcal{I} = (P, G)$  uma instância de ângulo mínimo não nulo  $\lambda$ ;
- Recebemos uma decomposição em árvore de  $G$  com largura  $k$ ;

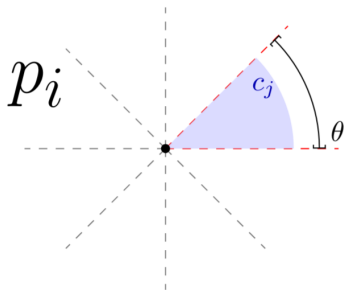
- Seja  $\mathcal{I} = (P, G)$  uma instância de ângulo mínimo não nulo  $\lambda$ ;
- Recebemos uma decomposição em árvore de  $G$  com largura  $k$ ;
- *WLOG*, considere que  $\lambda < \pi$ .

- Seja  $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$ ;

- Seja  $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$ ;
- O disco ao redor de cada  $p_i \in P$  é dividido em  $4M$  **setores**:

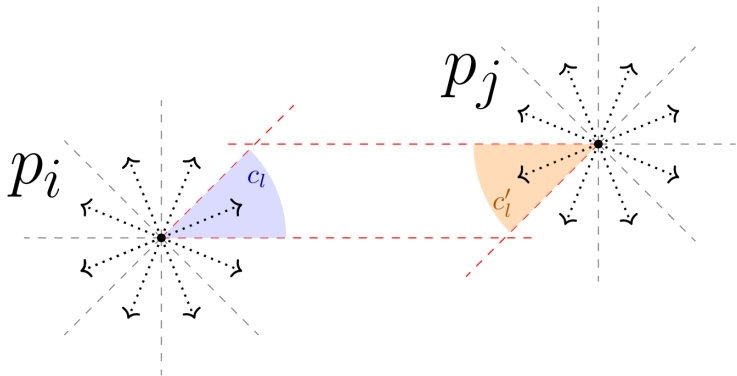
- Seja  $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$ ;
- O disco ao redor de cada  $p_i \in P$  é dividido em  $4M$  **setores**:

- Seja  $M := \lfloor \pi/\lambda \rfloor \geq 1$ ;
- O disco ao redor de cada  $p_i \in P$  é dividido em  $4M$  **setores**:

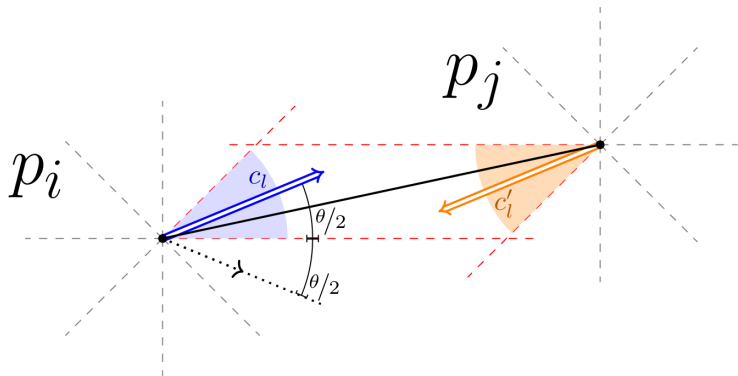


$$\theta := \frac{\pi}{2M} < \lambda$$

Consideramos uma relaxação  $\hat{\mathcal{I}} := \mathcal{I}$  dependendo de  $\theta$ :



Consideramos uma relaxação  $\hat{\mathcal{I}} := \mathcal{I}$  dependendo de  $\theta$ :





## Observação

*Cada solução ótima de custo  $N\theta$  corresponde a uma função  $\hat{h}: P \rightarrow \{0, \dots, 4M - 1\}^{N+1}$ .*

## Lema

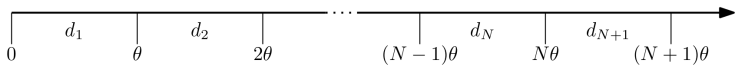
*Seja  $t^*$  o ótimo de  $\mathcal{I}$ . Então,  $t^* \leq 3\pi \lceil \log_2(k+1) \rceil$ .*

