1. MASOVNE INSTRUKCIJE

MATEMATIKA 1

24.10.2015.

ZADACI I RJEŠENJA

1. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Školska zadaća 2014/2015, 12h, A grupa

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}.$$

BAZA

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{(1+3)(1+4)} = \frac{1}{4 * (1+4)}$$

PRETPOSTAVKA

$$\frac{1}{4*5} + \frac{1}{5*6} + \cdots + \cdots \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4*(n+4)}$$

KORAK

$$\frac{1}{4*5} + \frac{1}{5*6} + \cdots + \cdots \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{n+1}{4*(n+5)}$$

Iskoristim pretpostavku indukcije, krenem s lijeve strane dok ne dobijem desnu.

$$\frac{1}{4*5}+\frac{1}{5*6}+\cdots+\cdots\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+4)(n+5)}$$
$$=\frac{n}{4*(n+4)}+\frac{1}{(n+4)(n+5)}=\frac{n^2+5n+4}{4(n+4)(n+5)}$$

Kvadratnu jedndadžbu u brojniku napišem pomoću njezinih rješenja:

$$n_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=-4,-1$$

$$\frac{n^2+5n+4}{4(n+4)(n+5)}=\frac{(n+4)(n+1)}{4(n+4)(n+5)}=\frac{(n+1)}{4(n+5)}$$

Po principu matematičke indukcije ova tvrdnja vrijedi za svaki n.

Školska zadaća 2014/2015, 12h, B grupa

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$4\cdot 6^n+5n-4$$

djeljivo s 25 za svaki $n\in\mathbb{N}$.

BAZA

$$n=1\rightarrow 4*6+5-4=25$$

PRETPOSTAVKA

$4 * 6^n + 5n - 4 = 25 * k$ (ako je broj djeljiv s 25, onda je on višekratnik broja 25, k je prirodni broj)

KORAK

$$4 * 6^{n+1} + 5(n+1) - 4 = 4 * 6^n * 6 + 5n + 5 - 4$$

Smeta mi potencija pa ću ju izraziti iz pretpostavke

$$4 * 6^n = -5n + 4 + 25 * k$$

Uvrštavam u korak

$$4 * 6^n * 6 + 5n + 5 - 4 = 6 * (-5n + 4 + 25k) + 5n + 1$$
$$= -25n + 25 + 25k = 25(-n + 1 + k) = 25 * l$$

S obzirom da su n i k prirodni brojevi, l će isto biti prirodan broj, te će konačan rezultat biti višekratnik od 25, čime smo dokazali tvrdnju.

Školska zadaća 2012/2013, Parne grupe, A grupa

1. (2 boda)
Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

BAZA

$$n = 1 \rightarrow 1 \geq 1$$

PRETPOSTAVKA

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$$

KORAK

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n+1}$$

Uvrštavam pretpostavku i gledam obje strane

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n}\geq\sqrt{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n}\geq\frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}}\,/()^2$$

$$n\geq\frac{n^2}{n+1}$$

$$1\geq\frac{n}{n+1}$$

S obzirom da je n prirodan broj, ovime je tvrdnja dokazana i po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki n.

Školska zadaća 2013/2014, 13h, B grupa

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da vrijedi

$$\cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(2^2 x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}.$$

BAZA

$$\cos x * \cos 2x = \frac{\sin(4x)}{4\sin x}$$

Koristit ćemo ovdje formulu za sinus dvostrukog kuta $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ i iz desne strane probati dobiti lijevu

$$\frac{\sin(4x)}{4\sin x} = \frac{2 * \sin(2x) * \cos 2x}{4\sin x} = \frac{2 * 2 * \sin(x) * \cos x * \cos 2x}{4\sin x}$$
$$= \cos x * \cos 2x$$

PRETPOSTAVKA

$$\cos x * \prod_{i=1}^{n} \cos(2^i x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}$$

KORAK

$$\cos x * \prod_{i=1}^{n} \cos(2^i x) * \cos(2^{n+1}x) = \frac{\sin(2^{n+2}x)}{2^{n+2}\sin x}$$

Krećem slijeva, koristim pretpostavku i pokušavam dobiti desnu stranu

$$\cos x * \prod_{i=1}^{n} \cos(2^i x) * \cos(2^{n+1}x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x} * \cos(2^{n+1}x) * \frac{2}{2}$$
$$= \frac{\sin(2^{n+2}x)}{2^{n+2}\sin(x)}$$

(U drugom koraku sam pomnožio i brojnik i nazivnik s 2, kako bih mogao na brojnik primijeniti formulu za sinus dvostrukog kuta)

Školska zadaća 2012/2013, Neparne grupe, B grupa

1. (2 boda)
Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$3^n < n!,$$

za sve prirodne brojeve $n \geq 7$.

BAZA

$$3^7 < 7!$$

$$3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 < 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7$$

$$3^5 < 2 * 2 * 4 * 5 * 7$$

$$243 < 560$$

PRETPOSTAVKA

$$3^n < n!$$

KORAK

$$3^{n+1} < (n+1)!$$

$$3 * 3^n (pretpostavka) < 3 * n! < n!\,(n+1) (svojstvo\ faktorijela)$$

$$3 < (n+1)$$

S obzirom da je n veći ili jednak 7, ova jednakost vrijedi uvijek čime je tvrdnja dokazana i po principu mat. indukcije vrijedi za svaki n veći ili jednak 7.

Ljetnji ispitni rok 2014/2015

03.07.2015.

1. **(4 boda)** Koristeći princip matematičke indukcije, dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) = \ln(1+n).$$

BAZA

$$\ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \ln(1+1)$$

PRETPOSTAVKA

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{i}) = \ln(1+n)$$

KORAK

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln(1+\frac{1}{i}) = \ln(2+n)$$

Krećem slijeva i pokušavam dobiti desnu stranu:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln(1+\frac{1}{i}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{i}) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

(pretostavka) $= \ln(n+1) + \ln(1+\frac{1}{n+1}) = \ln\left(n+1+\frac{n+1}{n+1}\right) =$
$\ln(n+2)$

Koristili smo svojstvo zbroja logaritama ($\ln(a) + \ln(b) = \ln(a * b)$).

Ovime je tvrdnja dokazana i po principu mat indukcije vrijedi za svaki n.

2. KOMPLEKSNI BROJEVI

Školska zadaća 2014/2015, 12h, A grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z^3 \cdot \overline{z} - 1 - i = 0.$$

Za rješavanje ovoga zadataka pogodan je trigonometrijski oblik.

$$z = rcis(\varphi)$$

$$conj(z) = rcis(-(\varphi))$$

Ovdje smo iskoristili činjenicu da je kosinus parna funkcija, a sinus neparna funkcija, te se konjugirani kompleksni broj može zapisati pomoću negativnog argumenta.

Sada koristimo formulu za potenciranje i uvrštavamo

$$z^3 = r^3 cis(3\varphi)$$

$$r^3 cis(3\varphi) * r * cis(-\varphi) = 1 + i$$

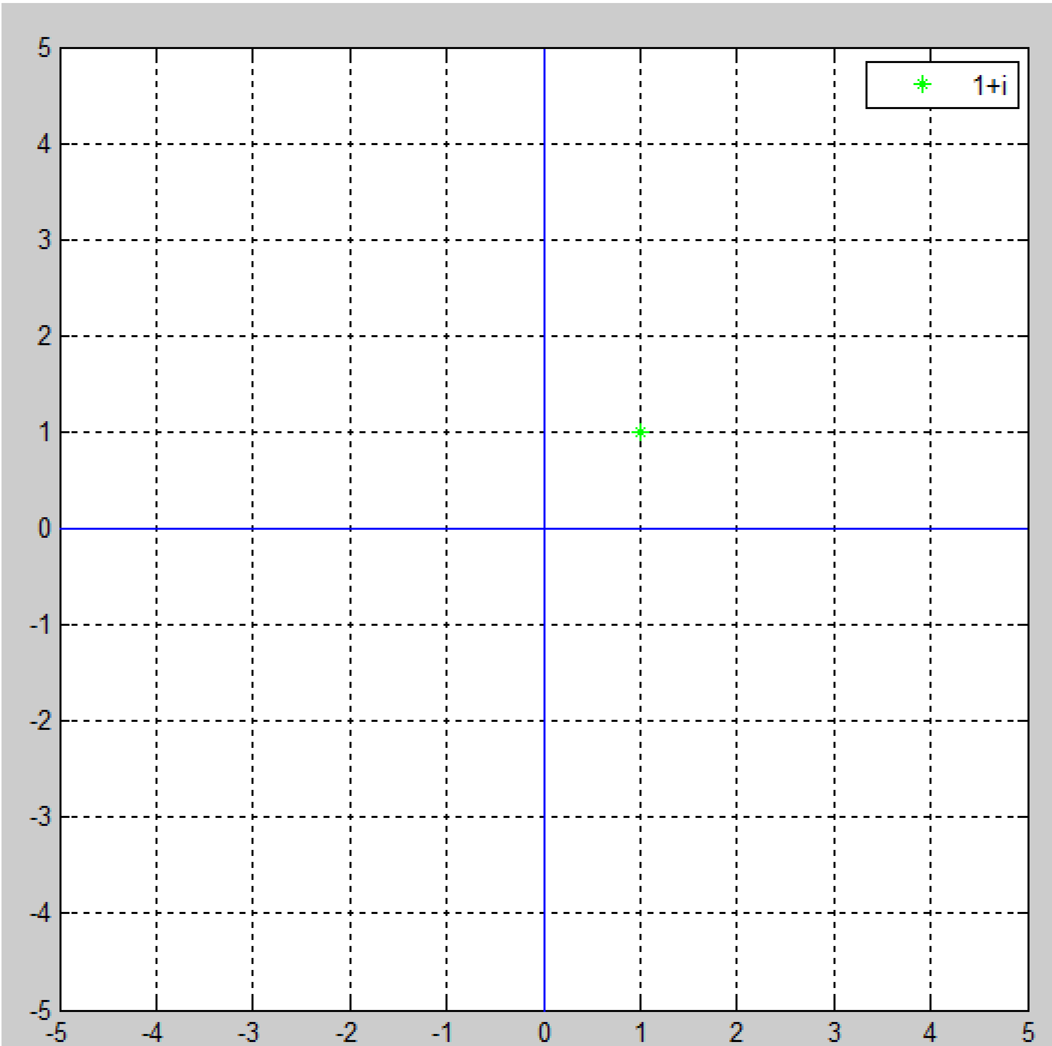
Dva trigonometrijska kompleksna zbroja množimo na način da im module pomnožimo a argumente zbrojimo.

Isto tako, potrebno je broj 1+i pretvoriti u trigonometrijski oblik.

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg z = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Prilikom određivanja argumenta moramo provjeriti gdje se nalazi naš kompleksni broj. Vidimo da je 1+i u prvom kvadrantu i da je kut $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.



