Matrice –pomiješano

3. **[5 bodova]** Dokažite da vrijedi

   (a) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ za regularne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

   (b) $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ za ulančane matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

   (c) $(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$ za regularnu matricu $\mathbf{A}$.

(a) Dokazujemo da je matrica $B^{-1}A^{-1}$ obostrani inverz matrice AB:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B(AA^{-1})B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$

Iz toga slijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(b)

$$\left[(AB)^T\right]_{ik} = [AB]_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \left[B^T\right]_{ij} \left[A^T\right]_{jk} = \left[B^T A^T\right]_{ik}$$
$$\Rightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

(c)

$$AA^{-1} = I \overset{T,(b)}{\Rightarrow} \left(A^{-1}\right)^T \cdot A^T = I^T = I,$$
$$A^{-1}A = I \overset{T,(b)}{\Rightarrow} A^T \cdot \left(A^{-1}\right)^T = I^T = I \;\Rightarrow\; \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

[4 boda] (a) (2 boda) Odredite matricu $\mathbf{A}$ takvu da je $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ pri čemu su

$$\mathbf{x} = \left[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\right]^\mathrm{T}, \quad \mathbf{y} = \left[x_4\ x_2\ x_3\ x_1\ x_5\ x_6\right]^\mathrm{T}.$$

(b) (2 boda) Neka su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dva rješenja linearnog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}$. Nađite sve linearne kombinacije vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ koje su također rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Z1. a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\alpha u + (1-\alpha)v,\ \alpha \in \mathbb{R}$

(b) (3 boda) Ispitajte istinitost svkog od sljedećih sudova:

$X \equiv (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n)(\forall \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n)(\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{0} \vee \mathbf{B} = \mathbf{0}))$,

$Y \equiv (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n \setminus \{\mathbf{0}\})(\exists \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n)(\mathbf{AB} = \mathbf{I})$,

$Z \equiv (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n)(\exists \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n)(\mathbf{AB} = \mathbf{BA})$.

($\mathcal{M}_n$ označava skup realnih matrica reda n.) Obrazložite odgovore!

---

3. (2 boda) Izračunajte i dokažite matematičkom indukcijom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\mathbf{A}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $n = 1, \dots, k$. Promotrimo $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Po pretpostavci indukcije je $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{bmatrix}$. Tada je $\mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 2k \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2k \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2(k+1) & 1 \end{bmatrix}$, što je i trebalo pokazati.

---

b) Iskažite Binet-Cauchyev teorem (stavak).

c) Ako je $\det \mathbf{A} = a$, gdje je $a \neq 0$, koristeći Binet-Cauchyev teorem izvedite formulu za $\det \mathbf{A}^{-1}$.

b) Za $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice reda m vrijedi:

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

c) $1 = \det \mathbf{I} = \det \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \det A^{-1} \det \mathbf{A} = a \det A^{-1}$, pa je $\frac{1}{a} = \det A^{-1}$.

---

a) Iskažite definiciju pojma linearne nezavisnosti vektora.

b) Jesu li vektori $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ linearno nezavisni? Dokažite!

Rješenje:

a) Za skup vekotar $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ kažemo da je linearno nezavisan ako jednadžba $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ ima jedinstveno rješenje $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

b) Kako je $\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = -3(1 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-2)) + 2(2 \cdot (-2) - 1 \cdot 11) = 30 - 30 = 0$, vektori su zavisni.

[2 boda] Dokažite: ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice, onda je i $\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$ simetrična matrica.

$$(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^\top = (\mathbf{AB})^\top + (\mathbf{BA})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top = \mathbf{BA}+\mathbf{AB} = \mathbf{AB}+\mathbf{BA}$$

[4 boda] Kažemo da je kvadratna matrica ortogonalna ako vrijedi $AA^\top = A^\top A = I$.

(a) (1 bod) Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna, mora li biti regularna? Objasnite svoju tvrdnju.

(b) (3 boda) Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna matrica. Dokažite da je onda i A^{-1} ortogonalna.

(a) iz same definicije, radi jedinstvenosti inverza, $A^{-1} = A^T$

ILI $\det A = \det A^T$ + Binet Cauchyjev tm.

$1 = \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 \Rightarrow \det A \neq 0$

(b) $A^{-1} = A^T$

$B = A^{-1}$

$BB^T = A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}A = I$; $B^TB = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = AA^{-1} = I$

(iskoristili smo $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, dokaz vidi na predavanjima)

Svojstveni vektori

4. **[5 bodova]** (a) Napišite definiciju svojstvene vrijednosti kvadratne matrice i dokažite da ako je λ svojstvena vrijednost matrice, onda je λ ujedno i nultočka njezinog karakterističnog polinoma.

