

Međuispit iz Matematike 1

20. studenog 2012.

1. [6 bodova] (a) (2 boda) Izvedite izraz za umnožak kompleksnih brojeva z_1 i z_2 koji su dani u trigonometrijskom obliku. Koristeći dobiveni izraz, matematičkom indukcijom dokažite formulu za računanje n -te potencije ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnog broja danog u trigonometrijskom obliku.
(b) (4 boda) Kompleksni broj $w = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ zapišite u trigonometrijskom obliku, zatim u skupu \mathbb{C} riješite jednadžbu $z^4 = w^8$, te dobivena rješenja skicirajte u kompleksnoj ravnini.
2. [5 bodova] Zadane su funkcije $f(x) = 2 \operatorname{ch}(x-3) - e^{-3}$ i $g(x) = \sqrt{e^3 - x}$.
(a) (2 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije $g \circ f$.
(b) (3 boda) Na kojem dijelu svojg prirodnog područja definicije je $g \circ f$ strogo rastuća funkcija? Odredite sliku funkcije $g \circ f$.
3. [5 bodova] (a) (2 boda) Gaussovom metodom odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) (3 boda) Riješite matričnu jednadžbu

$$(X + A)^2 = [(X + A)^{-1} \cdot X^{-1}]^{-1} + B$$

pri čemu je matrica A dana u (a) dijelu zadatka, a $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. [4 boda] Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. [5 bodova] (a) (1 bod) Može li omeđeni niz biti divergentan? Objasnite svoju tvrdnju.
(b) (1 bod) Navedite primjer konvergentnog strogo rastućeg niza (a_n) . Objasnite zbog čega je taj niz konvergentan.
(b) (3 boda) Niz (a_n) je zadan je rekursivno na sljedeći način:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n(a_n + 1)}{3}, \quad n \geq 2.$$

Dokažite da je niz (a_n) konvergentan i odredite njegov limes.

6. [5 bodova] (a) (2 boda) Za proizvoljnu funkciju f definirajte konačan limes u beskonačnosti. Navedite jedan konkretan primjer takve funkcije te skicirajte njeno ponašanje kada $x \rightarrow +\infty$.

(b) (1 bod) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \sin x}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}}.$$

(c) (2 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x+2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+2} \right) \right].$$

Vrijeme pisanja: 1h i 30 min. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.