Pelo 1º Lema, existe uma solução de  $\hat{\mathcal{I}}$  com custo  $N\theta$ , onde:

$$N \leq 6 \lfloor \pi/\lambda \rfloor \lceil \log_2(k+1) \rceil$$

Particionamos o intervalo de tempo  $[0, (N + 1)\theta)$ :

Particionamos o intervalo de tempo  $[0, (N + 1)\theta]$ :



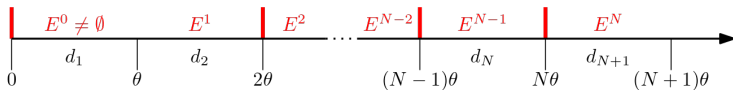
## Lema

*Existe uma solução de custo no máximo  $\lfloor t^*/\theta \rfloor \theta$  para  $\hat{\mathcal{I}}$ , que mapeia arestas para pontos em  $\{i \cdot \theta \mid i \in [N]\}$ .*

Com programação dinâmica sobre a decomposição em árvore, calculamos uma solução ótima para  $\hat{\mathcal{I}}$  em tempo:

$$\lambda^{-O(k^2 + \frac{k \log k}{\lambda})} \cdot (\log k)^{O(k^2)} \cdot n$$

Seja  $\hat{S}^*$  uma solução ótima para  $\hat{\mathcal{I}}$ :





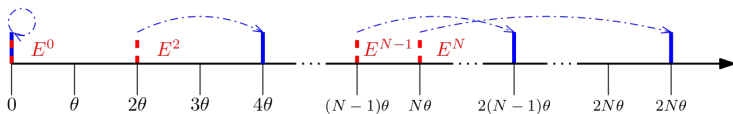
## Observação

- Se o ângulo entre  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$  não é zero, então é ao menos  $\lambda > \theta$ ;

## Observação

- Se o ângulo entre  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$  não é zero, então é ao menos  $\lambda > \theta$ ;
- Logo,  $|\hat{\mathcal{S}}^*(\mathbf{e}) - \hat{\mathcal{S}}^*(\mathbf{f})| > \theta$ , e não pertencem ao mesmo  $E^i$ .

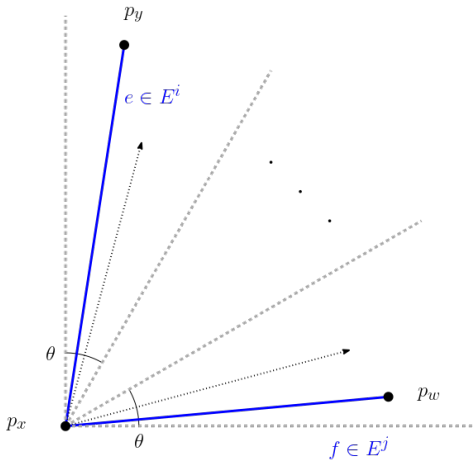
Construímos uma solução  $\mathcal{S}$  para  $\mathcal{I}$  a partir de  $\hat{\mathcal{S}}^*$ :



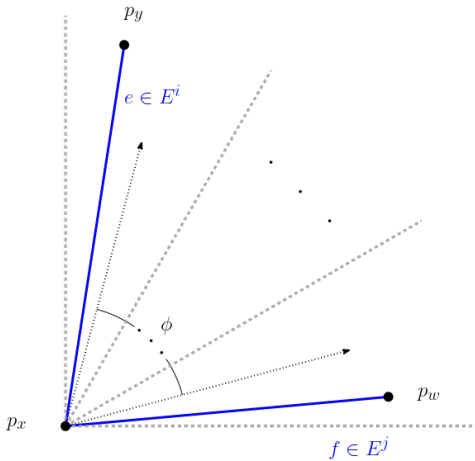
Arestas no mesmo  $E^i$  ✓

Seja  $\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$ .

