

【チェック問題：最大・最小】

a, b, c, d, e は実定数、 x, y, z, θ は実変数とする。以下の設定において、最大値・最小値とそれを取りうる変数の値を、その有無まで含めてそれぞれ求めよ。

(1) $y = 2bx + c \quad (d \leq x < e)$

(18) $x + y = 1 \quad (0 < x < 1)$ のときの $\log_a x + \log_a y$

(2) $y = ax^2 + 2bx + c \quad (d \leq x < e)$

(19) $xy = a \quad (a, x, y > 0, a \neq 1)$ のとき $\log_a x \cdot \log_a y$

(3) $y = |x^2 - 2x| \quad (d \leq x \leq e)$

(20) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(4) $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y$

(21) $x + y + z = 1, xy + yz + zx = -1$ のときの
 $P = x^3 + y^3 + z^3$

(5) $x^2 + y^2 = 1$ のときの
 $x + y, \quad xy, \quad x^{-2} + y^{-2}$

(22) $y = a^{3x} + 3a^{2x} + 3a^x + 3a^{-x} + 3a^{-2x} + a^{-3x}$

(6) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

(23) $y = |x^2 + x|$ と $y = ax + b$ が 3 点で交わる時に囲まれる面積

(7) $y = \cos^2 \theta + 3 \sin \theta \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$

(24) $\min_{t \in \mathbb{R}} |\mathbf{a} - t\mathbf{b}|$

(8) $P_k = \binom{n}{k} 2^{-n}$

(25) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1, |k\mathbf{a} + l\mathbf{b}| = 1$ のときの $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

(9) $\triangle ABC (a \geq b \geq c)$ の面積二等分線 PQ の最小値

(26) $x^2 + y^2 = 1$ のときの $kx + ly$

(10) $(x^2 + y^2)(x^{-2} + y^{-2})$

(27) $|\mathbf{x}| = 1, |\mathbf{y} - (a, a)| = 1$ のときの $x_1 y_1 + x_2 y_2$

(11) $y = cx$ 上の点 P に対する $AP + PB$ の最小
ただし $A(a, 0), B(b, 0)$

(28) $x^2 - xy + y^2 = 1$ のときの $x^2 + y^2$

(29) $x + y = 1 \quad (x, y > 0)$ のとき $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$

(12) $|x| + |y| \leq 1$ のときの $x + y$

(30) $y = \sin^3 \theta - \cos^3 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

(13) $x^2 + y^2 \leq 1, u = x + y, v = xy$ の領域を図示し
 $u + v$

(31) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$ のときの $\frac{y}{x}$

(14) $a \sin \theta + b \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(32) $f(a) = \int_0^1 |x(x - a)| dx \quad (0 \leq a \leq 1)$

(15) $x^2 + y^2 = 1$ のときの $ax + by$

(33) $y = (\sin \theta + \cos \theta)^4 + (\sin \theta - \cos \theta)^4$

(16) $y = \sin 2\theta + \sin \theta + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(34) $x + y = 1 \quad (x, y > 0)$ のときの $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$

(17) $y = a^{2x} + 2a^x + 2a^{-x} + a^{-2x} \quad (a > 0, a \neq 1)$

(35) $y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 24x + 153}$

$$(36) \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ のときの } x + 2y + 2z$$

$$(37) \ y = \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$$

$$(38) \ x, y, z \geq 0, x + y + z = 3 \text{ のときの } xyz$$

$$(39) \ y = \log_2 x + \log_x 8 \quad (x > 1)$$

$$(40) \ y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$

$$(41) \ f(x) = \max(2x + 1, -x + 4, x^2 - 4x + 5) \text{ の最小}$$

$$(42) \ x + y = 1 \ (x, y > 0) \text{ のとき } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$$

$$(43) \ x^2 + y^2 = 1 \text{ のときの } \frac{y-2}{x-3}$$

$$(44) \ x + y + z = 1, x, y, z \geq 0 \text{ のときの } x^2 + y^2 + z^2$$

$$(45) \ y = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$$

$$(46) \ a_n = \frac{10^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ の最大}$$

$$(47) \ A(2, 0) \text{ と } y = x^2 \text{ 上の点 } P \text{ との距離 } AP$$