Sada imamo redom:

$$r^4 cis(2\varphi) = \sqrt{2} cis\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Dva kompleksna broja su jednaka kad su im jednaki moduli i argumenti.

$$r = \sqrt[4]{2}$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / : 2$$

$$\varphi = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

Naše konačno rješenje je:

$$z = \sqrt[4]{2} cis\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right), k = 0,1$$

Školska zadaća 2014/2015, 12h, B grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad i \qquad z \cdot \overline{z} = 4.$$

Školska zadaća 2014/2015, 13h, A grupa

Prvo računamo argument

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \arg(z) - \arg(1+i) = \arg(z) - \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$$

Ovdje smo u drugom koraku koristili svojstvo argumenta:

$$\arg\left(\frac{z1}{z2}\right) = \arg(z1) - \arg(z2)$$

Također treba napomenuti da je argument od (1+i) skup svih argumenata koji daju tu vrijednost, a ne samo $\frac{\pi}{4}$.

Modul računamo iz druge jednakosti

$$z * konj(z) = |z|^2 = 4$$

$$|z| = r = 2$$

$$z = 2cis\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) = 2 * \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) + 2 * i * \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)$$
$$= 2 * i$$

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\frac{z}{\bar{z}^3} + i = 0.$$

Ovaj zadatak ćemo riješiti koristeći eksponencijalni zapis

$$\frac{r * e^{i\varphi}}{r^3 * e^{-3i\varphi}} = -i$$

$$r^{-2}e^{4i\varphi} = 1e^{i*(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}$$

Ponovno izjednačavam kut i modul

$$r^{-2} = 1 \rightarrow r = 1$$

$$4\varphi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi /: 4$$

$$\varphi = \frac{3}{8}\pi + \frac{k\pi}{2}$$

Konačno rješenje

$$z = e^{i(\frac{3}{8}\pi+\frac{k\pi}{2})}, k = 0,1,2,3$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h, A grupa

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$z^4 + (1+i)^{10} = 0.$$

$$z^4 = -(1+i)^{10} = -(\sqrt{2} * cis\left(\frac{\pi}{4}\right))^{10}$$

Ovdje nisam pisao $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ u argument zato jer će nam kasnije korjenovanje osigurati više rješenje.

$$z^4 = -\left(\sqrt{2}^{10} cis\left(\frac{10\pi}{4}\right)\right) = -(32i) = 32cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$z = \sqrt[4]{32}cis\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right), k = 0,1,2,3$$

MI 2011/2012

1. **[5 bodova]** (a) (2 boda) Grafički riješite sustav jednadžbi

$$|z+1+i| = 2, \quad |z+1-i| = 4$$

u skupu kompleksnih brojeva.

(b) (3 boda) Nađite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

$$|z| = 1, \quad \mathrm{Im}(z^4) = 4\,\mathrm{Re}(z^2).$$

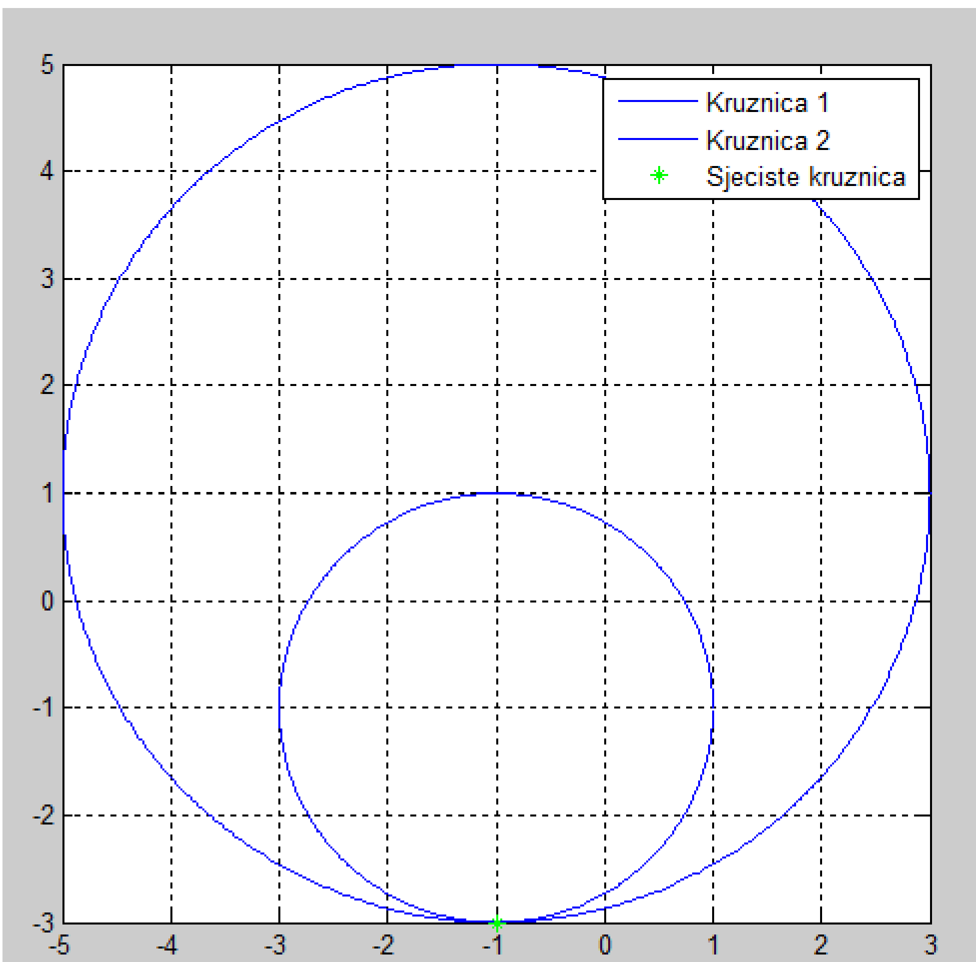
a) Izrazi s lijeve strane su u biti jednadžbe pomaknutih kružnica.

$$|x + yi + 1 + i| = 2$$
$$|x + yi + 1 - i| = 4$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 4$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$$
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Ako nacrtamo te kružnice, vidimo da je rješenje njihovo sjecište, odnosno točka, -1,-3.



b) Iz prvog uvjeta odmah vidim da mi je radijus jednak jedinici

$$r = |z| = 1$$

Za drugu jednakost ću zapisati brojeve u punom trigonometrijskom obliku i gledati što mi je realni, a što imaginarni dio kad potenciram.

$$z = \left(\cos(A) + isin(A)\right)$$

$$z^2 = \left(\cos(2A) + isin(2A)\right)$$

$$z^4 = \left(\cos(4A) + isin(4A)\right)$$

Vidimo sada da je

$$Im(z^4) = sin(4A)$$

$$Re(z^2) = \cos(2A)$$

Kad to uvrstim:

$$\sin(4A) = 4\cos(2A)$$

$$2\sin(2A)\cos(2A) = 4\cos(2A)$$

$$\cos(2A)\,(\sin(2A) - 2) = 0$$

$$\cos(2A) = 0 \rightarrow 2A = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow A = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Dakle rješenje je:

$$z = cis\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right), k = 0,1,2,3$$

Prva DZ 19. (sličan kao Školska zadaća 2013, 12h, B grupa)

19. Riješi jednadžbu u skupu $\mathbb{C}$: $z^8 + 2z^4 + 4 = 0$.

Uvodim supstituciju $t = z^4$:

$$t^2 + 2t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$z_1{}^4 = -1 - i\sqrt{3}, z_2{}^4 = -1 + i\sqrt{3}$$

Pretvoriti ćemo prvo desne strane jednakosti u trigonometrijski oblik. Modul je jednak za oba broja:

$$\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

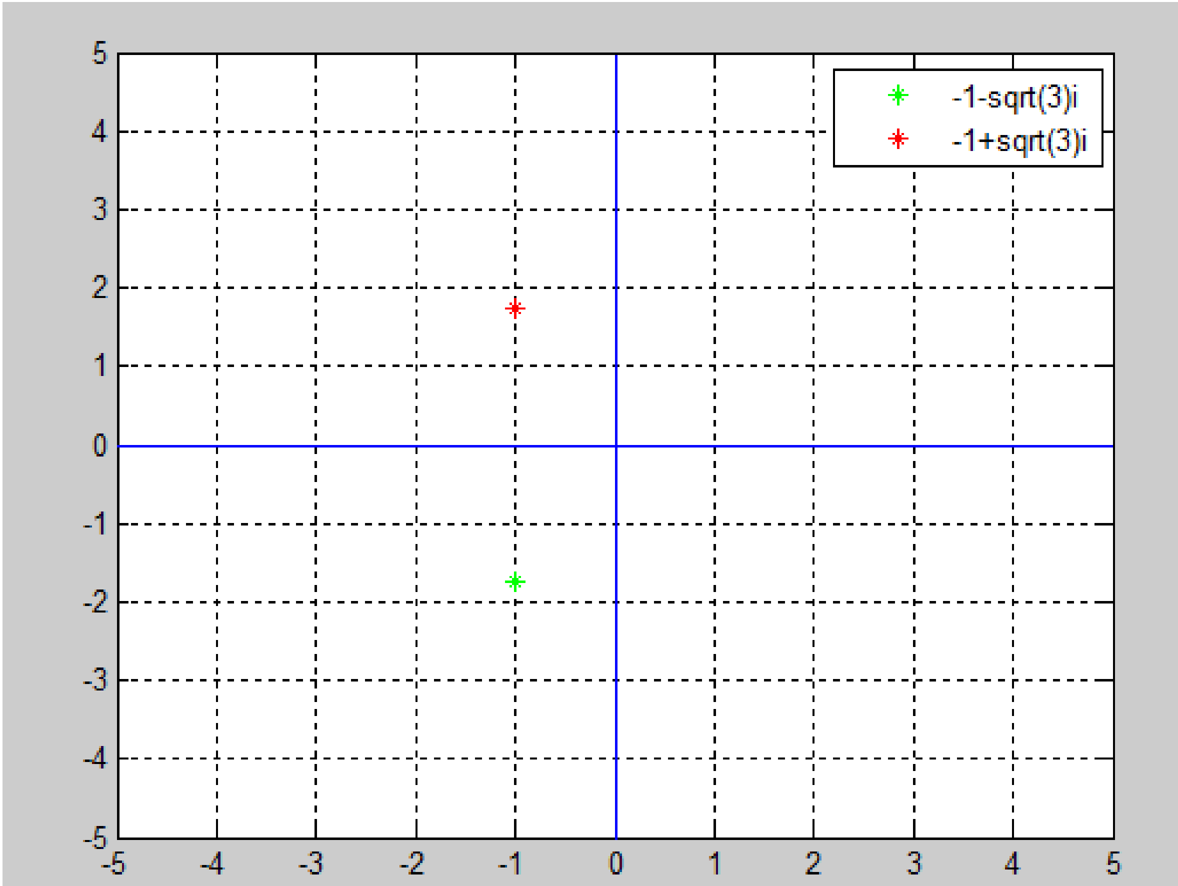
Argument brojeva iznosi:

$$A1 = \operatorname{atan}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)$$

$$A2 = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)$$

Generalno je kut za koji je tangens korijen iz 3 jednak pi trećina.

