1. DOMAĆA ZADAĆA IZ MATEMATIKE 1

1. (a) Dokaži da je formula $\big((\neg x \Rightarrow y) \wedge \neg y\big) \Rightarrow x$ (dokaz iz protuslovlja) identički istinita.

   (b) Napiši tablicu istinitosti za $(x \vee y) \Rightarrow y$.

a)

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \Rightarrow y$	$(\neg x \Rightarrow y) \wedge \neg y$	$((\neg x \Rightarrow y) \wedge \neg y) \Rightarrow x$
T	T	F	F	T	F	**T**
T	F	F	T	T	T	**T**
F	T	T	F	T	F	**T**
F	F	T	T	F	F	**T**

b)

x	y	$x \vee y$	$(x \vee y) \Rightarrow y$
T	T	T	**T**
T	F	T	**F**
F	T	T	**T**
F	F	F	**T**

2. Dokaži de Morganove formule za sudove (pomoću tablica istinitosti) i primjenom tih formula i svojstva distributivnosti maksimalno pojednostavni formulu algebre sudova
$$\neg(\neg A \wedge (A \vee \neg B)).$$

1)

Negacija disjunkcije je konjunkcija negacija.
Simbolički:
$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
T	T	T	**F**	F	F	**F**
T	F	T	**F**	F	T	**F**
F	T	T	**F**	T	F	**F**
F	F	F	**T**	T	T	**T**

2)

Negacija konjunkcije je disjunkcija negacija.
Simbolički:
$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
T	T	T	**F**	F	F	**F**
T	F	F	**T**	F	T	**T**
F	T	F	**T**	T	F	**T**
F	F	F	**T**	T	T	**T**

3) $\neg(\neg A \wedge (A \vee \neg B)) = A \vee (\neg(A \vee \neg B)) = A \vee (\neg A \wedge B)$

3. Ispitaj istinitost sudova A, B, C, D, E:

$$A \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(y > x),$$

$$B \equiv (\exists y \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R})(y > x),$$

$$C \equiv (\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + ax = b),$$

$$D \equiv (\forall a \in \mathbf{Z})(\exists b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + ax = b),$$

$$E \equiv (\exists a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + ax = b).$$

Obrazloži odgovore !

1) $A \equiv T$ (A je istinit)

Za svaki $x \in R$ postoji $y \in R$ tako da je y > x. Uzmete npr. da je x = 5. Postoji takav y (npr. y = 6), tako da je y > x (odnosno, 6 > 5).

2) $B \equiv F$ (B je lažan)

Postoji $x \in R$ za svaki $y \in R$ tako da je y > x. Uzmete npr. x = 7. Ako uzmete da je y = 8, onda gornja tvrdnja vrijedi. Međutim, ako uzmete da je = 8, onda gornja tvrdnja vrijedi. Međutim, ako uzmete da je y = 3, onda gornja tvrdnja ne vrijedi. Znači, ne postoji $x \in R$ tako da za svaki $y \in R$ vrijedi y > x.

3) $C \equiv F$

Za svaki cijeli broj a i za svaki cijeli broj b, postoji realan broj x tako da vrijedi $x^2 + ax = b$. Ovaj sud nije istinit. Naime, raspišimo izraz sa desne strane:

$$x^2 + ax = b$$
$$x^2 + ax - b = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

Ovaj sud bi vrijedio kada rješenja kvadratne jednadžbe ne bi bila kompleksno konjugirana. Međutim, mi ne znamo kakav će biti izraz pod korijenom. Ako je on veći od 0, onda sud vrijedi, ali ako je manji od 0, onda ne vrijedi. Kako mi ne znamo koje su vrijednosti brojeva a i b (jer npr. kod vrijednosti b = - 5 i a = 2, dobijemo da je izraz pod korijenom manji od 0), onda je ovaj sud lažan jer ne vrijedi za svaki a i za svaki b.

