## 【演習：共通接線から現れる三角比の深淵】

2 つの曲線 $y = 28x^3$ と $y = 7x^3 - 21x^2 + 21x - 1$ の共通接線を求める過程において、次の方程式が得られた。

$$7q^3 - 14q^2 + 7q - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の解が、正七角形の諸性質と密接に関わっていることを以下の誘導に従って証明せよ。

■問題　$\theta = \frac{k\pi}{7}$ $(k = 1, 2, 3)$ とおく。

1. $\sin 7\theta = 0$ を利用して、$\sin^2\theta$ が満たす 3 次方程式を導け。
2. 方程式 $(*)$ の 3 つの解が $q = \frac{1}{4\sin^2\theta}$ であることを示せ。
3. 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} = 8$$

## 【解答】

### (1)

$\sin 7\theta$ を $\sin\theta$ の多項式で表すと、

$$\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$$

$\theta = \frac{k\pi}{7}$ $(k = 1, 2, 3)$ のとき $\sin 7\theta = 0$ かつ $\sin\theta \neq 0$ なので、両辺を $\sin\theta$ で割り、$s = \sin^2\theta$ とおくと、

$$64s^3 - 112s^2 + 56s - 7 = 0$$

### (2)

$x = 4s = 4\sin^2\theta$ とおき、(1) の方程式に $s = \frac{x}{4}$ を代入して整理すると、

$$64\left(\frac{x}{4}\right)^3 - 112\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 56\left(\frac{x}{4}\right) - 7 = 0 \iff x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$$

ここで $q = \frac{1}{x} = \frac{1}{4\sin^2\theta}$ とおき、この式に $x = \frac{1}{q}$ を代入すると、

$$\left(\frac{1}{q}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{q}\right)^2 + 14\left(\frac{1}{q}\right) - 7 = 0$$

両辺に $q^3$ を掛けて整理することで、方程式 $(*)$ が得られる。

$$7q^3 - 14q^2 + 7q - 1 = 0$$

### (3)

方程式 $(*)$ の 3 つの解は $q_k = \frac{1}{4\sin^2\frac{k\pi}{7}}$ $(k = 1, 2, 3)$ である。
解と係数の関係より、

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{14}{7} = 2$$

したがって、

$$\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{4\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{4\sin^2\frac{3\pi}{7}} = 2$$

両辺を 4 倍することで、次式を得る。

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} = 8$$