Predznak unutar atan funkcije nam ništa ne znači, predznak, odnosno iznos našeg kuta određuje isključivo položaj našeg kompleksnog broja u kompleksnoj ravnini:



Vidimo sa slike, da nam jedan kut iznosi $\frac{2\pi}{3}$, a drugi $\frac{4\pi}{3}$.

Imamo dakle:

$$z^4 = 2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow z = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)$$

$$z^4 = 2cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) \rightarrow z = \sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)$$

$$k = 0,1,2,3$$

Što nam sve skupa daje ukupno 8 rješenja, koliko smo i očekivali jer smo imali osmu potenciju u polaznoj jednadžbi.

MI 2014/2015

1. **[6 bodova]**

a) (1 bod) Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, napišite $\overline{z}$ u trigonometrijskom obliku.

b) (5 bodova) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$(1 - i\sqrt{3})z^2 = (-2\sqrt{3} + 2i)(\overline{z})^3.$$

b dio)

Ponovno ćemo koristiti eksponencijalni zapis.

$$\left|1 - \sqrt{3 * i}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3^2} = 2}$$

$$tg\ A1 = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$

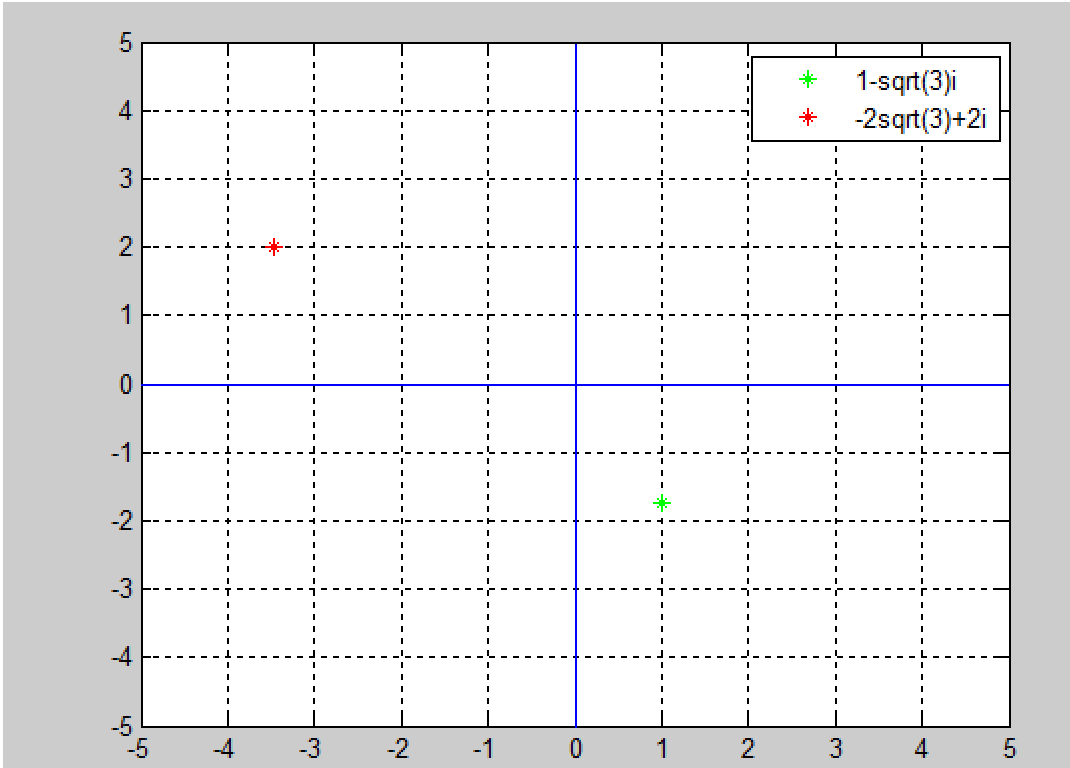
$$\left|-2\sqrt{3} + 2 * i\right| = \sqrt{2^2 * \sqrt{3^2} + 2\text{^}2} = 4$$

$$tg\ A2 = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Kuteve A1 i A2, određuje položaj kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini:

$$A1 = \frac{5\ \pi}{3}$$

$$A2 = \frac{5\pi}{6}$$



Sada mogu zapisati:

$$2 * e^{\frac{5\pi}{3}i} * r^2 * e^{2\varphi i} = 4 * e^{\frac{5\pi}{6}i} * r^3 * e^{-3\varphi i}$$

$$r^2(2 * r * e^{\frac{5\pi}{6}i-3\varphi i} - e^{2\varphi i+\frac{5\pi}{3}i}) = 0$$

Trivijalno rješenje je $r = 0$

Drugo rješenje dobijem izjednačavanjem drugog izraza u zagradi sa nulom.

$$2 * r * e^{\frac{5\pi}{6}i-3\varphi i} - e^{2\varphi i+\frac{5\pi}{3}i} = 0$$

$$2 * r * e^{\frac{5\pi}{6}i-3\varphi i} = e^{2\varphi i+\frac{5\pi}{3}i}$$

Izjednačavam modul i argument (kod argumenta ponovno moram uzeti u obzir repetitivnost od 2kπ.

$$2r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6} - 3\varphi = 2\varphi + \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$5\varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi + 12k\pi}{30}$$

$$z = \frac{1}{2} cis\left(\frac{-5\pi + 12k\pi}{30}\right), k = 0,1,2,3,4,5$$

MI 2012/2013

1. [**6 bodova**] (a) (2 boda) Izvedite izraz za umnožak kompleksnih brojeva z_1 i z_2 koji su dani u trigonometrijskom obliku. Koristeći dobiveni izraz, matematičkom indukcijom dokažite formulu za računanje n-te potencije ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnog broja danog u trigonometrijskom obliku.

   (b) (4 boda) Kompleksni broj $w = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ zapišite u trigonometrijskom obliku, zatim u skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $z^4 = w^8$, te dobivena rješenja skicirajte u kompleksnoj ravnini.

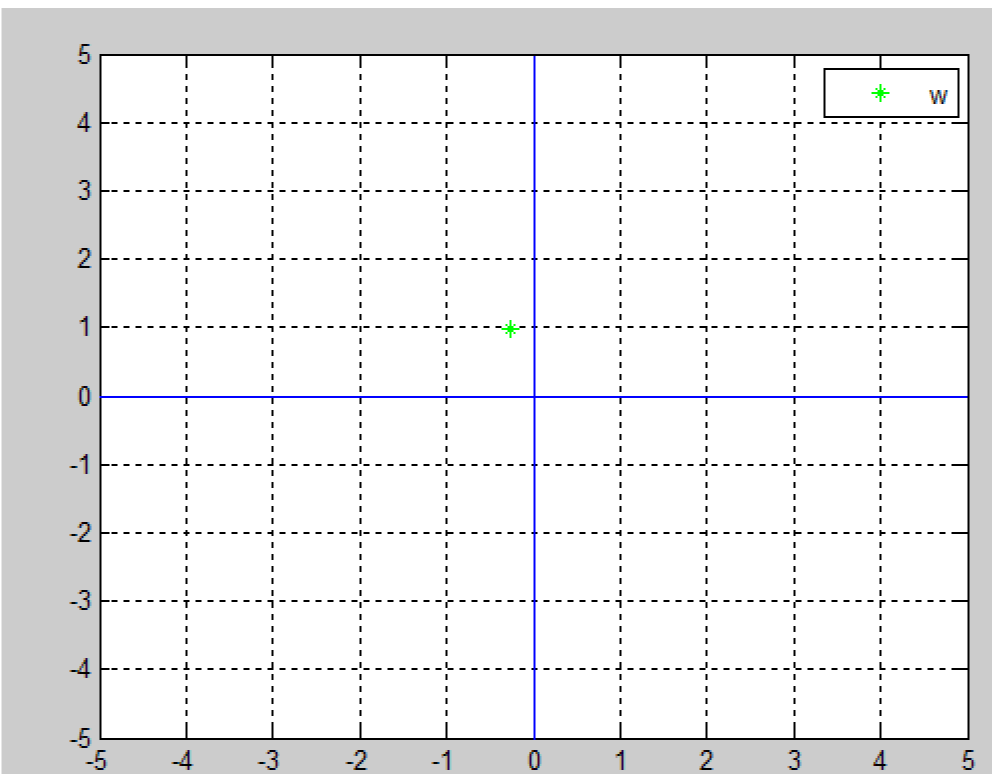
a dio imate poprilično dobro objašnjen u rješenjima tog istog ispita, pa neću ovdje ponovno tipkati

b dio)

$$|w| = r = \sqrt{\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^2 + (\sin\left(\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^2} = 1$$

$$tg\varphi = \frac{\sin\left(\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)}{-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = -tg(\left(\frac{5\pi}{12}\right))$$

Ovaj zadatak je namijenjen isključivo za zbunjivanje tijekom pretvorbe u trigonometrijski oblik. Znamo da će naš argument morati dati tangens koji je jednak tangensu u $\frac{5\pi}{12}$, neovisno o predznaku. To će sve skupa dati četiri moguća kuta, po jedan u svakom kvadrantu, odnosno mogući kutevi su $\pm\frac{5\pi}{12} + k\pi, k = 0{,}1$. Koji od ta četiri kuta nama treba odgovoriti ćemo ako nacrtamo naš polazni broj w u kompleksnoj ravnini.



Vidimo dakle da je položaj našeg kompleksnog broja u drugom kvadrantu, i da je vrijednost kuta $\frac{7}{12}\pi$.

$$w = \cos(\frac{7}{12}\pi) + isin(\frac{7}{12}\pi)$$

Sada kad imamo trigonometrijski oblik, dalje je jednostavno.

$$w^8 = \cos(8 * \frac{7}{12}\pi) + isin(8 * \frac{7}{12}\pi)$$

$$z = \sqrt[4]{w^8} = \cos\left(\frac{8 * \frac{7}{12}\pi + 2k\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{8 * \frac{7}{12}\pi + 2k\pi}{4}\right),$$

$$k = 0,1,2,3$$

Ova rješenja u kompleksnoj ravnini trebala bi dati pravilni četverokut.

ZIR 2012/2013

1. **[5 bodova]** (a) (1 bod) Napišite formulu za računanje izraza $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Koliko različitih vrijednosti ima $\sqrt[n]{z}$?

