

Stelkroppsrörelse i rummet

Stefan Buller och Martin Wernstål

2011-05-16

Sammanfattning

Stelkroppsrörelse i rummet betraktas. Vi reflekterar över behovet av att inför kroppsfixta koordinater och använder sådana för att ta fram ett specialfall av Euler ekvationer. Dessa ekvationer används sedan för att betrakta två situation där betrakta kropparna inte har något externt vridande moment.

Vi betraktar först specialfallet då $I_{xx} = I_{yy}$ och härleder en relation mellan precession och spinn längsmed huvudsymmetriaxeln. Denna relation används sedan för att ta fram jordens precessionshastighet i vår modell, som visar sig vara 1,0034 varv per dygn.

Vi betraktar sedan en faktisk kropps rotation efter det att den givits en begynnelsehastighet kring en av sina axlar. För den axeln med det mellanliggande vridmomentet finner vi att rotationsvektorn ändrar sig signifikant under ett kastförlopp. Detta speglas i modellen av att problemet blir instabilt då kroppens initiala rotationshastighet är förhållandevis större i denna riktning.

Innehåll

1	Problem 1	1
1.1	Delproblem a	1
1.2	Delproblem b	1
2	Problem 2	1
2.1	Delproblem a	1
2.2	Delproblem b	2
2.3	Delproblem c	3
3	Problem 3	4
3.1	Experiment	4
3.2	Beräkningar	4
A	MATLAB-simuleringskod	7

1 Problem 1

1.1 Delproblem a

I ett kroppsfixt koordinatsystem, gäller som namnet antyder, att punkter på kroppen har en fixt position i förhållande till koordinatsystemet. Då deras positionsvektorer inte ändras kan man räkna ut integralerna ingående i tröghetsmatrisen utan något tidsberoende.

1.2 Delproblem b

$M = \dot{L}$, och då vi valt att uttrycka L i ett kroppsfixt koordinatsystem xyz får vi bidrag i \dot{L} dels från L 's förändring i de kroppsfixa koordinataxlarna $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ och dels från koordinataxlarnas förändring i det omgivande koordinatsystemet.

Låt ω vara xyz -systemets rotationsvektor, och därmed även kroppens rotationsvektor.

Detta ger oss vridmomentekvationen:

$$M = \dot{L} = \dot{L}_{xyz} + \omega \times L$$

Komponentvist, då vi har ett koordinatsystem som sammanfaller med kroppens huvudtröghetsaxlar:

$$\begin{cases} M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \\ M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x \\ M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y \end{cases} \quad (1)$$

2 Problem 2

2.1 Delproblem a

Symmetriaxel-fixt koordinatsystem $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ med $I_{xx} = I_{yy} = I_0$ och $I_{zz} \neq I_0$:

$$I = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Låt ν vara kroppens rotation i det symmetri-axel-fixa koordinatsystemet, ω vara kroppens rotation relativt det omgivande inertialsystemet samt Ω vara $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ -systemets rotation.

Eftersom $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ är symmetriaxel-fixt så måste $\nu_x = \nu_y = 0$ för att systemet skall fortsätta att vara symmetriaxel-fixt.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{M} &= \dot{\mathbf{L}}_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \\ &= I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times I\boldsymbol{\omega} \\ &= \begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + \Omega_y I_z \omega_z - \Omega_z I_y \omega_y \\ I_y\dot{\omega}_y + \Omega_z I_x \omega_x - \Omega_x I_z \omega_z \\ I_z\dot{\omega}_z + \Omega_x I_y \omega_y - \Omega_y I_x \omega_x \end{cases}\end{aligned}$$

