Przedmiot:	Matematyka w projektowaniu sieci i systemów
Prowadzący:	Piotr Chołda piotr.cholda@agh.edu.pl
Kierunek:	Teleinformatyka
Semestr:	II sem. (zimowy) studiów magisterskich

Konspekt

Piotr Chołda

17 października 2018

1 Problemy alokacji zasobów i wymiarowania sieci

1.1 Proste problemy alokacji zasobów i wymiarowania

1. Pojęcie projektowania z użyciem tzw. przepływów wielotowarowych (*multi-commodity flows*).

2. Problemy wymiarowania (*dimensioning*) a problemy przydzielania (rozmieszczania/ustanawiania) zasobów (*resource allocation*), sieć zwymiarowana (*capacitated*) a sieć niezwymiarowana (*uncapacitated*). Problemy przydzielania zasobów są jednocześnie problemami rozpływu ruchu/przepływów, czyli problemami trasowania/rutingu.

3. Najprostszy problem wymiarowania: rozmieszczenia zasobów z jednoczesnym wymiarowaniem sieci (*Uncapacitated Flow Allocation* [*and Dimensioning*] *Problem*), tj. rozmieszczanie przepływów w sieci bez narzuconych przepływności i z dopuszczalnymi przepływnościami ciągłymi; problem programowania liniowego LP:

   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łuki;
     - ⋆ $v = 1, 2, \ldots, V$ węzły;
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ zapotrzebowania/żądania (*demands*), zapotrzebowanie z węzła v_1 do węzła v_2 nie musi być identyczne z zapotrzebowaniem z węzła v_2 do węzła v_1.
   - Stałe:
     - ⋆ h_d rozmiar zapotrzebowania d, które ma być zrealizowane (*volume of demand*);
     - ⋆ ξ_e koszt **zakupu** (np. wydzierżawienia, być może zainstalowania) jednostki przepływności na łączu e (*unit/marginal cost of link*), np. $\xi_4 = 2 \times 10^{-6}$ €/b/s;
     - ⋆ s_d węzeł źródłowy (źródło) dla zapotrzebowania d;
     - ⋆ t_d węzeł docelowy (ujście) dla zapotrzebowania d;
     - ⋆ $a_{ev} = 1$ jeśli łuk e rozpoczyna się w węźle v; 0, w przeciwnym przypadku;
     - ⋆ $b_{ev} = 1$ jeśli łuk e kończy się w węźle v; 0, w przeciwnym przypadku.
   - Zmienne:

* $\star$ $x_{ed} \geq 0$ wielkość przepływu realizującego zapotrzebowanie d na łuku e (***continuous*** *flow realizing/satisfying demand d on arc e*), wartość ciągła ($x_{ed} \in \mathbb{R}$);
* $\star$ y_e wielkość przepływności przydzielonej do użycia (np. wydzierżawienia, zainstalowania) na łączu e (***continuous*** *capacity to be installed on arc e*), wartość ciągła.

- Funkcja celu (*objective*, *goal function*): min $\sum_e \xi_e y_e$ (minimalizacja kosztu instalacji/użycia przepływności).
- Ograniczenia (*constraints*, będziemy też pisać *s.t.*, *subject to*):
  * $\star$ $\sum_e a_{ev}x_{ed} - \sum_e b_{ev}x_{ed} = \begin{cases} h_d & \text{jeśli } v = s_d \\ 0 & \text{jeśli } v \neq s_d, v \neq t_d \\ -h_d & \text{jeśli } v = t_d \end{cases}$

    dla wszystkich zapotrzebowań i WĘZŁÓW [NODEs]: $d = 1, 2, \ldots, D$, $v = 1, 2, \ldots, V$ (*flow conservation law*); jednocześnie są to ograniczenia związane z realizacją zapotrzebowania (*demand constraints*);
  * $\star$ $\sum_d x_{ed} = y_e$ dla wszystkich ŁUKÓW/ŁĄCZY [LINKs]: $e = 1, 2, \ldots, E$; ograniczenia na przepływność (*capacity constraints*);
  * $\star$ **wszystkie** zmienne są **nieujemne i ciągłe** (*non-negative continuous*).
- Zapis ograniczeń $\sum_d x_{ed} = y_e \quad e = 1, 2, \ldots, E$ często (tj. w różnych książkach, artykułach itd.) występuje w formie $\forall_{e \in \{1,\ldots,E\}} \sum_d x_{ed} = y_e$, a więc oznacza E różnych ograniczeń.
- Zamiast pisać $\sum_e a_{ev}x_{ed}$ moglibyśmy napisać również $\sum_{i \in N: e=(v,i) \in A} x_{ed}$, gdzie N to zbiór węzłów ($N = \{1, 2, \ldots, V\}$), natomiast A to zbiór łuków ($A = \{1, 2, \ldots, E\}$). Właśnie takie podejście będziemy preferować w przypadku implementacji problemów z użyciem programu CPLEX.

