Konspekt

Piotr Chołda

25 października 2018

1 Programowanie dyskretne w projektowaniu sieci i systemów

1.1 Przykłady problemów programowania dyskretnego

1. Zapis z użyciem programowania matematycznego różnych klasycznych zadań optymalizacji:
   - Problem poszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego (*minimum spanning tree*).
   - Problem plecakowy (*knapsack problem*) i jego warianty.
   - Problem komiwojażera (*travelling salesman*).
   - Problem poszukiwania drzewa Steinera.
   - Problem kolorowania grafu.
2. Projektowanie topologiczne ze stałymi kosztami (TDFCM, *Topological Design with a Fixed Charge Model*), sformułowanie L-P:
   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łącza (które mogą być zainstalowane);
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ zapotrzebowania;
     - ⋆ $p = 1, 2, \ldots, P_d$ dopuszczalne ścieżki przepływów mogących realizować zapotrzebowanie d.
   - Zmienne:
     - ⋆ x_{dp} wielkość przepływu realizującego zapotrzebowanie d, korzystającego ze ścieżki p,
     - ⋆ y_e przepływność do zainstalowania na łączu e,
     - ⋆ u_e $= 1$ jeśli łącze e jest zainstalowane; $= 0$, w przeciwnym przypadku (**binarna** zmienna decyzyjna).
   - Stałe:
     - ⋆ δ_{edp} $= 1$ jeśli łącze e należy do ścieżki p realizującej zapotrzebowanie d; $= 0$ w przeciwnym przypadku;
     - ⋆ h_d rozmiar zapotrzebowania d, które ma być zrealizowane;
     - ⋆ ξ_e stały koszt użycia jednostki przepływności na łączu e;

- $\star$ κ_e koszt „otwarcia” (tj. uruchomienia) łącza;
- $\star$ W wystarczająco duża wartość („duże W”).

- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y},\mathbf{u}) = \sum_e (\xi_e y_e + \kappa_e u_e)$.
- Ograniczenia:
  - $\star$ $\sum_p x_{dp} = h_d \quad d = 1, 2, \ldots, D$;
  - $\star$ $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} = y_e \quad e = 1, 2, \ldots, E$;
  - $\star$ $y_e \leq W u_e \quad e = 1, 2, \ldots, E$;
  - $\star$ $\mathbf{y}$ and $\mathbf{x}$ — nieujemne ciągłe oraz $\mathbf{u}$ — binarne.

3. Projektowanie z modularną przepływnością łączy (M: moduł rozmiaru dla przepływności łączy, *module size of the link capacity*, np. $M = 10\,\mathrm{Gb/s}$), *modular dimensioning*:

   - y_e — całkowitoliczbowe, problem typu MI(L)P (bo x_{dp} są ciągłe):
     - $\star$ ograniczenia typu LINK: $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} \leq M y_e \; e = 1, 2, \ldots, E$;
     - $\star$ ograniczenia typu PATH — bez zmian.
   - u_{dp} — binarne/całkowitoliczbowe (przepływy nie są zbifurkowane [*non-bifurcated*]), y_e — całkowitoliczbowe, problem typu I(L)P:
     - $\star$ ograniczenia typu LINK: $\sum_d \sum_p \delta_{edp} h_d u_{dp} \leq M y_e \; e = 1, 2, \ldots, E$;
     - $\star$ ograniczenia typu PATH: $\sum_p u_{dp} = 1 \; d = 1, 2, \ldots, D$.

1.2 Liniowe programowanie dyskretne

4. Programowanie całkowitoliczbowe IP/ILP (*Integer* [*Linear*] *Programming*):

   - max $\mathbf{cx}$,
   - s.t.:
     - $\star$ $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ (ograniczenia liniowe, *linear constraints*),
     - $\star$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,
     - $\star$ $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ (ograniczenia całkowitoliczbowe, *integrality constraints*).

5. Programowanie całkowitoliczbowe MIP/MILP (*Mixed Integer* [*Linear*] *Programming*):

   - max $\mathbf{cx} + \mathbf{dy}$,
   - s.t.:
     - $\star$ $\mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b}$ (ograniczenia liniowe),
     - $\star$ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$,
     - $\star$ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$,
     - $\star$ $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ (ograniczenia całkowitoliczbowe).