Vi betraktar fallet då $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ och $\boldsymbol{\Omega}$ konstant relativt $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ -systemet:

$$\begin{cases} 0 = I_0\dot{\omega}_x + \Omega_y I_z \omega_z - \Omega_z I_0 \omega_y \\ 0 = I_0\dot{\omega}_y + \Omega_z I_0 \omega_x - \Omega_x I_0 \omega_z \\ 0 = I_z\dot{\omega}_z + \Omega_x I_0 \omega_y - \Omega_y I_x \omega_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \Omega_y I_z (\Omega_z + \nu_z) - \Omega_z I_0 \Omega_y \\ 0 = \Omega_z I_0 \Omega_x - \Omega_x I_0 (\Omega_z + \nu_z) \\ 0 = I_z \dot{\nu}_z + \Omega_x \Omega_y (I_0 - I_z) \end{cases}$$

Vilket ger:

$$\frac{\Omega_z}{\nu_z} = \frac{I_z}{I_0 - I_z} \quad \text{och} \quad \dot{\nu}_z = 0 \quad (2)$$

2.2 Delproblem b

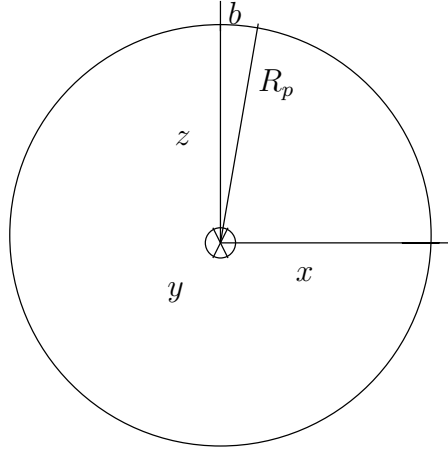
Då vi har kroppsfixt system utan yttre vridande moment bör precessionsvektorn gå igenom kroppens masscentrum. Då vi har ett värde för precessionsvektorn i rotationsvektorns riktning enligt (2), samt dess riktning i förhållande till rotationsvektorns riktning, så får vi precessionsvektorns uttryckt i symmetriaxelfixa systemet $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$:

$$\Omega_z = \frac{\nu_z I_z}{I_o - I_z} \quad \Omega_x = \frac{b \nu_z I_z}{R(I_o - I_z)} \quad \Omega = \frac{\nu_z I_z R \cos(b/R)}{I_o - I_z}$$

Med beteckningar enligt figur 1.

Enligt förutsättningarna är det ett avstånd på 10 meter mellan rotation och precessionsvektor vid jordytan, $b = 10$ m. Radien vid polerna är $R_p = 6356,7523$ km¹, radien vid ekvatorn: $R_e = 6378,1370$ km¹. För att få jordens tröghetsmoment integrerar över en homogen ellipsoid. Fås att $I_o = \frac{m}{5}(R_p^2 + R_e^2)$, $I_z = \frac{2m}{5}R_e^2$ vilket ger relativa skillnaden: $\frac{I_o - I_z}{I_z} = -0,0033472$, samt

¹Källa: http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_radius#Fixed_radii



Figur 1: Förhållandet mellan precessionaxeln R_p och rotationsaxeln z

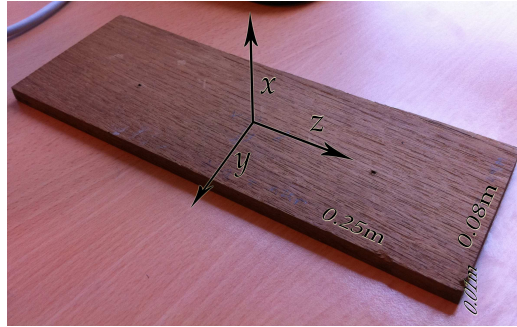
att $\Omega \approx -299\nu$. Om $\omega = \Omega + \nu = \frac{2\pi}{24\text{h}}$ ger detta att $\nu \approx \frac{-\frac{2\pi}{298}}{24\text{h}}$, alltså spinner jorden ett cirka varv på 300 dagar i motsatt riktning till precessionen. Precessionshastigheten blir då $\frac{-598\pi}{298 \cdot 86400\text{s}} = 7,2966 \cdot 10^{-5}$, eller 1,0034 varv per dygn.