4) $D \equiv T$

Za svaki cijeli broj a postoje cijeli broj b i realan broj x tako da vrijedi $x^2 + ax = b$. Ovaj sud je točan. U principu sve isto, samo što će za svaki a **postojati** b tako da sud vrijedi (odnosno, izraz pod korijenom će biti veći od 0).

5) $E \equiv T$

Postoji cijeli broj a tako da za svaki cijeli broj b postoji realan broj x tako da gornji sud vrijedi. Ovaj sud je točan. Sličan kao i prethodni zadatak – moći ćemo odabrati bilo koji cijeli broj a tako da izraz pod korijenom bude veći od 0 bez obrzira na vrijednost broja b.

4. Zadan je sud $A \equiv (\forall x_1 \in \mathbf{R})(\forall x_2 \in \mathbf{R})(|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2)$.

(a) Negiraj sud A. (Rezultat treba biti zapisan bez znaka negacije.)

(b) Koji je sud istinit: A ili $\neg A$? Obrazloži !

a) $\neg A \equiv (\exists x_1 \in R)(\exists x_2 \in R)(|x_1| = |x_2| \wedge x_1 \neq x_2)$

b) A – za svaki $x_1 \in R$ i svaki $x_2 \in R$ vrijedi da je $|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$. Sud je lažan. Naime uzmite da je $x_1 = 5$ i da je $x_2 = -5$.

$\neg A$ – postoje $x_1 \in R$ i $x_2 \in R$ tako da vrijedi $|x_1| = |x_2| \wedge x_1 \neq x_2$. Sud je istinit. (Uzmite vrijednosti navedene iznad.)

5. Odredi elemente skupova

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid (\exists y \in \mathbf{N})\ x + y = 5\},$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid (\exists y \in \mathbf{N})\ 10x + 3y = 300\}.$$

Za skup A:

$x = 1, y = 4$

$x = 2, y = 3$

$x = 3, y = 2$

$x = 4, y = 5$

***A* = {1, 2, 3, 4}**

Za skup B:

$0 < x < 30$, x je višekratnik broja 3.

x = 3, y = 90
x = 6, y = 80
x = 9, y = 70
x = 12, y = 60
x = 15, y = 50
x = 18, y = 40
x = 21, y = 30
x = 24, y = 20
x = 27, y = 10

***B* = {3, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90}**

6. (a) Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ i $C = \{4, 5, 6\}$.
Postoji surjekcija $f : A \to B$? Postoji li injekcija ?
Postoji li injekcija $f : B \to C$? Postoji li surjekcija ?
Postoji li bijekcija $f : A \to C$?
Obrazloži!

(b) Postoji li bijekcija $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$? Obrazloži !

a) Ne postoji surjekcija $f : A \to B$ zato što postoji barem jedan element skupa *B* koji nema svoju sliku u *A*. Postoji injekcija jer svaki element iz skupa *A* može imati različitu sliku u skupu *B*.

Ne postoji injekcija $f : B \to C$ jer svi elementi iz skupa *B* ne mogu imati različite slike u skupu *C*. Postoji surjekcija jer svaki element iz skupa *C* može imati svoju sliku u *B*.

Postoji bijekcija $f : A \to C$ jer je i injekcija i surjekcija.

b) Funkcija $f : Z \to N$ je surjekcija zato štom svaki element skupa *N* ima svoju sliku u *Z*. Međutim, funkcija nije injekcija zato što je skup *Z* veći od skupa *N*, pa različiti originali iz *Z* neće uvijek imati različitu sliku u *N*. Znači, funkcija nije bijekcija jer nije istodobno i injekcija i surjekcija.

7. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$. Napiši sve bijekcije $f : A \to A$.