1.3 Problemy projektowania z nieliniową funkcją celu

6. Linearyzacja problemów wypukłych używających ograniczeń liniowych.

7. Linearyzacja problemów wklęsłych używających ograniczeń liniowych — potrzeba użycia zmiennych binarnych.

1.4 Zadania

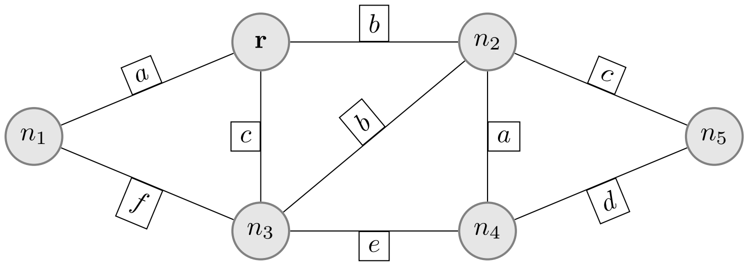
1. Poniżej przedstawiono fragment pewnego sformułowania problemu optymalizacyjnego:

   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ pierwszy typ indeksu (np. łuki);
     - ⋆ $v = 1, 2, \ldots, V$ drugi typ indeksu (np. węzły);
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ trzeci typ indeksu (np. zapotrzebowania).
   - Stałe:
     - ⋆ a_{ev} pewna wartość binarna.
   - Zmienne:
     - ⋆ u_{ed} zmienna binarna;
     - ⋆ w_{ed} zmienna binarna;
     - ⋆ x_{ed} zmienna całkowitoliczbowa nieujemna;
     - ⋆ z_{ed} zmienna całkowitoliczbowa nieujemna;
     - ⋆ y_{ed} zmienna całkowitoliczbowa nieujemna.
   - Ograniczenia:
     - ⋆ $w_{ed}u_{ed} > 0$ $e = 1, 2, \ldots, E$, $d = 1, 2, \ldots, D$;
     - ⋆ a_{ev} XOR $u_{ed} < 1$ $e = 1, 2, \ldots, E$, $v = 1, 2, \ldots, V$, $d = 1, 2, \ldots, D$;
     - ⋆ $\frac{x_{ed}}{y_{ed}+z_{ed}} = 49$ $e = 1, 2, \ldots, E$, $d = 1, 2, \ldots, D$;
     - ⋆ $x_{ed}y_{ed} \geq 2$ $e = 1, 2, \ldots, E$, $d = 1, 2, \ldots, D$

   W zamyśle sformułowanie miało stanowić fragment zadania liniowego programowania matematyczego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP — ale tak nie jest (dlaczego?). Proszę poprawić to sformułowanie w taki sposób, aby bez zmiany sensu faktycznie było to sformułowanie typu MILP (nie skupiamy się tutaj na znaczeniu sformułowania, tylko na jego poprawności z punktu widzenia modelowania matematycznego).

2. Na rys. 1 dany jest graf prosty ważony (wartości wag w prostokącikach należy zastąpić wartościami reprezentowanymi przez cyfry numeru własnego indeksu, gdzie numer indekstu to *fedcba*). Proszę znaleźć drzewo najkrótszych ścieżek z korzenia **r**, a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego drzewa (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu). Jeśli to potrzebne, każdą krawędź grafu prostego można zastąpić parą łuków przeciwnie skierowanych o tej samej wadze.

3. Na rys. 1 dany jest graf prosty ważony (wartości wag w prostokącikach należy zastąpić wartościami reprezentowanymi przez cyfry numeru własnego indeksu, gdzie numer indekstu to *fedcba*). Proszę znaleźć minimalne rozcięcie między n_1 i n_5, a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego minimalnego rozcięcia (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu). Jeśli to potrzebne, każdą krawędź grafu prostego można zastąpić parą łuków przeciwnie skierowanych o tej samej wadze.