   (b) (4 boda) U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $z^3 + i = e^{-\ln 2 - i\frac{7\pi}{6}}$.

$$z^3 = e^{-ln2 - i\frac{7}{6}\pi} - i = e^{-ln2} * e^{-i\frac{7}{6}\pi} - i$$
$$= -\frac{1}{2} * \left(\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) + isin(-)\frac{7}{6}\pi\right) - i$$

$$z^3 = \frac{1}{2} * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

Ponovno treba pretvoriti u trigonometrijski oblik, ovdje ću preskočiti detaljnu pretvorbu.

$$z^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}}\, cis\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right), k = 0,1,2$$

JIR 2014/2015

1. (**4 boda**) Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi $z + z^{-1} = 1$. Odredite

$$z^{2008} + z^{2009} + z^{2010} + z^{2011} + z^{2012}.$$

Ovaj zadatak je najjednostavnije započeti na način da izlučimo srednji član:

$$z^{2010}(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2)$$

Sada iskoristim uvjet iz zadatka $(z + \frac{1}{z} = 1)$

$$z^{2010}(\frac{1}{z^2} + z^2 + 2)$$

Sada kvadriram uvjet zadatka

$$\left(z^2 + 2 * z * \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = 1$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$$

I dobijem

$$z^{2010}(-1 + 2) = z^{2010} = (z^3)^{670}$$

Ovdje sam izabrao zapis preko treće potencije jer će mi do vrijednosti z^3 biti najjednostavnije doći. Zadnji izraz pomnožim sa z.

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = -1 \ \ /* z$$

$$z^3 + \frac{1}{z} = -z \rightarrow z^3 = -\left(z + \frac{1}{z}\right) = -1$$

Ovdje sam ponovno koristio uvjet zadatka. Sada je lagano doći do konačnog rješenja.

$$-1^{670} = 1$$

DIR 2012/2013

2. **[5 bodova]** Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\arg(3i\overline{z}) = \arg(z^2) \ \text{ i } \ |\overline{z} \cdot (z+1)| = |z + zi|^2.$$

Prvo ću izračunati argument iz prve jednadžbe.

$$\arg(3iz) = \arg(3i) - \arg(z) = 2\arg(z) + 2k\pi$$

Koristili smo svojstvo za umnozak dva argumenta, te također svojstvo da je arg(conj(z))=-arg(z).

$$3\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6} \pm \frac{2k\pi}{3}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \varphi_1 = 5\frac{\pi}{6}, \varphi_2 = 9\frac{\pi}{6}$$

Sada kada znamo argumente, možemo računati modul. Koristimo trigonometrijski zapis, i svojstva modula.

$$|r(\cos(\varphi) - isin(\varphi)) * (r(\cos(\varphi) + isin(\varphi)) + 1)| \\ = |r(\cos(\varphi) + isin(\varphi))(1 + i)|^2$$

$$|r((\cos(\varphi) + isin(\varphi))| \\ * \left|\left(r\left(\cos(\varphi) + isin(\varphi)\right) + 1\right)\right| = |r(\cos(\varphi) + isin(\varphi)|^2 \\ * |1 + i|^2$$

$$\sqrt{r^2} * \sqrt{(r^2\cos^2\varphi + 2\,\mathrm{r}\cos\varphi + 1) + r^2\sin^2\varphi} = 2r^2$$

$$r\sqrt{r^2 + 2 * r * \cos\varphi + 1} = 2r^2$$

$$r\left(\sqrt{r^2 + 2 * r * \cos\varphi + 1} - 2r\right) = 0$$

Jedno rješenje je trivijalno z=0.

Ostala rješenja dobijem iz druge jednadžbe.

$$\sqrt{r^2 + 2 * r * \cos\varphi + 1} = 2r \;\; /()^2$$

$$r^2 + 2 * r * \cos\varphi + 1 = 4r^2$$

$$3r^2 - 2 * r * \cos\varphi - 1 = 0$$

Sada kada u ovu jednadžbu uvrštavam redom kuteve koje sam dobio iz argumenta i rješim jednadžbe dobijem još tri rješenja:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \rightarrow \; r_0 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}$$

$$\varphi_1 = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \ r_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}$$

$$\varphi_2 = \frac{9\pi}{6} \rightarrow \ r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3. NIZOVI

LJIR 2014/2015

3. **(5 bodova)**

(a) Nađite primjer konvergentnog niza realnih brojeva čiji je limes jednak 1. Nađite primjer divergentnog niza realnih brojeva.

(b) Definirajte gomilište niza realnih brojeva. Odredite sva gomilišta niza

$$a_n = (-1)^n \frac{5n+3}{6n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da li je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan? Objasnite svoju tvrdnju.

a dio) Konvergentni s limesom 1 npr $a_n = \frac{n+5}{n+6}$

Divergentni npr $a_n = n$

b dio)

Napišimo prvo nekoliko članova ovoga niza

$$\rightarrow \; -\frac{8}{9}, \frac{13}{13}, -\frac{18}{19} \ldots$$

Vidimo da će se niz u biti sastojati od dva niza brojeva, koji će oba konvergirati ka istom broju različitom po predznaku (zato jer se međusobno razlikuju samo po predznaku). Ukoliko izračunamo limesa apsolutne vrijednosti ovoga niza, dobit ćemo odgovor koji su to brojevi:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{6n+1} = \frac{5}{6}$$

Niz će dakle imati dva gomilišta, 5/6 i -5/6.

Niz koji ima dva gomilišta nije konvergentan, konvergentni su nizovi samo sa jednim gomilištem i tada se to gomilište naziva limesom niza.

Školska zadaća 2014/2015, 13h, A grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 2^{n-1}}{5^{n+1}}.$$

Znamo da vrijedi $\lim_{n\to\infty}(q)^n = 0, ako\ je\ q < 1$. Podijelimo dakle s najvećom potencijom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 2^{n-1} \quad /:5^n}{5^{n+1} \quad /:5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n * \frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{5}$$

Školska zadaća 2014/2015, 12h, B grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Znamo da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Podijelim s najvećom potencijom:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1 \quad /:n}{\sqrt{n^2+1} \quad /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h A grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!*(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!\,(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{(n+2)(n+3)} = 0$$

Školska zadaća 2013/2014, 13h, B grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

U zadacima sa korijenima uvijek se vrši racionalizacija

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) * \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1$$

Ovdje sam koristio pojam ekvivalentno neizmjernih malih veličina, odnosno gledao sam samo najveće potencije i u brojniku i u nazivniku i samo njih pisao, jer znam da jedino one „prežive“, a sve ostale su nula.

Školska zadaća 2013/2014, 12h, A grupa

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+5^n}{5+5^2+\cdots+5^n}.$$

U ovom zadatku jedina je fora sjetiti se sume geometrijskog niza

$$S = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

Mogu pisati:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+5^n}{5+5^2+\cdots+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5^n}{5*\frac{5^n-1}{4}} = \frac{4}{5}$$

DZ 3, 6)

6. Izračunati $\lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{(n-a)^3}{(n+1)^2}\right)$ u zavisnosti o parametru a.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2 - (n^3 - 3n^2a + 3na^2 - a^3)}{n^2+2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 + 3n^2a - 3na^2 + a^3}{n^2+2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+3a) + n(1-3a^2) + a^3}{n^2+2n+1}$$

Vidimo da će iznos limesa iznositi o parametru a. Ukoliko je a takav da nestane član uz n^2 u brojniku, tada će limes iznositi nula.

Drugim riječima imamo dva slučaja:

$$2+3a=0 \to a=-\frac{2}{3} \to \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+3a)+n(1-3a^2)+a^3}{n^2+2n+1}=0$$

$$a \neq -\frac{2}{3} \to \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+3a)+n(1-3a^2)+a^3}{n^2+2n+1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+3a)}{n^2}$$
$$=2+3a$$

MI 2014/2015

3. **[6 bodova]**

a) (3 boda) Koje su od sljedećih tvrdnji istinite, a koje neistinite?

(T1) Svaki omeđen niz je konvergentan.
(T2) Svaki konvergentan niz je omeđen.
(T3) Svaki konvergentan niz je monoton.

Za svaku neistinitu tvrdnju navedite jedan protuprimjer te obrazložite zašto je to protuprimjer.

b) (3 boda) Niz (a_n) zadan je rekurzivno

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=\frac{n+1}{3n+1}a_n, n\geq 1.$$

Dokažite da je niz (a_n) konvergentan i odredite njegov limes.

a dio)

T1) Netočno, uzmimo za primjer niz iz prvog zadatka

$a_n = (-1)^n \frac{5n+3}{6n+1}$. Taj niz je omeđen, ali ne i konvergentan.

T2) Točno

T3) Netočno npr niz $a_n = (-1)^n * \frac{1}{n}$.

b dio) U ovakvim zadacima potrebno je dokazati da je niz monoton i omeđen.

Ponekad je u zadacima zadano s kojom je brojkom omeđen i je li rastući ili padajući, ponekad moramo sami zaključiti.

Iz rekurzivne formule možemo vidjeti da je vrlo vjerojatno omeđen sa jedinicom. Omeđenost i monotonost se dokazuju matematičkom indukcijom.

OMEĐENOST

Tvrdim da je $a_n \leq 1$

$$\underline{\boldsymbol{BAZA}}$$

$$a_1 = 1 \leq 1$$

$$\underline{\boldsymbol{PRETPOSTAVKA}}$$

$$a_n \leq 1$$

$$\underline{\boldsymbol{KORAK}}$$

$$a_{n+1} \leq 1$$

Krećem od lijeve strane

$$\frac{n+1}{3n+1}a_n \leq 1$$

Po pretpostavci znam da je $a_n \leq 1$, pa moram samo provjeriti za ostatak izraza

$$\frac{n+1}{3n+1} \leq 1$$

S obzirom da je n prirodan broj, ovo vrijedi za svaki n, te je time postupak gotov.

<u>MONOTONOST</u>

Iz rekurzivne formule mogu pretpostaviti da je niz padajući

Tvrdim da je $a_{n+1} \leq a_n$.

$$\underline{\boldsymbol{BAZA}}$$

$$a_2 < a_1$$

$$\frac{1+1}{3+1} * 1 < 1$$

$$\underline{\boldsymbol{PRETPOSTAVKA}}$$

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\underline{\boldsymbol{KORAK}}$$

$$a_{n+2} \leq a_{n+1}$$

$$a_{n+1}\frac{n+2}{3n+4} \leq \frac{a_n(n+1)}{3n+1}$$

Zbog pretpostavke znam da vrijedi

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Te samo moram provjeriti da li vrijedi ostatak tvrdnje

$$(n+2)(3n+1) \leq (n+1)(3n+4)$$

$$3n^2 + 6n + n + 2 < 3n^2 + 3n + 4n + 4$$

$$2 < 4$$

Ova tvrdnja vrijedi za svaki n, te smo time dokazali da je niz monotono padajući.

