



**Instituto de
Computação**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



An XP Approximation Scheme for AFTP in $2D^a$

Lucas de Oliveira Silva

Lehilton Lelis Chaves Pedrosa

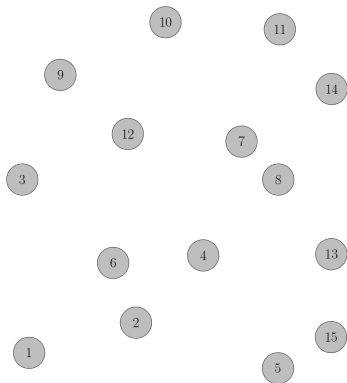
Instituto de Computação, Unicamp

23rd of July, 2025

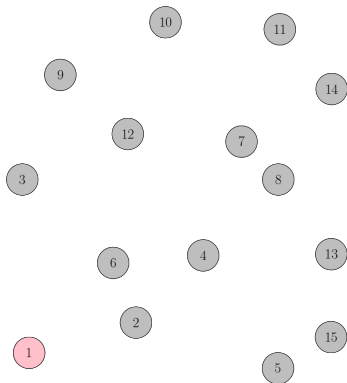
^a Supported by the São Paulo Research Foundation (FAPESP) grant 2023/12529-8 and by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) grants #312271/2023-9, #404315/2023-2.

Freeze-Tag Problem Original

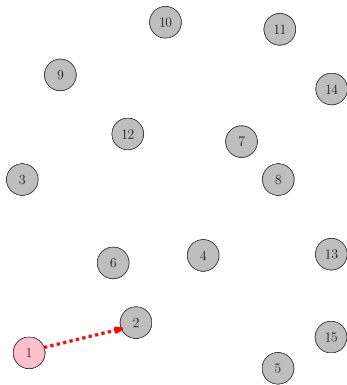
O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



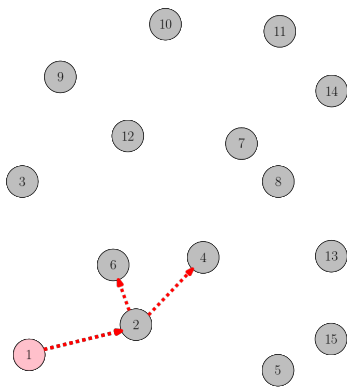
O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



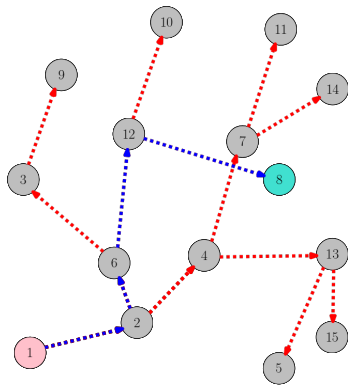
O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



O **Freeze-Tag Problem (FTP)** surge como um problema de robótica de enxame em 2002 [ABF⁺02]:



Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

Existe um EPTAS para o FTP com distâncias L_p em qualquer espaço de dimensão fixa \mathbb{R}^d .

Teorema (Arkin et al. [ABF⁺02])

Existe um EPTAS para o FTP com distâncias L_p em qualquer espaço de dimensão fixa \mathbb{R}^d .

O tempo de execução é $O(n \log n) + 2^{O(d(1/\varepsilon)^d \log(1/\varepsilon))}$.

Teorema (Abel et al. [AAY17])

O FTP é NP-difícil para distância L_2 no plano.

Teorema (Abel et al. [AAY17])

O FTP é NP-difícil para distância L_2 no plano.

Teorema (Demaine e Rudoy [DR17])

O FTP é NP-difícil para distâncias L_p , onde $p > 1$, em 3D.

Teorema (Abel et al. [AAY17])

O FTP é NP-difícil para distância L_2 no plano.

Teorema (Demaine e Rudoy [DR17])

O FTP é NP-difícil para distâncias L_p , onde $p > 1$, em 3D.

Teorema (Pedrosa e Silva [PdOS23])

O FTP é fortemente NP-difícil para distância L_1 em 3D.