4. (a) Skalar λ je svojstvena vrijednost kvadratne matrice A ako postoji vektor $v \neq 0$ za kojeg vrijedi $Av = \lambda v$. Tada je $(\lambda I - A)v = 0$, pa zbog $v \neq 0$ vidimo da je matrica $\lambda I - A$ singularna. Zato je $\kappa(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$.

(b) (1 bod) Neka je $\vec{\mathbf{x}}$ svojstveni vektor, a λ pripadna svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$. Dokažite da je tada $\vec{\mathbf{x}}$ svojstveni vektor matrice $\mathbf{A}^2$ s pripadnom svojstvenom vrijednošću λ^2.

(b)

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{AAx} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

4. [**5 bodova**]

(a) (1 bod) Pokažite da $\lambda = 0$ ne može biti svojstvena vrijednost regularne matrice A.

(b) (2 boda) Dokažite tvrdnju: λ je svojstvena vrijednost regularne matrice A ako i samo ako je $\frac{1}{\lambda}$ svojstvena vrijednost matrice A^{-1}.

Determinante

6. a) Koje su elementarne transformacije kvadratne matrice i kako one utječu na vrijednost determinante?

6. a) 1. Zamjena dvaju redaka (determinanta mijenja predznak),

2. množenje nekog retka skalarom α različitim od nule (determinanta se množi sa α),

3. dodavanje nekog retka nekom drugom retku (determinanta se ne mijenja).

---

a) (1 bod) Dokazati: ako determinanta ima dva ista retka, tada je ona jednaka nuli.

b) (1 bod) Koristeći tvrdnju pod a), dokazati: ako nekom retku determinante dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, onda se vrijednost determinante neće promijeniti.

a) Očito je $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$. To je baza indukcije. Za korak indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve determinante reda n. Neka determinanta reda $n+1$ ima i-ti i j-ti jendak redak, $i \neq j$. Tada razvojem po k-tom retku (različitom od i i j) dobivamo $n+1$ determinantu n-tog retka, svaku sa parom jednakih redaka, pa su sve te determinante jednake nuli, pa je i determinanta reda $n+1$ jednaka nuli.

b) $$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}.$$

---

3. [**3 boda**] (a) (2 boda) Matematičkom indukcijom dokažite: ako determinanta ima dva ista retka, tada je ona jednaka nuli.

(b) (1 bod) Koristeći tvrdnju pod (a), dokažite: ako nekom retku determinante dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, onda se vrijednost determinante neće promijeniti.

3. (a) Knjižica 3. stranica 20.

(b) Knjižica 3. stranica 23.

---

4. [**2 boda**] Ako za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda n vrijedi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^\top$, koje sve vrijednosti može poprimiti $\det \mathbf{A}$? Obrazložite!

4.

$$(\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{A}^2 = \det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{A} \Rightarrow \det \mathbf{A} \in \{0, 1\}$$

Nadalje, kako nul-matrica reda n ima determinantu 0, a jedinična matrica reda n ima determinantu 1 (za njih vrijedi svojstvo $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^\top$), možemo zaključiti da je skup svih vrijednosti koje determinanta matrice $\mathbf{A}$ može poprimiti zaista jednak $\{0, 1\}$.

Inverz i regularna matrica

---

a) Napisati definiciju inverzne matrice kvadratne matrice $\mathbf{A}$.

Pod a), matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzna matrica kvadratne matrice $\mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

(a) (2 boda) Odredite inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po definiciji provjerite da se zaista radi o inverzu.

(b) (3 boda) Dokažite da je inverz regularne simetrične matrice također simetrična matrica.

---

5. (2 boda) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice takve da je $\mathbf{AB} + \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

   a) (1 bod) Dokazati da je $\mathbf{A}$ regularna.

   b) (1 bod) Izračunati $\mathbf{A}^{-1}$ ako je $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_3$ zadana općim elementom $b_{ij} = i + j$.

a) $\mathbf{I} = \mathbf{AB} + \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{I})$, pa je $\mathbf{A}$ regularna i $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}+\mathbf{I}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

1. način: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

2. način: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{I}) = I$ povlači $\mathbf{A} = (\mathbf{B}+\mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$, pa je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

---

5. [**2 boda**] a) Ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, dokaži da je $\det \mathbf{A} \neq 0$.

b) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice. Dokaži da je $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.

5. [2 boda] a) $\mathbf{A}$ je regularna matrica, tj. postoji matrica $\mathbf{A}^{-1}$ takva da je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Po Binet-Cauchyevom teoremu je $\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} =$ $= \det \mathbf{I} = 1$, pa mora biti $\det \mathbf{A} \neq 0$.

b) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$,

$(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}\cdot(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

[**4 boda**] (a) Napišite i izvedite formulu u kojoj se inverz umnoška matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ izražava pomoću inverza tih matrica.

(a) $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, jer je
$\mathbf{ABCC}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.