4 Pre všetky $a,b \in F$ platí, že ak $a \neq 0$ a $ab=1$, tak $b \neq 0$ Zavadzan

a) Dôkaz sporom

Predpokladajme teda, že $b=0$

potom $a \cdot 0 = 1$,

toto však nemôže platiť keďže, $a \cdot 0 = 0 \wedge 0 \neq 1$,

dostali sme teda spor $\square$

b) pomocou postupných úpra ukážeme, že sa obe strany rovnajú

uvažujme: $A = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$ $\vec{u}^T = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$

potom

$$A \cdot (\alpha \cdot \vec{u}^T) = \alpha \cdot (A \cdot \vec{u}^T)$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot x_{11} \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_{n1} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \cdot y_{11} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{1n} \\ \vdots \\ x_{11} \cdot y_{m1} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot x_{11} \cdot y_{11} + \cdots + \alpha \cdot x_{n1} \cdot y_{1n} \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_{11} \cdot y_{m1} + \cdots + \alpha \cdot x_{n1} \cdot y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot (x_{11} \cdot y_{11} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{1n}) \\ \vdots \\ \alpha \cdot (x_{11} \cdot y_{m1} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{mn}) \end{bmatrix}$$

ľavú stranu vyjmeme α pred zátvorku a dostaneme

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot (x_{11} \cdot y_{11} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{1n}) \\ \vdots \\ \alpha \cdot (x_{11} \cdot y_{m1} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{mn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot (x_{11} \cdot y_{11} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{1n}) \\ \vdots \\ \alpha \cdot (x_{11} \cdot y_{m1} + \cdots + x_{n1} \cdot y_{mn}) \end{bmatrix}$$

Keďže sme použili len správne operacie, môžme povedať, že rovnosť platí $\square$