【最難関：共通接線の探究】

2 つの曲線 $C_1 : y = 28x^3$ と $C_2 : y = 7x^3 - 21x^2 + 21x - 4$ の両方に接する直線（共通接線）の方程式をすべて求め、その本数を示せ。

【解答】

$f(x)=28x^3,\ g(x)=7x^3-21x^2+21x-4=7(x-1)^3+3$ とおく。各々の導関数は $f'(x)=84x^2,\ g'(x)=21(x-1)^2$ である。C_1 上の接点を $(p,f(p))$、C_2 上 the 接点を $(q,g(q))$ とすると、接線の一致条件より

1. $84p^2=21(q-1)^2 \iff 4p^2=(q-1)^2 \iff p=\pm\frac{q-1}{2}$
2. $-56p^3=-14q^3+21q^2-4$（y 切片の一致）

1. $p=\frac{q-1}{2}$ のとき

(2) に代入して整理すると、$7q^3-21q+11=0$ を得る。この 3 次方程式の判別式 D は $D=-4(7)(-21)^3-27(7^2)(11^2)=99261>0$ であり、異なる 3 つの実数解をもつ。

2. $p=-\frac{q-1}{2}$ のとき

(2) に代入して整理すると、$7q^3-14q^2+7q-1=0$ を得る。この式の判別式は $D=49>0$ であり、異なる 3 つの実数解をもつ。

以上より、共通接線は合計で **6 本** 存在する。

6 本の共通接線をもつ 3 次関数の配置