

Analytisk och numerisk undersökning av modell för oscillerande partiklar upphängda i ideala fjädrar i en spatiell dimension

Stefan Buller och Martin Wernstål

2011-05-06

Sammanfattning

System av oscillerande partiklar betraktas analytiskt i en dimension och löses med hjälp av en differentialekvation på matrisform enligt $\ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 K \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Denna ekvation löses med hjälp av egenvärden.

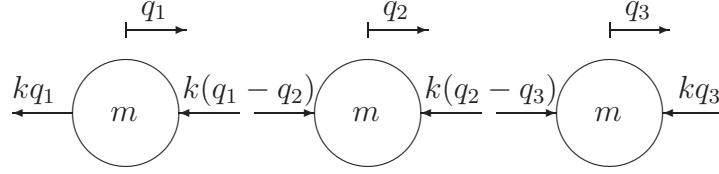
Två olika typer av problem betraktas, där det system som har partiklar med identiska massor och som sitter fast kan beskrivas med hjälp av en tridiagonal matris med värdena $-1, 2, -1$. Det andra systemet med tre partiklar med två olika massor har bara interna krafter och kan på så sätt röra sig fritt i rummet, och beskrivs med en matris som innehåller kvoter mellan den största partikeln och de två mindre partiklarna.

MATLAB användes för att beräkna differentialekvationerna för större system och för att beskriva egenvektorer och egenvärden grafiskt.

Innehåll

1	Problem 1	1
2	Problem 2	2
2.1	Delproblem a	2
2.2	Delproblem b	3
3	Problem 3	3
3.1	Delproblem a	3
3.2	Delproblem b	4
4	Problem 4	4
4.1	Delproblem a	4
A	Programkod för Problem 3	7
B	Programkod för Problem 4	9
C	Sats om matrisbeskrivning av ett system av N partiklar	11
C.1	Förutsättningar	11
C.2	Sats	11
C.3	Bevis	12

1 Problem 1



Figur 1: Friläggning för Problem 1

Ur friläggning (Figur 1) av de enskilda partiklarna finner vi att:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -kq_1 - k(q_1 - q_2) \\ m\ddot{q}_2 &= k(q_1 - q_2) - k(q_2 - q_3) \\ m\ddot{q}_3 &= k(q_2 - q_3) - kq_3 \end{aligned}$$

Vi inför beteckningarna:

$$\omega_o = \sqrt{k/m} \quad K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Vårt system av differentialekvationer kan nu skrivas som:

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 K \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A} e^{i\omega t} \Rightarrow K \mathbf{A} = \frac{\omega^2}{\omega_o^2} \mathbf{A}$$

Från detta finner vi att egenvärdena är:

$$\omega_1 = \sqrt{2}\omega_o \quad \omega_2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)\omega_o \quad \omega_3 = \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)\omega_o$$

Genom att betrakta $(K - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} I) \mathbf{A}_i = 0$ för $i = 1, 2, 3$, där I är identitetsmatrisen, finner vi egenvektorerna.

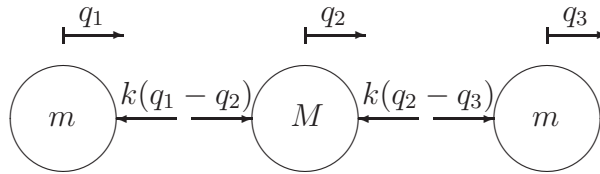
Dessa egenvektorer normeras till en ON-bas för Lösningsrummet till differentialekvationen. En eigensvängning motsvarar att den mittersta är stilla medan de två yttre har motriktad svängning. En lösning med kortare periodtid motsvarar att den mellersta partikeln svänger motriktat de övrig med en större amplitud. Den sista lösningen med längst periodtid motsvarar att alla partiklarna svänger i samma riktning, den mellersta återigen med högre amplitud.

