1. MASOVNE INSTRUKCIJE

MATEMATIKA 1

24.10.2015.

ZADACI

MATEMATIČKA INDUKCIJA

Školska zadaća 2014/2015, 12h, A grupa

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}.$$

Školska zadaća 2014/2015, 12h, B grupa

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$4 \cdot 6^n + 5n - 4$$

djeljivo s 25 za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Školska zadaća 2012/2013, Parne grupe, A grupa

1. (2 boda)
Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h, B grupa

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da vrijedi

$$\cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(2^2 x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}.$$

Školska zadaća 2012/2013, Neparne grupe, B grupa

1. (2 boda)
Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$3^n < n!,$$

za sve prirodne brojeve $n \geq 7$.

Ljetnji ispitni rok 2014/2015

03.07.2015.

1. (**4 boda**) Koristeći princip matematičke indukcije, dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln(1+n).$$

KOMPLEKSNI BROJEVI

Školska zadaća 2014/2015, 12h, A grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z^3 \cdot \overline{z} - 1 - i = 0.$$

Školska zadaća 2014/2015, 12h, B grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad i \qquad z \cdot \overline{z} = 4.$$

Školska zadaća 2014/2015, 13h, A grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\frac{z}{\overline{z}^3} + i = 0.$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h, A grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$z^4 + (1+i)^{10} = 0.$$

MI 2011/2012

1. **[5 bodova]** (a) (2 boda) Grafički riješite sustav jednadžbi

$$|z+1+i| = 2, \quad |z+1-i| = 4$$

u skupu kompleksnih brojeva.

(b) (3 boda) Nađite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

$$|z| = 1, \quad \mathrm{Im}(z^4) = 4\,\mathrm{Re}(z^2).$$

Prva DZ 19. (sličan kao Školska zadaća 2013, 12h, B grupa)

19. Riješi jednadžbu u skupu $\mathbb{C}$: $z^8 + 2z^4 + 4 = 0$.

MI 2014/2015

1. **[6 bodova]**

a) (1 bod) Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, napišite $\overline{z}$ u trigonometrijskom obliku.

b) (5 bodova) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$(1 - i\sqrt{3})z^2 = (-2\sqrt{3} + 2i)(\overline{z})^3.$$

MI 2012/2013

1. **[6 bodova]** (a) (2 boda) Izvedite izraz za umnožak kompleksnih brojeva z_1 i z_2 koji su dani u trigonometrijskom obliku. Koristeći dobiveni izraz, matematičkom indukcijom dokažite formulu za računanje n-te potencije ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnog broja danog u trigonometrijskom obliku.

(b) (4 boda) Kompleksni broj $w = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ zapišite u trigonometrijskom obliku, zatim u skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $z^4 = w^8$, te dobivena rješenja skicirajte u kompleksnoj ravnini.

ZIR 2012/2013

1. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Napišite formulu za računanje izraza $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Koliko različitih vrijednosti ima $\sqrt[n]{z}$?

   (b) (4 boda) U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $z^3 + i = e^{-\ln 2 - i\frac{7\pi}{6}}$.

JIR 2014/2015

1. (**4 boda**) Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi $z + z^{-1} = 1$. Odredite

$$z^{2008} + z^{2009} + z^{2010} + z^{2011} + z^{2012}.$$

DIR 2012/2013

2. [**5 bodova**] Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\arg(3i\overline{z}) = \arg(z^2) \text{ i } |\overline{z} \cdot (z+1)| = |z + zi|^2.$$

Zadnja dva ovisno o vremenu.

FUNKCIJE

MI 2011/2012

2. **[5 bodova]** (a) (2 boda) Dokažite da je kompozicija tri padajuće funkcije također padajuća funkcija.

   (b) (3 boda) Zadane su funkcije $f(x) = -\ln x$ i $g(x) = e^{-x} + 3$.
   Skicirajte grafove funkcija f i g.
   Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f \circ g$.
   Je li $f \circ g$ rastuća funkcija? Obrazložite odgovor!

MI 2012/2013

2. **[5 bodova]** Zadane su funkcije $f(x) = 2\operatorname{ch}(x-3) - e^{-3}$ i $g(x) = \sqrt{e^3 - x}$.