Angular Freeze-Tag Problem

O **Angular Freeze-Tag Problem** surge como um problema de *broadcast* entre satélites em 2018 [FK18]:



- Dado o crescimento das constelações de satélites, precisamos de estratégias de transmissão eficientes;

- Dado o crescimento das constelações de satélites, precisamos de estratégias de transmissão eficientes;
- Recursos limitados restringem a movimentação dos satélites;

- Dado o crescimento das constelações de satélites, precisamos de estratégias de transmissão eficientes;
- Recursos limitados restringem a movimentação dos satélites;
- Grandes distâncias impossibilitam um *broadcast* simultâneo.

- Assumimos um **enxame uniforme**;

- Assumimos um **exame uniforme**;
- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de **posições distintas**;

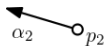
- Assumimos um **enxame uniforme**;
- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de **posições distintas**;
- Cada p_i está associado a um satélite com **ângulo inicial** α_i ;

- Assumimos um **enxame uniforme**;
- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de **posições distintas**;
- Cada p_i está associado a um satélite com **ângulo inicial** α_i ;
- Inicialmente, apenas p_1 contém **um dado** a ser propagado;

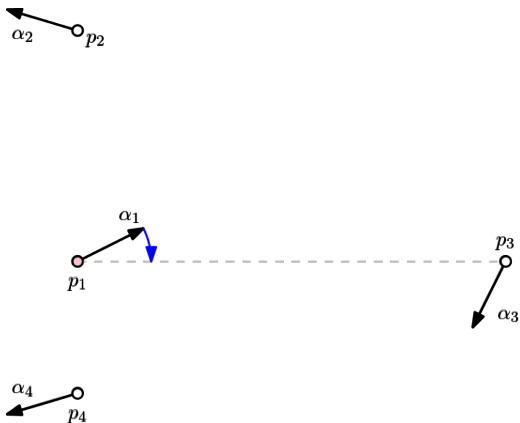
- Assumimos um **enxame uniforme**;
- Conjunto $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de **posições distintas**;
- Cada p_i está associado a um satélite com **ângulo inicial** α_i ;
- Inicialmente, apenas p_1 contém **um dado** a ser propagado;
- Apenas os satélites que já receberam o dado podem ajustar suas antenas.

Rotações a serem seguidas **após o recebimento** do dado:

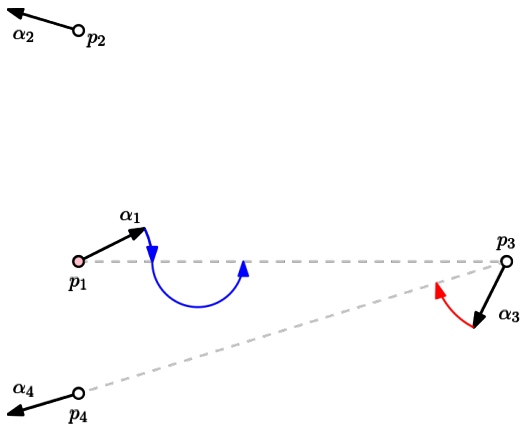
Rotações a serem seguidas **após o recebimento** do dado:



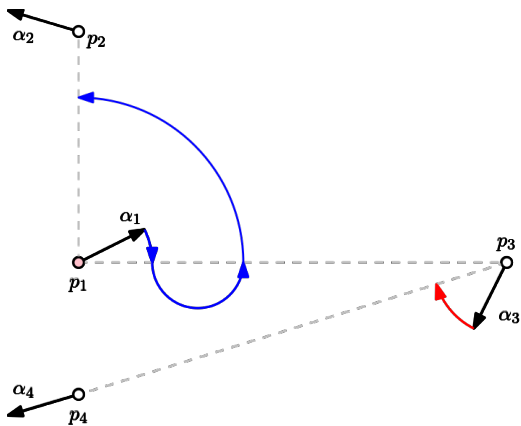
Rotações a serem seguidas **após o recebimento** do dado:



Rotações a serem seguidas **após o recebimento** do dado:



Rotações a serem seguidas após o recebimento do dado:



