MASOVNE INSTRUKCIJE

IZ MATEMATIKE

2016/2017

MATEMATICKA INDUKCIJA

1. (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Matematickom indukcijom dokazati da je :

$$7^{2n}-3*5^{n}+2$$

djeljivo sa 12.

1. (2 boda)
Matematičkom indukcijom dokažite da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}-1,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Zadatak 7. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^i}\right)=\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Matematickom indukcijom dokazati da je :

$$2^{3n+2}+5*17^{n}$$

djeljivo sa 9.

$Matematickom\ indukcijom\ dokazati\ da\ je:$

$$4*6^n+5n-4$$

$djeljivo\ sa\ 25.$

KOMPLEKSNI BROJEVI

1. (3 boda) Odredite kompleksna rješenja jednadžbe

$$z^6 - 2z^3 + 4 = 0$$

koja se nalaze u prvom kvadrantu.

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z^4 = (3\sqrt{3} - 3i)^5.$$

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$z^4 + (1+i)^{10} = 0.$$

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\frac{z}{\overline{z}^3} + i = 0.$$

2. (3 boda) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z^3 \cdot \overline{z} - 1 - i = 0.$$

(b) (2 boda) Odredite z ako je $z^n = -r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pri čemu je $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(MI 2011/12)

Graficki rijesiti:

$|z + 1 + i| = 2$; $|z+1-i| = 4$

1. **[6 bodova]**

a) (1 bod) Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, napišite $\overline{z}$ u trigonometrijskom obliku.

b) (5 bodova) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$(1 - i\sqrt{3})z^2 = (-2\sqrt{3} + 2i)(\overline{z})^3.$$

FUNKCIJE

2. (**3 boda**) Neka je

$$f(x) = \ln\left(e - \sqrt{x}\right).$$

(a) Odredite prirodnu domenu $D(f)$ funkcije f.

(b) Odredite sliku $\mathrm{Im}(f)$ od f.

(c) Nađite inverz funkcije $f : D(f) \to \mathrm{Im}(f)$.

2. (**3 boda**) Neka je

$$f(x) = 2 - \mathrm{ch}(x+1).$$

(a) Odredite sliku funkcije f.

(b) Je li f injekcija? Obrazložite odgovor.

(c) Nacrtajte graf funkcije f.

2. (**5 bodova**)

a) (**3b**) Odredite domenu $D(f)$, sliku $Im(f)$ te nacrtajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x-1).$$

14. Neka je $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$. Naći prirodno područje definicije funkcije f, $D(f)$ i sliku funkcije f, $Im(f)$.

15. Neka je $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$. Naći prirodno područje definicije funkcije f, $D(f)$ i sliku funkcije $Im(f)$.

2. **[1+3+1 bod]**

(a) Pokažite da je funkcija

$$f(x) = \frac{2\ln x + 3}{3\ln x + 2}$$

injektivna.

(b) Nađite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$ zadane funkcije $f(x)$.

(c) Nađite sliku $\mathcal{R}(f)$ funkcije $f(x)$.

2. **[4 boda]** Zadana je funkcija $f(x) = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$. Odredite prirodno područje definicije i sliku funkcije f te nacrtajte njezin graf. Odredite f^{-1} i skicirajte graf funkcije f^{-1}.

2. **(5 bodova)** Zadana je funkcija $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}(x-2)$.
a) (3b) Skicirajte graf funkcije f te odredite domenu i sliku funkcije f.
b) (2b) Je li funkcija f injekcija? Obrazložite. Odredite skup A tako da je $f : A \to \mathrm{Im} f$ bijekcija?

NIZOVI

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+1}.$$

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+2}}{7^n+3^{n+1}}.$$

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+5^n}{5+5^2+\cdots+5^n}.$$

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}.$$

4. (2 boda) Odredite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

3. (4 boda)

(a) (2b) Koristeći teorem o sendviču, dokažite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n^2)}{n^3+1}=0.$$

3. (**5 bodova**)

a) (2b) Neka su a_n i c_n ekvivalentne neizmjerno velike veličine. Pretpostavimo da postoji $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Pokažite da je tada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}.$$

b) (3b) U ovisnosti o realnom parametru a odredite

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{a+1}-n^a\sqrt[3]{n^3+n}\right).$$