Instituto de Computação
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Algoritmos de Aproximação para Problemas NP-completos em Grafos Planares

Lucas de Oliveira Silva - 220715

26 de Junho de 2025

Introdução

Problema Exemplo

CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO (CI)

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Problema Exemplo

CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO (CI)

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Objetivo: $S \subseteq V$ tal que $|E(G[S])| = 0$, com $|S|$ máximo.

Dificuldade

Teorema ([GJ79])

O problema do Conjunto Independente Máximo é NP-difícil, mesmo em grafos cúbicos e planares.

Limitante de Aproximação

Teorema ([Hå99])

Seja n o número de vértices de um grafo, e $\varepsilon > 0$.

Limitante de Aproximação

Teorema ([Hå99])

Seja n o número de vértices de um grafo, e $\varepsilon > 0$.

Limitante de Aproximação

Teorema ([Hå99])

Seja n o número de vértices de um grafo, e $\varepsilon > 0$.

Não existe aproximação com fator $O(n^{\varepsilon-1})$ para CI, a menos que $P = NP$.

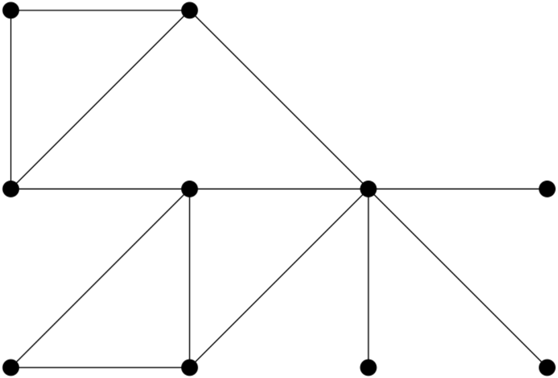
Algoritmo para Árvores

Teorema (folclore)

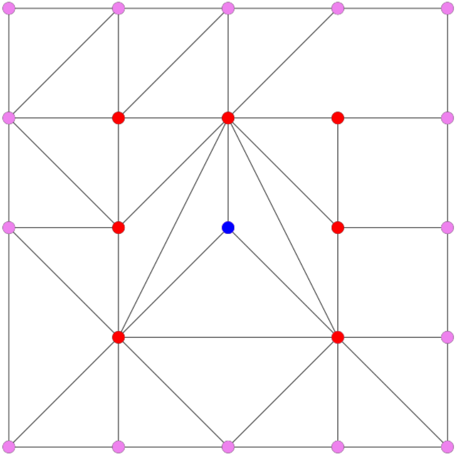
Seja T uma árvore. É possível computar um conjunto independente máximo de T em tempo polinomial.

Preliminares

Grafos Outerplanares



Exemplo para $k = 3$:



CI em Grafos k-outerplanares

Lema (1)

Existe um algoritmo por PD que resolve CI em grafos k-outerplanares em tempo $2^{O(k)} \cdot n$.

Esboço da Prova

Demonstração.

Esboço da Prova

Demonstração.

Lema ([Bod98])

Grafos k-outerplanares têm largura arbórea no máximo $3k - 1$.

Esboço da Prova

Demonstração.

Lema ([Bod98])

Grafos k-outerplanares têm largura arbórea no máximo $3k - 1$.

Lema ([CFM$^+$15])

Seja G um grafo com n vértices e largura arbórea $\leq k$. Então, CI em G pode ser resolvido em tempo $2^k \cdot k^{O(1)} \cdot n$.

$\square$

Resultado Principal

Teorema Principal

Teorema (1 [Bak83])

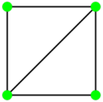
Existe um PTAS para CI em grafos planares, com tempo $O(2^{O(1/\varepsilon)} \cdot n)$.

Observação

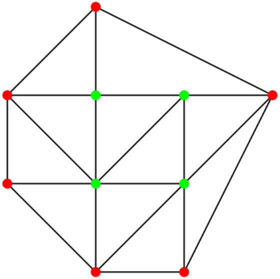
Observação

Assim como ogros, grafos planares têm camadas!

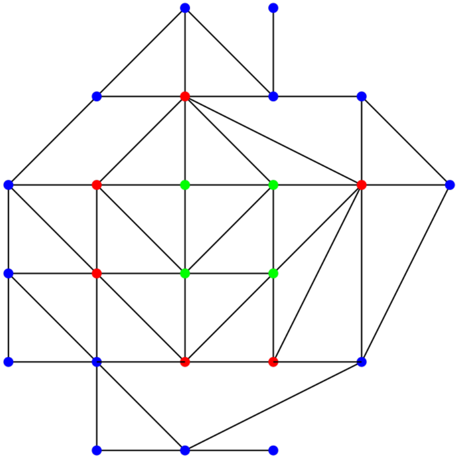
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Preparação

