Matematička indukcija

1. $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

1^0 *Baza* :

$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$

$1=1$

- tvrdnja vrijedi za n =1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

3^0 Korak:

$$\underbrace{1+2+...+n}+n+1=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+2n+n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2n+2}{2}=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

2. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

1^0 Baza:

$1=1^2\Rightarrow 1=1\rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

3^0 Korak:

$1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$

$1+3+5+...+(2n-1)+2n+2-1=n^2+2n+1$

$1+3+5+...+(2n-1)+2n+1=n^2+2n+1$

$$\underbrace{1+3+5+...+(2n-1)}_{n^2}+2n=n^2+2n$$

n^2 +2n=n^2+2n

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

3. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

1^0 Baza:

$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}\Rightarrow 1=1\rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

3^0 Korak:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+n^3+3n^2+3n+1=\frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+n^3+3n^2+3n+1=\frac{n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+n^3+3n^2+3n+1=\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}+n^3+3n^2+3n+1=\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$\frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4}{4}=\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}=\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

4. $-3+3+9+...+(6n-9)=3n^2-6n$

1^0 Baza:

$-3=3\cdot 1^2-6 \Rightarrow -3=-3$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$$-3+3+9+...+(6n-9)=3n^2-6n$$

3^0 Korak:

$$-3+3+9+...+(6n-)+(6(n+1)-9)=3(n+1)^2-6(n+1)$$

$$-3+3+9+...+(6n-9)+(6n+6-9)=3n^2+6n+3-6n-6$$

$$3n^2-6n+6n-3=3n^2-3$$

$$3n^2-3=3n^2-3$$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

5. $-1+3+7+...+(4n-5)=n(2n-3)$

1^0 Baza:

$-1=1(2\cdot 1-3) \Rightarrow -1=2-3 \Rightarrow -1=-1 \rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $-1+3+7+...+(4n-5)=n(2n-3)$

3^0 Korak:

$-1+3+7+...+(4n-5)+(4n+4-5)=(n+1)\cdot(2(n+1)-3)$

$-1+3+7+...+(4n-5)+(4n-1)=2n^2+n-1$

$2n^2-3n+4n-1=2n^2+n-1$

$2n^2+n-1=2n^2+n-1$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

6. $-3-7-11-...-(4n-1)=-n(2n+1)$

1^0 Baza:

$-4n+1=-n(2n+1)\Rightarrow -4\cdot1+1=-1(2\cdot1+1)\Rightarrow -3=-3\rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $-3-7-11-...-(4n-1)=-n(2n+1)$

3^0 Korak:

$-3-7-11-...-(4n-1)-(4\cdot(n+1)-1)=-(n+1)\cdot(2(n+1)+1)$

$-n(2n+1)-(4n+3)=-(n+1)(2n+3)$

$-2n^2-n-4n-3=-(n+1)(2n+3)$

$-2n^2-5n-3=-(n+1)(2n+3)$

$-(2n^2+5n+3)=-(n+1)(2n+3)$

$-(2n^2+2n+3n+3)=-(n+1)(2n+3)$

$-(2n(n+1)+3(n+1))=-(n+1)(2n+3)$

$-(n+1)(2n+3)=-(n+1)(2n+3)$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

7. $2+7+15+...+\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2$

1^0 Baza:

$\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot1\cdot(3\cdot1+1)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)^2\Rightarrow 2=2\rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$$2+7+15+...+\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2$$

3^0 Korak:

$$\underbrace{2+7+15+\frac{1}{2}n(3n+1)}+\frac{1}{2}(n+1)(3n+4)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)^2$$

$$\frac{1}{2}n(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)(3n+4)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)^2\ /\cdot 2$$

$$n(n+1)^2+(n+1)(3n+4)=(n+1)(n+2)^2$$

$$(n+1)\cdot(n(n+1)+3n+4)=(n+1)(n+2)^2$$

$$(n+1)(n^2+n+3n+4)=(n+1)(n+2)^2$$

$$(n+1)(n^2+4n+4)=(n+1)(n+2)^2$$

$$(n+1)(n+2)^2=(n+1)(n+2)^2$$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

8. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

1^0 Baza:

$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}\Rightarrow\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

3^0 Korak:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)}=\frac{n+1}{4(n+1)+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$

$$\frac{n}{4n+1}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$
$$\frac{n(4n+5)+1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$
$$\frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$
$$\frac{4n^2+4n+n+1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$
$$\frac{4n(n+1)+(n+1)}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$
$$\frac{(n+1)(4n+1)}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$
$$\frac{n+1}{4n+5}=\frac{n+1}{4n+5}$$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

9. $9|4^n+15n-1$

1^0 Baza:
18:9=2
- tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$4^n+15n-1=9k, \forall k \in N$

3^0 Korak:

$4^{n+1}+15(n+1)-1=4\left[4^n+15n-1\right]-45n+18=9(k-5n+2)$

- Broj je djeljiv s 9 pa je tvrdnja dokazana

10. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2(2n+1)}$

1^0 Baza:

$\frac{1^2}{(2-1)\cdot(2+1)}=\frac{2}{2\cdot 3}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\rightarrow$ tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2(2n+1)}$$