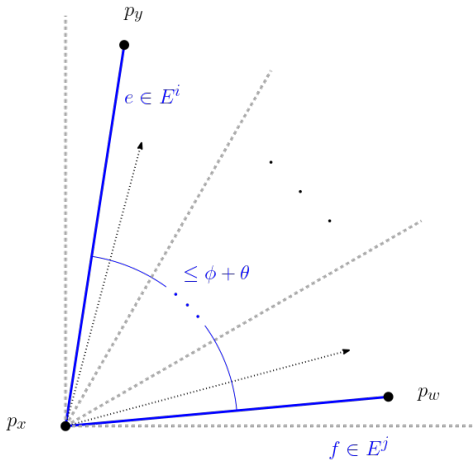
$\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$ :



$\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$ :



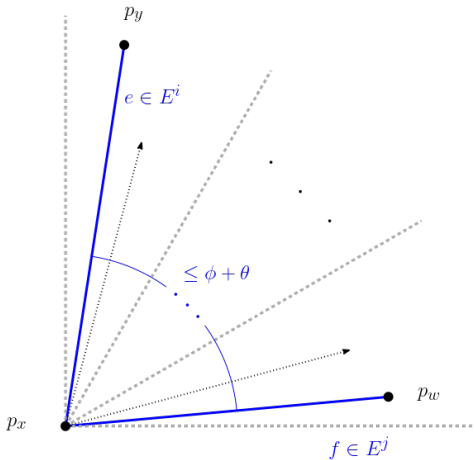
$\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$ :





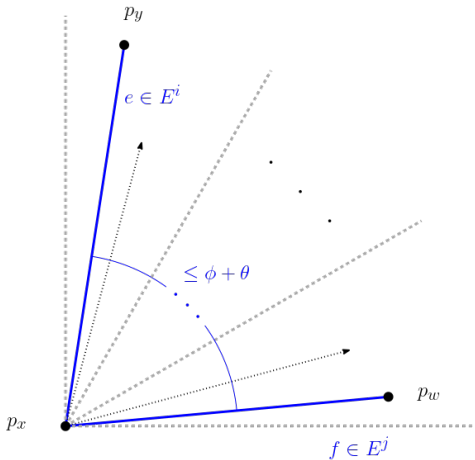
$\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$ :

Sabemos que  $|\hat{\mathcal{S}}^*(e) - \hat{\mathcal{S}}^*(f)| = |i - j| \cdot \theta \geq \phi$



$\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$ :

Logo, por definição,  $|\mathcal{S}(\mathbf{e}) - \mathcal{S}(\mathbf{f})| = 2|i - j| \cdot \theta \geq \phi + \theta$



Arestas no mesmo  $E^i$  ✓

Arestas  $\mathbf{e} \in E^i$  e  $\mathbf{f} \in E^j$  onde  $i \neq j$  ✓

Então,  $\mathcal{S}$  é válido.

Pelo 2º Lema, o custo de  $\mathcal{S}$  é no máximo  $2\lceil t^*/\theta \rceil \theta \leq 2t^*$



## Corolário

*Existe uma 5-aproximação para o MSC em 2D em grafos planares parametrizada por  $\lceil 1/\lambda \rceil$ , que roda em tempo  $\lambda^{-O(1/\lambda)} \cdot n + O(n^2)$ .*

- O resumo estendido intitulado “*Freeze-Tag Remains NP-hard on Binary and Ternary Trees*” apresentado no VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023) [PdOS23a];

- O resumo estendido intitulado “*Freeze-Tag Remains NP-hard on Binary and Ternary Trees*” apresentado no VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023) [PdOS23a];
- O artigo “*Freeze-Tag is NP-hard in 3D with  $L_1$  distance*” apresentado no *XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* (LAGOS 2023) [PdOS23b];

- O resumo estendido intitulado “*Freeze-Tag Remains NP-hard on Binary and Ternary Trees*” apresentado no VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023) [PdOS23a];
- O artigo “*Freeze-Tag is NP-hard in 3D with  $L_1$  distance*” apresentado no XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2023) [PdOS23b];
- O resumo estendido intitulado “*Chain Traveling Salesmen Problem*” apresentado no 11th Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG 2024);



