ソード・ワールド2.5の威力の期待値計算

威力の期待値計算（クリティカル・レイなどは考慮しない）

$$E = \Sigma_{X<C}P(X)V(X) + \Sigma_{X\geqq C}P(X)(V(X)+E)$$

$$E = \Sigma_{X<C}P(X)V(X) + \Sigma_{X\geqq C}P(X)E + \Sigma_{X\geqq C}P(X)V(X)$$

$$E(1-\Sigma_{X\geqq C}P(X)) = \Sigma_{X}P(X)V(X)$$

$$E = \frac{\Sigma_{X}P(X)V(X)}{1-\Sigma_{X\geqq C}P(X)}$$

威力の期待値計算（固定値A追加）

固定値は1/36で自動失敗するので、

$$E = \frac{\Sigma_{X}P(X)V(X)}{1-\Sigma_{X\geqq c}P(X)} + \frac{35}{36}A$$

威力の期待値計算（固定値A追加・必殺攻撃追加）

必殺攻撃時の出目の確立をP′(X)とすると

$$E = \frac{\Sigma_{X}P'(X)V(X)}{1-\Sigma_{X\geqq C}P'(X)} + \frac{35}{36}A$$

威力の期待値計算（固定値A追加・必殺攻撃追加・クリティカルレイ）

威力の期待値計算（必殺攻撃追加）をE′とし、クリティカルレイ時の確立をP′′(X)とすると

$$E = \Sigma_{X<C}P''(X)V(X) + \Sigma_{X\geqq C}P''(X)(V(X)+E') + \frac{35}{36}A$$

$$E = \Sigma_{X<C}P''(X)V(X) + \Sigma_{X\geqq C}P''(X)V(X) + \Sigma_{X\geqq C}P''(X)E' + \frac{35}{36}A$$

$$E = \Sigma_{X}P''(X)V(X) + \Sigma_{X\geqq C}P''(X)E' + \frac{35}{36}A$$

威力の期待値計算（固定値A追加・必殺攻撃追加・クリティカルレイ・首切り）

クリティカルしたときの期待値をEnとし、1≤n≤m-1とすると、

Emは、

$$E_m = \frac{\Sigma_{X}P'(X)V_m(X)}{1-\Sigma_{X\geqq C_m}P'(X)}$$

となり、Enは、

$$E_n = \Sigma_{X<C_n}P'(X)V_n(X) + \Sigma_{X\geqq C_n}P'(X)(V_n(X)+E_{n+1})$$

$$E_n = \Sigma_{X}P'(X)V_n(X) + \Sigma_{X\geqq C_n}P'(X)E_{n+1}$$

そして、E0は、

$$E_0 = \Sigma_{X}P''(X)V_0(X) + \Sigma_{X\geqq C_0}P''(X)E_1$$

n≥1のときクリティカル値や確率は変わらないので、

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \Sigma_{X\geqq C_n}P'(X) \qquad (n\geqq 1)$$

よって、Enは、

$$E_n = \rho E_{n+1} + \Sigma_X P'(X) V_n(X)$$

$$E_n = \rho(\rho E_{n+2} + \Sigma_X P'(X) V_n(X)) + \Sigma_X P'(X) V_n(X)$$

$$E_n = \rho^{m-n} \frac{\Sigma_X P'(X) V_m(X)}{1-\rho} + \Sigma_{a=n}^{m-1} \rho^{a-n} (\Sigma_X P'(X) V_a(X))$$

よって、求めるE0は、

$$E_0 = \frac{35}{36} A + \Sigma_X P''(X) V_0(X) + \Sigma_{X \geqq C_0} P''(X) (\rho^{m-1} \frac{\Sigma_X P'(X) V_m(X)}{1-\rho} + \Sigma_{n=1}^{m-1} \rho^{n-1} (\Sigma_X P'(X) V_n(X)))$$

以下計算例

k32[10]+10

まず、威力表の部分だけ計算すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{\frac{1*0}{36} + \frac{2*3}{36} + \frac{3*4}{36} + \frac{4*5}{36} + \frac{5*6}{36} + \frac{6*7}{36} + \frac{5*8}{36} + \frac{4*10}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{2*10}{36} + \frac{1*11}{36}}{1 - (\frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36})} \\ &= \frac{0 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 40 + 30 + 20 + 11}{36 - 6} \\ &= \frac{251}{30} \\ &= 8.36666666666... \end{aligned}$$

