10. DOMAĆA ZADAĆA – MATEMATIKA 1

1. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$

Stacionarne točke: prva derivacija = 0

$$-6x^2 + 6x + 12 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

Ekstremi: druga derivacija > 0 → minimum; druga derivacija < 0 → maksimum (te derivacije gledamo u stacionarnim točkama)

$$f''(x_1) = -12x_1 + 6 = 12 + 6 = 18 > 0 \rightarrow minimum$$

$$y_1 = 2 + 3 - 12 - 1 = -8$$

$$T_{min} = (-1, -8)$$

$$f''(x_2) = -12x_2 + 6 = -24 + 6 = -18 < 0 \rightarrow maksimum$$

$$y_2 = -16 + 12 + 24 - 1 = 19$$

$$T_{max} = (2,19)$$

Intervali monotonosti: rubne točke domene, stacionarne točke, točke prekida funkcije

	$-\infty$	-1	2	∞
funkcija f	↘	↗	↘	

2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Stacionarne točke: prva derivacija = 0

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1$$

Ekstremi: druga derivacija > 0 → minimum; druga derivacija < 0 → maksimum (te derivacije gledamo u stacionarnim točkama)

$$f''(x_1) = 6x_1 = -6 < 0 \rightarrow maksimum$$

$$y_1 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$T_{max} = (-1,4)$$

$$f''(x_2) = 6x_2 = 6 > 0 \rightarrow minimum$$

$$y_2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$T_{min} = (1,0)$$

Intervali monotonosti: rubne točke domene, stacionarne točke, točke prekida funkcije

	$-\infty$ do -1	-1 do 1	1 do ∞
funkcija f	↗	↘	↗

3. $f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$

Stacionarne točke: prva derivacija = 0

$$\frac{4x(1-x^2)+4x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0$$

$$4x = 0$$

$$x_0 = 0$$

Ekstremi: druga derivacija > 0 → minimum; druga derivacija < 0 → maksimum (te derivacije gledamo u stacionarnim točkama)

$$f''(x_0) = \frac{4(1-x_0^2)^2 - 8x_0(1-x_0^2)(-2x_0)}{(1-x_0^2)^4} = 4 > 0 \rightarrow minimum$$

$$y_0 = 0$$

$$T_{min} = (0,0)$$

Intervali monotonosti: rubne točke domene, stacionarne točke, točke prekida funkcije (-1 i 1)

	$-\infty$	-1	0	1	∞
funkcija f	↘	↘	↗	↗	

4. $f(x) = x\ln(x^2)$

Stacionarne točke: prva derivacija = 0

$$\ln(x^2) + 2 = 0$$

$$\ln(x^2) = -2$$

$$x^2 = e^{-2}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{e}$$

Ekstremi: druga derivacija > 0 → minimum; druga derivacija < 0 → maksimum (te derivacije gledamo u stacionarnim točkama)

$$f''(x_1) = \frac{2}{x_1} = -2e < 0 \rightarrow maksimum$$

$$y_1 = \frac{2}{e}$$

$$T_{max} = \left(-\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$$

$$f''(x_2) = \frac{2}{x_2} = 2e > 0 \rightarrow minimum$$

$$y_1 = -\frac{2}{e}$$

$$T_{min} = \left(\frac{1}{e}, -\frac{2}{e}\right)$$

Intervali monotonosti: rubne točke domene, stacionarne točke, točke prekida funkcije (0)

	$-\infty$ do $-\frac{1}{e}$	$-\frac{1}{e}$ do 0	0 do $\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$ do ∞
funkcija f	↗	↘	↘	↗

5. $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Stacionarne točke:

$$3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2} = 0$$

$$e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4) = 0$$

$$3x^2 - 2x^4 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad x_3 = 0$$

Ekstremi:

$$f''(x_1) = e^{-x_1^2}(4x_1^5 - 14x_1^3 + 6x_1) > 0 \to minimum$$

$$y_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-\frac{3}{2}}$$

$$T_{min} = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$f''(x_2) = e^{-x_2^2}(4x_2^5 - 14x_2^3 + 6x_2) < 0 \to maksimum$$

$$y_1 = -\frac{2}{e}$$

$$T_{max} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$f''(x_3) = e^{-x_3^2}(4x_3^5 - 14x_3^3 + 6x_3) = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$T_3 = (0,0)$$

Intervali monotonosti: rubne točke domene, stacionarne točke, točke prekida funkcije (0)

	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	∞
funkcija f	↗	↘	↘	↗	

6. Podijelimo zadanu nejednadžbu na dva dijela tako da srednji dio $\ln(1+x)$ prebacimo prvo na lijevi, a zatim na desni dio. Pri tome dobivamo sljedeće:

$$x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0$$

$$x - \ln(1+x) > 0$$

Označimo prvu nejednadžbu sa $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. Vrijedi:

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1 - x^2 - 1}{1+x} = -\frac{x^2}{1+x}$$

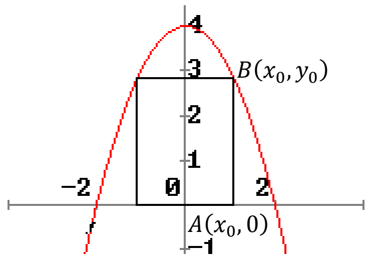
Obzirom da je prva derivacija uvijek manja od 0, za $x > 0$, slijedi da je $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0$, odnosno $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$.

Označimo drugu nejednadžbu sa $g(x) = x - \ln(1+x)$. Vrijedi:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1 + x - 1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Obzirom da je prva derivacija uvijek veća od 0, za $x > 0$, slijedi da je $x - \ln(1+x) > 0$, odnosno $x - \ln(1+x) > 0$, te smo tako dokazali početnu tvrdnju.

7. Pretpostavimo točku $A(x_0, 0)$ koja se nalazi na x-osi unutar zadanog segmenta, i točku $B(x_0, y_0)$, koja se nalazi na paraboli. Dužina $\overline{AB}$ je stranica pravokutnika. Nacrtajmo sliku.



S obzirom da točka B leži na paraboli, ona zadovoljava njenu jednažbu, pa možemo napisati vezu između x_0 i y_0:

$$y_0 = -x_0^2 + 4$$

Površina pravokutnika onda je $P = 2x_0 y_0 = 2x_0(-x_0^2 + 4) = 8x_0 - 2x_0^3$.

Pronađimo stacionarne točke.

$$P' = 8 - 6x_0^2 = 0$$

$$6x_0^2 = 8$$

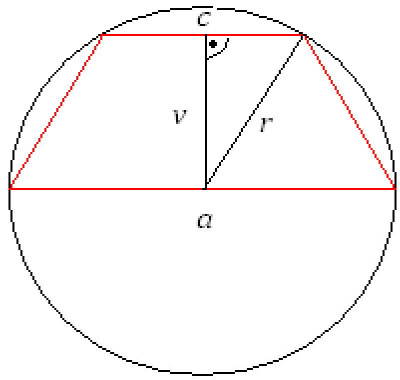
$$x_0^2 = \frac{4}{3}$$

Stacionarne točke su $x_{0,1} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ i $x_{0,2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Negativno rješenje odbacujemo, jer duljina ne može biti, pa nam osatje samo $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, pa je $y_0 = \frac{8}{3}$. Površina je onda:

$$P = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

8.



$$P = \frac{a+c}{2}v$$

$$a = 2r$$

$$r^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \leftrightarrow c = 2\sqrt{r^2 - v^2}$$

$$P = \frac{2r + 2\sqrt{r^2 - v^2}}{2}v = v\left(r + \sqrt{r^2 - v^2}\right)$$

S obzirom da trebamo zapisati površinu preko r, moramo izraziti najprije površinu u ovisnosti o v, preko prve derivacije naći maksimum za v i onda to uvrstiti u površinu:

$$P(v) = v\left(r + \sqrt{r^2 - v^2}\right)$$

$$P'(v) = r + \sqrt{r^2 - v^2} + v\frac{-2v}{2\sqrt{r^2 - v^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - v^2} + r^2 - v^2 - v^2}{\sqrt{r^2 - v^2}} = 0$$

$$r\sqrt{r^2 - v^2} + r^2 - 2v^2 = 0 \leftrightarrow r\sqrt{r^2 - v^2} = 2v^2 - r^2$$

$$r^2(r^2 - v^2) = 4v^4 - 4r^2v^2 + r^4$$

Nakon malo računanja ispadne $v = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2}r\left(r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

Dalje mi se ne da pisat pa ću stavit gdje to ima u **Malom Ivici** :D

9. zadatak: str. 200, 17. zad.

10. zadatak: str. 201., 19. zad.

11. zadatak: str. 201., 20. zad.

12. zadatak: 1) str. 212., 6. zad., 2) str. 213., 7. zad.

13. zadatak: 1) str. 213., 9. zad., 2) str. 213., 10. zad.

14. zadatak: 1) str. 214., 11. zad., 2) str. 214., 12. zad.

15. zadatak: 1) str. 215., 13. zad., 2) str. 216., 14. zad.

16. zadatak: str. 216., 15. zad.

17. zadatak: str. 217., 17. zad.

18. zadatak: str. 218., 18. zad.

19. zadatak: str. 218., 19. zad.

20. zadatak: str. 219., 20. zad.