Den allmänna fysikaliska lösningen kan skrivas som en superposition av egenvektorerna:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \sin(\sqrt{2}\omega_o t + \Phi_1) \\ c_2 \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_o t + \Phi_2) \\ c_3 \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_o t + \Phi_3) \end{bmatrix}$$

2 Problem 2

2.1 Delproblem a



Figur 2: Friläggning för Problem 2

Ur friläggning av de enskilda partiklarna finner vi att:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -k(q_1 - q_2) \\ M\ddot{q}_2 = k(q_1 - q_2) - k(q_2 - q_3) \\ m\ddot{q}_3 = k(q_2 - q_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{k}{m}q_1 - \frac{k}{m}q_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 - \frac{k}{M}q_1 + \frac{k}{M}q_2 - \frac{k}{M}q_3 = 0 \\ \ddot{q}_3 - \frac{k}{m}q_2 + \frac{k}{m}q_3 = 0 \end{cases}$$

Inför:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \mu = \frac{m}{M} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\mu & 2\mu & -\mu \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 K \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Eigenvärdesproblem ger lösning för ω_i från ansättning $\mathbf{Q} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$:

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \omega_o \quad \omega_3 = \sqrt{1 + 2\mu}\omega_o$$

Detta ger egenvektorer:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\mu \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor \mathbf{A}_1 är lite speciell eftersom den beskriver en rörelse där alla tre partiklarna rör sig åt samma håll med samma frekvens och amplitud, dvs. en ren translation. Denna lösning är helt normal, vilket inses från friläggningen där det inte finns någonting som hindrar enheten som de tre partiklarna utgör att röra sig fritt i rummet.

Detta ger lösningen, med \mathbf{A}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ konverterad till ON-bas:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\mu^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2\mu}{\sqrt{2+4\mu^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\mu^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \sin(\omega_o t + \Phi_2) \\ c_3 \sin(\sqrt{1+2\mu}\omega_o t + \Phi_3) \end{bmatrix}$$

2.2 Delproblem b

Genom att betrakta fallet där $m = 16u$, $M = 12u$ fås egenfrekvenserna

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \omega_o \quad \omega_3 = \sqrt{1 + 8/3}\omega_o$$

Vilket ger kvoten för eigensvängningarna: $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.9148$.

Kvoten för de givna energinivåerna: $\frac{E_2}{E_1} = \frac{2349}{1388} = 1.6924$.

För att ta ställning till hur bra approximationen är betraktar vi det relativa felet $|\frac{E_2}{E_1} - \frac{\omega_3}{\omega_2}| / |\frac{E_2}{E_1}| = 0.13144$, vilket motsvarar en relativt god approximation i någon mening.

3 Problem 3

3.1 Delproblem a

Enligt C.2 och ansättningen $\mathbf{Q} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$ kan egenvärdesproblemet uttryckas som:

$$K\mathbf{A} = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\mathbf{A}$$

Låt \mathbf{u}_i vara de ortonormala egenvektorer till K och λ_i de motsvarande egenvärdena för $i = 1, \dots, n$.

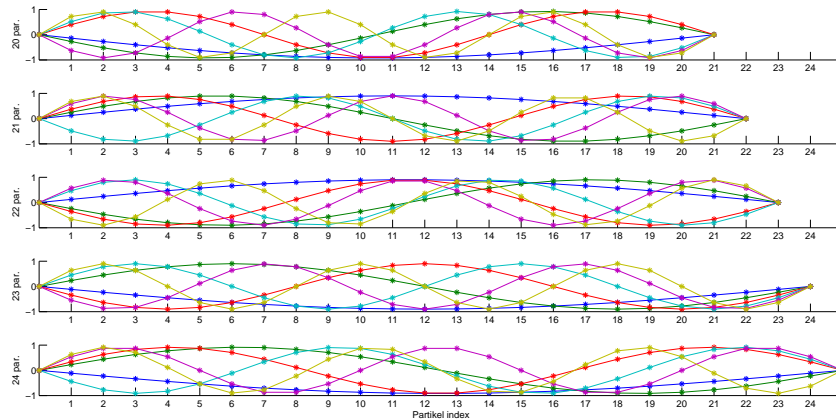
Detta ger oss enligt ovan egenfrekvenserna $\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \omega_o$, med den allmänna fysikaliska lösningen:

$$\mathbf{Q}(t) = \sum c_i \mathbf{u}_i \sin(\omega_i t + \Phi_i)$$

enligt samma beräkningar och resonemang som i Problem 1.

3.2 Delproblem b

För att illustrera egensvängningarna som stående vågor så betraktar vi för de olika egensvängningarna partiklarnas amplituder som fås ur egensvängningens egenvektor. Se figur 3.



