



Instituto de
Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



Algoritmos de Aproximação para Problemas NP-completos em Grafos Planares

Lucas de Oliveira Silva - 220715

Autora: Brenda S. Baker

MO418 - Algoritmos de Aproximação - Prof. Santiago V. Ravelo

26 de Junho de 2025

Introdução

Problema Exemplo

CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO (CI)

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO (CI)

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Objetivo: $S \subseteq V$ tal que $|E(G[S])| = 0$, com $|S|$ máximo.

Teorema ([GJ79])

O problema do Conjunto Independente Máximo é NP-difícil, mesmo em grafos cúbicos e planares.

Teorema ([Hå99])

Seja n o número de vértices de um grafo, e $\varepsilon > 0$.

Teorema ([Hå99])

Seja n o número de vértices de um grafo, e $\varepsilon > 0$.

Teorema ([Hå99])

Seja n o número de vértices de um grafo, e $\varepsilon > 0$.

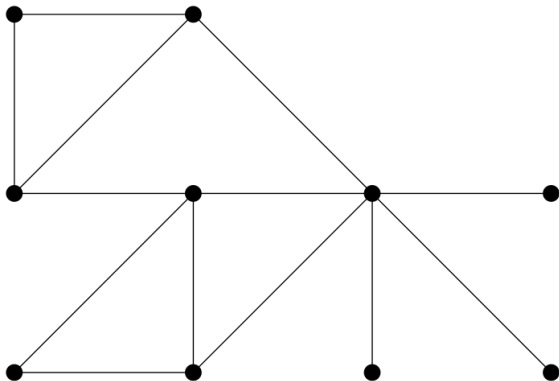
Não existe aproximação com fator $O(n^{\varepsilon-1})$ para CI , a menos que $P = NP$.

Teorema (folclore)

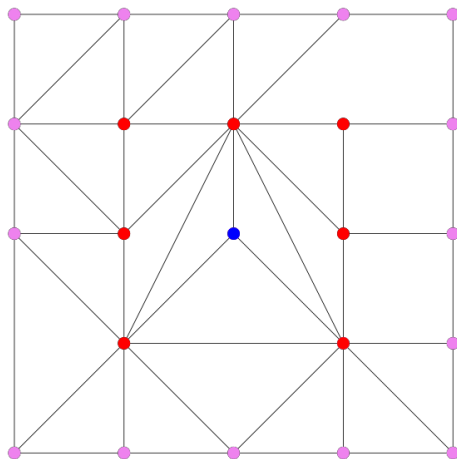
Seja T uma árvore. É possível computar um conjunto independente máximo de T em tempo polinomial.

Preliminares

Grafos Outerplanares



Exemplo para $k = 3$:



Lema (1)

Existe um algoritmo por PD que resolve CI em grafos k -outerplanares em tempo $2^{O(k)} \cdot n$.

Demonstração.

Demonstração.

Lema ([Bod98])

Grafos k -outerplanares têm largura arbórea no máximo $3k - 1$.

Demonstração.

Lema ([Bod98])

Grafos k -outerplanares têm largura arbórea no máximo $3k - 1$.

Lema ([CFM⁺15])

Seja G um grafo com n vértices e largura arbórea $\leq k$. Então, CI em G pode ser resolvido em tempo $2^k \cdot k^{O(1)} \cdot n$.



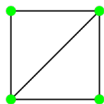
Resultado Principal

Teorema (1 [Bak83])

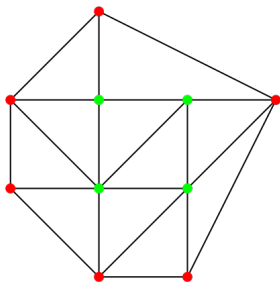
Existe um PTAS para CI em grafos planares, com tempo $O(2^{O(1/\varepsilon)} \cdot n)$.

Assim como ogros, grafos planares têm camadas!