Rysunek 1: Przykładowy graf ważony

4. Niech x_{ij} przyjmuje wartość 1, jeśli ruter i jest fizyczne połączony z ruterem j (w przeciwnym przypadku x_{ij} przyjmuje wartość 0). Niech w naszej sieci będzie N ruterów. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi zajmującemu się konfiguracją ruterów?

$$x_{ii} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$
$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq 5 \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$
$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \geq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

5. W każdym z N interesujących nasze przedsiębiorstwo miast instalujemy rutery. Niech x_{ij} przyjmuje wartość 1, jeśli nasze przedsiębiorstwo instaluje rutery produkowane przez firmę oznaczoną indeksem i w mieście indeksowanym za pomocą j (w przeciwnym przypadku x_{ij} przyjmuje wartość 0). Na rynku mamy P firm produkujących rutery. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi zajmującem się instalacją ruterów?

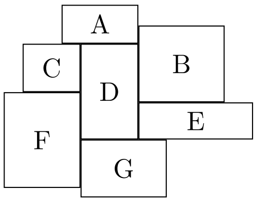
$$\sum_{i=1}^{P} x_{ij} \geq 2 \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

6. W każdym z P interesujących nas miast nasze przedsiębiorstwo instaluje koncentratory. Niech x_{ij} oznacza liczbę klientów przyłączonych do koncentratora w mieście indeksowanym za pomocą j, ale tylko takich klientów, którzy wykupili klasę obsługi QoS oznaczaną indeksem i. Nasze przedsiębiorstwo obsługuje N typów klas obsługi. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi instalującemu koncentratory?

$$\sum_{i=2}^{N} x_{ij} = x_{1j} \qquad j = 1, 2, \ldots, P$$

7. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: projektuje się sieć komórkową, przy czym obszar objęty siecią dzieli się na wiele komórek, z których każda ma kształt prostokątny[1], jak przykładowo pokazano na rys. 2. Taki sposób podziału obszaru jest z góry zadany i traktujemy go jako daną wejściową do problemu: sąsiedztwo jest opisane za pomocą stałych a_{ij} ($i, j = 1, \ldots, N$; $i \neq j$), które przyjmują

[1]Stosujemy to uproszczenie na potrzeby zadania, w praktyce komórka ma inny kształt.

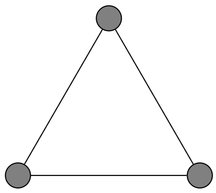


Rysunek 2: Przykład sieci „komórkowej".

wartość 1 gdy komórki i, j ze sobą sąsiadują (w przeciwnym przypadku — 0). Do obsługi ruchu jest wymagane przydzielenie jednego zestawu częstotliwości w każdej z komórek. Ze względu na unikanie interferencji zakłada się, że nie wolno w sąsiadujących komórkach używać tego samego zestawu częstotliwości (np. gdyby komórki były rozmieszczone jak na rysunku, komórkom A i C należałoby przydzielić różne zestawy częstotliwości; ale już komórkom B i C można byłoby przydzielić te same zestawy częstotliwości). Załóżmy, że interesujący nas obszar podzielono na N komórek, a operator może wykorzystać M różnych zestawów częstotliwości. Operator chciałby użyć do pokrycia obszaru jak najmniej różnych zestawów częstotliwości. Proszę dodatkowo podać (jako funkcje N oraz M): (a) liczbę zmiennych całkowitoliczbowych, (b) liczbę ograniczeń równościowych oraz (c) liczbę ograniczeń nierównościowych występujących w tym problemie. Czy można z góry przewidzieć, jakie jest ograniczenie górne wymaganej liczby różnych zestawów częstotliwości?

8. Proszę zinterpretować (tzn. napisać, jaką dokładnie sytuację ma modelować) poniższe sformułowanie „łącze-ścieżka" (L-P). Sformułowanie dotyczy pewnego problemu optymalnego projektowania sieci.

   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łącza;
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ zapotrzebowania;
     - ⋆ $p = 1, 2, \ldots, P_d$ dopuszczalne ścieżki przepływów mogących realizować zapotrzebowanie d.
   - Stałe:
     - ⋆ $\delta_{edp} = 1$ jeśli łącze e należy do ścieżki p realizującej zapotrzebowanie d;
       $= 0$ w przeciwnym przypadku;
     - ⋆ h_d referencyjny rozmiar zapotrzebowania d, które może być zrealizowane;
     - ⋆ ξ_e koszt dodania jednostki przepływności na łączu e;
     - ⋆ α pewna wartość stała (należy m.in. zinterpretować jej znaczenie).
   - Zmienne:
     - ⋆ x_{dp} ciągła wielkość przepływu realizującego zapotrzebowanie d, korzystającego ze ścieżki p;



Rysunek 3: Sieć trójkątna.