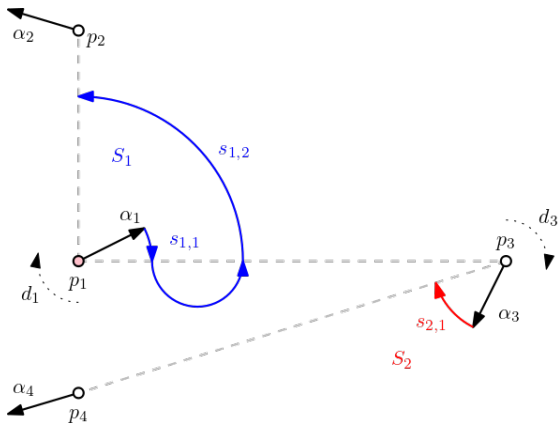
- Conjunto de cronogramas S ;

- **Conjunto de cronogramas S ;**
- O cronograma de cada satélite $p_i \in P$ é composto por uma **direção inicial d_i**

- **Conjunto de cronogramas S ;**
- O cronograma de cada satélite $p_i \in P$ é composto por uma **direção inicial d_i**

- **Conjunto de cronogramas** S ;
- O cronograma de cada satélite $p_i \in P$ é composto por uma **direção inicial** d_i e uma **sequência de ângulos** $S_i = (s_{i,1}, \dots, s_{i,k_i})$.

Exemplo



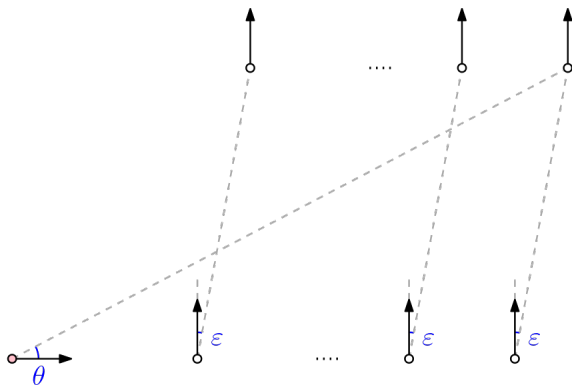
- O **makespan** ($M(S)$) de uma solução S é o instante em que o último satélite recebe o dado (**AFTP**);

- O **makespan** ($M(S)$) de uma solução S é o instante em que o último satélite recebe o dado (**AFTP**);
- A **energia total** ($E(S)$) é a soma de todas as rotações realizadas por todos os agentes (**E-AFTP**);

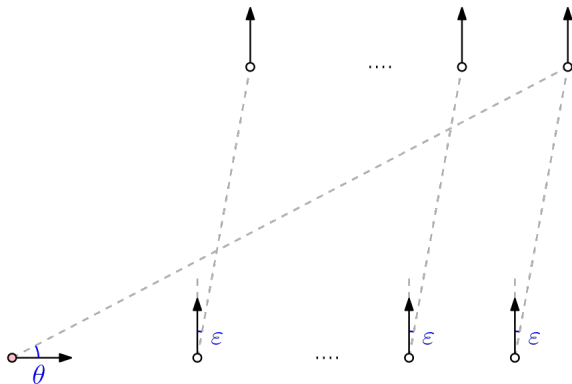
- O **makespan** ($M(S)$) de uma solução S é o instante em que o último satélite recebe o dado (**AFTP**);
- A **energia total** ($E(S)$) é a soma de todas as rotações realizadas por todos os agentes (**E-AFTP**);
- Note que $E(S) \geq M(S)$.

Comparação

Seja $\varepsilon < \theta$:

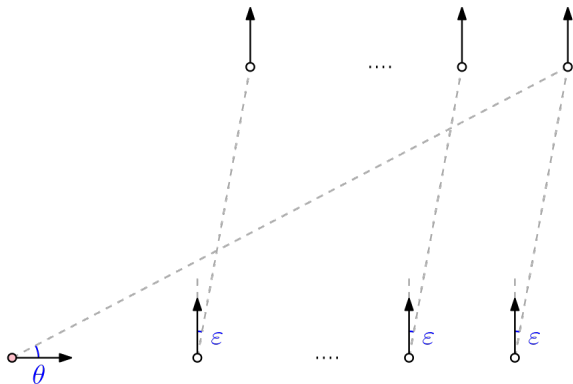


Seja $\varepsilon < \theta$:



Seja **S** uma solução tal que **M** é minimizada.