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

Preparação

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;

Preparação

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- Para $0 \leq i < k$, seja $S_i = \{L_j \mid j \equiv i \pmod{k}\}$

Preparação

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

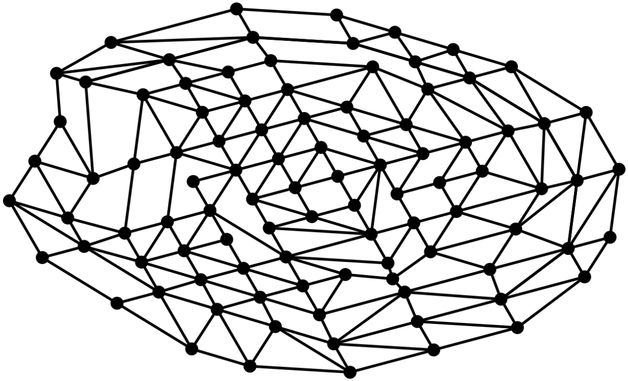
- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- Para $0 \leq i < k$, seja $S_i = \{L_j \mid j \equiv i \pmod{k}\}$
    - Ex.: $k = 4 \Rightarrow S_1 = L_1 \cup L_5 \cup L_9 \cup \ldots$

Preparação

Dado $G = (V, E)$ planar e $\varepsilon > 0$, definimos:

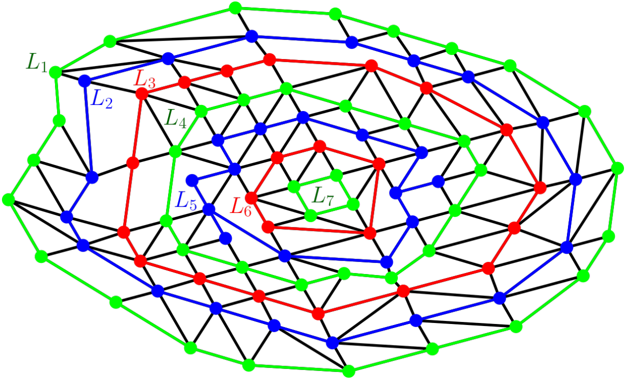
- $k = \lceil 1/\varepsilon \rceil$;
- Para $0 \leq i < k$, seja $S_i = \{L_j \mid j \equiv i \pmod{k}\}$
    - Ex.: $k = 4 \Rightarrow S_1 = L_1 \cup L_5 \cup L_9 \cup \ldots$
- $G_i = G[V - S_i]$.

$k = 3$:

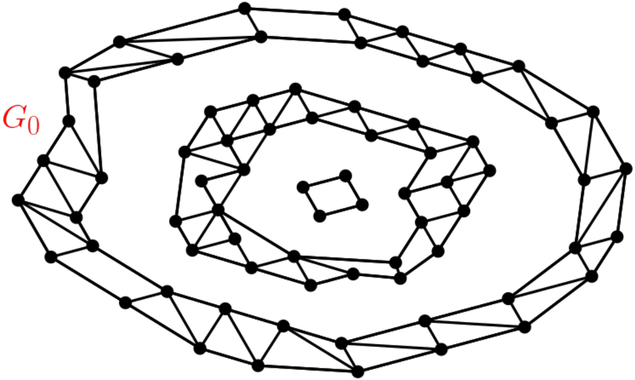


Decomposição em 🧅

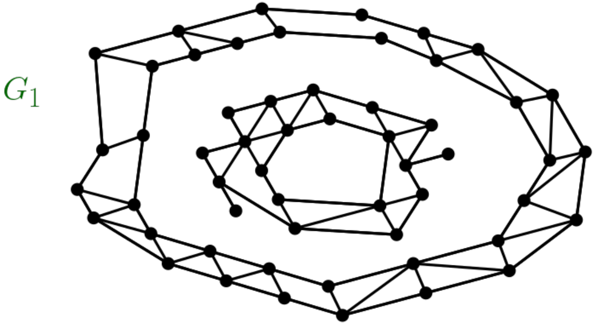
$k = 3$:



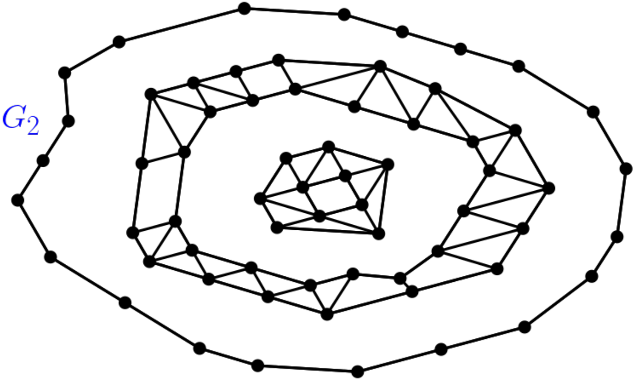
$k = 3$:



$k = 3$:



$k = 3$:



Solucionando G_i

Aplicamos o Lema 1 em cada componente.