最後に固定値を足して

$$E = \frac{251}{30} + \frac{35}{36} * 10 = \frac{19536}{1080} = 18.0888888888...$$

k70[8]+70#9

まず、威力表の部分だけ計算すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{\frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{0*9}{36} + \frac{0*10}{36} + \frac{0*12}{36} + \frac{0*14}{36} + \frac{0*16}{36} + \frac{0*17}{36} + \frac{0*18}{36} + \frac{0*19}{36} + \frac{35*19}{36}}{1 - \frac{35}{36}} \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 665}{36 - 35} \\ &= \frac{665}{1} \\ &= 665 \end{aligned}$$

最後に固定値を足して

$$E = 665 + \frac{35}{36} * 70 = 733.055555555...$$

k70[8]+70$+9

まず、クリティカル・レイを考慮しない威力表の部分だけ計算すると

$$\begin{aligned} E' &= \frac{\frac{1*0}{36} + \frac{2*5}{36} + \frac{3*9}{36} + \frac{4*10}{36} + \frac{5*12}{36} + \frac{6*14}{36} + \frac{5*16}{36} + \frac{4*17}{36} + \frac{3*18}{36} + \frac{2*19}{36} + \frac{1*19}{36}}{1 - \frac{15}{36}} \\ &= \frac{0 + 10 + 27 + 40 + 60 + 84 + 80 + 68 + 54 + 38 + 19}{36 - 15} \\ &= \frac{480}{21} \\ &= 22.857142857142857... \end{aligned}$$

次に、クリティカル・レイを考慮した威力表の部分だけを計算すると

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{0*9}{36} + \frac{0*10}{36} + \frac{0*12}{36} + \frac{0*14}{36} + \frac{0*16}{36} + \frac{0*17}{36} + \frac{0*18}{36} + \frac{0*19}{36} + \frac{35*19}{36} + \frac{35}{36} * E' \\
&= \frac{0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+13965+16800}{36*21} \\
&= \frac{30765}{756} \\
&= 40.6944444444
\end{aligned}
$$

最後に固定値を足して

$$
E = \frac{30765}{756} + \frac{35}{36} * 70 = 108.750
$$

k70[8]+70$+1#1

まず、威力表の部分だけ計算すると

$$
\begin{aligned}
E' &= \frac{\frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*12}{36} + \frac{5*14}{36} + \frac{6*16}{36} + \frac{5*17}{36} + \frac{4*18}{36} + \frac{3*19}{36} + \frac{3*19}{36}}{1 - \frac{21}{36}} \\
&= \frac{0+0+18+30+48+70+96+85+72+57+57}{36-21} \\
&= \frac{533}{15} \\
&= 35.53333333...
\end{aligned}
$$

次に、クリティカル・レイを考慮した威力表の部分だけを計算すると

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{0*9}{36} + \frac{2*10}{36} + \frac{3*12}{36} + \frac{4*14}{36} + \frac{5*16}{36} + \frac{6*17}{36} + \frac{5*18}{36} + \frac{4*19}{36} + \frac{6*19}{36} + \frac{26}{36} * E' \\
&= \frac{0+0+0+20+36+56+80+102+90+76+114}{36} + \frac{26*533}{36*15} \\
&= \frac{574}{36} + \frac{13858}{36*15} \\
&= \frac{22468}{36*15} \\
&= 41.6074074074074...
\end{aligned}
$$

最後に固定値を足して

$$
E = \frac{22468}{36*15} + \frac{35}{36} * 70 = 109.66296296296296...
$$

k40[9]+16$+1#1r5

まず、威力表の部分だけ計算していくと、

$$
\begin{aligned}
E_{100} &= \frac{\frac{1*0}{36} + \frac{0*8}{36} + \frac{2*12}{36} + \frac{3*15}{36} + \frac{4*18}{36} + \frac{5*19}{36} + \frac{6*20}{36} + \frac{5*22}{36} + \frac{4*24}{36} + \frac{3*27}{36} + \frac{3*30}{36}}{1 - \frac{15}{36}} \\
&= \frac{733}{21} \\
&= 34.904761904761904...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{95} &= \frac{1*0}{36} + \frac{0*8}{36} + \frac{2*11}{36} + \frac{3*14}{36} + \frac{4*16}{36} + \frac{5*18}{36} + \frac{6*20}{36} + \frac{5*22}{36} + \frac{4*23}{36} + \frac{3*26}{36} + \frac{3*28}{36} \\
&= \frac{702}{36} \\
&= 19.500
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{90} &= \frac{1*0}{36} + \frac{0*7}{36} + \frac{2*10}{36} + \frac{3*12}{36} + \frac{4*15}{36} + \frac{5*18}{36} + \frac{6*19}{36} + \frac{5*21}{36} + \frac{4*23}{36} + \frac{3*25}{36} + \frac{3*26}{36} \\
&= \frac{670}{36} \\
&= 18.6111111111111...
\end{aligned}
$$