   (a) (2 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije $g \circ f$.

   (b) (3 boda) Na kojem dijelu svojg prirodnog područja definicije je $g \circ f$ strogo rastuća funkcija? Odredite sliku funkcije $g \circ f$.

MI 2013/2014

2. **[4 boda]** Zadana je funkcija $f(x) = 2 + 2\arcsin(3x-1)$. Odredite prirodno područje definicije $D(f)$, sliku $Im(f)$, te skicirajte graf funkcije f. Da li je $f\colon D(f) \to Im(f)$ bijekcija? Obrazložite svoj odgovor!

MI 2014/2015

b) (3 boda) Odredite prirodno područje definicije i sliku funkcije, te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = 2\arccos(3x) - \pi.$$

KPZ 2013. neparna (13h) A

3. (2 boda) Odredite domenu i sliku te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \operatorname{ch} x - 1.$$

KPZ 2014. parne (12h) A

3. (2 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right).$$

ZIR 2013./2014.

2. [**4 boda**] Zadana je funkcija $f(x) = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$. Odredite prirodno područje definicije i sliku funkcije f te nacrtajte njezin graf. Odredite f^{-1} i skicirajte graf funkcije f^{-1}.

LJIR 2014./2015.

2. (**6 bodova**) Zadana je funkcija $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(3x+3)$.
   (a) Skicirajte graf funkcije f. Odredite domenu $\mathcal{D}(f)$ funkcije f te njezinu sliku $Im(f)$.
   (b) Da li je $f : \mathcal{D}(f) \to Im(f)$ bijekcija? Ako jest, odredite f^{-1} te skicirajte njezin graf.

JIR 2012./2013.

3. [**6 bodova**]

(a) (2 boda) Za zadanu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to Im(f)$ definirajte $f^{-1}(x)$. Pod kojim uvjetom postoji $f^{-1}(x)$?

(b) (4 boda) Odredite f^{-1}, $\mathcal{D}(f)$ i $Im(f)$ ako je $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{e^x+2}\right)$.

NIZOVI

LJIR 2014/2015

3. **(5 bodova)**

(a) Nađite primjer konvergentnog niza realnih brojeva čiji je limes jednak 1.
Nađite primjer divergentnog niza realnih brojeva.

(b) Definirajte gomilište niza realnih brojeva.
Odredite sva gomilišta niza

$$a_n = (-1)^n \frac{5n+3}{6n+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Da li je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan? Objasnite svoju tvrdnju.

Školska zadaća 2014/2015, 13h, A grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 2^{n-1}}{5^{n+1}}.$$

Školska zadaća 2014/2015, 12h, B grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h A grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}.$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h, B grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

Školska zadaća 2013/2014, 12h, A grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+5^n}{5+5^2+\cdots+5^n}.$$

DZ 3, 6)

6. Izračunati $\lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{(n-a)^3}{(n+1)^2}\right)$ u zavisnosti o parametru a.

MI 2014/2015

3. **[6 bodova]**

a) (3 boda) Koje su od sljedećih tvrdnji istinite, a koje neistinite?

(T1) Svaki omeđen niz je konvergentan.
(T2) Svaki konvergentan niz je omeđen.
(T3) Svaki konvergentan niz je monoton.

Za svaku neistinitu tvrdnju navedite jedan protuprimjer te obrazložite zašto je to protuprimjer.

b) (3 boda) Niz (a_n) zadan je rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3n+1} a_n, n \geq 1.$$

Dokažite da je niz (a_n) konvergentan i odredite njegov limes.

MI 2011/2012

5. **[5 bodova]** (a) (1 bod) Definirajte limes niza realnih brojeva.

(b) (2 boda) Niz (a_n) je zadan na sljedeći način:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{8}(2 + a_n)^2.$$

Dokažite da je niz (a_n) rastući i odozgo omeđen s 2.

(c) (2 boda) Izračunajte $\lim_{n\to\infty} a_n$ i objasnite gdje ste pri tome koristili svojstva koja je trebalo dokazati u (b) dijelu zadatka.