Sada znamo da niz konvergira i da ima limes. Označimo to na sljedeći način:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Sada napadnimo našu rekurzivnu formulu sa limesom:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3n+1} a_n \quad / \lim_{n\to\infty}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+1} * L = \frac{1}{3} * L \to L = 0$$

MI 2011/2012

5. **[5 bodova]** (a) (1 bod) Definirajte limes niza realnih brojeva.

(b) (2 boda) Niz (a_n) je zadan na sljedeći način:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{8}(2 + a_n)^2.$$

Dokažite da je niz (a_n) rastući i odozgo omeđen s 2.

(c) (2 boda) Izračunajte $\lim_{n\to\infty} a_n$ i objasnite gdje ste pri tome koristili svojstva koja je trebalo dokazati u (b) dijelu zadatka.

Ovaj zadatak se rješava na identičan način kao i prošli, samo je još lakše jer su nam već zadali da je rastući i omeđen.

Rješenje ovog zadatka je L=2.

FUNKCIJE

MI 2011/2012

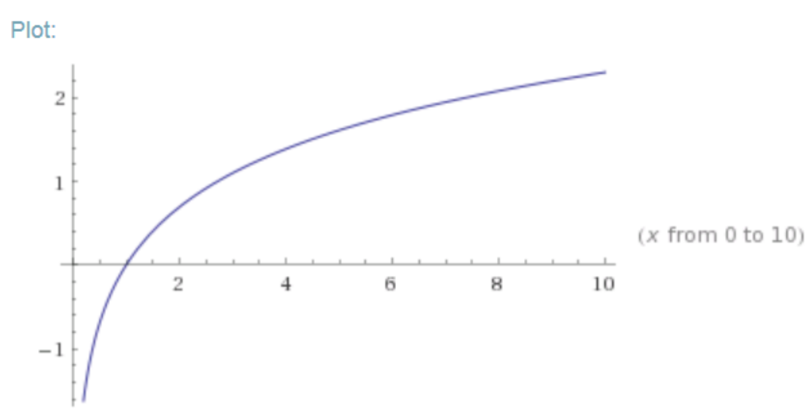
2. **[5 bodova]** (a) (2 boda) Dokažite da je kompozicija tri padajuće funkcije također padajuća funkcija.

   (b) (3 boda) Zadane su funkcije $f(x) = -\ln x$ i $g(x) = e^{-x} + 3$.
   Skicirajte grafove funkcija f i g.
   Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije $f \circ g$.
   Je li $f \circ g$ rastuća funkcija? Obrazložite odgovor!

a) Informacije iz zadatka:
   $x_1>x_2$ -> $f(x_1)<f(x_2)$, $g(x_1)<g(x_2)$, $h(x_1)<h(x_2)$
   Dokaz:
   $x_1>x_2$ -> $f(x_1)<f(x_2)$ [komentar: pošto je $f(x_1)<f(x_2)$, a $g(x)$ je padajuća funkcija vrijedi slijedeće] -> $g(f(x_1))>g(f(x_2))$ [analogno prethodnom koraku $g(f(x_1))>g(f(x_2))$, a $h(x)$ je padajuća vrijedi] $h(g(f(x_1)))<h(g(f(x_2)))$, za $x_1>x_2$, dakle, kompozicija tri padajuće funkcije je također padajuća funkcija

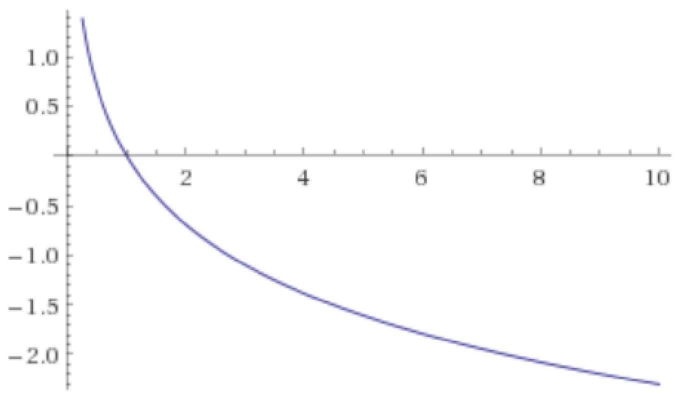
b) Skice:

f(x)=ln(x)

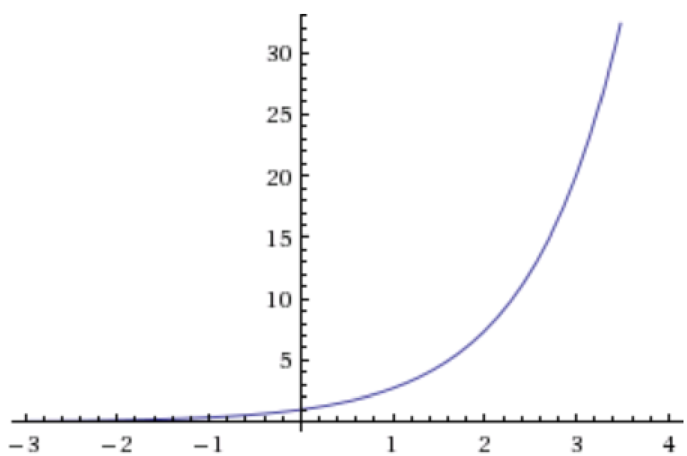


f(x)=-ln(x) [zrcalimo oko x-osi]

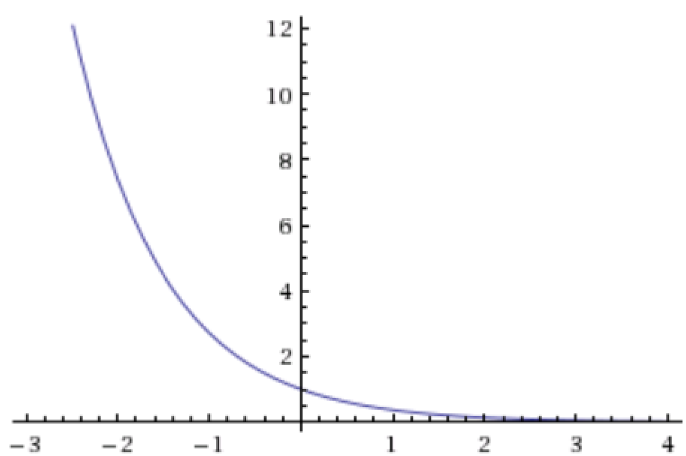
Plot:



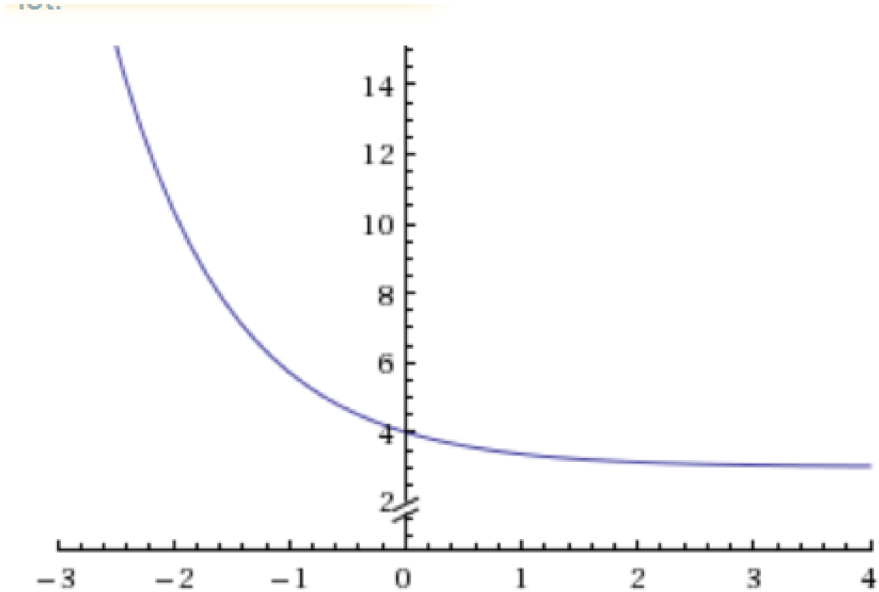
g(x)=e^x



g(x)=e^{-x} [zrcalimo oko y-osi]



$g(x)=e^{-x}+3$ [podignemo graf za 3]



Domena:
$f(g(x))=-\ln(e^{-x}+3)$
$e^{-x}+3>0$ -> $x€R$

$f(g(x))=-\ln(e^{-x}+3)$ je rastuća funkcija jer je kompozicija dvaju padajućih funkcija rastuća funkcija.
[Iz grafova jasno vidimo da su obje funkcije padajuće, a u a) dijelu zadatka smo vidjeli da je kompozicija dviju padajućih funkcija rastuća funkcija]

MI 2012/2013

2. [**5 bodova**] Zadane su funkcije $f(x)=2\operatorname{ch}(x-3)-e^{-3}$ i $g(x)=\sqrt{e^3-x}$.

   (a) (2 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije $g\circ f$.

   (b) (3 boda) Na kojem dijelu svojg prirodnog područja definicije je $g\circ f$ strogo rastuća funkcija? Odredite sliku funkcije $g\circ f$.