2.3 Delproblem c

För en godtycklig precessionsvektor $\mathbf{\Omega} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + \Omega_z \hat{z}$ och för ett symmetriaxel-fixt koordinatsystem har vi endast spinn kring huvudsymmetriaxeln, $\boldsymbol{\nu} = \nu \hat{z}$. Detta ger oss kroppens absoluta rotation: $\boldsymbol{\omega} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + (\Omega_z + \nu) \hat{z}$, kroppens rörelsemängd moment: $\mathbf{L} = I_o \Omega_x \hat{x} + I_o \Omega_y \hat{y} + I_z (\nu + \Omega_z) \hat{z}$. Låt \hat{z} och $\mathbf{n} := \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y}$ spänna ett plan. Våra vektorer kan alla uttryckas i dessa vektorer, alltså ligger de alltid i samma plan i de symmetriaxelfixa koordinatsystemet.

För att dra slutsatser om vilka som är fixa i ett inertialsystem så tar vi tidsderivatan av vektorerna. Vi har enligt förutsättningen att $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$, dvs \mathbf{L} är fixt. Övriga vektorer är det inte, $\dot{\hat{z}} = \mathbf{\Omega} \times \hat{z}$, vilket inte är noll då precessionsaxeln avviker från \hat{z} . $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0} + \mathbf{\Omega} \times \nu \hat{z}$, är inte noll av samma skäl. Man kan även resonera kring att de 3 alltid ligger i ett plan som är fixt i ett symmetriaxelfixt system precesserande system, alltså inte utanför systemet.

Sett innefrån ett system som roterar med $\boldsymbol{\omega}$ så blir \hat{z} fixt, ty det enda som skilljer vårt kroppsfixta system från vårt symmetriaxelfixa är att vi nu har en axel i \hat{z} riktning som roterar, men i övrigt sammanfaller den med \hat{z} som alltså alltid pekar upp ur samma punkt. Då \mathbf{L} och $\boldsymbol{\omega}$ alltid låg i ett och



Figur 2: Det använda homogena rätblocket

samma plan spänt av \hat{z} och \hat{y} med komponenter i \hat{y} -led, så kan de inte vara fixta i vårt kroppsfixa system som bara ibland har en axel i \hat{y} led.

3 Problem 3

3.1 Experiment

Vår studerade kropp är ett homogent rätblock med dimensionerna $a = 0,25\text{m}$, $b = 0,08\text{m}$, $c = 0,01\text{m}$.

Vi inför ett kroppsfixa koordinatsystem med origo i masscentrum med axlarna \hat{x} , \hat{y} och \hat{z} som går genom den största, näst största respektive minsta ytan.

Enligt vårt experiment roterar vår kropp stabilt kring \hat{x} och \hat{z} , men instabilt kring \hat{y} .

3.2 Beräkningar

Våra uppmätta värden för kroppen ger tröghetsmoment genom masscentrum:

$$\begin{cases} I_x = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \\ I_y = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) \\ I_z = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_x = \frac{1}{12}m(\frac{689}{10000}) \\ I_y = \frac{1}{12}m(\frac{626}{10000}) \\ I_z = \frac{1}{12}m(\frac{65}{10000}) \end{cases}$$

Yttre moment $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ger:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_y - I_z) \\ I_y \dot{\omega}_y = \omega_z \omega_x (I_z - I_x) \\ I_z \dot{\omega}_z = \omega_x \omega_y (I_x - I_y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z \gamma_x \\ \dot{\omega}_y = \omega_z \omega_x \gamma_y \\ \dot{\omega}_z = \omega_x \omega_y \gamma_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{I_y - I_z}{I_x} & \gamma_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y} & \gamma_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \\ \gamma_x &\approx 0,81778 & \gamma_y &\approx -0,99681 & \gamma_z &\approx 0,96923\end{aligned}$$

I det fall då vi har vinkelhastighet i något led fås ingen vinkelacceleration i vår modell. Detta visade sig vara svårt att åstadkomma i praktiken.