Figur 3: De 6 första egensvängningarna som stående vågor. y-axeln för de respektive graferna motsvarar partiklarnas avvikelse från jämviktsläget, deras relativa amplitud. Relativa amplituden mellan de olika vågorna bestäms med begynnelsevillkor och visas inte här.

Se figur 4 för egenfrekvenserna relativt ω_o för 1 till 24 partiklar.

4 Problem 4

4.1 Delproblem a

Låt \hat{A} vara matrisen med de normerade egenvektorer till den tridiagonala matrisen K , låt $\boldsymbol{\lambda}$ vara vektorn med motsvarande egenvärden samt att $\omega_o = k/m$ där k är fjäderkonstanten och m är massan hos en partikel. Det följer från C.2 och ansättningen $\mathbf{Q} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$ att partiklarnas avvikelser från jämviktsläget vid tiden t kan skrivas som:

$$\mathbf{Q}(t) = \hat{A} \left[\mathbf{C} \odot \sin(\omega_o t \sqrt{\lambda} + \Phi) \right]$$

där \mathbf{C} och Φ är vektorer med konstanter som ges av begynnelsevillkor, \odot syftar på elementvis multiplikation.

Med begynnelsevillkoren: $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{v}$ där \mathbf{v} är en vektor för villkoret att de mittersta 10% av partiklarna ges en liten begynnelsehastighet, så får vi ekvationssystemet:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} = \mathbf{C} \odot \sin(\Phi) \quad (1)$$

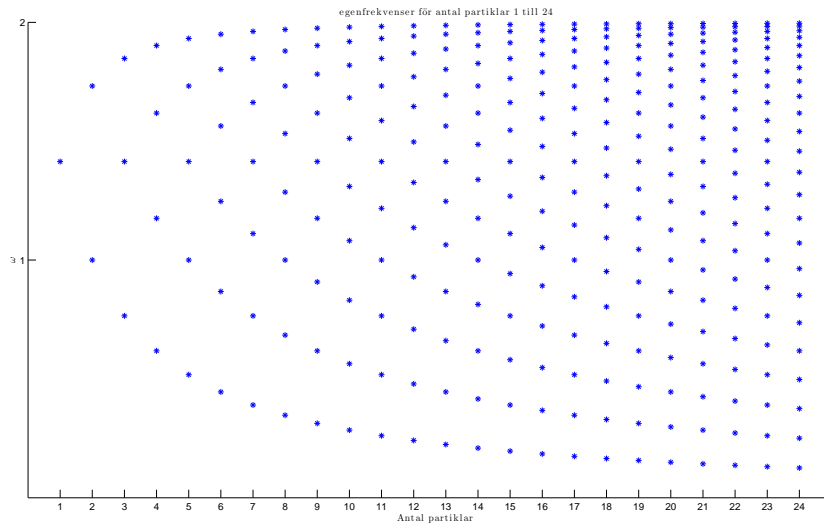
$$\hat{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad \dot{\mathbf{x}} = \omega_o \mathbf{C} \odot \sqrt{\lambda} \odot \cos(\Phi) \quad (2)$$

Då \hat{A} 's kolonner är ortonormerade egenvektorer till en symmetrisk matris följer att $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning, alltså fås ur (1) att antingen $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ eller $\sin(\Phi) = \mathbf{0}$. $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ger ingen lösning för (2), varpå vi får att $\sin(\Phi) = \mathbf{0}$, vilket ger att $\Phi_i = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. (2) ger oss då att:

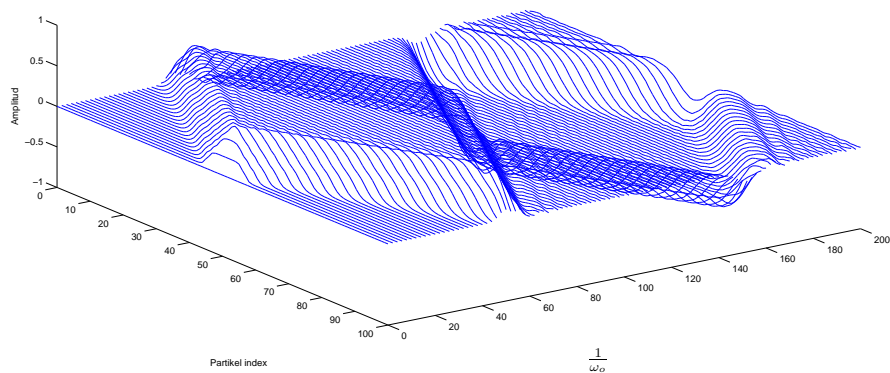
$$C_i = \frac{\pm \dot{x}_i}{\sqrt{\lambda_i} \omega_o}$$