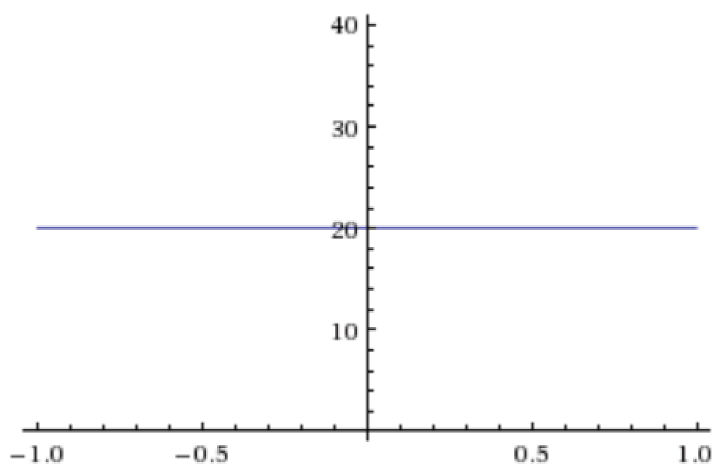
a) $g\big(f(x)\big)=\sqrt{e^3-2ch(x-3)+e^{-3}}$

$$e^3-2ch(x-3)+e^{-3}\geq 0$$
$$e^3-(e^{x-3}+e^{-x+3})+e^{-3}\geq 0$$
$$e^3+e^{-3}[pravac]=(e^{x-3}+e^{-x+3})[ch]$$

Riješimo jednadžbu kako bi dobili sjecišta tih dviju funkcija i odredili za koje x vrijedi gornja nejednakost [vrijedit će kad će „pravac biti veći od ch" -> pogledajmo skice]

na skici se nalazi: $2ch(x-3) = e^{x-3} + e^{-x+3}$

$na\ slici\ se\ nalazi$: $\quad y = e^{3} + e^{-3}$



$$x = 0\ (trivijalno\ rješenje)\ i\ x = 6$$

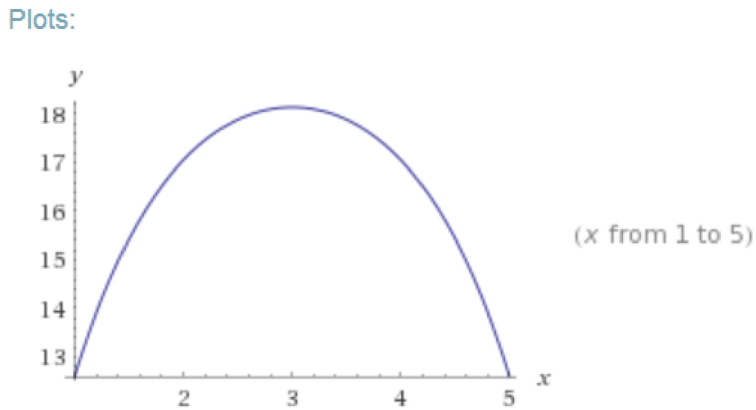
pa vrijedi

$$e^{3} - (e^{x-3} + e^{-x+3}) + e^{-3} \geq 0$$

za x€[0,6]

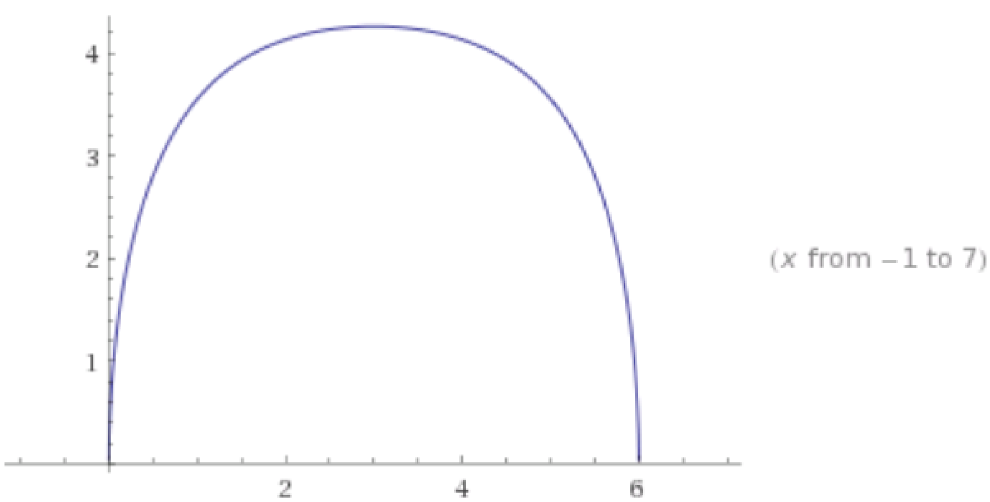
Dakle, domena funkcije g(f(x))=[0,6]

Skicirajmo $h(x) = e^3 + e^{-3} - 2ch(x-3)$ na način da od pravca „oduzimamo“ $2ch(x-3)$.



[Bitno da skužite je minimalni y=0, a da je maksimum y(3)].
Slika funkcije je: Im(g(f(x)))=[0, $\sqrt{e^3 + e^{-3} - 2}$]
[y(3)= $\sqrt{e^3 - 2ch(3-3) + e^{-3}} = \sqrt{e^3 - 2 + e^{-3}}$]
Sa grafa je jasno da je funkcija rastuća na intervalu x€[0,3].

$$g(f(x)) = \sqrt{e^3 - 2ch(x-3) + e^{-3}}$$

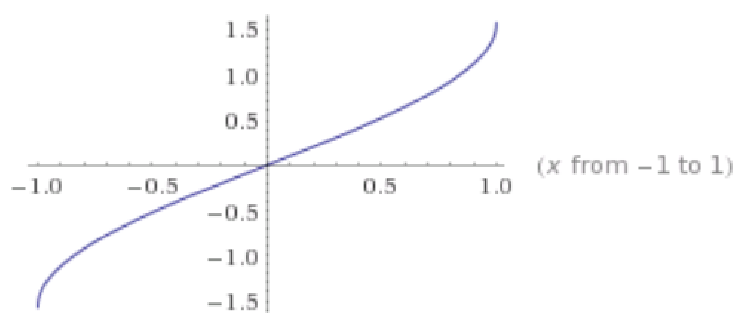


MI 2013/2014

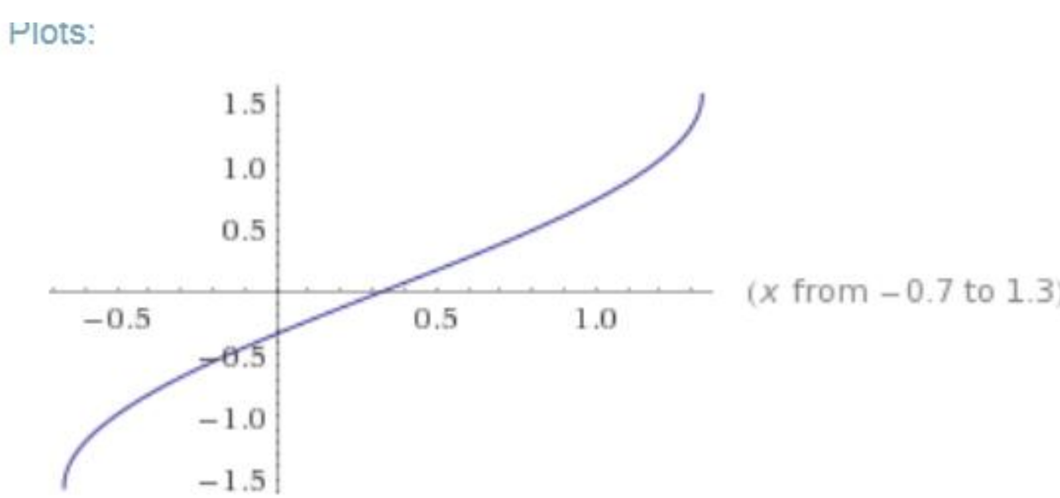
2. [**4 boda**] Zadana je funkcija $f(x) = 2 + 2\arcsin(3x - 1)$. Odredite prirodno područje definicije $D(f)$, sliku $Im(f)$, te skicirajte graf funkcije f. Da li je $f\colon D(f) \to Im(f)$ bijekcija? Obrazložite svoj odgovor!

$$f(x) = 2 + 2\arcsin(3\left(x - \frac{1}{3}\right))$$

f(x)=arcsin(x)

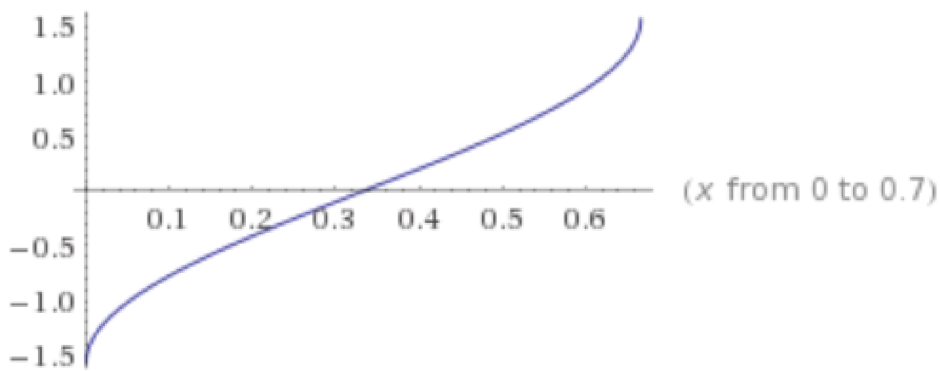


$f(x) = \arcsin\left(x - \frac{1}{3}\right)$ [graf pomaknemo za 1/3 udesno]



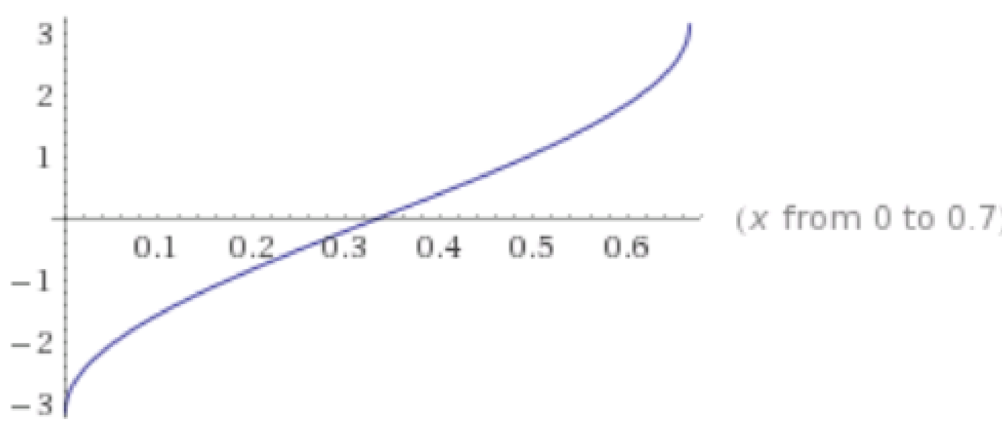
$f(x) = \arcsin(3\left(x - \frac{1}{3}\right))$ [napravimo restrikciju->skrčimo graf tri puta po x-osi]

Plots:



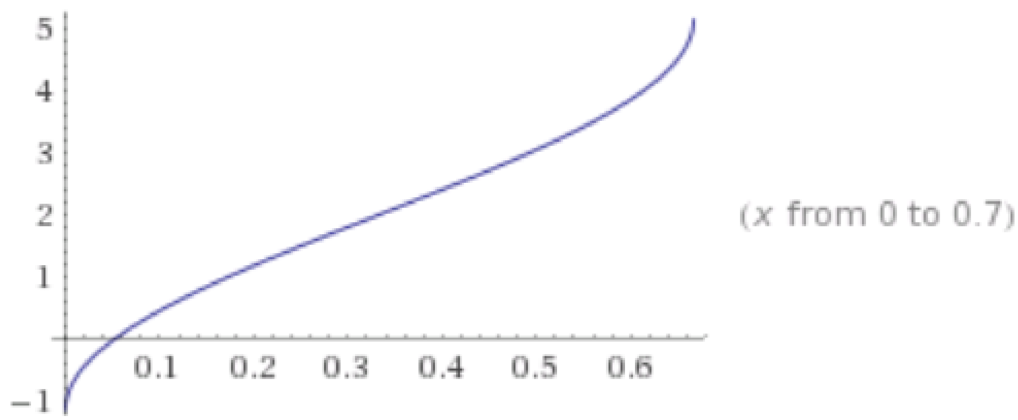
$f(x) = 2\arcsin(3\left(x - \frac{1}{3}\right))$ [razvučemo graf dva puta po y-osi]