Imamo da je $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

Da bi funkcija bila bijekcija mora biti injekcija i surjekcija. Znači, različiti originali imaju različite slike, odnosno $f(x_1) \neq f(x_2) \neq f(x_3)$, te je svaki element konačnog skupa slika nekog elementa iz početnog skupa. Imamo dva rješenja:

1. $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$
2. $f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2$

8. Za svaku od sljedećih funkcija ispitaj je li bijekcija:

a) $f : \mathbf{R} \to \langle -\infty, 1]$, $f(x) = 1 - x^4$,
b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 5| - |6 - x|$.

a) funkcija nije bijekcija jer se dva različita *x*-a preslikaju u isti *y*
(npr. *f*(2) = - 15 i *f*(- 2) = - 15)

b) funkcija nije bijekcija jer se dva različita *x*-a preslikaju u isti *y*
(npr. *f*(1) = - 1 i *f*(- 1) = - 1)

9. Dokaži da je kompozicija dvije bijekcije opet bijekcija.

Neka je $h = f \circ g$.

Funkcije f i g su bijekcije, to jest, obadvije su i injekcije i surjekcije. Moramo pokazati da je i funkcija h i injekcija i surjekcija.

$$h(x_1) = (f \circ g)(x_1) = f[g(x_1)]$$

$$h(x_2) = (f \circ g)(x_2) = f[g(x_2)]$$

Ako je $h(x_1) = h(x_2)$, onda je $f[g(x_1)] = f[g(x_2)]$, pa kako je f injekcija onda vrijedi da je $g(x_1) = g(x_2)$, a zatima, kako je g isto injekcija vrijedi da je $x_1 = x_2$, odnosno i **funkcija *h* je injekcija**.

Ovo tu isto samo dokažete da je surjekcija, to je laganini.

10. nemam pojma

11. Matematičkom indukcijom dokaži da je zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Treba dokazati da je $1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1. baza indukcije $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$$

2. pretpostavka za n

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. dokazati da vrijedi za $n + 1$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Tvrdnja dokazana.

12. Matematičkom indukcijom dokaži da je

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\cdot i^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

za svaki $n\in\mathbb{N}$

Treba dokazati da je $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\cdot i^2=1-4+9-16+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

1. baza indukcije $n = 1$

$$(-1)^{1-1}\cdot 1^2=(-1)^{1-1}\frac{1(1+1)}{2}\Leftrightarrow 1=1$$

2. pretpostavka za n

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\cdot i^2=1-4+9-16+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

3. dokazati da vrijedi za $n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\cdot i^2=(-1)^{n}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\cdot i^2=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\cdot i^2+(-1)^{n}\cdot(n+1)^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n}\cdot(n+1)^2=$$

$$=(-1)^{n}\left(-\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2\right)=(-1)^{n}\left(\frac{2(n+1)^2-n(n+1)}{2}\right)=(-1)^{n}\left(\frac{2n^2+4n+2-n^2-n}{2}\right)=$$

$$=(-1)^{n}\frac{n^2+3n+2}{2}=(-1)^{n}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Tvrdnja dokazana.

13. Matematičkom indukcijom dokaži da je

$$\prod_{i=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^i}) = \frac{\sin x}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in \mathbb{R}$

Treba dokazati da je $\prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

1. baza indukcije $n = 1$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x \Leftrightarrow \sin x = \sin x$$

2. pretpostavka za n

$$\prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

3. dokazati za $n+1$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right) = \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^i}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{2\sin x \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} =$$

$$= \frac{2\sin x \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1} \cdot 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

Tvrdnja dokazana.

14. Matematičkom indukcijom dokaži da je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Treba dokazati da je $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

1. baza indukcije $n = 1$

$1 \leq 2\sqrt{1} - 1 = 2 - 1 = 1$

2. pretopstavka za n

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$

3. dokazati za $n + 1$

$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} - 1$

Kako je po pretpostavci $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$, onda samo treba dokazati da je $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$2\sqrt{n} \leq \frac{2(n+1) - 1}{\sqrt{n+1}}$$

$$2\sqrt{n} \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} \text{ - ovdje kvadriramo}$$

$$4n \leq \frac{4n^2 + 4n + 1}{n+1}$$

$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1$$

Posljednja tvrdnja očito vrijedi, pa je ovime početna tvrdnja dokazana.