- ⋆ y_e ciągła wielkość przepływności przydzielonej do zainstalowania na łączu e;
- ⋆ β pewna zmienna ciągła (należy m.in. zinterpretować jej znaczenie).

- Funkcja celu: $\max \beta$.
- Ograniczenia:
  - ⋆ $\sum_p x_{dp} \geq \beta h_d$ $\quad d = 1, 2, \ldots, D$;
  - ⋆ $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} = y_e$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E$;
  - ⋆ $\sum_e \xi_e y_e \leq \alpha$.

Następnie proszę: (a) zmodyfikować to sformułowanie w taki sposób, żeby uwzględniało fakt, iż w sieci zainstalowana przepływność łączy może przyjmować tylko wartości dyskretne (kombinacje 100, 200 lub 500 jednostek przepływności); (b) zapisać ten problem używając sformułowania o charakterze dowolnej (tj. zwykłej lub zagregowanej, można sobie którąś wybrać) postaci „węzeł-łącze” (N-L); będzie to zapewne wymagało dodania kolejnych stałych, zmiennych i ograniczeń (może być też konieczna modyfikacja istniejących ograniczeń).

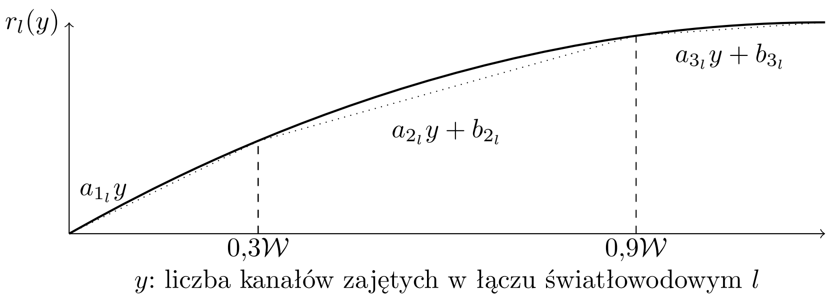
9. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: dla sieci trójkątnej złożonej z trzech łączy i trzech węzłów, pokazanej na rys. 3, istnieją trzy zapotrzebowania (między każdą z możliwych par węzłów, każde zapotrzebowanie jest na 2,25 Mb/s). Funkcja kosztu użycia przepływności na pojedynczym łączu jest nieliniowa i wyraża się wzorem: $K = O^2$ (K: koszt obliczony dla obciążenia łącza przepływnością O wyrażoną w Mb/s). Chcielibyśmy tak rozmieścić przepływy realizujące zapotrzebowania, żeby kosztowało to w sumie jak najmniej. Obciążenie na żadnym z łączy nie może przekraczać 4 Mb/s. Sformułowanie problemu ma być liniowe, więc funkcję kosztu trzeba będzie zlinearyzować (powinny zostać użyte co najmniej dwa segmenty liniowe, nie muszą być równej długości). W sformułowaniu proszę uwzględnić konkretne wartości numeryczne.

10. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: dla sieci trójkątnej złożonej z trzech łączy i trzech węzłów, pokazanej na rys. 3, istnieją trzy zapotrzebowania (między każdą z możliwych

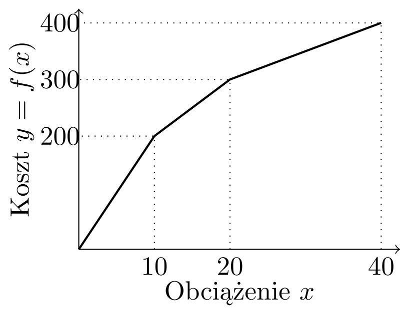
par węzłów, każde zapotrzebowanie jest na 4,75 Mb/s). Funkcja kosztu użycia przepływności na pojedynczym łączu jest nieliniowa i wyraża się wzorem: $K = \sqrt{O}$ (K: koszt obliczony dla obciążenia łącza przepływnością O wyrażoną w Mb/s). Chcielibyśmy tak rozmieścić przepływy realizujące zapotrzebowania, żeby kosztowało to w sumie jak najmniej. Obciążenie na żadnym z łączy nie może przekraczać 9 Mb/s. Sformułowanie problemu ma być liniowe, więc funkcję kosztu trzeba będzie zlinearyzować (powinny zostać użyte co najmniej dwa segmenty liniowe, nie muszą być równej długości). W sformułowaniu proszę uwzględnić konkretne wartości numeryczne.

11. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: dla sieci trójkątnej złożonej z trzech łączy i trzech węzłów, pokazanej na rys. 3, istnieją trzy zapotrzebowania (między każdą z możliwych par węzłów, każde zapotrzebowanie jest na 4,75 Mb/s). Funkcja użyteczności na pojedynczym łączu (tj. zysk operatora z zainstalowania określonej przepływności) jest nieliniowa i wyraża się wzorem: $K = \sqrt{O}$ (K: wartość użyteczności wynikająca z zainstalowania przepływności O na łączu, wyrażonej w Mb/s). Chcielibyśmy tak rozmieścić przepływy realizujące zapotrzebowania, żeby sumaryczna użyteczność była jak największa. Obciążenie na żadnym z łączy nie może przekraczać 9 Mb/s. Sformułowanie problemu ma być liniowe, więc funkcję kosztu trzeba będzie zlinearyzować (powinny zostać użyte co najmniej dwa segmenty liniowe, nie muszą być równej długości). W sformułowaniu proszę uwzględnić konkretne wartości numeryczne.

12. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujące zagadnienie projektowania sieci opisane werbalnie. Jest to zagadnienie znalezienia tras dla przepływów (tj. rutingu) z przydziałem zasobów optycznych oraz maksymalizacją zysku (*routing and wavelength assignment for maximizing revenue*). Mamy daną topologię sieci optycznej składającą się ze zbioru łączy światłowodowych $\mathcal{L}$ i węzłów optycznych $\mathcal{V}$, przy czym w ramach każdego łącza mamy do dyspozycji jedno włókno światłowodowe, w którym możemy transmitować dane za pomocą kanałów optycznych, z których każdy używa jednej z $\mathcal{W}$ nośnych dostępnych we włóknie (tzn. używamy systemu WDM). Z góry zadano $\mathcal{S}$: zbiór zapotrzebowań między różnymi parami węzłów sieci. Każde zapotrzebowanie ma określony rozmiar strumienia, który powinien być przenoszony na jego potrzeby, przy czym jego wielkość to wielokrotność całkowita przepływności charakterystycznej dla pojedynczego kanału (tzn. wielokrotność może być 1, 2,...). Wielkość tej wielokrotności podaje się za pomocą wartości stałej t_s ($s \in \mathcal{S}$). Zakłada się, że nie wszystkie zapotrzebowania muszą być zrealizowane w 100% (a nawet niektóre nie muszą być zrealizowane w ogóle), ale nigdy nie przydziela się żadnemu zapotrzebowaniu ułamkowej przepływności kanału. Operator zarabia na każdym zajętym kanale r_l ($l \in \mathcal{L}$) jednostek monetarnych. Po sformułowaniu problemu w takiej wersji, proszę uwzględnić, że funkcja zysku związana z użyciem kanałów w pojedynczym włóknie jest opisywana za



Rysunek 4: Przykładowa funkcja opisująca zysk.

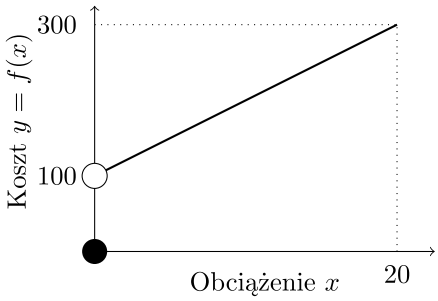


Rysunek 5: Przykładowa funkcja opisująca taryfę wklęsłą przedziałami liniową.

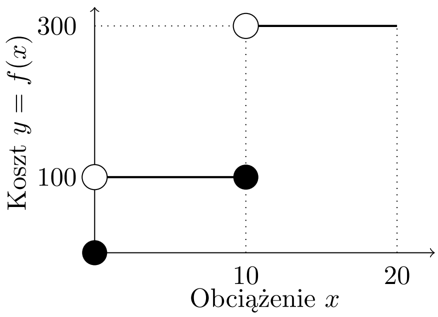
pomocą zależności nieliniowej pokazanej na rys. 4 (parametry a_{i_l} oraz b_{i_l} mogą być różne dla różnych łączy). Na potrzeby opracowania sformułowania można wprowadzić wszystkie niezbędne zmienne i stałe (jeśli nie podano ich wyżej). Sformułowanie może być typu L-P lub N-L (proszę sobie wybrać dowolnie). Czy rozwiązanie problemu zawsze istnieje?