Solução Ótima para G_i

Para cada i, geramos uma solução ótima X_i de G_i.

O tempo total gasto é $2^{O(k)} \cdot n = 2^{O(1/\varepsilon)} \cdot n$.

Aproximação para G

Basta retornar o X_α de maior cardinalidade!

Fator de Aproximação

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq {}^{|O|}/_{k}$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)|O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)|O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Fator de Aproximação

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Fator de Aproximação

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq {}^{|O|}/_{k}$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)|O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Fator de Aproximação

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq |O|/k$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)|O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

Demonstração.

1. Seja $O \subseteq V$ uma solução ótima;
2. $S_0, \ldots, S_{k-1}$ particionam V;
3. Algum i satisfaz $|O \cap S_i| \leq {}^{|O|}/_{k}$;
4. $O \setminus S_i$ é independente em G_i;
5. Então $|X_\alpha| \geq |O \setminus S_i| = |O| - |O \cap S_i|$;
6. Portanto, $|X_\alpha| \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |O| \geq (1 - \varepsilon) \cdot OPT$.

$\square$

Conclusão

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*

Outros Resultados

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*
2. *Maximum Tile Salvage;*

Outros Resultados

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*
2. *Maximum Tile Salvage;*
3. *Partição em Triângulos;*

Outros Resultados

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*
2. *Maximum Tile Salvage;*
3. *Partição em Triângulos;*
4. *H-Emparelhamento Máximo;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*
2. *Maximum Tile Salvage;*
3. *Partição em Triângulos;*
4. *H-Emparelhamento Máximo;*
5. *Cobertura por Vértices Mínima;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*
2. *Maximum Tile Salvage;*
3. *Partição em Triângulos;*
4. *H-Emparelhamento Máximo;*
5. *Cobertura por Vértices Mínima;*
6. *Conjunto Dominante Mínimo;*

Teorema ([Bak83])

Existe um PTAS para os seguintes problemas em grafos planares:

1. *Conjunto Independente Máximo;*
2. *Maximum Tile Salvage;*
3. *Partição em Triângulos;*
4. *H-Emparelhamento Máximo;*
5. *Cobertura por Vértices Mínima;*
6. *Conjunto Dominante Mínimo;*
7. *Conjunto Dominante de Arestas Mínimo.*

Limitações

A técnica de *Shifting*/Baker é eficaz para problemas “locais” ...

Limitações

A técnica de *Shifting*/Baker é eficaz para problemas "locais" ...

... mas falha em casos como TSP ou Árvore de Steiner.

Generalização

Decomposição por contração em grafos livres de H [DHK11].

Teorema ([DHK11])

Existe um PTAS para o TSP em grafos ponderados livres de H.

Exercício. Assuma que existe um algoritmo que resolve o empacotamento máximo de triângulos vértice-disjuntos em grafos k-outerplanares em tempo $f(k) \cdot n^{O(1)}$.

Exercício. Assuma que existe um algoritmo que resolve o empacotamento máximo de triângulos vértice-disjuntos em grafos k-outerplanares em tempo $f(k) \cdot n^{O(1)}$.

Utilizando *shifting*, construa um PTAS para o problema em grafos planares.

Exercício. Assuma que existe um algoritmo que resolve o empacotamento máximo de triângulos vértice-disjuntos em grafos k-outerplanares em tempo $f(k) \cdot n^{O(1)}$.

Utilizando *shifting*, construa um PTAS para o problema em grafos planares.

Obrigado a todos pela atenção...

Alguma Dúvida?

Bibliografia

[Bak83] Brenda S. Baker.
Approximation algorithms for np-complete problems on planar graphs.
In *24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1983)*, pages 265–273, 1983.

[Bod98] Hans L. Bodlaender.
A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth.
Theoretical Computer Science, 209(1):1–45, 1998.

[CFM$^+$15] Marek Cygan, Fedor V Fomin, Daniel Marx, Saket Saurabh, Lukasz Kowalik, Daniel Lokshtanov, and Marcin Pilipczuk.
Parameterized Algorithms.
Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 1 edition, July 2015.

[DHK11] Erik D. Demaine, Mohammad Taghi Hajiaghayi, and Ken-ichi Kawarabayashi.
Contraction decomposition in H-minor-free graphs and algorithmic applications.
In *Proceedings of the Forty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '11, page 441–450, New York, NY, USA, 2011. Association for Computing Machinery.

[GJ79] Michael R Garey and David S Johnson.
Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.
W.H. Freeman, New York, NY, April 1979.

[Hå99] Johan Håstad.
Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$.
Acta Mathematica, 182(1):105–142, 1999.