Matematika 1, grupa 6, prvo natjecanje, 7.10.2009.

1. U skupu kompleksnih brojeva riješi jednadžbu

$$z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

   i prikaži rješenja u Gaussovoj ravnini.

2. Skiciraj krivulju $y = arcsin(\cos x)$.

3. Trag matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ definiramo kao $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (tj. kao zbroj dijagonalnih elemenata). Vrijedi li $tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = tr(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$? Obrazloži !

4. Izračunaj vrijednost determinante reda n, zadane općim članom $a_{ij} = i^{j-1}$.

NATJECANJE br. 1

rješenja

1. Polazna jednadba je $z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
Za $z \neq 1$ ($z = 1$ očito nije rješenje) imamo:

$$\frac{z^{10} - 1}{z - 1} = 0,$$

pa su rješenja svih deseti korijeni iz 1, osim 1, tj.

$$z = cos(\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{5}), \ k = 1, 2, 3, ..., 9.$$

(sliku je lagano nacrtati).

2. $f(x) = arcsin(\cos x) = arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$, pa je $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ za $x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tj. za $x \in [-\pi, 0]$. Nadalje, funkcija je parna i periodička s periodom 2π, pa je lagano skicirati graf funkcije.

3. Vrijedi $tr(AB) = tr(BA)$ (dokazuje se lagano).

4. Rješenje je $detA = \prod_{i=1}^{n-1} i!$. (radi se o specijalnom slučaju poznate Vandermondeove determinante (vidi u privitku).

Primjer 2.5. (**Vandermondeova determinanta.**) Provjerimo sljedeći rezultat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Oznaka $\prod$ označava umnožak. Množi se po svim mogućim izborima indeksa za koje je $i<j$. Ukupan broj faktora u umnošku na desnoj strani jednakosti je $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Označimo traženu determinantu s $V(x_1,\dots,x_n)$. Da izračunamo njezinu vrijednost, načinit ćemo sljedeće transformacije

- pretposljednji, $n-1$-vi redak pomnožiti s $-x_1$ i dodati posljednjem;
- $n-2$-gi redak pomnožiti s $-x_1$ i dodati $n-1$-vom, itd;
- prvi redak pomnožiti s $-x_1$ i dodati drugom.

Nakon toga se determinanta može rastaviti po prvom stupcu i iz svih transformiranih redaka izvući zajednički faktor:

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \dots & x_{n-1}-x_1 & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_1) & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & & & & \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & \dots & x_{n-1}-x_1 & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_1) & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & & & \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & & & \\ x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Dobili smo determinantu identičnu prvotnoj, ali reda $n-1$. Tako možemo postaviti *rekurzivnu relaciju:*

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_n-x_1)\dots(x_2-x_1)V(x_2,\dots,x_n).$$

Isto razmišljanje možemo primjeniti i na novu, umanjenu determinantu:

$$V(x_2,\dots,x_n) = (x_n-x_2)\dots(x_3-x_2)V(x_3,\dots,x_n)$$

i nastaviti postupak sve dok ne stignemo do posljednjih jednadžbi:

$$V(x_{n-2},x_{n-1},x_n) = (x_n-x_{n-2})(x_n-x_n-1)V(x_{n-1},x_n)$$

$$V(x_{n-1},x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}.$$

Uvrštavanjem svih ovih vrijednosti slijedi rezultat.