

【チェック問題：微分】

- (1) n を任意の自然数とする。 $(x+1)^n$ を \sum を用いて表せ。
- (2) (1) の等式を証明せよ。
- (3) $y = (x+1)^4$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。
- (4) a を実数定数とする。 $y = x^3 - 3ax$ の増減表とグラフをかき、極値を求めよ。

【解答】

(1)

展開からの類推により、

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k$$

(2)

(i)

$$\sum_{k=0}^1 {}_1C_k x^k = {}_1C_0 x^0 + {}_1C_1 x^1 = 1 + x = (x+1)^1$$

より、 $n=1$ のとき $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k$ は成り立つ。

(ii)

ある自然数 m で $(x+1)^m = \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^k$ が成り立つと仮定する。

このとき、

$$\begin{aligned}(x+1)^{m+1} &= (x+1)(x+1)^m \\&= (x+1) \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^k \\&= \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^k \\&= \sum_{k=1}^{m+1} {}_mC_{k-1} x^k + \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^k \\&= {}_mC_0 x^0 + \sum_{k=1}^m ({}_mC_{k-1} + {}_mC_k) x^k + {}_mC_m x^{m+1} \\&= {}_{m+1}C_0 x^0 + \sum_{k=1}^m {}_{m+1}C_k x^k + {}_{m+1}C_{m+1} x^{m+1} \\&= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}C_k x^k\end{aligned}$$

よって、すべての自然数 n について $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k$ は成り立つ。

(3)

$$y = {}_4C_4 x^4 + {}_4C_3 x^3 + {}_4C_2 x^2 + {}_4C_1 x + {}_4C_0 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

なので、

$$y' = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$$

$x=1$ を代入して、求める微分係数は 32。

(4)

$$y' = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a) \text{ である。}$$

■(i) $a > 0$ のとき $y' = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{a}$ のときである。

x	\cdots	$-\sqrt{a}$	\cdots	\sqrt{a}	\cdots
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	$2\sqrt{a^3}$	\searrow	$-2\sqrt{a^3}$	\nearrow

極大値： $x = -\sqrt{a}$ のとき $y = 2\sqrt{a^3}$ 、極小値： $x = \sqrt{a}$ のとき $y = -2\sqrt{a^3}$ 。

■(ii) $a = 0$ のとき $y' = 3x^2 \geq 0$ となり、 $x = 0$ でのみ $y' = 0$ となる。

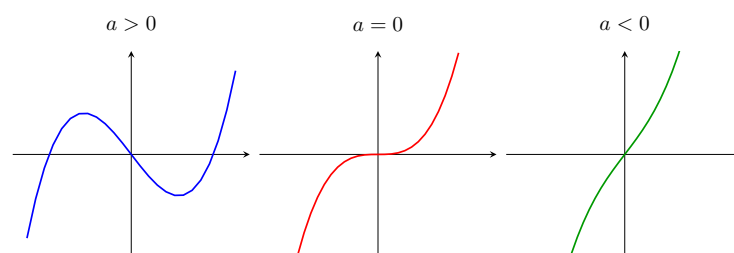
x	\cdots	0	\cdots
y'	$+$	0	$+$
y	\nearrow	0	\nearrow

極値はない。

■(iii) $a < 0$ のとき 常に $y' > 0$ である。

x	\cdots
y'	$+$
y	\nearrow

極値はない。



【補足：組み合わせの定義と性質】

n, k を $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。組み合わせ ${}_nC_k$ を以下のように定義する。

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

このとき、次の等式（パスカルの三角形の性質）が成り立つことを証明せよ。

$${}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

■証明 定義にもとづき、左辺を計算する。

$$\begin{aligned} {}_nC_{k-1} + {}_nC_k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = {}_{n+1}C_k \end{aligned}$$