4. Problem przydzielenia/ustanowienia przepływów w sieci z zadanymi przepływnościami (CFAP, *Capacitated Flow Allocation Problem*):

- Indeksy: (jak poprzednio).
- Stałe:
  * $\star$ h_d (jak poprzednio);
  * $\star$ s_d (jak poprzednio);
  * $\star$ t_d (jak poprzednio);
  * $\star$ a_{ev} (jak poprzednio);
  * $\star$ b_{ev} (jak poprzednio);
  * $\star$ ξ_e koszt **użycia** (wcześniej zainstalowanej) jednostki przepływności na łączu e;
  * $\star$ c_e przepływność zainstalowana na łączu e.
- Zmienne:
  * $\star$ x_{ed} (jak poprzednio),
  * $\star$ y_e (jak poprzednio).

- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e$ (ale jeśli chcemy tylko znaleźć przepływy, co wcale nie musi być zadaniem trywialnym, to funkcja celu może być dowolna, bo może nas interesować jedynie znalezienie rozwiązania dopuszczalnego).
- Ograniczenia:
  - ⋆ $\sum_e a_{ev} x_{ed} - \sum_e b_{ev} x_{ed} = \begin{cases} h_d & \text{jeśli } v = s_d \\ 0 & \text{jeśli } v \neq s_d, v \neq t_d \\ -h_d & \text{jeśli } v = t_d \end{cases}$
    $d = 1, 2, \ldots, D,\ v = 1, 2, \ldots, V;$
  - ⋆ $\sum_d x_{ed} = y_e \qquad e = 1, 2, \ldots, E$
  - ⋆ $y_e \leq c_e \qquad e = 1, 2, \ldots, E;$
    (zmienne y_e są używane pomocniczo, żeby bardziej kompaktowo zapisać funkcję celu)
  - ⋆ wszystkie zmienne są nieujemne i ciągłe.

5. Różne sposoby formułowania problemów projektowania sieci dotyczących alokacji zasobów dla przepływów za pomocą LP: sformułowanie typu węzeł-łącze (N-L, *node-link formulation*), sformułowanie typu łącze-ścieżka (L-P, *link-path formulation*, ewent. *arc-flow formulation*). Przedtem używaliśmy sformułowania N-L:

   - Indeksy: d, e, v...
   - Zmienne: x_{ed},...
   - Ograniczenia:
     - ⋆ dla wszystkich WĘZŁÓW [NODEs]: $v = 1, 2, \ldots, V, \ldots;$
     - ⋆ dla wszystkich ŁUKÓW/ŁĄCZY [LINKs]: $e = 1, 2, \ldots, E;$
     - ⋆ ...

6. Problem CFAP w sformułowaniu łącze-ścieżka L-P:

   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łącza/łuki;
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ zapotrzebowania;
     - ⋆ $p = 1, 2, \ldots, P_d$ dopuszczalne ścieżki przepływów mogących realizować zapotrzebowanie d (*candidate paths for flows realizing demand d*), ścieżkę dopuszczalną o konkretnym numerze p dla konkretnego zapotrzebowania d oznaczamy jako $\mathcal{P}_{dp}$ (np. $\mathcal{P}_{101,72}$ oznacza 72. ścieżkę dopuszczalną dla zapotrzebowania nr 101).
   - Stałe:
     - ⋆ δ_{edp} = 1 jeśli łącze e należy do ścieżki p realizującej zapotrzebowanie d; w przeciwnym przypadku 0 ($\delta_{edp} = 1 \Leftrightarrow e \in \mathcal{P}_{dp}$);
     - ⋆ h_d (jak poprzednio);
     - ⋆ ξ_e (jak poprzednio);
     - ⋆ c_e (jak poprzednio).
   - Zmienne:

- $\star$ x_{dp} wielkość przepływu składowego realizującego zapotrzebowanie d, korzystającego ze ścieżki p;
- $\star$ y_e (jak poprzednio).

- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e$.
- Ograniczenia:
  - $\star$ $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} = y_e$ dla każdego z łączy [LINKs] $e = 1, 2, \ldots, E$;
  - $\star$ $y_e \leq c_e$ dla każdego z łączy [LINKs] $e = 1, 2, \ldots, E$;
  - $\star$ $\sum_p x_{dp} = h_d$ $d = 1, 2, \ldots, D$ ograniczenia związane z realizacją zapotrzebowania na różnych ŚCIEŻKACH [PATHs] (*demand constraints*);
  - $\star$ wszystkie zmienne są nieujemne i ciągłe.

7. Ścieżki dopuszczalne:

   - W rzeczywistości mamy do czynienia z $p(d) = 1, 2, \ldots, P_d$, czyli dokładnie należałoby pisać $x_{d,p(d)}$, np. $x_{101,72(101)}$ czyli wielkość przepływu mającego realizować zapotrzebowanie nr 101 na dopuszczalnej dla tego przepływu ścieżce nr 72.[1]
   - Pojedyncza ścieżka dla określonego zapotrzebowania d i numeru ścieżki p to po prostu podzbiór łączy: $\mathcal{P}_{dp} \subseteq \{1, 2, \ldots, E\}$.

8. „Właściwość $D + E$" rozwiązania problemu CFAP (właściwość jest dobrze widoczna przy sformułowaniu L-P). Warto pamiętać, że powyżej użyto nadmiarowej liczby ograniczeń: moglibyśmy zapisywać funkcję celu jako $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \sum_d \xi_e \delta_{edp} x_{dp}$, a ograniczenia typu LINK po prostu jako $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} \leq c_e$ (nie musimy w ogóle używać zmiennych y_e).

9. Problem UFAP w sformułowaniu L-P:

   - Indeksy i stałe: (jak poprzednio).
   - Zmienne:
     - $\star$ x_{dp} (jak poprzednio);
   - Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e$.
   - Ograniczenia:
     - $\star$ $\sum_p x_{dp} = h_d$ $d = 1, 2, \ldots, D$;
     - $\star$ $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} \leq y_e$ $e = 1, 2, \ldots, E$ (tutaj mogłaby też być równość, to jest po prostu wyliczenie obciążenia łączy);
     - $\star$ <u>**wszystkie**</u> zmienne są <u>**nieujemne i ciągłe**</u>.

   Sposób rozwiązywania bez użycia metody sympleksów:

   - $\sum_p x_{dp} = h_d$ $d = 1, 2, \ldots, D$;
   - $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} = y_e$ $e = 1, 2, \ldots, E$;

[1] Ale nie będziemy tak pisać na wykładzie, bo indeksowanie indeksów jest zaciemniające (i nie ma sensu w przypadku sformułowania w postaci ogólnej). Za to w sytuacji opracowywania problemów za pomocą oprogramowania typu CPLEX takie indeksowanie jest konieczne. W zapisie ogólnym pomijamy również przecinki między indeksami.

- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e = \sum_e \xi_e \sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} =$
$= \sum_d \sum_p \left(\sum_e \xi_e \delta_{edp}\right) x_{dp} = \sum_d \sum_p \kappa_{dp} x_{dp}$;
- $\kappa_{dp} = \sum_e \xi_e \delta_{edp}$: koszt ścieżki $\mathcal{P}_{dp}$;
- Rozwiązanie optymalne — oparte na użyciu najtańszej ścieżki dla każdego zapotrzebowania oddzielnie: $\mathbf{F}(\mathbf{y})|_{\min} = \sum_d \zeta_d h_d$;
- ζ_d: koszt najtańszej/najkrótszej (z punktu widzenia wag ξ_e) ścieżki realizującej zapotrzebowanie d;
- zastosowanie algorytmu najkrótszej ścieżki (dla każdego zapotrzebowania) — takie rozwiązanie jest możliwe, ponieważ problem zostaje **zdekomponowany** na D niezależnych podproblemów.

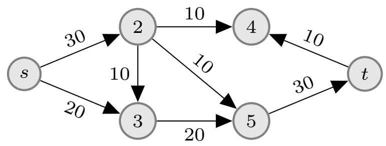
10. Wady i zalety różnych sformułowań:

- Liczba zmiennych/ograniczeń (w tabeli):

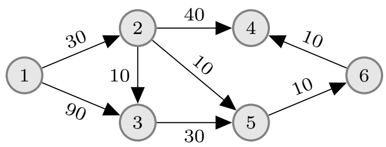
Sformułowanie	**Liczba zmiennych x**	**Liczba ograniczeń N+L lub L+P**
N-L	$\sim \frac{k \times V \times V \times (V-1)}{2} = \mathcal{O}(V^3)$	$\sim V \times V \times (V-1) + \frac{k \times V}{2} = \mathcal{O}(V^3)$
L-P	$\sim P \times V \times (V-1) = \mathcal{O}(V^2)$	$\sim \frac{k \times V}{2} + V \times (V-1) = \mathcal{O}(V^2)$

V: liczba węzłów, k: średni stopień węzła (przy potraktowaniu digrafu jako graf prosty).