13. Proszę sformułować zbiór równości/nierówności (być może dobierając również jakieś zmienne pomocnicze, np. całkowitoliczbowe, albo jakieś stałe) opisujących relację między zmienną x, oznaczającą obciążenie łącza ($0 \leq x \leq 40$), a wartością $y = f(x)$, tj. kosztem użycia takiego łącza w zależności od tego obciążenia (dysponując tymi równościami/nierównościami powinniśmy być w stanie po podstawieniu konkretnej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y). Ograniczenia mają być adekwatne do opisu problemu liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP, w którym minimalizuje się funkcję celu zależną od kosztu użycia łącza. Sama zależność między y a x jest przedstawiona na rys. 5.

14. Proszę sformułować zbiór równości/nierówności (być może dobierając również jakieś zmienne pomocnicze, np. całkowitoliczbowe, albo jakieś stałe) opisujących relację między zmienną x, oznaczającą obciążenie łącza ($0 \leq x \leq 20$), a wartością y, tj. kosztem użycia takiego łącza w zależności od tego obciążenia (dysponując tymi równościami/nierównościami powinniś-



Rysunek 6: Przykładowa funkcja opisująca taryfę liniową z dodatkowym kosztem instalacji/dzierżawy.

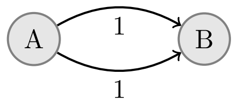


Rysunek 7: Przykładowa funkcja opisująca taryfę skokową.

my być w stanie po podstawieniu konkretnej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y). Ograniczenia mają być adekwatne do opisu problemu liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP, w którym minimalizuje się funkcję celu zależną od kosztu użycia łącza. Sama zależność między y a x jest przedstawiona na rys. 6. Jest to taryfa liniowa z dodatkowym kosztem instalacji/dzierżawy przy niezerowym obciążeniu.

15. Proszę sformułować zbiór równości/nierówności (być może dobierając również jakieś zmienne pomocnicze, np. całkowitoliczbowe, albo jakieś stałe) opisujących relację między zmienną x, oznaczającą obciążenie łącza ($0 \leq x \leq 20$), a wartością y, tj. kosztem użycia takiego łącza w zależności od tego obciążenia (dysponując tymi równościami/nierównościami powinniśmy być w stanie po podstawieniu konkretnej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y). Ograniczenia mają być adekwatne do opisu problemu liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP, w którym minimalizuje się funkcję celu zależną od kosztu użycia łącza. Sama zależność między y a x jest przedstawiona na rys. 7. Niniejszą taryfę można nazwać taryfą skokową (z dwojakim ryczałtem).

16. Na rys. 8 jest dany graf ważony (wagi krawędzi oznaczają przepływności łączy). Problem projektowania sieci polega na znalezieniu przepływu (być



Rysunek 8: Prosta sieć z dwoma węzłami i dwoma łukami.

może zbifurkowanego) o rozmiarze 0,95 między węzłami A i B, przy czym suma średnich opóźnień na wszystkich łączach ma być zminimalizowana. Z teorii masowej obsługi wiemy, że średnie opóźnienie na łączu o przepływności c, które przenosi średni ruch o wartości t, wyraża się wzorem:

$$d(c,t) = \frac{t}{c-t} \text{ dla } 0 \leq \frac{t}{c} < 1. \tag{1}$$

Proszę sformułować (definiując odpowiednie indeksy, zmienne, funkcję celu i ograniczenia) zadanie programowania liniowego LP lub MILP, które modeluje postawiony problem. Zależność (1) przybliżamy za pomocą następującej funkcji:

$$\widetilde{d}(c,t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & \text{jeśli } 0 \leq \frac{t}{c} \leq \frac{1}{3} \\ \frac{9}{2}t - c & \text{jeśli } \frac{1}{3} \leq \frac{t}{c} \leq \frac{2}{3} \\ 15t - 8c & \text{jeśli } \frac{2}{3} \leq \frac{t}{c} \leq \frac{4}{5} \\ 50t - 36c & \text{jeśli } \frac{4}{5} \leq \frac{t}{c} \leq \frac{9}{10} \\ 200t - 171c & \text{jeśli } \frac{9}{10} \leq \frac{t}{c} \leq \frac{19}{20} \\ 4000t - 3781c & \text{jeśli } \frac{19}{20} \leq \frac{t}{c} < 1. \end{cases}$$

Czy sformułowany problem jest wypukły albo wklęsły?

17. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: pewien amerykański operator sieci rozległych dysponuje dwoma odrębnymi sieciami na Zachodnim i Wschodnim Wybrzeżu USA. Postanowił je połączyć ze sobą i oczywiście chce zrobić to jak najtaniej. Na Zachodnim Wybrzeżu dysponuje ruterami rozmieszczonymi w następujących miastach: Seattle, San Francisco i Los Angeles. Natomiast rutery na Wschodnim Wybrzeżu znajdują się w Nowym Yorku, Waszyngtonie i Atlancie. Zdecydowano, że obie sieci zostaną połączone za pomocą jednego transkontynentalnego kabla optycznego, który będzie korzystał ze wzmacniacza umieszczonego albo w Chicago albo w Dallas. Kabel optyczny będzie z jednej strony podłączony do rutera na Zachodnim Wybrzeżu, a z drugiej — do rutera na Wschodnim Wybrzeżu. Operator jest w stanie oszacować KO_{ij}, tj. koszt położenia odcinka kabla między miastem i oraz miastem j (innego rodzaju koszty nie interesują nas w tym problemie).

18. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: w celu skonstruowania pewnego systemu naziemnego dla

łączności satelitarnej wybrano m potencjalnych lokalizacji anten. Do dyspozycji mamy p typów anten. Chcemy umieścić anteny co najwyżej trzech różnych typów, przy czym zakładamy, że w jedej lokalizacji będzie co najwyżej jedna antena określonego typu. Niech BW_i oznacza dostępną przepływność „w dół” realizowaną za pomocą pojedynczej anteny typu i. Niech KO_i oznacza wyrażony w złotych koszt instalacji pojedynczej anteny typu i. Ani przepływność „w dół” dla anteny ani jej koszt nie zależą od miejsca instalacji, a tylko od typu anteny. Anten typu i mamy dostępnych w magazynie MA_i i nie możemy liczyć na dodatkowe dostawy. Chcemy zbudować system, którego ogólny koszt jest jak najmniejszy i w którym sumaryczna przepływność „w dół” nie jest mniejsza niż B.

19. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: w celu skonstruowania pewnego systemu naziemnego dla łączności satelitarnej wybrano n potencjalnych lokalizacji anten. W każdej lokalizacji ma zostać zainstalowana jedna antena. W przypadku każdej instalowanej anteny trzeba zdecydować, jakiego będzie typu. Istnieje m typów anten. Niech BW_i oznacza dostępną przepływność „w dół” realizowaną za pomocą pojedynczej anteny typu i. Niech KO_i oznacza wyrażony w złotych koszt instalacji pojedynczej anteny typu i. Ani przepływność „w dół” dla anteny ani jej koszt nie zależą od miejsca instalacji, a tylko od typu anteny. System ma być zbudowany za nie więcej niż BU złotych. Anten typu i mamy dostępnych w magazynie MA_i i nie możemy liczyć na dodatkowe dostawy. Chcemy zbudować system, w którym sumaryczna przepływność „w dół” jest jak największa.

20. Poniżej zdefiniowano problem optymalizacyjny (z użyciem sformułowania zagregowanego typu węzeł-łącze, A/N-L) służący do znalezienia przepływów w sieciach oraz parametrów konfiguracyjnych. **(a)** O jakiego rodzaju konfigurację chodzi? **(b)** Proszę zinterpretować znaczenie stałych i zmiennych, których definicji nie podano. **(c)** Proszę zinterpretować znaczenie funkcji celu oraz wszystkich ograniczeń.