Seja $\varepsilon < \theta$:



Seja **S** uma solução tal que **M** é minimizada.

Então, $M(S) = \varepsilon$ e $E(S) = \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon = O(n \cdot M(S))$.

Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

Existe uma 9-aproximação para o AFTP em 2D, assumindo um limite inferior de $\delta > 0$ para a rotação inicial de qualquer satélite que mova sua antena.

Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

Existe uma 9-aproximação para o AFTP em 2D, assumindo um limite inferior de $\delta > 0$ para a rotação inicial de qualquer satélite que mova sua antena.

Teorema (Fekete e Krupke [FK18])

É NP-difícil aproximar o AFTP em 2D dentro de um fator menor que $5/3$.

Nossos Resultados

Teorema

Seja I uma instância do AFTP, E um número real e k um inteiro positivo.

Teorema

Seja I uma instância do AFTP, E um número real e k um inteiro positivo.

Então, existe um algoritmo que roda em tempo $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$ e

Teorema

Seja I uma instância do AFTP, E um número real e k um inteiro positivo.

Então, existe um algoritmo que roda em tempo $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$ e ou prova que toda solução ótima requer mais de E de energia total

Teorema

Seja I uma instância do AFTP, E um número real e k um inteiro positivo.

Então, existe um algoritmo que roda em tempo $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$ e ou prova que toda solução ótima requer mais de E de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo $(1 + 1/k) \cdot OPT(I)$.

Teorema

Seja I uma instância do AFTP, E um número real e k um inteiro positivo.

Então, existe um algoritmo que roda em tempo $(n^{\frac{Ek}{\delta}})^{O(\frac{Ek}{\delta})}$ e ou prova que toda solução ótima requer mais de E de energia total, ou encontra uma solução com makespan no máximo $(1 + 1/k) \cdot OPT(I)$.

Teorema

Para todo inteiro positivo k , existe uma $(1 + 1/k)$ -aproximação para o E-AFTP, que roda em tempo $(n^{\frac{k}{\delta}})^{O(\frac{k}{\delta})}$.

Seja $\mu = \frac{\delta}{4k}$:

Seja $\mu = \frac{\delta}{4k}$:

- Uma sequência é μ -**discreta** se todos os seus valores são múltiplos de μ ;

Seja $\mu = \frac{\delta}{4k}$:

- Uma sequência é μ -**discreta** se todos os seus valores são múltiplos de μ ;
- Uma solução é μ -**discreta** se todas as suas sequências são μ -discretas.

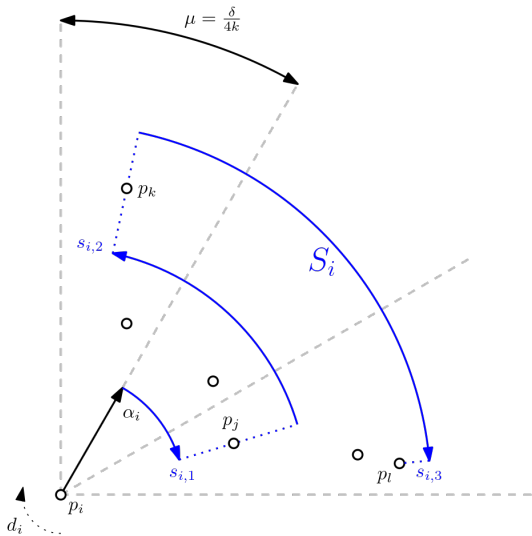
Lemma (Silva [dOS25])

*Toda **solução racional** S para I pode ser convertida em uma solução μ -discreta S^μ tal que*

