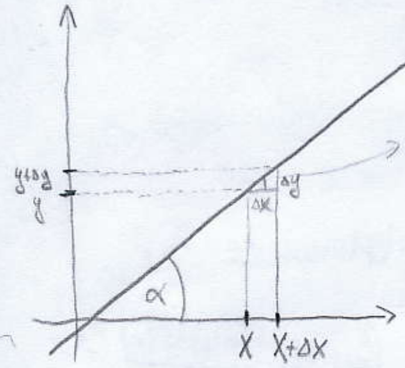
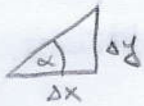
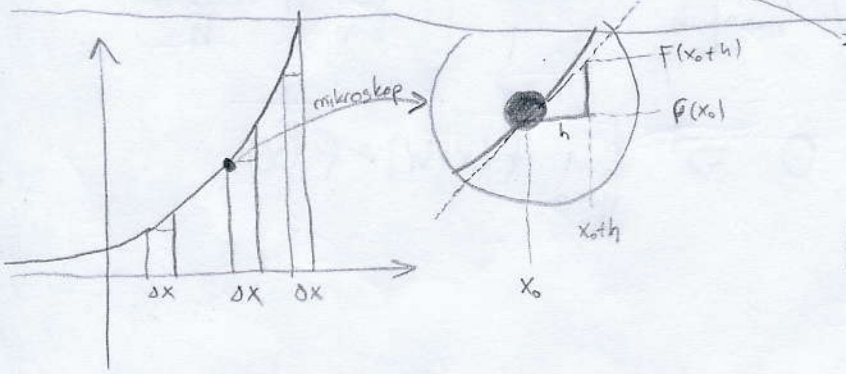
8) DIFERENCIJALNI RAČUN

$\boxed{8.1.}$ Motivacija i definicije



$$k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \text{rate of change}$$





tangenta → aproksimacija krivulje pravcem na malom intervalu

$$k_t = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \Big/ \text{ napadamo limesom: } \lim_{h\to 0}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h} \longrightarrow \boxed{\text{derivacija}}$$

$$\Downarrow$$

INFINITEZIMALNI RAČUN

def. Derivacija funkcije f u točki x_0 se definira

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$ ako taj limes postoji.

$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) \longrightarrow$ prirast funkcije u x_0 za Δh

$f'(x_0) \cdot dx = df(x_0) \longrightarrow$ diferencijal funkcije

dx ↓ diferencijal x

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \boxed{\frac{df}{dx}}$$

nije razlomak

def. Kažemo da je f diferencijabilna u točki x ako postoji $f'(x)$ $\left[\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$.

Još kažemo da je funkcija glatka (smooth).

→ Ako postoji prekid, nema derivacija u točkama prekida.

TM. Ako je f diferencijabilna u točki x, tada je neprekinuta u toj točki.

DOKAZ:

$$\lim_{h \to 0} \left(f(x+h)-f(x)\right) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{h}{h} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{1}\right] = \lim_{h \to 0} h \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} h \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

8.2. PRAVILA DERIVIRANJA

1) $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

DOKAZ: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) \pm g(x+h) - (f(x) \pm g(x))}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$

2) $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

DOKAZ: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) g(x)}{h} - \overbrace{\dfrac{f(x) g(x+h) - f(x) g(x+h)}{h}}^{0} =$

$\underbrace{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+\overset{0}{h})}_{f'(x) \cdot g(x)} + \underbrace{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x)}_{g'(x) \cdot f(x)}$

$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

Funkcije su neprekinute, limes može ući

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f(x)' g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$

DOKAZ: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{f(x+h) g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{g(x+\underset{0}{h}) \cdot g(x)} \cdot \dfrac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{g^2(x)} \cdot \dfrac{g(x) \cdot (f(x+h) - f(x)) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$

$\dfrac{1}{g^2(x)} \cdot \left(g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)\right) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

(4.) $$[f \circ g(x)]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

DOKAZ: $$\lim_{h \to 0} \frac{f\circ g(x+h) - f\circ g(x)}{h} = \left| \begin{array}{l} g(x) = u \\ g(x+h) - g(x) = \Delta u \end{array} \right| = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(\Delta u + u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(5.) $$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad / \frac{d}{dy}$$

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot [f^{-1}(y)]' = y' = 1$$

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \ln x$

$$f \circ f^{-1}(x) = e^{\ln x} = x$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$\ln x' = \frac{1}{x}$$

IZVOD DERIVACIJA NEKIH ELEMENTARNIH FUNKCIJA PO DEFINICIJI

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- sin x

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \cos\frac{x+h+x}{2} \cdot \sin\frac{x+h-x}{2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{h}{2} \to 0 \\ \sin\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2} \end{array} \right| = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2} \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{2}} \cdot \cos(x+\overset{\nearrow 0}{\frac{h}{2}})}{\cancel{h}} = \boxed{\cos x}$$

- cos x

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2 \cdot \sin\frac{x+h+x}{2} \cdot \sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2 \cdot \overset{\sim \frac{h}{2}}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{2} \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{2}} \cdot \sin(x+\overset{\nearrow 0}{\frac{h}{2}})}{\cancel{h}} = \boxed{-\sin x}$$

- tg x

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left[\frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \right]$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin(x) \cdot \cos(x+h)}{\cos(x+\underset{0}{h}) \cdot \cos x} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\sin(x+h+x) + \sin(x+h-x)\right) - \frac{1}{2}\left(\sin(x+h+x) + \sin(x-(x+h))\right)}{\cos^2 x} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\sin(2x+h) + \sin(h) - \sin(2x+h) - \sin(-h)\right)}{\cos^2 x} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \overset{\sim h}{\sin h}}{\cos^2 x} \right] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{h}{\cos^2 x} \right] = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- e^x

