【計算問題：3 次関数と共通接線】

2 つの 3 次関数

$$f(x) = 25x^3 - 15x^2 - 72x$$
$$g(x) = x^3 + 15x^2 + 28$$

の共通接線の方程式をすべて求めよ。

【計算過程：3 次関数と共通接線】

$$\begin{cases} f(x) = 25x^3 - 15x^2 - 72x \\ g(x) = x^3 + 15x^2 + 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 75x^2 - 30x - 72 \\ g'(x) = 3x^2 + 30x \end{cases}$$

より、共通接線が $y = f(x)$ と接する点を $(a,\, f(a))$、$y = g(x)$ と接する点を $(b,\, g(b))$ とおく。傾きと切片が一致するので次の式が成り立つ：

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - af'(a) = g(b) - bg'(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75a^2 - 30a - 72 = 3b^2 + 30b \\ -50a^3 + 15a^2 = -2b^3 - 15b^2 + 28 \end{cases}$$

第 1 式を 3 で割る

$$25a^2 - 10a - 24 = b^2 + 10b$$

平方完成する

$$(5a-1)^2 = (b+5)^2$$

よって

$$b = 5a - 6,\ -5a - 4$$

(i) $b = 5a - 6$ のとき

$$\begin{aligned} b^2 &= (5a-6)^2 = 25a^2 - 60a + 36 \\ b^3 &= (5a-6)^3 = 125a^3 - 450a^2 + 540a - 216 \end{aligned}$$

これを

$$-50a^3 + 15a^2 = -2b^3 - 15b^2 + 28$$

に代入する

$$\begin{aligned} -50a^3 + 15a^2 &= -2(125a^3 - 450a^2 + 540a - 216) - 15(25a^2 - 60a + 36) + 28 \\ &= -250a^3 + 900a^2 - 1080a + 432 - 375a^2 + 900a - 540 + 28 \\ 0 &= -200a^3 + 510a^2 - 180a - 80 = -10(a-2)(5a-4)(4a+1) \end{aligned}$$

よって

$$a = 2, \quad \frac{4}{5}, \quad -\frac{1}{4}$$

$b = 5a - 6$ より

$$(a,\, b) = (2,\, 4)\,,\ \left(\frac{4}{5},\, -2\right),\ \left(-\frac{1}{4},\, -\frac{29}{4}\right)$$

(ii) $b=-5a-4$ のとき

$$
\begin{aligned}
b^2 &= (-5a-4)^2 = 25a^2+40a+16\\
b^3 &= (-5a-4)^3 = -125a^3-300a^2-240a-64
\end{aligned}
$$

同様に代入する

$$
\begin{aligned}
-50a^3+15a^2 &= -2(-125a^3-300a^2-240a-64)-15(25a^2+40a+16)+28\\
&= 250a^3+600a^2+480a+128-375a^2-600a-240+28
\end{aligned}
$$

$$
0 = 300a^3+210a^2-120a-84 = 6(5a^2-2)(10a+7)
$$

よって

$$
a = -\frac{7}{10}, \quad \pm\frac{\sqrt{10}}{5}
$$

$b=-5a-4$ より

$$
(a,\,b) = \left(-\frac{7}{10},\,-\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{10}}{5},\,-4-\sqrt{10}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\,-4+\sqrt{10}\right)
$$

以上をまとめる。

求める共通接線を $y=mx+n$ とすると，

$$
m = f'(a) = g'(b),\ n = f(a)-af'(a)
$$

である。ここで、$F(a)=f(a)-af'(a)$ とおく。

(1) $(a,\,b)=(2,\,4)$ のとき

$$
\begin{aligned}
m &= g'(4) = 48+120 = 168\\
n &= F(2) = -400+60 = -340
\end{aligned}
$$

よって

$$
y = 168x-340
$$

(2) $(a,\,b)=\left(\frac{4}{5},\,-2\right)$ のとき

$$
\begin{aligned}
m &= g'(-2) = 12-60 = -48\\
n &= F\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{128}{5}+\frac{48}{5} = -16
\end{aligned}
$$

よって

$$
y = -48x-16
$$

(3) $(a,\, b) = \left(-\frac{1}{4},\, -\frac{29}{4}\right)$ のとき

$$\begin{aligned} m &= g'\left(-\frac{29}{4}\right) = 3 \cdot \frac{29^2}{16} - 30 \cdot \frac{29 \cdot 4}{16} \\ &= \frac{29(87-120)}{16} = -\frac{29 \cdot 33}{16} = -\frac{(30-1)\,(30+3)}{16} = -\frac{900+60-3}{16} = -\frac{957}{16} \\ n &= F\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{50}{64} + \frac{60}{64} = \frac{110}{64} = \frac{55}{32} \end{aligned}$$

よって

$$y = -\frac{957}{16}x + \frac{55}{32}$$

(4) $(a,\, b) = \left(-\frac{7}{10},\, -\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$\begin{aligned} m &= g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{60}{4} = -\frac{57}{4} \\ n &= F\left(-\frac{7}{10}\right) = \left(-\frac{7^3}{20}\right) + \left(-\frac{15 \cdot 7^2}{100}\right) = \frac{35 \cdot 49}{100} + \frac{15 \cdot 49}{100} = \frac{50 \cdot 49}{100} = \frac{49}{2} \end{aligned}$$

よって

$$y = -\frac{57}{4}x + \frac{49}{2}$$

(5) $(a,\, b) = \left(\frac{\sqrt{10}}{5},\, -4-\sqrt{10}\right)$ のとき

$$\begin{aligned} m &= f'\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 75 \cdot \frac{2}{5} - 30\sqrt{\frac{2}{5}} - 72 = 30 - 6\sqrt{10} - 72 = -42 - 6\sqrt{10} \\ n &= F\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -50\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^3 + 15 \cdot \frac{2}{5} = 6 - 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

よって

$$y = -\left(42 + 6\sqrt{10}\right)x + 6 - 4\sqrt{10}$$

(6) $(a,\, b) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\, -4+\sqrt{10}\right)$ のとき

$$\begin{aligned} m &= f'\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 75 \cdot \frac{2}{5} + 30\sqrt{\frac{2}{5}} - 72 = 30 + 6\sqrt{10} - 72 = -42 + 6\sqrt{10} \\ n &= F\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -50\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^3 + 15 \cdot \frac{2}{5} = 6 + 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

よって

$$y = -(42 - 6\sqrt{10})x + 6 + 4\sqrt{10}$$

【解答：3 次関数と共通接線】

表 1　共通接線の一覧

No.	接点 a($f(x)$ 側)	接点 b($g(x)$ 側)	共通接線の方程式 $y = mx + n$
1	2	4	$y = 168x - 340$
2	$\frac{4}{5}$	-2	$y = -48x - 16$
3	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{29}{4}$	$y = -\frac{957}{16}x + \frac{55}{32}$
4	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$y = -\frac{57}{4}x + \frac{49}{2}$
5	$\frac{\sqrt{10}}{5}$	$-4 - \sqrt{10}$	$y = -(42 + 6\sqrt{10})x + 6 - 4\sqrt{10}$
6	$-\frac{\sqrt{10}}{5}$	$-4 + \sqrt{10}$	$y = -(42 - 6\sqrt{10})x + 6 + 4\sqrt{10}$

【グラフ：3 次関数と共通接線】