【チェック問題：数列】

(a_n) を数列とし，c を定数とし，$a_1 = c$ とする。　次のとき，(a_n) の一般項はそれぞれどうかけるか。

(1) $a_{n+1} = a_n$

(2) $a_{n+1} = a_n + c$

(3) $a_{n+1} = ca_n$

(4) $a_{n+1} = ca_n + c$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n = kc$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n = (k+1)c$

【入試問題：数列】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) 正の整数 k, l に対して

$$\frac{k}{k+l-1} a_{k+1} a_l + \frac{l}{k+l-1} a_k a_{l+1} = a_k a_l$$

が成り立つことを示せ。

(2) 正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} a_k a_{m-k+1} = 1$$

が成り立つことを示せ。

【解答：数列】

(1) $a_n = c$

(2) $a_n = nc$

(3) $a_n = c^n$

(4) $a_n = \begin{cases} \dfrac{c^{n+1}-c}{c-1} & (c \neq 1), \\ n & (c = 1). \end{cases}$

(5) $a_n = c$

(6) $\begin{cases} \text{解はない} & (c \neq 0), \\ a_n = 0 & (c = 0). \end{cases}$

【解答：入試問題】

(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{k}{k+l-1} \cdot \frac{2k-1}{2k}\, a_k a_l + \frac{l}{k+l-1}\, a_k \cdot \frac{2l-1}{2l}\, a_l \\
&= a_k a_l = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(2)

ある正の整数mについて，　$S_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k a_{m-k+1} = 1$　とすると，(1) より

$$
\begin{aligned}
1 = S_m &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\, a_{k+1} a_{m-k+1} + \frac{m-k+1}{m}\, a_k a_{m-k+2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m}\, a_{k+1} a_{m-k+1} + a_{m+1} a_1 + a_1 a_{m+1} + \sum_{k=2}^{m} \frac{m-k+1}{m}\, a_k a_{m-k+2} \\
&= a_1 a_{m+1} + \sum_{k=2}^{m} \frac{k-1}{m}\, a_k a_{m-k+2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{m-k+1}{m}\, a_k a_{m-k+2} + a_{m+1} a_1 \\
&= a_1 a_{m+1} + \sum_{k=2}^{m} a_k a_{m-k+2} + a_{m+1} a_1 \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} a_k a_{(m+1)-k+1} \\
&= S_{m+1}
\end{aligned}
$$

$S_1 = a_1 a_1 = 1$ なので、すべての正の整数 m に対して $S_m = 1$ が成り立つ。