



**Instituto de  
Computação**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



# An XP Approximation Scheme for AFTP in $2D^a$

---

**Lucas de Oliveira Silva**

Lehilton Lelis Chaves Pedrosa

Instituto de Computação, Unicamp

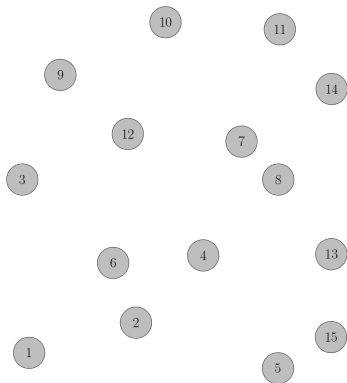
23rd of July, 2025

---

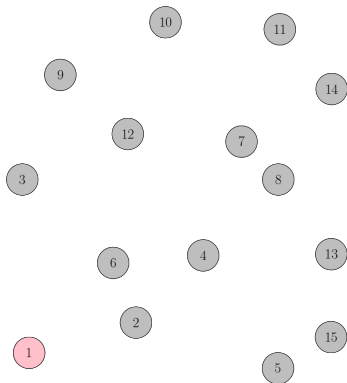
<sup>a</sup> Supported by the São Paulo Research Foundation (FAPESP) grant 2023/12529-8 and by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) grants #312271/2023-9, #404315/2023-2.

## Freeze-Tag Problem Original

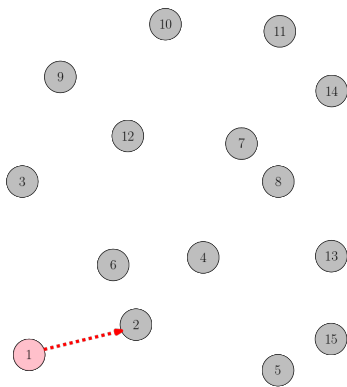
O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



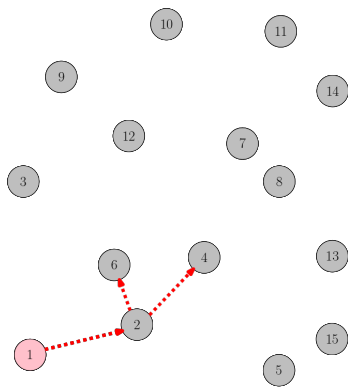
O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



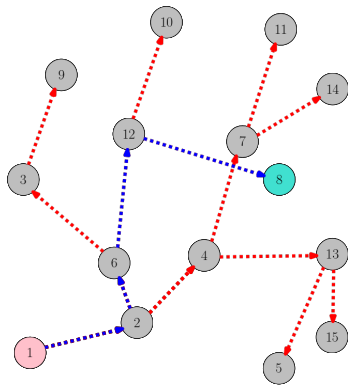
O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF<sup>+</sup>02]:



## Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])

*Existe um EPTAS para o FTP com distâncias  $L_p$  em qualquer espaço de dimensão fixa  $\mathbb{R}^d$ .*



## Teorema (Arkin et al. [ABF<sup>+</sup>02])

*Existe um EPTAS para o FTP com distâncias  $L_p$  em qualquer espaço de dimensão fixa  $\mathbb{R}^d$ .*

*O tempo de execução é  $O(n \log n) + 2^{O(d(1/\varepsilon)^d \log(1/\varepsilon))}$ .*

## Teorema (Abel et al. [AAY17])

*O FTP é NP-difícil para distância  $L_2$  no plano.*

## **Teorema (Abel et al. [AAY17])**

*O FTP é NP-difícil para distância  $L_2$  no plano.*

## **Teorema (Demaine e Rudoy [DR17])**

*O FTP é NP-difícil para distâncias  $L_p$ , onde  $p > 1$ , em 3D.*

## **Teorema (Abel et al. [AAY17])**

*O FTP é NP-difícil para distância  $L_2$  no plano.*

## **Teorema (Demaine e Rudoy [DR17])**

*O FTP é NP-difícil para distâncias  $L_p$ , onde  $p > 1$ , em 3D.*

## **Teorema (Pedrosa e Silva [PdOS23])**

*O FTP é fortemente NP-difícil para distância  $L_1$  em 3D.*

# Angular Freeze-Tag Problem

O **Angular Freeze-Tag Problem** surge como um problema de *broadcast* entre satélites em 2018 [FK18]:



- Dado o crescimento das constelações de satélites, precisamos de estratégias de transmissão eficientes;

- Dado o crescimento das constelações de satélites, precisamos de estratégias de transmissão eficientes;
- Recursos limitados restringem a movimentação dos satélites;



- Dado o crescimento das constelações de satélites, precisamos de estratégias de transmissão eficientes;
- Recursos limitados restringem a movimentação dos satélites;
- Grandes distâncias impossibilitam um *broadcast* simultâneo.