Dominerande vinkelhastigheter i x - eller z - led kommer att få $\dot{\omega}_y$ att växla tecken samt befinna sig nära noll. Säg att:

$(\omega_x(t_0) > \omega_y(t_0) > 0) \wedge (\omega_x(t_0) > \omega_z(t_0) > 0)$, vilket leder till att

Tid	ω_x	ω_y	ω_z
t_0	$+$ ↗	$+$ ↘	$+$ ↗
t_1	$+$ ↘	$-$ ↘	$+$ ↘
t_2	$+$ ↗	$-$ ↗	$-$ ↘
t_3	$+$ ↘	$+$ ↗	$-$ ↗
t_4	$+$ ↗	$+$ ↘	$+$ ↗
\vdots		\vdots	

t_1 är tillfället då ω_y korsar noll, t_2 är tillfället då ω_z korsar noll (ω_x korsar aldrig noll ty $\omega_x > \omega_z$) och t_3 då ω_y ytterligare en gång korsar noll-linjen. Detta resulterar i tidpunkten t_4 vilket är tillfället då vi är tillbaka till ursprungstillståndet.

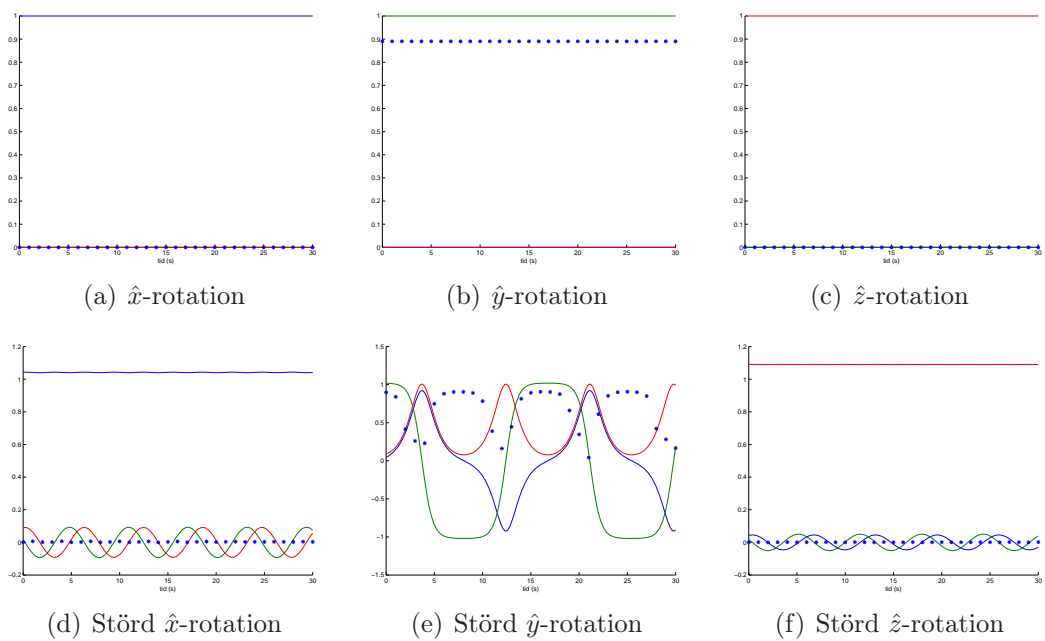
Systemet är alltså stabilt då $|\omega_x| \gg |\omega_y| \wedge |\omega_x| > |\omega_z|$. Analogt gäller för $|\omega_z| > |\omega_x|$.