För en illustration av partiklarnas rörelser, se figur 5

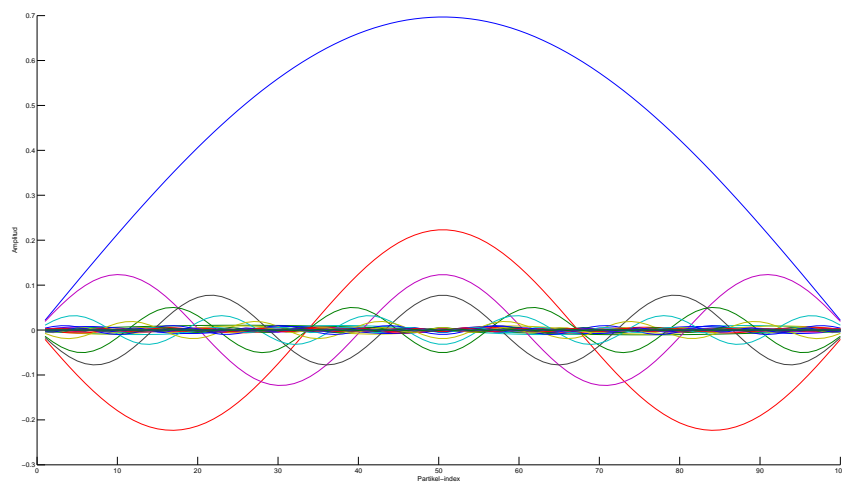
Den mest exciterade egensvängningen är också den egensvängningen med lägst frekvens och längsta våglängd (dvs. den första egensvängningen), se figur 6. Den näst största är svängning nummer 3 eftersom svängning nummer 2 inte har en topp i mitten (Om exciteringen sker ca $\frac{1}{4}$ in från kanten så kommer nummer 2 att bli mer exciterad).



Figur 4: Egenfrekvenser uttryckta i $\frac{1}{\omega_o}$.



Figur 5: Amplitud för avvikelse hos respektive partiklar över tid, för 100 partiklar och en begynnelsehastighet $0.1 \text{le} \cdot \omega_0$ för de mittersta 10 procenten av partiklarna.



Figur 6: Olika egensvängningar och deras respektive amplitud för $N = 100$

A Programkod för Problem 3

```
function uppg3a()
    figure(2)
    clf
    figure(1)
    clf

    % particles for first calculation
    s = 20;
    % particles for last calculation
    N = 24;
    % number of eigen oscillations plotted
    num_plotted = 6;

    % set titles and labels for figure 1
    title([num2str(num_plotted), ' f\{"o\}rsta egensv\{"a\}ningarna som
        ↳ st\aa\{}ende v\aa\{}gor f\{"o\}r ', num2str(s), ' till ',
        ↳ num2str(N), ' partiklar'], 'interpreter', 'latex');
    xlabel('Avst\aa\{}nd fr\aa\{}n v\{"a\}nsterv\{"a\}ggen', 'interpreter',
        ↳ 'latex');
    ylabel('Olika antal partiklar samt deras amplituder');

    for i = s:N
        [t, y] = calcStandingWaves(i);

        % normalize maximum amplitude for lowest frequency, so they will be
        ↳ easy to compare
        middle = y(1:(i + 2), floor((i + 2) / 2));
        y = (y / max(middle)) * 0.9;

        % ensure that we dont try to plot more eigen oscillation than we
        ↳ have
        to_plot = min(i, num_plotted);

        subplot(N - s + 1, 1, i + 1 - s)
        hold on

        ylabel([num2str(i), ' par.']);
        set(gca, 'XTick', 1:N)
        plot(t(:, 1:to_plot), y(:, 1:to_plot), '-*');
    end

    xlabel('Partikel-index')

    hold off
    figure(2)

    hold on;

    xlabel('Antal partiklar', 'interpreter', 'latex');
    ylabel('$\omega$', 'interpreter', 'latex');
    title(['egenfrekvenser f\{"o\}r antal partiklar 1 till ', num2str(N)],
        ↳ 'interpreter', 'latex');

    % plots eigen oscillations
    for num_particles = 1:N
```

```

    % plot \omega/\omega_o for different numbers of particles
    for i = 1:num_particles
        % sets ticks
        set(gca, 'XTick', 1:N)
        set(gca, 'YTick', 1:N)
        this_frequency = calcFrequencies(num_particles, i);
        plot(num_particles, this_frequency, '*');
    end
end

function [t, y] = calcStandingWaves(num_particles)
    A = triDiag(num_particles);

    [eigvec, ~] = eig(A);

    t = 0:num_particles + 1;
    t = repmat(t, num_particles, 1)';

    y(1, 1:num_particles) = zeros(1, num_particles);
    % each eigenvector contains amplitudes for every node in a specific
    % ↪ resonance oscillation,
    % add them so plot connects their amplitudes and connect them to the
    % ↪ end nodes
    y(2:(num_particles+1), 1:num_particles) = eigvec;
    y((num_particles + 2), 1:num_particles) = zeros(1, num_particles);

function [m] = triDiag(side_length)
    %Generera den tridiagonala matrisen:
    n = -ones(side_length - 1, 1);
    B = diag(n, 1);
    C = diag(n, -1);
    n = 2 * ones(side_length, 1);
    A = diag(n);
    m = A + B + C;

function [frequency] = calcFrequencies(num_particles, vector_index)
    %returns sqrt of specified eigenvalue: \omega/\omega_o
    K = triDiag(num_particles);
    [P D] = eig(K);
    % 2*pi to plot in unit t = omega_o / (2 * pi)
    frequency = sqrt(D(vector_index, vector_index));