- Sformułowanie N-L musi używać łuków, podczas gdy L-P może używać tylko nieskierowanych łączy. Można tak zrobić, jeśli przyjmuje się, że połączenia realizujące zapotrzebowania są dwukierunkowe (*bidirectional*), tj. używają tych samych łączy (każde łącze odpowiada parze przeciwnie skierowanych łuków o tych samych parametrach kosztowych i przepływnościowych) i są symetryczne (tj. w obu kierunkach jest ta sama wartość zapotrzebowania).
- W sformułowaniu L-P mamy wprost wyznaczone różne przepływy dla rozwiązania optymalnego (ważne z punktu widzenia zarządzania), a w N-L mamy je podane nie wprost i trzeba przetworzyć wynik, żeby uzyskać dane potrzebne do zarządzania siecią (tj. konfigurację przepływów między źródłem i ujściem zapotrzebowania): dla każdego zapotrzebowania należy rozwiązać problem poszukiwania maksymalnego przepływu z wartościami przepływności dopuszczalnych na łukach e równych optymalnym wartościom zmiennych x_{ed}.
- W sformułowaniu L-P nie musimy używać wszystkich możliwych ścieżek (które w N-L występują nie wprost), np. można ograniczyć długość dopuszczalnych ścieżek (ważne w sieciach optycznych).
- W sformułowaniu L-P zapotrzebowanie d wcale nie musi dotyczyć pary węzłów, a „ścieżka" $\mathcal{P}_{dp}$ może być np. drzewem o wielu liściach albo cyklem, albo może nawet być niespójnym zbiorem krawędzi (z jakichś powodów może nam to być potrzebne w przypadku konkretnego problemu, który jest bardziej złożony niż problem poszukiwania najprostszego rozpływu ruchu między punktami).



Rysunek 1: Digraf ważony związany z zadaniem 1



Rysunek 2: Digraf ważony związany z zadaniem 2

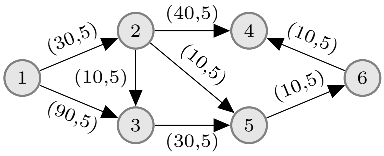
- Poszukiwanie dopuszczalnych ścieżek dla sformułowania L-P jest niezależne od rozwiązywania problemu optymalnego i może okazać się żmudne.
- Problemy podane w sformułowaniu L-P można łatwiej zdekomponować i uprościć sobie rozwiązywanie problemu.

1.2 Zadania

1. Dany jest digraf ważony, w którym wagi oznaczają przepływności łączy reprezentowanych przez łuki (rys. 1). Proszę podać wielkość przepływu maksymalnego między wierzchołkami s oraz t, a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego przepływu (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu).

2. Dany jest digraf ważony (reprezentujący sieć), w którym wagi oznaczają koszty jednostkowe użycia przepływności na łączach (rys. 2). Proszę sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania najtańszego rozpływu ruchu, jeśli w sieci istnieją dwa zapotrzebowania: pierwsze między węzłami 1 i 6, a drugie między węzłami 2 i 4. Wolumen ruchu, który ma być przenoszony na potrzeby każdego z zapotrzebowań to 10. Proszę użyć sformułowania typu N-L (węzeł-łącze); indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu. Jakie jest rozwiązanie optymalne tego problemu?

3. Dany jest digraf ważony, w którym wagi podane w nawiasie oznaczają: pierwsza z nich — koszt jednostkowy użycia przepływności na łukach, druga z nich — przepływność dostępną na łączu (rys. 3). Proszę sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania najtańszego rozpływu ruchu, jeśli w sieci istnieją dwa zapotrzebowania: pierwsze między węzłami 1 i 6, a drugie między węzłami 2 i 4. Wolumen ruchu, który ma być przenoszony na potrzeby każdego z zapotrzebowań to 10. Proszę użyć sformułowania typu L-P (łącze-ścieżka); indeksy, stałe,



Rysunek 3: Digraf ważony związany z zadaniem 3

zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu. Jakie jest rozwiązanie optymalne tego problemu?