Plots:



$f(x) = 2 + 2\arcsin(3\left(x - \frac{1}{3}\right))$ [podignemo graf za 2]

Plots:



D(f)=[0, 2/3]

Im(f)=[2-π,2+π]

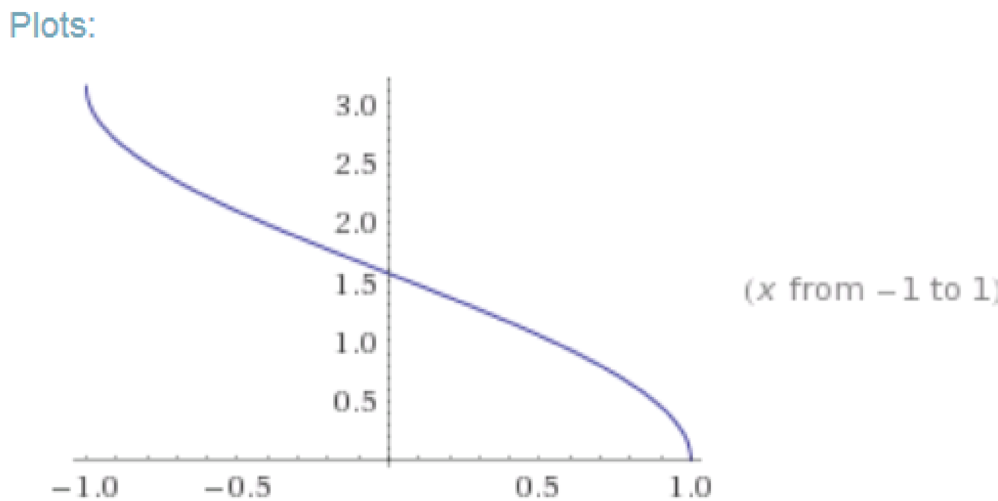
f: D(f)->Im(f) je bijekcija jer svaki x iz D(f) ima pridružen **točno jedan** y iz Im(f) što se vidi sa grafa.

MI 2014/2015

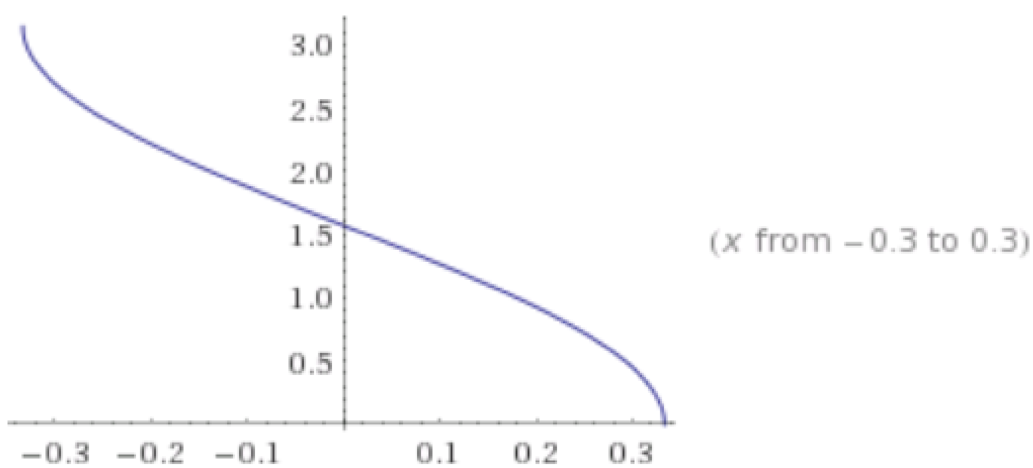
b) (3 boda) Odredite prirodno područje definicije i sliku funkcije, te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = 2\arccos(3x) - \pi.$$

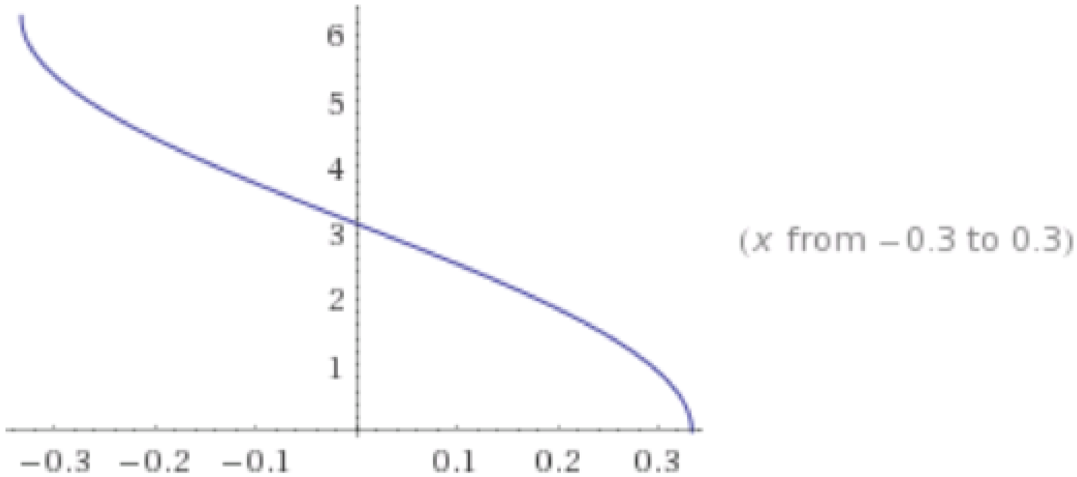
$f(x) = \arccos(x)$ [osnovna početna funkcija]



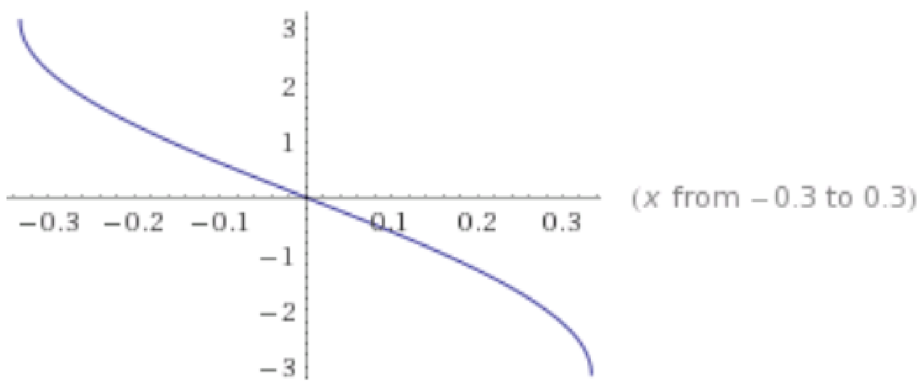
$f(x) = \arccos(3x)$ [restrikcija po x-osi]



$f(x) = 2\arccos(3x)$ [rastegnemo dva puta po y osi]



$f(x) = 2\arccos(3x) - \pi$ [spustimo za π]



D(f)=[-1/3,1/3]

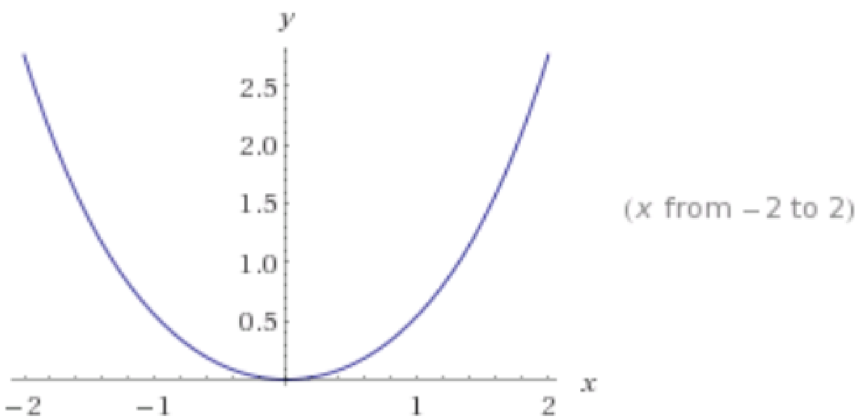
Im(f)=[-π,π]

KPZ 2013. neparna (13h) A

3. (2 boda) Odredite domenu i sliku te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \operatorname{ch} x - 1.$$

Princip isti ko I na prethodnim zadacima.



D(f)=[-∞,+∞]

Im(f)=[0,+∞]

KPZ 2014. parne (12h) A

3. (2 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right).$$

$$-1 \leq \frac{1}{x+2} \leq 1$$

.

.

.

.

.

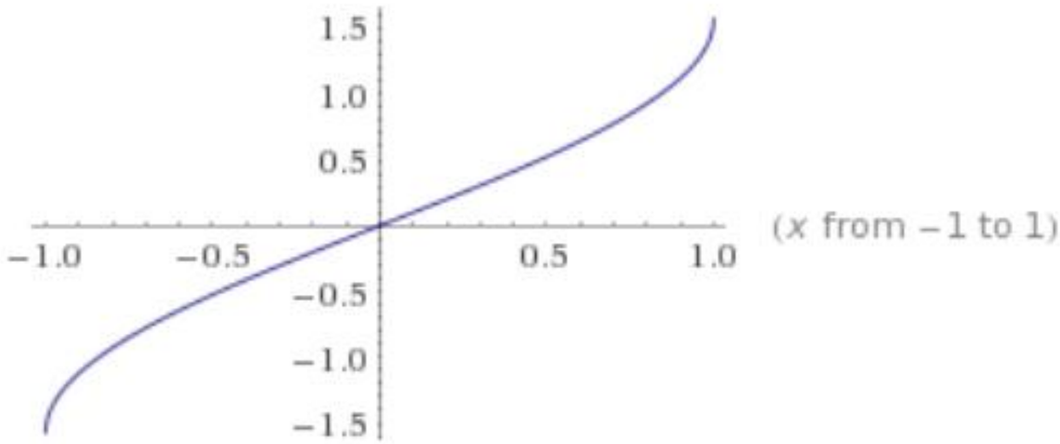
$$D(f) =< -\infty, -3] U [-1, +\infty >$$

ZIR 2013./2014.