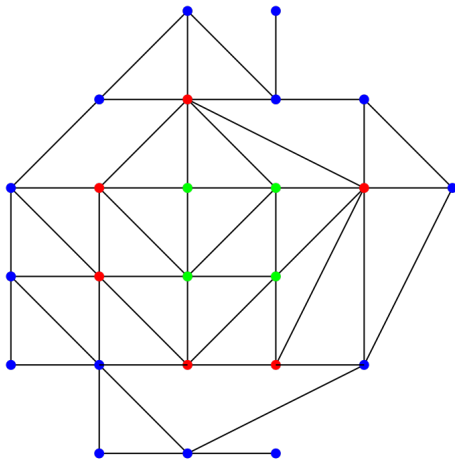




Exemplo



Exemplo



Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- Para $0 \leq i < k$, seja $S_i = \{L_j \mid j \equiv i \pmod{k}\}$

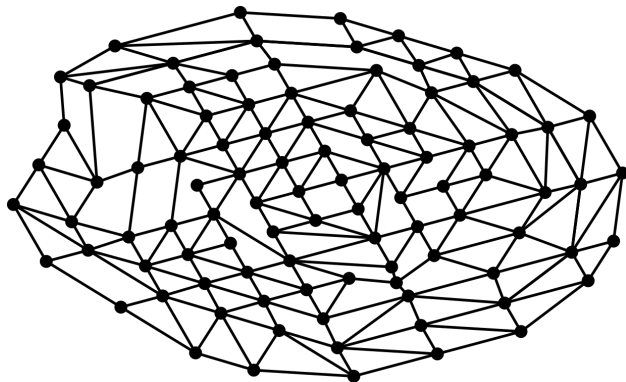
Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- Para $0 \leq i < k$, seja $S_i = \{L_j \mid j \equiv i \pmod{k}\}$
 - Ex.: $k = 4 \Rightarrow S_1 = L_1 \cup L_5 \cup L_9 \cup \dots$

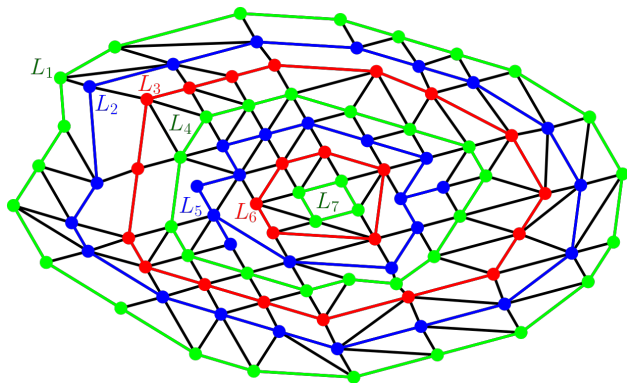
Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- Para $0 \leq i < k$, seja $S_i = \{L_j \mid j \equiv i \pmod{k}\}$
 - Ex.: $k = 4 \Rightarrow S_1 = L_1 \cup L_5 \cup L_9 \cup \dots$
- $G_i = G[V - S_i]$.

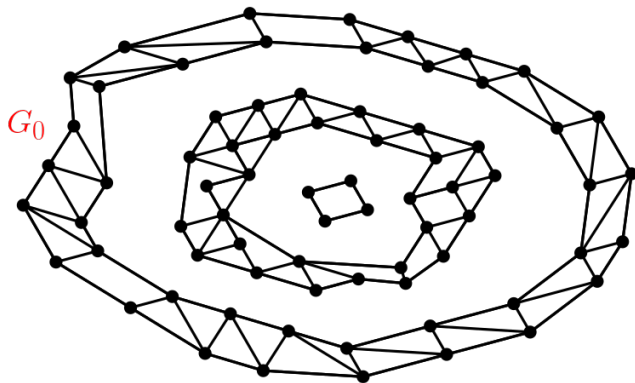
$k = 3$:



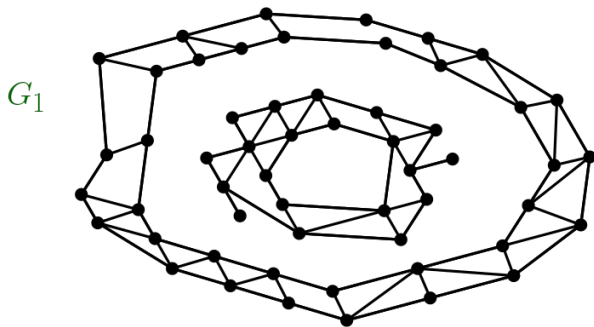
$k = 3$:



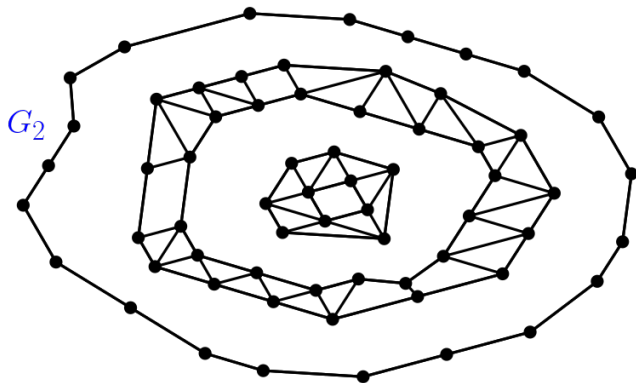
$k = 3$:



$k = 3$:



$k = 3$:



Aplicamos o Lema 1 em cada componente.