3^0 Korak:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}}+\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+3)+2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{(n+1)(n(2n+3)+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+4n+n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{(n+1)(2n(n+2)+n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

- Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

11. $6|n^3+11n$

1^0 Baza:
12:6=2 - > tvrdnja vrijedi za n=1
2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $6|n^3+11n \Leftrightarrow n^3+11n=6k$

3^0 Korak:

$(n+1)^3+11(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+11n+11=n^3+11n+3n^2+3n+1+11=$

$(n^3+11n)+3n^2+3n+12=6k+3(n^2+n+4)=6k+3(n(n+1)+4)=6k+3\cdot 2l+12=6(k+l+2)$

$6|(n+1)^3+11(n+1)$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

12. $6|2n^3+3n^2+7n$

1^0 Baza:
12:6=2 -> tvrdnja vrijedi za n=1
2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $6|2n^3+3n^2+7n \Leftrightarrow 2n^3+3n^2+7n=6k$

3^0 Korak:

$6|2(n+1)^3+3(n+1)^2+7(n+1)$

$2(n+1)^3+3(n+1)^2+7(n+1)=2(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)+7(n+1)=$

$=2n^3+6n^2+6n+2+3n^2+6n+3+7n+7=2n^3+9n^2+19n+12=$

$=(2n^3+3n^2+7n)+6n^2+12n+12=6k+6n^2+12n+12=6k+6(n^2+2n+2)=$

$=6(k+n^2+2n+2)$

$6|2n^3+3n^2+7n$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

13. $9|7^n+3n-1$

1^0 Baza:
9:9=1 - > tvrdnja vrijedi za n=1
2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n
  $9|7^n+3n-1 \Leftrightarrow 7^n+3n-1=9k \Rightarrow 7^n=9k-3n+1$

3^0 Korak:
$9|7^{n+1}+3(n+1)-1$

$7^n\cdot 7+3n+3-1=7^n\cdot 7+3n+2=7\cdot(9k-3n+1)+3n+2=$

$=63k-21n+7+3n+2=63k-18n+9=9(7k-2n+1)$
- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

14. $11|6^{2n}+3^{n+2}+3^n$

1^0 Baza:
66:11=6 - > tvrdnja vrijedi za n=1
2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n
  $11|6^{2n}+3^{n+2}+3^n \Leftrightarrow 6^{2n}+3^{n+2}+3^n=11k \Rightarrow 6^{2n}=11k-3^{n+2}-3^n$

3^0 Korak:
$11|6^{2(n+1)}+3^{(n+1)+2}+3^{n+1}$

$6^{2n+2}+3^{n+3}+3^{n+1}=6^{2n}\cdot 6^2+3^n\cdot 3^3+3^n\cdot 3=6^{2n}\cdot 36+27\cdot 3^n+3\cdot 3^n=36\cdot 6^{2n}+30\cdot 3^n=$

$=36\cdot(11k-3^n\cdot 3^2-3^n)+30\cdot 3^n=36(11k-10\cdot 3^n)+30\cdot 3^n=396k-360\cdot 3^n+30\cdot 3^n=$

$=396k-330\cdot 3^n=11(36k-30\cdot 3^n)$
- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

15. $64|3^{2n+1}+40n-67$

1^0 Baza:
0:64=0 - > tvrdnja vrijedi za n=1
2^0 Pretpostavka:
- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n
  $64|3^{2n+1}+40n-67 \Leftrightarrow 3^{2n+1}+40n-67=64k \Rightarrow 3^{2n+1}=64k+67-40n \Rightarrow$

  $3\cdot 3^{2n}=64k+67-40n \Rightarrow 3^{2n}=\dfrac{64k-40n+67}{3}$

3^0 Korak:

$64|3^{2(n+1)+1}+40(n+1)-67$

$3^{2n+3}+40n+40-67=3^{2n}\cdot 3^3+40n-27=27\cdot 3^{2n}+40n-27=$

$=27\cdot\left(\dfrac{64k-40n+67}{3}\right)+40n-27=9(64k-40n+67)+40n-27=$

$=576k+603-360n+40n-27=576k+576-320n=64(9k+9-5n)$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

16. $3^n>2^n+3n$, za $n\geq 3$

1^0 Baza:

n=3

27>17 - > tvrdnja vrijedi za n=3

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $3^n>2^n+3n/\cdot 2$

  $2\cdot 3^n>2^{n+1}+6n-zbrajamo$

3^0 Korak:

$3^{n+1}>2^{n+1}+3(n+1)$

$3^n\cdot 3>2^n\cdot 2+3n+3\Rightarrow 3^n>3-zbrajamo$

$3\cdot 3^n>2^{n+1}+6n+3$

$3^{n+1}<2^{n+1}+3(n+1)+3n-zanemarimo$

$3^{n+1}>2^{n+1}+3(n+1)$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

17. $100|(7+7^2+7^3+7^4+...+7^{4n})$

1^0 Baza:

2800:100=28 - > tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $100|(7+7^2+7^3+7^4+...+7^{4n})\Leftrightarrow 7+7^2+7^3+7^4+...+7^{4n}=100k\Rightarrow$