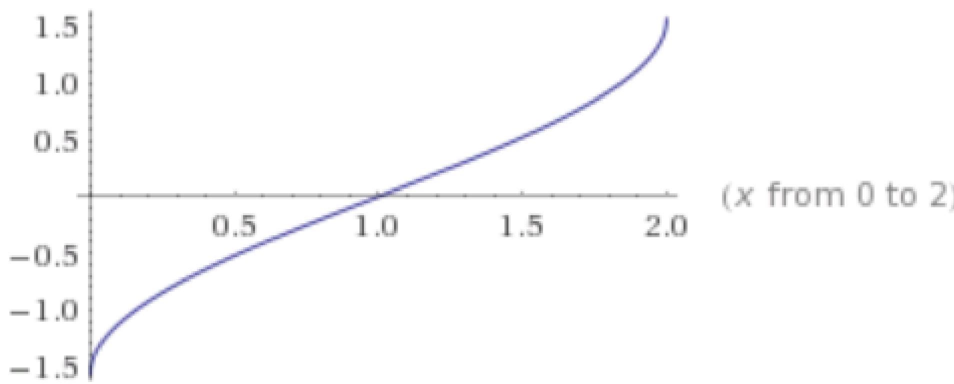
2. [**4 boda**] Zadana je funkcija $f(x) = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$. Odredite prirodno područje definicije i sliku funkcije f te nacrtajte njezin graf. Odredite f^{-1} i skicirajte graf funkcije f^{-1}.

$$f(x) = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$$

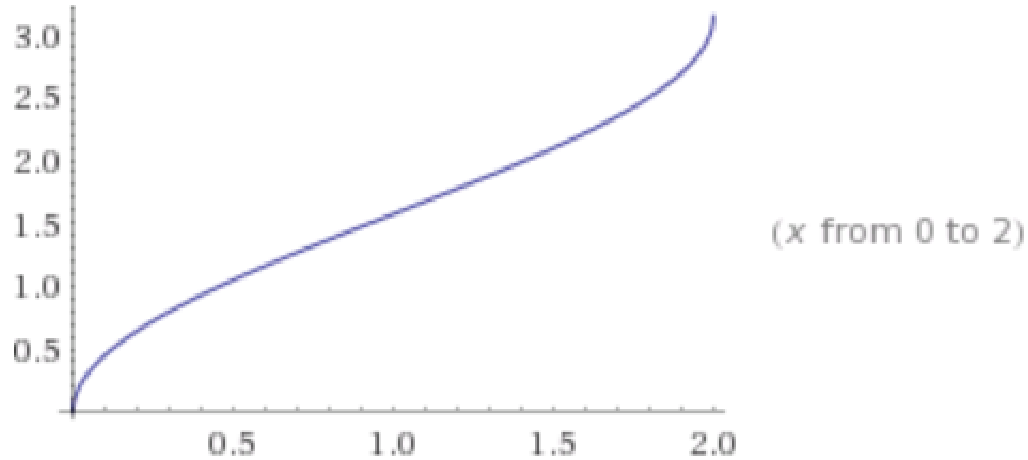
$f(x) = \arcsin(x)$



$f(x) = \arcsin(x - 1)$ [pomaknemo za 1 udesno]



$f(x) = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$ [podignemo graf za π/2]



D(f)=[0,2]

Im(f)=[0,π]

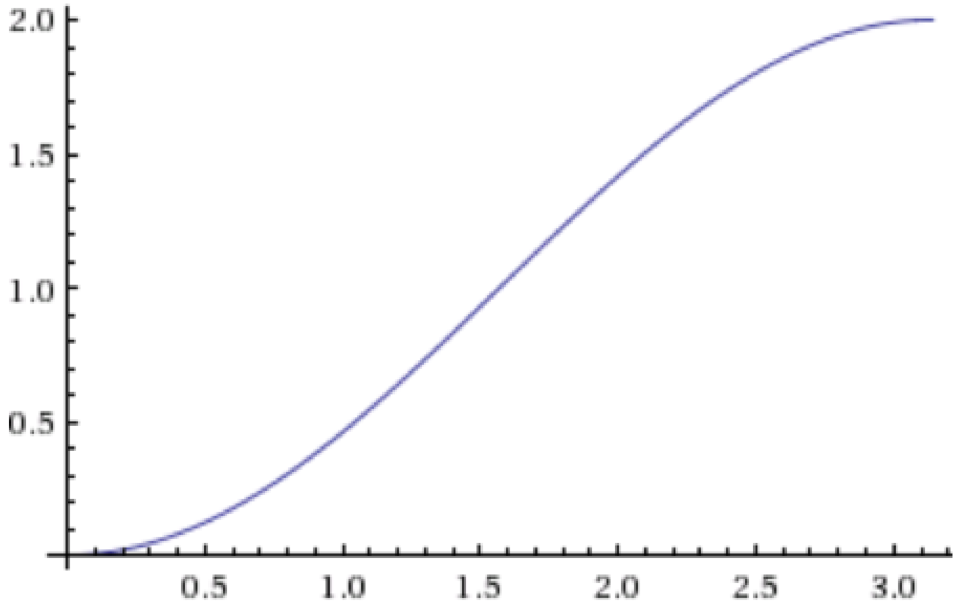
$$f^{-1} \ldots . x = arcsin(y-1) + \frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = arcsin(y-1)$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = y - 1$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$



Pazite, crtate f^{-1}, a pošto vrijedi da je $D(f^{-1})=Im(f)$ i $Im(f^{-1})=D(f)$, slika nije cijeli $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, već samo za $x=[0,\pi]$

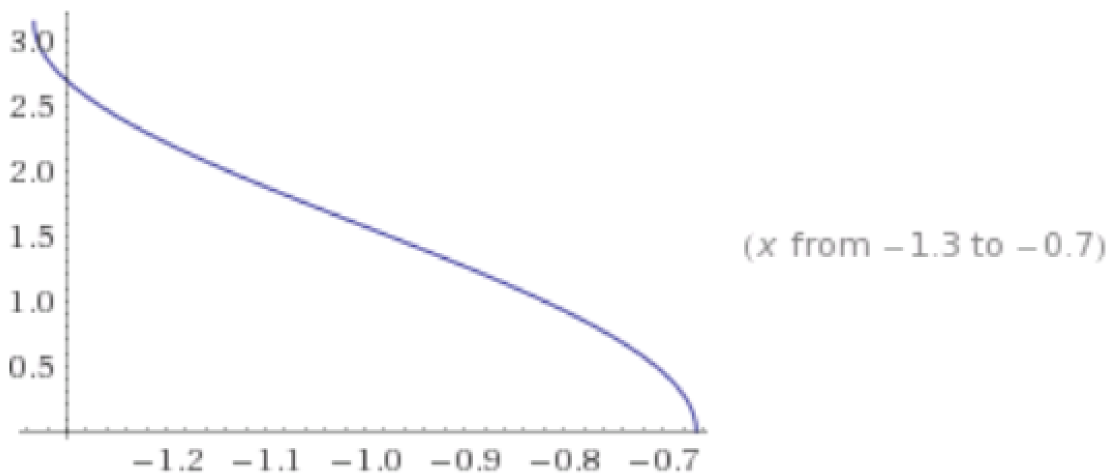
LJIR 2014./2015.

2. (**6 bodova**) Zadana je funkcija $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(3x+3)$.

   (a) Skicirajte graf funkcije f. Odredite domenu $\mathcal{D}(f)$ funkcije f te njezinu sliku $Im(f)$.

   (b) Da li je $f : \mathcal{D}(f) \to Im(f)$ bijekcija? Ako jest, odredite f^{-1} te skicirajte njezin graf.

Postupak isti kao i u prethodnim zadacima.



D(f)=[-4/3,-2/3]=Im(f^{-1})

Im(f)=[0,π]= D(f^{-1})

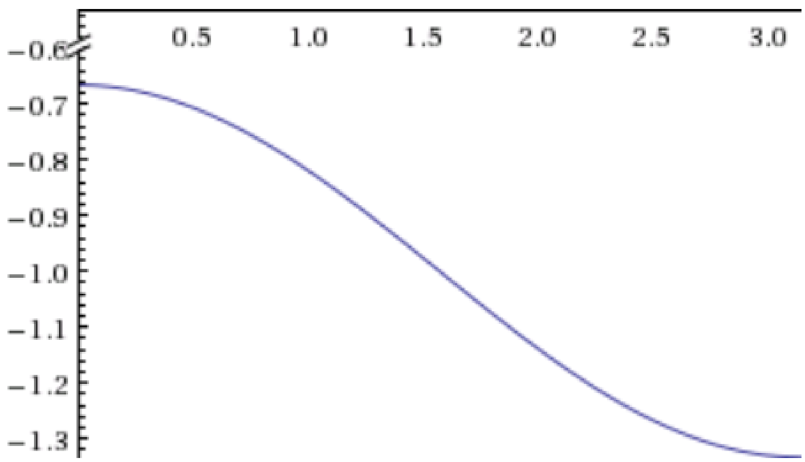
$$f^{-1} \ldots .\, x = \frac{\pi}{2} - \arcsin(3y+3)$$

$$-x + \frac{\pi}{2} = \arcsin(3y+3)$$

$$\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = 3y + 3$$

$$y = \frac{1}{3}\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \text{ , x=[0,}\pi\text{]}$$

Postupak crtanja je isti kao u zadacima do sada, konačni graf izgleda kao ovaj na slici. Pazite da je x=[0,π]!



JIR 2012./2013.

3. [**6 bodova**]

(a) (2 boda) Za zadanu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to Im(f)$ definirajte $f^{-1}(x)$. Pod kojim uvjetom postoji $f^{-1}(x)$?

(b) (4 boda) Odredite f^{-1}, $\mathcal{D}(f)$ i $Im(f)$ ako je $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{e^x+2}\right)$.

a) Definicija: f^{-1}:Im(f)->R

f^{-1} postoji kada je funkcija f bijekcija!

Uvjeti:

$$D(f^{-1}) = Im(f),\ Im(f^{-1}) = D(f),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \text{za sve } x \in D(f),$$

$$f(f^{-1}(x)) = x,\ \text{za sve } x \in D(f^{-1}).$$

b) Domena:

$$-1 \leq \frac{1}{e^x+2} \leq 1$$

$$-e^x - 2 \leq 1$$

$e^x \geq -3$ [to vrijedi za sve x=R]

$$e^x + 2 \geq 1$$

$e^x \geq -1$ [to vrijedi za sve x=R]

D(f)=R

$$f^{-1} \dots\ x = \arccos(\frac{1}{e^y+2})$$

$$\cos(x) = \frac{1}{e^y+2}$$

$$e^y = \frac{1-2\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$f^{-1}(x) = y = \ln(\frac{1-2\cos(x)}{\cos(x)})$$

Im(f)=D(f^{-1})

$$\frac{1-2\cos(x)}{\cos(x)} > 0$$

$$1-2\cos(x) = 0 \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Napravite tablicu i vidite da je D(f^{-1})=Im(f)=[$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$]