$$E_{85} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*6}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*11}{36} + \frac{4*14}{36} + \frac{5*17}{36} + \frac{6*19}{36} + \frac{5*21}{36} + \frac{4*22}{36} + \frac{3*23}{36} + \frac{3*24}{36}$$
$$= \frac{640}{36}$$
$$= 17.777777777777777...$$

$$E_{80} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*6}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*13}{36} + \frac{5*16}{36} + \frac{6*18}{36} + \frac{5*20}{36} + \frac{4*21}{36} + \frac{3*22}{36} + \frac{3*23}{36}$$
$$= \frac{607}{36}$$
$$= 16.861111111111111...$$

$$E_{75} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*6}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*13}{36} + \frac{5*16}{36} + \frac{6*16}{36} + \frac{5*18}{36} + \frac{4*19}{36} + \frac{3*20}{36} + \frac{3*21}{36}$$
$$= \frac{565}{36}$$
$$= 15.694444444444444...$$

$$E_{70} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*12}{36} + \frac{5*14}{36} + \frac{6*16}{36} + \frac{5*17}{36} + \frac{4*18}{36} + \frac{3*19}{36} + \frac{3*19}{36}$$
$$= \frac{533}{36}$$
$$= 14.805555555555555...$$

$$E_{65} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*12}{36} + \frac{5*13}{36} + \frac{6*14}{36} + \frac{5*15}{36} + \frac{4*17}{36} + \frac{3*18}{36} + \frac{3*18}{36}$$
$$= \frac{496}{36}$$
$$= 13.777777777777777...$$

$$E_{60} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{2*9}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*11}{36} + \frac{5*12}{36} + \frac{6*13}{36} + \frac{5*14}{36} + \frac{4*15}{36} + \frac{3*16}{36} + \frac{3*18}{36}$$
$$= \frac{462}{36}$$
$$= 12.833333333333333...$$

$$E_{55} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{2*7}{36} + \frac{3*10}{36} + \frac{4*10}{36} + \frac{5*11}{36} + \frac{6*12}{36} + \frac{5*13}{36} + \frac{4*14}{36} + \frac{3*16}{36} + \frac{3*16}{36}$$
$$= \frac{428}{36}$$
$$= 11.888888888888888...$$

$$E_{50} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*4}{36} + \frac{2*6}{36} + \frac{3*8}{36} + \frac{4*10}{36} + \frac{5*10}{36} + \frac{6*12}{36} + \frac{5*12}{36} + \frac{4*13}{36} + \frac{3*15}{36} + \frac{3*15}{36}$$
$$= \frac{400}{36}$$
$$= 11.111111111111111...$$

$$E_{45} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*4}{36} + \frac{2*6}{36} + \frac{3*7}{36} + \frac{4*9}{36} + \frac{5*10}{36} + \frac{6*10}{36} + \frac{5*11}{36} + \frac{4*12}{36} + \frac{3*13}{36} + \frac{3*14}{36}$$
$$= \frac{363}{36}$$
$$= 10.083333333333333...$$

$$E_{40} = \frac{1*0}{36} + \frac{0*4}{36} + \frac{0*5}{36} + \frac{2*6}{36} + \frac{3*7}{36} + \frac{4*9}{36} + \frac{5*10}{36} + \frac{6*11}{36} + \frac{5*11}{36} + \frac{4*12}{36} + \frac{6*13}{36}$$
$$= \frac{366}{36}$$
$$= 10.166666666666666...$$

よって、求める期待値は、

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{15}{36}$$

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{35}{36} * 16 + E_{40} + \frac{21}{36} * (\rho^0 * E_{45} + \rho^1 * E_{50} + \rho^2 * E_{55} + \rho^3 * E_{60} + \rho^4 * E_{65} + \rho^5 * E_{70} + \rho^6 * E_{75} + \rho^7 * E_{8} \\
&= \frac{35}{36} * 16 + \frac{366}{36} + \frac{21}{36} * ((\frac{15}{36})^0 * \frac{363}{36} + (\frac{15}{36})^1 * \frac{400}{36} + (\frac{15}{36})^2 * \frac{428}{36} + (\frac{15}{36})^3 * \frac{462}{36} + (\frac{15}{36})^4 * \frac{496}{36} + (\frac{15}{36})^5 * \frac{5}{3} \\
&= 36.4869784838...
\end{aligned}
$$