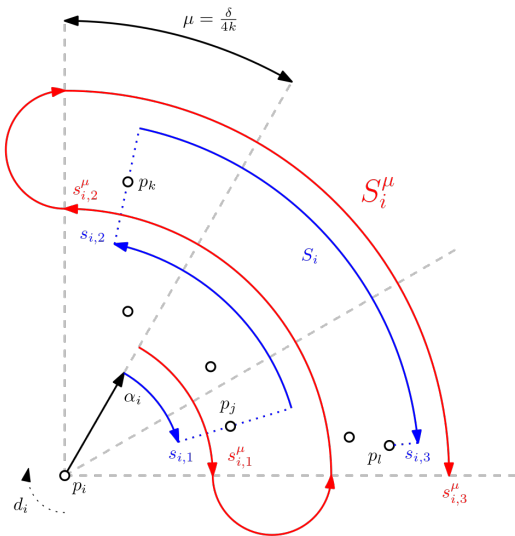
Lemma (Silva [dOS25])

Toda **solução racional** S para I pode ser convertida em uma solução μ -discreta S^μ tal que $M(S^\mu) \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot M(S)$ e $E(S^\mu) \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot E(S)$.

Ideia da Prova



Ideia da Prova



Consideramos apenas soluções μ -discretas cuja energia total não excede $(1 + 1/k) \cdot E!$

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das $O(E/\mu)$ **orientações possíveis**;

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das $O(E/\mu)$ **orientações possíveis**;
- Existem $O(E^2/\mu^2)$ **transições válidas** por satélite, totalizando $O(n \cdot E^2/\mu^2)$ transições;

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das $O(E/\mu)$ **orientações possíveis**;
- Existem $O(E^2/\mu^2)$ **transições válidas** por satélite, totalizando $O(n \cdot E^2/\mu^2)$ transições;
- Apenas $O(E/\mu)$ delas podem ser selecionadas;

- Após cada rotação, a antena de um satélite estará em uma das $O(E/\mu)$ **orientações possíveis**;
- Existem $O(E^2/\mu^2)$ **transições válidas** por satélite, totalizando $O(n \cdot E^2/\mu^2)$ transições;
- Apenas $O(E/\mu)$ delas podem ser selecionadas;
- Total de $\binom{O(n \cdot E^2/\mu^2)}{O(E/\mu)}$ **soluções possíveis**, que podem ser cheçadas em tempo $\left(n \frac{Ek}{\delta}\right)^{O(Ek/\delta)}$.

Trabalhos Futuros

- Tempo de execução $f(E, k, \delta) \cdot n^{O(1)}$ (**FPT**) ao invés de $g(E, k, \delta) \cdot n^{h(E, k, \delta)}$ (**XP**);

- Tempo de execução $f(E, k, \delta) \cdot n^{O(1)}$ (**FPT**) ao invés de $g(E, k, \delta) \cdot n^{h(E, k, \delta)}$ (**XP**);
- Dificuldade do E-AFTP;

- Tempo de execução $f(E, k, \delta) \cdot n^{O(1)}$ (**FPT**) ao invés de $g(E, k, \delta) \cdot n^{h(E, k, \delta)}$ (**XP**);
- Dificuldade do E-AFTP;
- Resultados para 3D.

Obrigado a todos pela atenção...

Obrigado a todos pela atenção...

Fim.

- [AAY17] Zachary Abel, Hugo A. Akitaya, and Jingjin Yu.
Freeze tag awakening in 2D is NP-hard.
In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry, pages 105–107, 2017.
- [ABF⁺02] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Martin Skutella.
The Freeze-Tag Problem: How to Wake up a Swarm of Robots.
In Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pages 568–577. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [dOS25] Lucas de Oliveira Silva.
Algorithms for the Freeze-Tag and related swarm robotics problems.
Master's thesis, Unicamp, 2025.
- [DR17] Erik D. Demaine and Mikhail Rudoy.
Freeze tag is hard in 3D.
In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry, 2017.
- [FK18] Sándor P. Fekete and Dominik Krupke.
Beam it up, Scotty: Angular freeze-tag with directional antennas.
EuroCG 2018 Berlin, 2018.
- [PdOS23] Lehlilton Lelis Chaves Pedrosa and Lucas de Oliveira Silva.
Freeze-Tag is NP-Hard in 3D with L_1 distance.
In Proceedings of the XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium. Elsevier BV, 2023.