- O resumo estendido intitulado “*Freeze-Tag Remains NP-hard on Binary and Ternary Trees*” apresentado no VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023) [PdOS23a];
- O artigo “*Freeze-Tag is NP-hard in 3D with  $L_1$  distance*” apresentado no XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2023) [PdOS23b];
- O resumo estendido intitulado “*Chain Traveling Salesmen Problem*” apresentado no 11th Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG 2024);
- O artigo “*Realizing Graphs with Cut Constraints*” a ser apresentado no 14th International Conference on Algorithms and Complexity (CIAC 2025) [dOSCdP<sup>+</sup>25];

# Trabalhos Futuros

---

- NP-dificuldade do FTP para a distância  $L_1$  no plano;

- NP-dificuldade do FTP para a distância  $L_1$  no plano;
- Aproximação de fator constante para métricas gerais ou árvores;

- NP-dificuldade do FTP para a distância  $L_1$  no plano;
- Aproximação de fator constante para métricas gerais ou árvores;
  - O melhor fator conhecido é  $O(\sqrt{\log n})$  [KLS05].

- **F** e/ou **k** no expoente do tempo de execução das aproximações;

# Angular Freeze-Tag Problem

- **F** e/ou **k** no expoente do tempo de execução das aproximações;
- Dificuldade do AFTP para minimização da energia total;

# Angular Freeze-Tag Problem

- **F** e/ou **k** no expoente do tempo de execução das aproximações;
- Dificuldade do AFTP para minimização da energia total;
- Uma aproximação para 3D.



- Eliminar a dependência de  $\lambda$  ou obter um  $\mathcal{FPT}$  exato;

- Eliminar a dependência de  $\lambda$  ou obter um  $\mathcal{FPT}$  exato;
- Algum limite inferior/superior não trivial para 3D.

Obrigado a todos pela atenção...

Obrigado a todos pela atenção...

**Fim.**

- [AAY17] Zachary Abel, Hugo A. Akitaya, and Jingjin Yu.  
Freeze tag awakening in 2D is NP-hard.  
*In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry*, pages 105–107, 2017.
- [ABF<sup>+</sup>02] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Martin Skutella.  
The Freeze-Tag Problem: How to Wake up a Swarm of Robots.  
*In Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 568–577. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [ABF<sup>+</sup>06] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Martin Skutella.  
The Freeze-Tag Problem: How to Wake Up a Swarm of Robots.  
*Algorithmica*, 46(2):193–221, 2006.
- [dOSCdP<sup>+</sup>25] Lucas de Oliveira Silva, Vítor Gomes Chagas, Samuel Praça de Paula, Greis Yvet Oropeza Quesquén, and Uéverton dos Santos Souza.  
Realizing graphs with cut constraints, 2025.
- [DR17] Erik D. Demaine and Mikhail Rudoy.  
Freeze tag is hard in 3D.  
*In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry*, 2017.
- [FK18] Sándor P. Fekete and Dominik Krupke.  
Beam it up, Scotty: Angular freeze-tag with directional antennas.  
*EuroCG 2018 Berlin*, 2018.
- [FKK21] Sándor P. Fekete, Linda Kleist, and Dominik Krupke.  
Minimum scan cover with angular transition costs.  
*SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35(2):1337–1355, 2021.
- [KLS05] Jochen Könemann, Asaf Levin, and Amitabh Sinha.  
Approximating the degree-bounded minimum diameter spanning tree problem.  
*Algorithmica*, 41(2):117–129, February 2005.

- [ODM01] Joseph O'Rourke, Erik D. Demaine, and Joseph S. B. Mitchell.  
TOPP: Problem 35: Freeze-Tag: Optimal Strategies for Awakening a Swarm of Robots —  
topp.openproblem.net.  
<https://topp.openproblem.net/p35>, 2001.  
[Accessed 04-12-2024].
- [PdOS23a] Lehilton Lelis Chaves Pedrosa and Lucas de Oliveira Silva.  
Freeze-Tag Remains NP-hard on Binary and Ternary Trees.  
In *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023)*. Sociedade Brasileira de  
Computação - SBC, August 2023.
- [PdOS23b] Lehilton Lelis Chaves Pedrosa and Lucas de Oliveira Silva.  
Freeze-Tag is NP-Hard in 3D with  $L_1$  distance.  
In *Proceedings of the XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*.  
Elsevier BV, 2023.