- Indeksy:
  - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łuki sieci;
  - ⋆ $s, t, v = 1, 2, \ldots, V$ węzły sieci.
- Stałe:
  - ⋆ h_{vt} (*należy zinterpretować znaczenie tych stałych*);
  - ⋆ $i(e)$ węzeł początkowy łuku e;
  - ⋆ $j(e)$ węzeł końcowy łuku e;
  - ⋆ c_e przepływność zainstalowana na łuku e;
  - ⋆ M bardzo duża liczba.
- Zmienne ciągłe nieujemne:
  - ⋆ Z (*należy zinterpretować znaczenie tej zmiennej*);
  - ⋆ w_e waga (metryka) łuku e;
  - ⋆ r_{vt} długość (waga) najkrótszej ścieżki z węzła v do węzła t ($r_{vv} \equiv 0$);

- $\star$ x_{et} przepływ na łuku e do węzła t.
- $\star$ y_{vt} (*należy zinterpretować znaczenie tych zmiennych*).

- Zmienne binarne:
  - $\star$ u_{et} zmienna przyjmująca wartość 1 wtedy i tylko wtedy gdy łuk e należy do najkrótszej ścieżki do węzła t.
- Funkcja celu (*należy zminimalizować jej znaczenie*): min Z.
- Ograniczenia (*należy zinterpretować znaczenie każdego z ograniczeń*):
  - $\star$ $\sum_{\{e:j(e)=t\}} x_{et} = \sum_{s\neq t} h_{st}$ $\quad t = 1, 2, \ldots, V$;
  - $\star$ $\sum_{\{e:i(e)=v\}} x_{et} - \sum_{\{e:j(e)=v\}} x_{et} = h_{vt}$ $\quad t, v = 1, 2, \ldots, V \quad t \neq v$;
  - $\star$ $\sum_t x_{et} \leq Zc_e$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E$;
  - $\star$ $0 \leq r_{j(e)t} + w_e - r_{i(e)t} \leq (1 - u_{et})\, M$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E \quad t = 1, 2, \ldots, V$;
  - $\star$ $1 - u_{et} \leq r_{j(e)t} + w_e - r_{i(e)t}$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E \quad t = 1, 2, \ldots, V$;
  - $\star$ $x_{et} \leq u_{et} \sum_{v\neq t} h_{vt}$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E \quad t = 1, 2, \ldots, V$;
  - $\star$ $0 \leq y_{i(e)t} - x_{et} \leq (1 - u_{et}) \sum_{v\neq t} h_{vt}$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E, t = 1, 2, \ldots, V$;
  - $\star$ $w_e \geq 1$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E$;
  - $\star$ $0 \leq Z \leq 1$.

21. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: operator poszukuje optymalnego rozpływu ruchu w sieci, biorąc pod uwagę maksymalizację zsumowanych przepływności przydzielonych łączom. Sieć jest opisana jako graf $G(V, E)$, w którym V reprezentuje węzły optyczne, zaś E reprezentuje łącza. Wolumen ruchu dla zapotrzebowania między dowolną parą węzłów (n, m) (gdzie: $n, m \in V$, $n \neq m$) jest równy $|n - m| \times 10$ Gb/s (np. wielkość ruchu między węzłami 2 i 7 ma wynosić $|7 - 2| \times 10 = 50$ Gb/s). Każde łącze reprezentuje jedno włókno optyczne przenoszące do 40 kanałów optycznych. Każdy kanał optyczny ma przepływność maksymalną 10 Gb/s. W sieci nie występuje konwersja długości fal, z których korzystają kanały optyczne, w związku z tym dane przenoszone między wybraną parą węzłów przez cały czas używają tych samych częstotliwości optycznych (np. jeśli zdecydujemy się przenosić ruch z węzła a do węzła b w taki sposób, że opuszcza on węzeł a w kanałach optycznych λ_7 i λ_{15}, to w takim razie ruch ten używa kanałów λ_7 i λ_{15} na całej swojej ścieżce do węzła b). Operator dysponuje pewnym budżetem, z którego musi sfinansować transmitowanie danych. Budżet wynosi 100 000 PLN. Długość dowolnego łącza (n, m) (gdzie: $n, m \in V$, $n \neq m$ i $(n, m) \in E$) jest równa $|n - m| \times 100$ km. Koszt transmisji 10 Gb/s ruchu na odległość 100 km to 1000 PLN.

1.5 Bibliografia uzupełniająca

Laurence A. Wolsey. *Integer Programming.* John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1998: bardzo dobry podręcznik nt. programowania całkowitoliczbowego.