- Assumimos um **enxame uniforme**;

- Assumimos um **exame uniforme**;
- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$  de **posições distintas**;

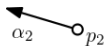
- Assumimos um **enxame uniforme**;
- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$  de **posições distintas**;
- Cada  $p_i$  está associado a um satélite com **ângulo inicial**  $\alpha_i$ ;

- Assumimos um **enxame uniforme**;
- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$  de **posições distintas**;
- Cada  $p_i$  está associado a um satélite com **ângulo inicial**  $\alpha_i$ ;
- Inicialmente, apenas  $p_1$  contém **um dado** a ser propagado;

- Assumimos um **enxame uniforme**;
- Conjunto  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$  de **posições distintas**;
- Cada  $p_i$  está associado a um satélite com **ângulo inicial**  $\alpha_i$ ;
- Inicialmente, apenas  $p_1$  contém **um dado** a ser propagado;
- Apenas os satélites que já receberam o dado podem ajustar suas antenas.

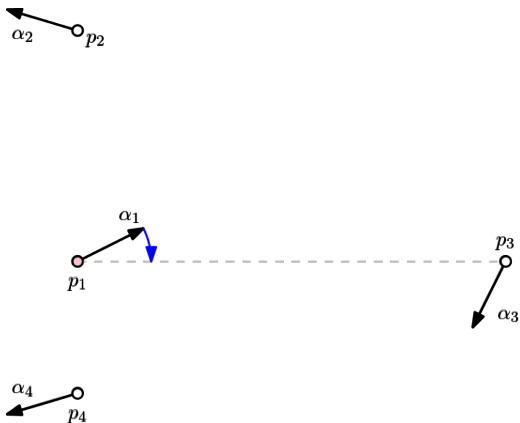
**Rotações** a serem seguidas **após o recebimento** do dado:

**Rotações** a serem seguidas **após o recebimento** do dado:

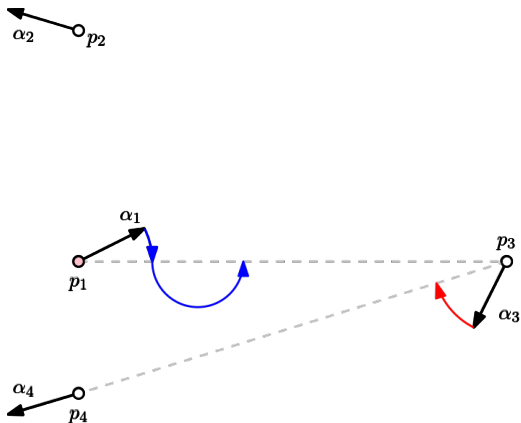




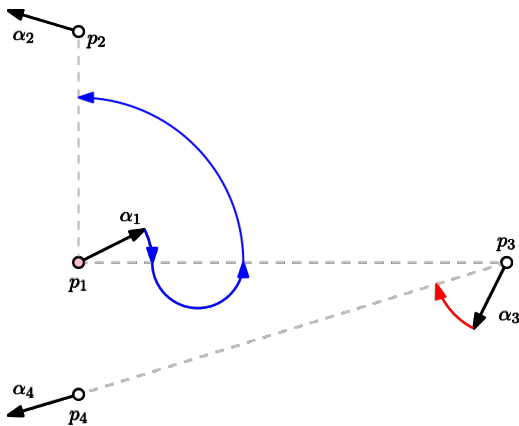
**Rotações** a serem seguidas **após o recebimento** do dado:



**Rotações** a serem seguidas **após o recebimento** do dado:



**Rotações a serem seguidas após o recebimento do dado:**



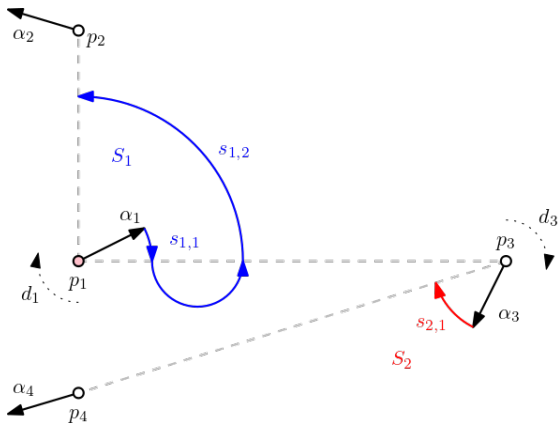
- Conjunto de cronogramas  $S$ ;

- **Conjunto de cronogramas  $S$ ;**
- O cronograma de cada satélite  $p_i \in P$  é composto por uma **direção inicial  $d_i$**

- **Conjunto de cronogramas  $S$ ;**
- O cronograma de cada satélite  $p_i \in P$  é composto por uma **direção inicial  $d_i$**

- **Conjunto de cronogramas**  $S$ ;
- O cronograma de cada satélite  $p_i \in P$  é composto por uma **direção inicial**  $d_i$  e uma **sequência de ângulos**  $S_i = (s_{i,1}, \dots, s_{i,k_i})$ .

# Exemplo



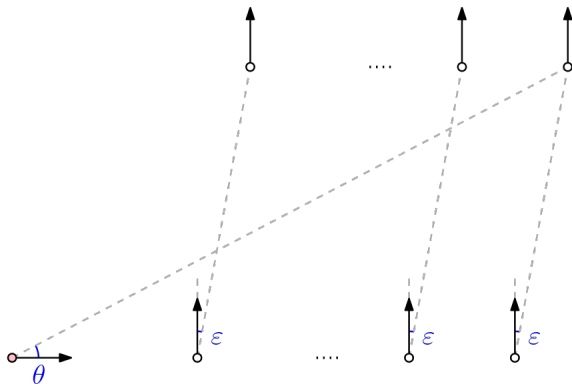


- O **makespan** ( $M(S)$ ) de uma solução  $S$  é o instante em que o último satélite recebe o dado (**AFTP**);

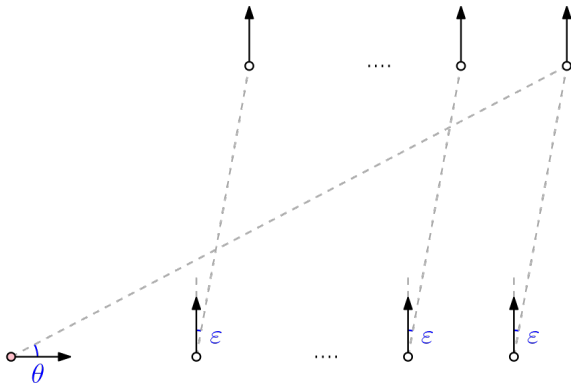
- O **makespan** ( $M(S)$ ) de uma solução  $S$  é o instante em que o último satélite recebe o dado (**AFTP**);
- A **energia total** ( $E(S)$ ) é a soma de todas as rotações realizadas por todos os agentes (**E-AFTP**);

- O **makespan** ( $M(S)$ ) de uma solução  $S$  é o instante em que o último satélite recebe o dado (**AFTP**);
- A **energia total** ( $E(S)$ ) é a soma de todas as rotações realizadas por todos os agentes (**E-AFTP**);
- Note que  $E(S) \geq M(S)$ .

Suponha que  $\varepsilon < \theta$ :

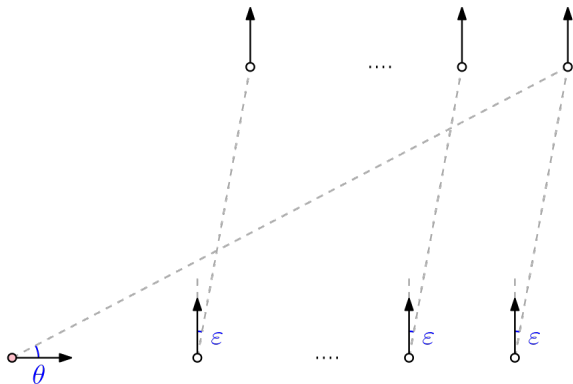


Suponha que  $\varepsilon < \theta$ :



Seja **S** uma solução tal que **M** é minimizada.