  $\Rightarrow 7^{4n}=100k-7-7^2-7^3-7^4$

3^0 Korak:

$100|7+7^2+7^3+7^4+...+7^{4n}+7^{4n+4}$

$7+7^2+7^3+7^4+...+7^{4n}+7^{4n+1}+7^{4n+2}+7^{4n+3}+7^{4n+4}=100k+7^{4n}(7+7^2+7^3+7^4)=$

$=100k+7^{4n}\cdot 2800=100(k+28\cdot 7^{4n})$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x\in N$

18. $17\,|6^{2n}+1^n-2^{n+1}$

1^0 Baza:

51:17=3 - > tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$17|6^{2n}+19^n-2^{n+1} \Leftrightarrow 6^{2n}+19^n-2^{n+1}=17k \Rightarrow 6^{2n}=17k-19^n+2^{n+1}$

3^0 Korak:

$17|6^{2(n+1)}+19^{n+1}-2^{n+1+1}$

$6^{2n+2}+19^{n+1}-2^{2+2}=6^{2n}\cdot 6^2+19^n\cdot 19-2^n\cdot 2^2=36\cdot 6^{2n}+19^n\cdot 19-2^n\cdot 4=$

$=36(17k-19^n+2^{n+1})+19^n\cdot 19-2^n\cdot 4=612k-36\cdot 19^n+36\cdot 2^n\cdot 2+19\cdot 19^n-4\cdot 2^n=$

$=612k-17\cdot 19^n+68\cdot 2^n=17(36k-19^n+4\cdot 2^n)$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

19. $17|2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$

1^0 Baza:

391:17=23- > tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $17|2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2} \Leftrightarrow 2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}=17k \Rightarrow 2^{5n}\cdot 2^3+5^n\cdot 3^n\cdot 3^2=17k \Rightarrow$

  $\Rightarrow 8\cdot 2^{5n}+9\cdot 15^n=17k \Rightarrow 2^{5n}=\dfrac{17k-9\cdot 15^n}{8}$

3^0 Korak:

$17|2^{5(n+1)+3}+5^{n+1}\cdot 3^{n+1+2}$

$2^{5n+8}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}=2^{5n}\cdot 2^8+5^n\cdot 5\cdot 3^n\cdot 3^3=256\cdot 2^{5n}+135\cdot 5^n\cdot 3^n=256\cdot 2^{5n}+135\cdot 15^n=$

$=256\cdot\dfrac{17k-9\cdot 15^n}{8}+135\cdot 15^n=32\cdot(17k-9\cdot 15^n)+135\cdot 15^n=544k-288\cdot 15^n+135\cdot 15^n=$

$=544k-153\cdot 15^n=17\cdot(32k-9\cdot 15^n)$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

20. $n^3>3n+3$ za $n\geq 3$

1^0 Baza:

n=3

27>12 - > tvrdnja vrijedi za n=3

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $n^3>3n+3$

3^0 Korak:

$(n+1)^3>3(n+1)+3$

$n^3+3n^2+3n+1>3n+3+3$

$$\begin{cases} n^3>3n+3 \\ 3n^2+3n+1>3 \end{cases}$$

$n^3+3n^2+3n+1>3n+6$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$

21. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}$

1^0 Baza:

$$\sin x=\frac{\sin\frac{2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\Rightarrow\sin x=\sin x\rightarrow\text{tvrdnja vrijedi za n=1}$$

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}$$

3^0 Korak:

$$\underbrace{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin nx}+\sin(n+1)x=\frac{\sin\frac{n+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}+\sin(n+1)x=\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n+2}{2}x-\frac{(n+1)x}{2}\right)-\cos\left(\frac{n+2}{2}x+\frac{(n+1)x}{2}\right)\right]}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n+1}{2}x-\frac{nx}{2}\right)-\cos\left(\frac{n+1}{2}x+\frac{nx}{2}\right)\right]+\sin(n+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x(2n+3)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x(2n+1)}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\left((n+1)x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left((n+1)x+\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x(2n+3)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x(2n+1)}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x(2n+1)}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x(2n+3)}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x(2n+3)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x(2n+3)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x(2n+3)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

22. $11|3^{2n+2}+2^{6n+1}$

1^0 Baza:

209:11=19 - > tvrdnja vrijedi za n=1

2^0 Pretpostavka:

- pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n

  $11 | 3^{2n+2} + 2^{6n+1} \Leftrightarrow 3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k$

3^0 Korak:

$11 | 3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1}$

$3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 3^{2n+4} + 2^{6n+7} = 3^{2n+2} \cdot 3^2 + 2^{6n+1} \cdot 2^6 =$

$= 9 \cdot 3^{2n+2} + 9 \cdot 2^{6n+1} + 55 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot (3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1} =$

$= 9 \cdot 11k + 5 \cdot 11 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 11k + 11 \cdot (5 \cdot 2^{6n+1}) = 9 \cdot 11k + 11l = 11(9k + l)$

- tvrdnja vrijedi za n+1 pa prema principu mat.indukcije vrijedi $\forall x \in N$