```

B Programkod för Problem 4

```
function uppg4()
    clf
    figure(1)
    clf

    % Number of particles
    N = 100;

    % Generera tridiagonala matrisen
    A = triDiag(N);

    % Homogenledet
    noll = zeros(N,1);
    % Hastighetsledet
    v = zeros(N,1);
    % Ger mitterta partiklarna en hastighet vid t = 0
    v(45:55,1) = ones(11,1);
    v = 0.1 * v;

    % Beräkningar nedan:
    rhs(1:N, 1) = noll;
    rhs(1:N, 2) = v;

    [P D] = eig(A);
    lambda = D * ones(N, 1);

    solution = P \ rhs;

    % Vi låter omega0 vara tidsenhet, (fås hastighet i enhet meter*omega0)
    k = sqrt(lambda); % * omega0
    C = solution(:, 2) ./ k;
    fi = 0;

    result = @(t) [P * (C .* sin(sqrt(lambda) .* t + fi))];

    time = 200;
    stime = 0;
    num_steps = time * 10;
    time_step = time / num_steps;

    % Animera!
    for t = 0:(num_steps - 1)
        data(1:N, t + 1) = result(t * time_step + stime);

        h = plot((1:N)', result(t * time_step + stime));
        ylim([-1 1]);

        %saveas(h, strcat('plot ', sprintf('%d', t), '.png'));
        pause(0.005);
    end

    % Plotta 3d-plot med tiden som y axel vid diskreta tidpunkter
    clf
    hold on

    xlabel(['Partikel-index']);
```

```

ylabel(['$\frac{1}{\omega_o}$'], 'interpreter', 'latex');
h_ylabel = get(gca, 'YLabel');
set(h_ylabel, 'FontSize', 20);
xlabel('Amplitud');

for t = 0:time/N:time
    ett = ones(1, N);
    plot3(linspace(0, N), t * ett, result(t * time_step + stime));
    xlim([-1 1]);
end

% Exciterade gensvängningar
figure(2)

% Force the first eigen-oscillation to be positive,
% matlab might not give them all the same sign
for i = 1:N
    if sum(P(1, i)) > 0
        P(:, i) = -P(:, i);
    end
end

maxamp = P .* repmat(C, 1, N);
hold on
plot(repmat(1:N, N, 1)', maxamp')
xlabel('Partikel-index');
ylabel('Amplitud');

function [matrix] = triDiag(side_length)
% Generera den tridiagonala matrisen:
n = -ones(side_length - 1, 1);
B = diag(n, 1);
C = diag(n, -1);
n = 2 * ones(side_length, 1);
A = diag(n);
matrix = A + B + C;

```

C Sats om matrisbeskrivning av ett system av N partiklar

Bevis genomfört av Torbjörn Rathsman och Martin Wernståhl.