Om däremot y är den dominerande rotationsaxeln och $\omega_x \neq 0 \wedge \omega_z \neq 0$ så resulterar det i att rotationen kommer att förflytta sig mellan y till x och z för att sedan komma tillbaka till y . Dvs. initial rotation kring y är instabil.

$$\dot{\omega}' = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z \gamma_x & \omega_y \gamma_x \\ \omega_z \gamma_y & 0 & \omega_x \gamma_y \\ \omega_y \gamma_z & \omega_x \gamma_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Om vi nu vill beräkna stabiliteten av vårt system beräknas då egenvärdena av Jacobianmatrisen (3) och stabiliteten är $\max(\lambda_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Även extremt små avvikelser från en ren \hat{y} -rotation (i storleksordningen 10^{-10}) påverkar rotationen markant, förutsatt att den får fortsätta i minst en minut.



Figur 3: Rotationer runt de tre olika symmetriaxlarna, blå = \hat{x} -rotation, grön = \hat{y} -rotation, röd = \hat{z} -rotation. Prickarna representerar stabilitet i diskreta punkter, där 0 och under är stabilt.

A MATLAB-simuleringskod

```

function foobar()

    % Time and initial speeds
    tend = 30;
    omega0 = [1 0 0;
              0 1 0;
              0 0 1];
    noise = 1e-1 * rand(3, 1);

    for i = 1:3
        [T, O, Ts, Os, St, S, Ss] = calc(omega0(:, i), tend, noise);

        h = figure(i);
        display_speeds(T, O, St, S);
        saveas(h, sprintf('simulated/%d_std', i), 'epsc');

        h = figure(i+3);
        display_speeds(Ts, Os, St, Ss);
        saveas(h, sprintf('simulated/%d_per', i), 'epsc');
    end

function [] = display_speeds(t, omega, St, S)
    clf
    hold on
    xlabel('tid (s)');
    plot(t, omega);
    plot(St, S, '*');
    hold off

function [T, omega, Ts, omegas, St, S, Ss] = calc(omega0, tend, noise)
% CALC    Calculates the simulated rotation-speeds,
%         also returns stability
%
% SYNTAX
%   [T, omega, Ts, omegas, St, S, Ss] = calc(omegadot, tend)
%
% ARGUMENTS
%   omega0 = A list of initial rotation speeds
%   tend   = The time to stop simulating
%   noise  = The noise to add for the perturbed initial values
%   T      = Vector containing time-points from ode-solver
%   omega  = Vector containing the speeds corresponding to T
%   Ts     = Vector containing time-points from the ode-solver
%           for the perturbed system
%   omegas = Vector containing the speeds corresponding to Ts
%   St     = Vector containing the time points for the stability
%           calculations
%   S      = Vector containing the stability values corresponding
%           to St for the initial solution
%   Ss     = Vector containing the stability values corresponding
%           to St for the perturbed solution
%
% Created by Martin Wernst hl on 2011-05-12.
% Copyright (C) Martin Wernst hl. All rights reserved.
%
    SOL = ode45(@spin, [0, tend], omega0, odeset('RelTol', 1e-6));

```

```

SOLs = ode45(@spin, [0, tend], omega0 + noise, odeset('RelTol',
↳1e-6));

% Solution without noise
T      = SOL.x;
omega  = SOL.y;
% Solution with noise
Ts     = SOLs.x;
omegas = SOLs.y;
% Time steps for calculating the stability
St     = 0:1:tend;

% Calculate the stability for the system with and without noise in St
for i = 1:length(St)
    S(i) = maxeig(deval(SOL, St(i)));
    Ss(i) = maxeig(deval(SOLs, St(i)));
end

function [omegadot] = spin(t, omega)

    g      = [0.81778; -0.99681; 0.96923];

    omegadot = [omega(2) * omega(3) * g(1);
                omega(1) * omega(3) * g(2);
                omega(1) * omega(2) * g(3)];

function [maxeig] = maxeig(omega)

    g = [0.81778; -0.99681; 0.96923];

    J = diag(g)*[0 omega(3) omega(2);
                omega(3) 0 omega(1);
                omega(2) omega(1) 0];

    maxeig = max(real(eig(J)));

```