

Limesi funkcija

ZIR 2012/13

4. [5 bodova] Izračunajte:

(a) (1 bod) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^3 x}$

(b) (2 boda) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right)$

(c) (2 boda) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(2x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right)$

6. [5 bodova] (a) (2 boda) Neka je $P_n(x)$ polinom n -tog stupnja, a $P_m(x)$ polinom m -tog stupnja. Čemu je jednak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

obzirom na stupnjeve polinoma P_n i P_m ? Odgovor obrazložite!

(b) (3 boda) Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x^2+x+1} \right) x^a$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Vrijeme pisanja: 1h i 30 min. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.

MI 2012./13.



6. [5 bodova] (a) (2 boda) Za proizvoljnu funkciju f definirajte konačan limes u beskonačnosti. Navedite jedan konkretan primjer takve funkcije te skicirajte njeno ponašanje kada $x \rightarrow +\infty$.

(b) (1 bod) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \sin x}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}}.$$

(c) (2 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x+2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+2} \right) \right].$$

Definicija derivacija

3. [5 bodova]

- (a) (3 boda) Koristeći definiciju derivacije dokažite da je $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-1}{(f(x))^2} \cdot f'(x)$.
- (b) (2 boda) Koristeći pravilo za derivaciju umnoška funkcija i tvrdnju pod (a), izvedite pravilo za derivaciju kvocijenta funkcija.

MI 2013/14

4. [5 bodova] (a) (2 boda) Koristeći definiciju derivacije izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = x^3$.
- (b) (1 bod) Koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija izvedite formulu za derivaciju inverzne funkcije.
- (c) (2 boda) Pomoću formule dobivene u (b) dijelu zadatka dokažite da je

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Neprekinutost i derivabilnost

DIR 2012/13.

5. [5 bodova]

- (a) (1 bod) Napišite definiciju neprekinutosti funkcije f u točki x_0 .
- (b) (1 bod) Neka je $p > 0$ realan broj. Za koju vrijednost parametra a je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin\left(\frac{1}{x^p}\right), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

neprekinuta u točki $x_0 = 0$?

- (c) (3 boda) Za takav a odredite sve vrijednosti $p > 0$ za koje je f derivabilna u točki $x_0 = 0$, te odredite koliko je $f'(0)$ za takve p .

Implicitno i parametarsko deriviranje

16. Odredi y' i y'' u točki $T(1, -1)$ za funkciju $y = y(x)$ zadanu implicitno s

$$xy^2 + e^{x+y} = 2.$$

19. Odredi jednadžbu tangente i normale na krivulju zadanu parametarski

$$\begin{cases} x = \sin^2 t - \cos t \\ y = \ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}) \end{cases}$$

u točki kojoj odgovara parametar $t = \frac{\pi}{2}$.

Derivacije i tangente

LIR 2012/13.

6. [5 bodova] Za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je pravac $x + 2y - 6 = 0$ tangenta krivulje $x^2(y - 1) + y^2 = a$.

14. Odredi točku na paraboli $y = x^2 + x - 2$ najbližu pravcu $y = 5x - 10$.

Taylor i diferencijal

5. [6 bodova]

- a) (2 boda) Koristeći diferencijal funkcije izračunajte približnu vrijednost izraza $\sqrt[3]{8.01}$.
- b) (4 boda) Napišite funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u obliku $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$, gdje je T_2 drugi Taylorov polinom funkcije f u okolini točke $c = 8$, a R_2 je pripadni ostatak u Lagrangeovom obliku. Koristeći drugi Taylorov polinom izračunajte približnu vrijednost izraza $\sqrt[3]{8.01}$.

5. (5 bodova)

- (a) Napišite peti Taylorov polinom $T_5(x)$ funkcije $f(x) = e^x$ u okolini točke $c = 0$.
- (b) Pokažite da je greška aproksimacije vrijednosti e polinomom $T_5(x)$ manja od 10^{-2} .

L'Hospital

2

3. (4 boda)

Izračunajte limes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{x+1} \right) \right)^x.$$

15. Odredi $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{-1/x^2} - x).$

Ekstremi

6. [6 bodova] Odredite točku na paraboli $y = 1 - x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$, takvu da je površina trokuta koju tangenta na parabolu u toj točki zatvara s koordinatnim osima minimalna. Dokažite da se radi o minimumu. Koliko iznosi ta površina?
5. [5 bodova] Odredite površinu najvećeg pravokutnika čija dva susjedna vrha leže na asimptoti krivulje $y = 1 - e^{-x^2}$, a preostala dva vrha nalaze se na samoj krivulji. Nacrtajte sliku.

Kvalitativni graf funkcije

7. [6 bodova] Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{1}{4-x}}.$$

- a) (2 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije, ispitajte njeno ponašanje na rubu područja definicije, te odredite asimptote grafa funkcije f .
- b) (2 boda) Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije f .
- c) (2 boda) Nacrtajte kvalitativni graf funkcije f .

8. [5 bodova] Odredite područje definicije, ponašanje na rubovima područja definicije, asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, te nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Lagrangeov teorem

5. (5 bodova)

- (a)(3b) Iskažite i geometrijski interpretirajte Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.
- (b)(2b) Odredite točku na elipsi $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ u 1. kvadrantu u kojoj je tangenta na tu elipsu paralelna sa spojnicom točaka $A(\sqrt{2}, 0)$ i $B(0, 1)$.