C.1 Förutsättningar

- Fjädrarna bevarar sin jämnvikts-längd under töjning.
- Alla fjädrar är linjära med fjäderkonstant k , deras vikt försummas.
- Alla partiklar räknas som punktmassor och har samma massan m .
- Observatören befinner sig i ett inertialsystem.
- För väggarna gäller att $q_0 = q_{N+1} = 0$, ty deras position är fix relativt observatören.

- $\mathbf{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{C}^2$, $\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_j(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix}$ där q_j är partikeln j 's avvikelse

från sitt jämnviktsläge.

- Varje partikel är ansluten till två fjädrar som påverkar partikeln med $F = -k\Delta x$ var, där Δx är fjäderns utsträckning från sin jämnviktslängd.

C.2 Sats

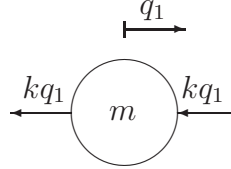
Ett system med N partiklar som uppfyller villkoren definierade i C.1 kan skrivas på formen:

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 K \mathbf{Q} = 0$$

Där K är en tri-diagonal matris med värdena $-1, 2, -1$ och $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

C.3 Bevis

$N = 1$:



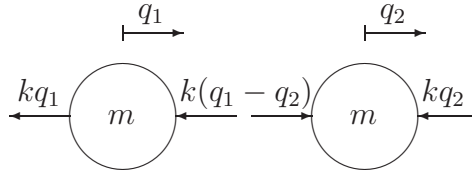
Figur 7: Friläggning för $N = 1$

Enligt friläggning i figur 7:

$$\ddot{q}_1 = \frac{-2kq_1}{m} \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 [2] \mathbf{Q} = 0$$

Där då $[2]$ är vår sökta matris K enligt C.2.

$N = 2$:

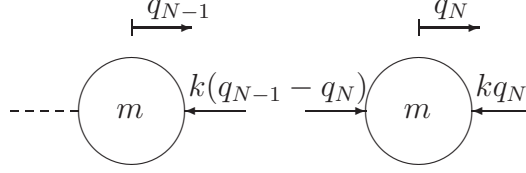


Figur 8: Friläggning för $N = 2$

Enligt friläggning i figur 8:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{kq_1}{m} - \frac{k(q_1 - q_2)}{m} \\ \ddot{q}_2 = \frac{k(q_1 - q_2)}{m} - \frac{kq_2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{Q} = 0$$

Där då $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ är vår sökta matris K enligt C.2.



Figur 9: Friläggning för $q = N$

$N = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x > 2\}$:

Antag att för $N - 2$:

$$q_{N-2} = \frac{k(q_{N-3} - q_{N-2})}{m} - \frac{k(q_{N-2} - q_{N-1})}{m} \quad (1)$$

För partikel N gäller, vilket fås från friläggning av den enskilda partikeln N i figur 9, att:

$$q_N = \frac{k(q_{N-1} - q_N)}{m} - \frac{kq_N}{m} \quad (2)$$

Enligt Newton III så påverkas partikel $N - 1$ med de två krafterna $-k(q_{N-2} - q_{N-1})$ och $k(q_{N-1} - q_N)$ (följer från 1 och 2) men motriktad:

$$q_{N-1} = \frac{k(q_{N-2} - q_{N-1})}{m} - \frac{k(q_{N-1} - q_N)}{m} \quad (3)$$

Vilket motsvarar vårt induktionsantagande (1), men för $N - 1$ istället för $N - 2$.

Ur detta följer att:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{kq_1}{m} - \frac{k(q_1 - q_2)}{m} \\ \vdots \\ \ddot{q}_j = \frac{k(q_{j-1} - q_j)}{m} - \frac{k(q_j - q_{j+1})}{m} \\ \vdots \\ \ddot{q}_N = \frac{k(q_{N-1} - q_N)}{m} - \frac{kq_N}{m} \end{cases}$$

Vilket motsvarar:

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \omega_o^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{Q} = 0$$

där då vårt sökta K från C.2 är en tridiagonal matris med värdena -1 , 2 , -1 .

Enligt Induktionsaxiomet stämmer då C.2 för alla $N \geq 1$ \square