【チェック問題：微分】

(1) n を任意の自然数とする。$(x+1)^n$ を $\sum$ を用いて表せ。

(2) (1) の等式を証明せよ。

(3) $y=(x+1)^4$ の $x=1$ における微分係数を求めよ。

(4) a を実数定数とする。$y=x^3-3ax$ の増減表とグラフをかき、極値を求めよ。

【解答：微分】

(1)

展開からの類推により、

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$

(2)

(i)
$\sum_{k=0}^{1} {}_1\mathrm{C}_k x^k = {}_1\mathrm{C}_0 x^0 + {}_1\mathrm{C}_1 x^1 = 1 + x = (x+1)^1$
より、$n=1$ のとき $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ は成り立つ。
(ii)
ある自然数 m で $(x+1)^m = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k$ が成り立つと仮定する。
このとき、

$$\begin{aligned}
(x+1)^{m+1} &= (x+1)(x+1)^m \\
&= (x+1)\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} {}_m\mathrm{C}_{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k \\
&= {}_m\mathrm{C}_0 x^0 + \sum_{k=1}^{m} ({}_m\mathrm{C}_{k-1} + {}_m\mathrm{C}_k) x^k + {}_m\mathrm{C}_m x^{m+1} \\
&= {}_{m+1}\mathrm{C}_0 x^0 + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k x^k + {}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1} x^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k x^k
\end{aligned}$$

よって、すべての自然数 n について $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ は成り立つ。

(3)

$$y = {}_4\mathrm{C}_4 x^4 + {}_4\mathrm{C}_3 x^3 + {}_4\mathrm{C}_2 x^2 + {}_4\mathrm{C}_1 x + {}_4\mathrm{C}_0 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

なので、

$$y' = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$$

$x=1$ を代入して、求める微分係数は 32。

(4)

$y' = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ である。

■(i) $a > 0$ のとき　$y' = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{a}$ のときである。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$2\sqrt{a^3}$	$\searrow$	$-2\sqrt{a^3}$	$\nearrow$

極大値：$x = -\sqrt{a}$ のとき $y = 2\sqrt{a^3}$、極小値：$x = \sqrt{a}$ のとき $y = -2\sqrt{a^3}$。

■(ii) $a = 0$ のとき　$y' = 3x^2 \geqq 0$ となり、$x = 0$ でのみ $y' = 0$ となる。

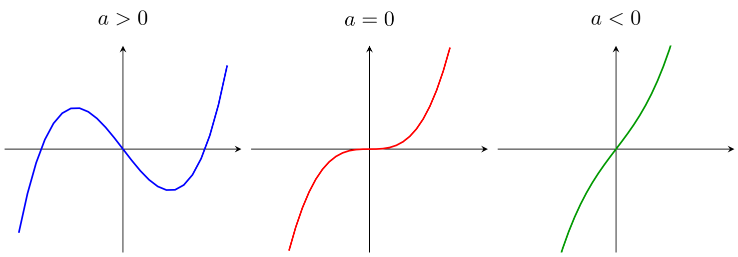
x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$

極値はない。

■(iii) $a < 0$ のとき　常に $y' > 0$ である。

x	$\cdots$
y'	$+$
y	$\nearrow$

極値はない。



【補足：組み合わせの定義と性質】

n, k を $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。組み合わせ ${}_n\mathrm{C}_k$ を以下のように定義する。

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} $$

このとき、次の等式（パスカルの三角形の性質）が成り立つことを証明せよ。

$$ {}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{C}_k \quad (1 \leqq k \leqq n) $$

■証明　定義にもとづき、左辺を計算する。

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = {}_{n+1}\mathrm{C}_k \end{aligned} $$