

Prvi međuispit iz Matematike 1

18. studenog 2011.

1. [5 bodova] (a) (2 boda) Grafički riješite sustav jednažbi

$$|z + 1 + i| = 2, \quad |z + 1 - i| = 4$$

u skupu kompleksnih brojeva.

- (b) (3 boda) Nađite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

$$|z| = 1, \quad \operatorname{Im}(z^4) = 4 \operatorname{Re}(z^2).$$

2. [5 bodova] (a) (2 boda) Dokažite da je kompozicija tri padajuće funkcije također padajuća funkcija.

- (b) (3 boda) Zadane su funkcije $f(x) = -\ln x$ i $g(x) = e^{-x} + 3$.

Skicirajte grafove funkcija f i g .

Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f \circ g$.

Je li $f \circ g$ rastuća funkcija? Obrazložite odgovor!

3. [5 bodova] (a) (4 boda) Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Riješite matričnu jednažbu $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}^{-1})^{-1}$.

- (b) (1 bod) Neka je matrica \mathbf{A} kao u (a) dijelu zadatka, te neka je

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite sve vrijednosti realnog parametra a za koji ne postoji \mathbf{X} takva da je $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}^{-1})^{-1}$. Obrazložite odgovor!

4. [5 bodova] (a) (3 boda) Nađite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (b) (2 boda) Dokažite: Matrica \mathbf{A} je regularna ako i samo ako su sve njezine svojstvene vrijednosti različite od 0.

5. [5 bodova] (a) (1 bod) Definirajte limes niza realnih brojeva.

(b) (2 boda) Niz (a_n) je zadan na sljedeći način:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{8}(2 + a_n)^2.$$

Dokažite da je niz (a_n) rastući i odozgo omeđen s 2.

(c) (2 boda) Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i objasnite gdje ste pri tome koristili svojstva koja je trebalo dokazati u (b) dijelu zadatka.

6. [5 bodova] (a) (2 boda) Neka je $P_n(x)$ polinom n -tog stupnja, a $P_m(x)$ polinom m -tog stupnja. Čemu je jednak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

obzirom na stupnjeve polinoma P_n i P_m ? Odgovor obrazložite!

(b) (3 boda) Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x^2+x+1} \right) x^a$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Vrijeme pisanja: 1h i 30 min. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.