Para cada i , geramos uma solução ótima X_i de G_i .

O tempo total gasto é $2^{O(k)} \cdot n = 2^{O(1/\epsilon)} \cdot n$.

Basta retornar o X_α de maior cardinalidade!

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq (1 - \frac{1}{k}) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq (1 - \frac{1}{k}) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. S_0, \dots, S_{k-1} particionam V ;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i ;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq (1 - \frac{1}{k}) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.



Conclusão

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*
- 2. Maximum Tile Salvage;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*
- 2. Maximum Tile Salvage;*
- 3. Partição em Triângulos;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*
- 2. Maximum Tile Salvage;*
- 3. Partição em Triângulos;*
- 4. H-Emparelhamento Máximo;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*
- 2. Maximum Tile Salvage;*
- 3. Partição em Triângulos;*
- 4. H-Emparelhamento Máximo;*
- 5. Cobertura por Vértices Mínima;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*
- 2. Maximum Tile Salvage;*
- 3. Partição em Triângulos;*
- 4. H-Emparelhamento Máximo;*
- 5. Cobertura por Vértices Mínima;*
- 6. Conjunto Dominante Mínimo;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

- 1. Conjunto Independente Máximo;*
- 2. Maximum Tile Salvage;*
- 3. Partição em Triângulos;*
- 4. H-Emparelhamento Máximo;*
- 5. Cobertura por Vértices Mínima;*
- 6. Conjunto Dominante Mínimo;*
- 7. Conjunto Dominante de Arestas Mínimo.*

A técnica de *Shifting*/Baker é eficaz para problemas “locais” ...

A técnica de *Shifting*/Baker é eficaz para problemas “locais” ...
... mas falha em casos como TSP ou Árvore de Steiner.

Decomposição por contração em grafos livres de H [DHK11].

Teorema ([DHK11])

Existe um PTAS para o TSP em grafos ponderados livres de H .

Exercício. Assuma que existe um algoritmo que resolve o empacotamento máximo de triângulos vértice-disjuntos em grafos k -outerplanares em tempo $f(k) \cdot n^{O(1)}$.

Exercício. Assuma que existe um algoritmo que resolve o empacotamento máximo de triângulos vértice-disjuntos em grafos k -outerplanares em tempo $f(k) \cdot n^{O(1)}$.

Utilizando *shifting*, construa um PTAS para o problema em grafos planares.

Exercício. Assuma que existe um algoritmo que resolve o empacotamento máximo de triângulos vértice-disjuntos em grafos k -outerplanares em tempo $f(k) \cdot n^{O(1)}$.

Utilizando *shifting*, construa um PTAS para o problema em grafos planares.

Obrigado a todos pela atenção...

Alguma Dúvida?

- [Bak83] Brenda S. Baker.
Approximation algorithms for np-complete problems on planar graphs.
In *24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1983)*, pages 265–273, 1983.
- [Bod98] Hans L. Bodlaender.
A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth.
Theoretical Computer Science, 209(1):1–45, 1998.
- [CFM⁺15] Marek Cygan, Fedor V Fomin, Daniel Marx, Saket Saurabh, Lukasz Kowalik, Daniel Lokshantov, and Marcin Pilipczuk.
Parameterized Algorithms.
Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 1 edition, July 2015.
- [DHK11] Erik D. Demaine, Mohammad Taghi Hajiaghayi, and Ken-ichi Kawarabayashi.
Contraction decomposition in H -minor-free graphs and algorithmic applications.
In *Proceedings of the Forty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '11, page 441–450, New York, NY, USA, 2011. Association for Computing Machinery.
- [GJ79] Michael R Garey and David S Johnson.
Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.
W.H. Freeman, New York, NY, April 1979.
- [Hå99] Johan Håstad.
Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$.
Acta Mathematica, 182(1):105–142, 1999.