Suponha que  $\varepsilon < \theta$ :



Seja **S** uma solução tal que **M** é minimizada.

Então,  $M(S) = \varepsilon$  e  $E(S) = \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon = O(n \cdot M(S))$ .

### **Teorema (Fekete e Krupke [FK18])**

*Existe uma 9-aproximação para o AFTP em 2D, assumindo um limite inferior de  $\delta > 0$  para a rotação inicial de qualquer satélite que mova sua antena.*

### **Teorema (Fekete e Krupke [FK18])**

*Existe uma 9-aproximação para o AFTP em 2D, assumindo um limite inferior de  $\delta > 0$  para a rotação inicial de qualquer satélite que mova sua antena.*

### **Teorema (Fekete e Krupke [FK18])**

*É NP-difícil aproximar o AFTP em 2D dentro de um fator menor que  $5/3$ .*



## Nossos Resultados

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP,  $E$  um número real e  $k$  um inteiro positivo.*

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP,  $E$  um número real e  $k$  um inteiro positivo.*

*Então, existe um algoritmo que roda em tempo  $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$  e*

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP,  $E$  um número real e  $k$  um inteiro positivo.*

*Então, existe um algoritmo que roda em tempo  $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$  e ou prova que toda solução ótima requer mais de  $E$  de energia total*

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP,  $E$  um número real e  $k$  um inteiro positivo.*

*Então, existe um algoritmo que roda em tempo  $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$  e ou prova que toda solução ótima requer mais de  $E$  de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo  $(1 + 1/k) \cdot OPT(I)$ .*

## Teorema

*Seja  $I$  uma instância do AFTP,  $E$  um número real e  $k$  um inteiro positivo.*

*Então, existe um algoritmo que roda em tempo  $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$  e ou prova que toda solução ótima requer mais de  $E$  de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo  $(1 + 1/k) \cdot OPT(I)$ .*

## Teorema

*Para todo inteiro positivo  $k$ , existe uma  $(1 + 1/k)$ -aproximação para o E-AFTP, que roda em tempo  $(n^{\frac{k}{\delta}})^{O(\frac{k}{\delta})}$ .*

Seja  $\mu = \frac{\delta}{4k}$ :

Seja  $\mu = \frac{\delta}{4k}$ :

- Uma sequência é  $\mu$ -**discreta** se todos os seus valores são múltiplos de  $\mu$ ;



Seja  $\mu = \frac{\delta}{4k}$ :

- Uma sequência é  $\mu$ -**discreta** se todos os seus valores são múltiplos de  $\mu$ ;
- Uma solução é  $\mu$ -**discreta** se todas as suas sequências são  $\mu$ -discretas.

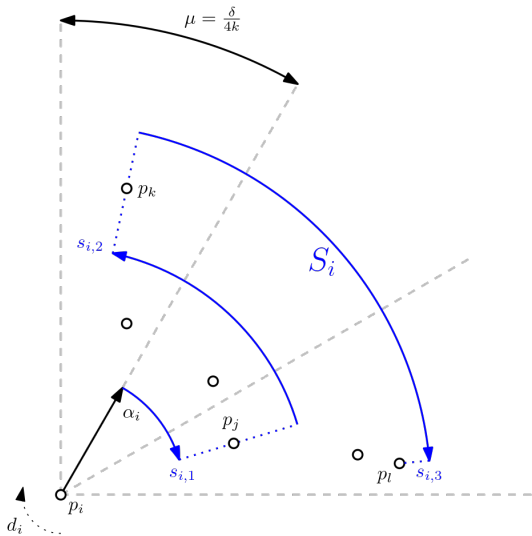
## Lemma (Silva [dOS25])

*Toda **solução racional**  $S$  para  $I$  pode ser convertida em uma solução  $\mu$ -discreta  $S^\mu$  tal que*