15. Matematičkom indukcijom dokaži da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

Treba dokazati da je $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, za svaki $n \in N$.

1. baza indukcije $n = 1$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$

36 je djeljivo sa 9

2. pretpostavka

$9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

3. dokazati da vrijedi za $n + 1$

$9 \mid (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + \\ + 9n^2 + 27n + 27$$

Kako je po pretpostavci $9 \mid (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$, onda samo treba dokazati da je $9n^2 + 27n + 27$ djeljivo sa 9, što lako zaključujemo da jest nakon što izlučimo 9 pa dobijemo $9(n^2 + 3n + 3)$. Time je tvrdnja dokazana.

16. Nađi sve z ako je:

(a) $z^8 = (1+i)^4$,

(b) $z^4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)}$,

(c) $z^3 = (\sqrt{3}-i)^5 \cdot (1+\sqrt{3}i)$.

a) $z^8 = (1+i)^4$

$$(1+i)^4 = \left[(1+i)^2\right]^2 = \left(1+2i+i^2\right)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$$

Zapišemo – 4 u trigonometrijskom obliku:

x = - 4, y = 0

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 2$$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$, jer je x negativan

$$z^8 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$z_k = \sqrt[8]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; n = 8

k = 0

$$z_0 = \sqrt[8]{4}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

I tako sve pouvrštavate do k = 7.

.

.

.

k = 7

$$z_7 = \sqrt[8]{4}\left(\cos\frac{\pi+14\pi}{8} + i\sin\frac{\pi+14\pi}{8}\right) = \sqrt[8]{4}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$$

b) $z^4 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)}$

$w = 1 - i \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

$w = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$$z^4 = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$z_k = \cos\dfrac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}$, k = 0, 1, 2, 3

k = 0

$$z_0 = \cos\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

I tako pouvrštavate do k = 3.

.
.
.

k = 3

$$z_3 = \cos\frac{-\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} = \cos\frac{\frac{-2\pi + 18\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{\frac{-2\pi + 18\pi}{3}}{4} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $z^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^5 \cdot \left(1 + i\sqrt{3}\right)$

$$w = \sqrt{3} - i \Rightarrow x = \sqrt{3}, y = -1 \Rightarrow r = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$w^5 = 2^5\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -16\sqrt{3} - 16i$$

$$z^3 = -16\left(\sqrt{3} + i\right)\cdot\left(1 + i\sqrt{3}\right) = -64i$$

$$q = -64i \Rightarrow x = 0, y = -64 \Rightarrow r = 8 \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-64}{0} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2$$

$k = 0$

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[3]{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

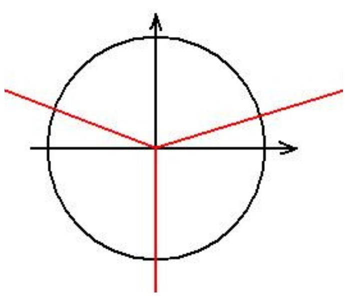
I tako napravite za ostala dva rješenja.

17. (a) U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z za koje je $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$.
    (b) U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z za koje je: $|z + 2| = 1$.
    (c) Nađi sve $z \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$ i $|z + 2| = 1$.

a) $z^3 = r\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$z = \sqrt[3]{r}(\cos\psi + i\sin\psi), \text{ gdje je } \psi = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

$$\psi_0 = \frac{\pi}{6}, \ \psi_1 = \frac{5\pi}{6}, \ \psi_2 = \frac{3\pi}{2}$$



b) $|z+2|=1$

$$|x+yi+2|=|x+2+yi|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}=1$$

$$(x+2)^2+y^2=1$$

Kružnica sa središtem – 2 + i, radijusa 1