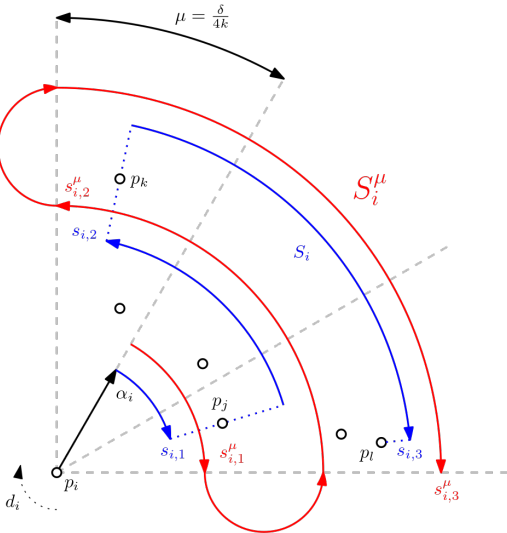
## Lemma (Silva [dOS25])

Toda **solução racional**  $S$  para  $I$  pode ser convertida em uma solução  $\mu$ -discreta  $S^\mu$  tal que  $M(S^\mu) \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot M(S)$  e  $E(S^\mu) \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot E(S)$ .

## Ideia da Prova



## Ideia da Prova



Consideramos apenas soluções  $\mu$ -discretas cuja energia total não excede  $(1 + 1/k) \cdot E!$

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das  $O(E/\mu)$  **orientações possíveis**;

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das  $O(E/\mu)$  **orientações possíveis**;
- Existem  $O(E^2/\mu^2)$  **transições válidas** por satélite, totalizando  $O(n \cdot E^2/\mu^2)$  transições;



- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das  $O(E/\mu)$  **orientações possíveis**;
- Existem  $O(E^2/\mu^2)$  **transições válidas** por satélite, totalizando  $O(n \cdot E^2/\mu^2)$  transições;
- Apenas  $O(E/\mu)$  delas podem ser selecionadas;

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das  $O(E/\mu)$  **orientações possíveis**;
- Existem  $O(E^2/\mu^2)$  **transições válidas** por satélite, totalizando  $O(n \cdot E^2/\mu^2)$  transições;
- Apenas  $O(E/\mu)$  delas podem ser selecionadas;
- Total de  $\binom{O(n \cdot E^2/\mu^2)}{O(E/\mu)}$  **soluções possíveis**, que podem ser cheçadas em tempo  $\left(n \frac{Ek}{\delta}\right)^{O(Ek/\delta)}$ .

## Trabalhos Futuros

- Tempo de execução  $f(E, k, \delta) \cdot n^{O(1)}$  (**FPT**) ao invés de  $g(E, k, \delta) \cdot n^{h(E, k, \delta)}$  (**XP**);

- Tempo de execução  $f(E, k, \delta) \cdot n^{O(1)}$  (**FPT**) ao invés de  $g(E, k, \delta) \cdot n^{h(E, k, \delta)}$  (**XP**);
- Dificuldade do E-AFTP;

- Tempo de execução  $f(E, k, \delta) \cdot n^{O(1)}$  (**FPT**) ao invés de  $g(E, k, \delta) \cdot n^{h(E, k, \delta)}$  (**XP**);
- Dificuldade do E-AFTP;
- Resultados para 3D.

Obrigado a todos pela atenção...

Obrigado a todos pela atenção...

**Fim.**



- [AAY17] Zachary Abel, Hugo A. Akitaya, and Jingjin Yu.  
Freeze tag awakening in 2D is NP-hard.  
*In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry*, pages 105–107, 2017.
- [ABF<sup>+</sup>02] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Martin Skutella.  
The Freeze-Tag Problem: How to Wake up a Swarm of Robots.  
*In Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 568–577. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [dOS25] Lucas de Oliveira Silva.  
Algorithms for the Freeze-Tag and related swarm robotics problems.  
Master's thesis, Unicamp, 2025.
- [DR17] Erik D. Demaine and Mikhail Rudoy.  
Freeze tag is hard in 3D.  
*In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry*, 2017.
- [FK18] Sándor P. Fekete and Dominik Krupke.  
Beam it up, Scotty: Angular freeze-tag with directional antennas.  
*EuroCG 2018 Berlin*, 2018.
- [PdOS23] Lehilton Lelis Chaves Pedrosa and Lucas de Oliveira Silva.  
Freeze-Tag is NP-Hard in 3D with  $L_1$  distance.  
*In Proceedings of the XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*. Elsevier BV, 2023.