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(\overset{\sim h}{e^h-1})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot h}{h}=\boxed{e^x}$$

- $\ln x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{\sim \frac{h}{x}}{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{h}}{x}}{\cancel{h}}$$

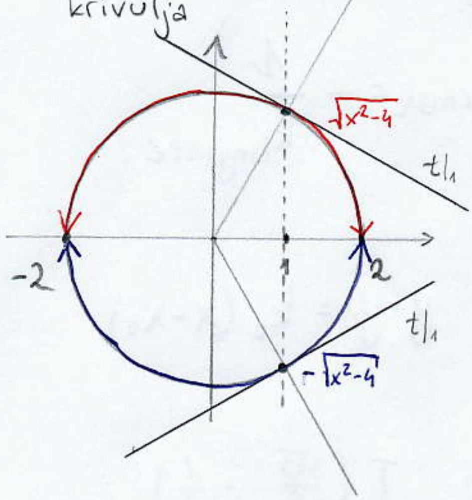
$$(\ln x)'=\boxed{\frac{1}{x}}$$

8.3. Implicitno i parametarski zadane krivulje

$$\underline{x^2 + y^2 = 4}$$

implicitno zadana krivulja

$$y'(1) = ?$$



$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4-x^2}$$

$$y' = ?\quad X$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$2x + \underbrace{2 \cdot y \cdot y'}_{y = f(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-x}{y}}$$

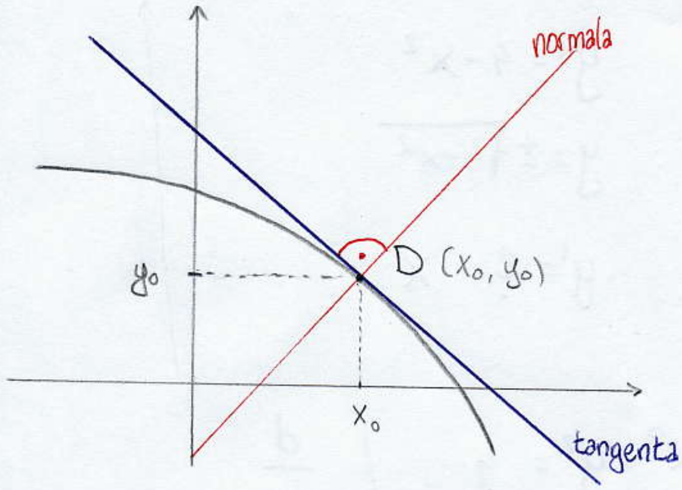
- parametarski zadane krivulje

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad y' = ?$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' \neq \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} \qquad y'' = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}}$$

8.4. Tangenta i normala



$$k_{tangente} = y'(x_0)$$

$$k_{normale} = -\frac{1}{k_{tangente}}$$

$$t \ldots \quad y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

Zad. Naći jednadžbu tangente na asteroidu u točki $T\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8}\right)$

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t = -30^\circ$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cancel{3} \cdot \sin^2 t \cdot \cancel{\cos t}}{\cancel{3} \cdot \cos^2 t \cdot (-\cancel{\sin t})} = -\operatorname{tg} t$$

$$y'\big|_T = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{k_t = -\operatorname{tg}(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$y - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$\boxed{t \ldots \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3} x - \frac{1}{2}}$$

9) Primjene diferencijalnog računa

9.1. Aproksimacija Taylorovim polinomom

TM Neka je zadana funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ koja u $c \in I$ ima derivacije do reda $n+1$.
Tada f možemo zapisati kao

$$f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Taylorov polinom } n\text{-tog stupnja}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{ostatak u Lagrangeovom obliku}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x)$$

$$\hookrightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$$

$$x_1 \in \langle c, x \rangle \text{ ili } \langle x, c \rangle$$

Zad. 2MI-09-6)

Aproksimiraj $\sqrt{35}$ Taylorovim polinomom drugog stupnja.

$f(x) = \sqrt{x}$; $c = 36$ $(\sqrt{36} = 6)$

$$f(35) = 6 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{36}}}{1!} \cdot (35-36)^1 + \frac{-\frac{1}{4} \cdot 36^{-\frac{3}{2}}}{2!} \cdot (35-36)^2 =$$

$$= 6 - \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6^3}\right) = 5{,}91608$$

-def. Taylorov polinom oko $c=0$ nazivamo Maclaurinov polinom.

Zad. Koji stupanj Taylorovog polinoma treba uzeti da bi $\sin x$ za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ izračunali s točnošću 10^{-3}?

- R_n određuje točnost

parne derivacije oko nule su jednake nuli

$$\hookrightarrow \quad |R_{2n+1}(x)| \leq 10^{-3}$$

$$\left| \frac{\overset{\leq 1}{f^{(2n+2)}(x_1)}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$$

$$\leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq 10^{-3}$$

$$\sin x \approx \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Uvrštavanjem se dobije $n=2$.

9.2. L'Hospitalovo pravilo

TM Neka su f i g diferencijabilne na $\langle a,b\rangle$, $g(x)\neq 0$.
Ako za $x_0 \in \langle a,b\rangle$ vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ ili $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ i ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tada je:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

⇒ nije derivacija kvocijenta već kvocijent derivacija

9. zzv. 6)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos(2x)} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-2\sin 2x} = \frac{\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}}{-2} = -1$$

11) Može li se upotrijebiti L'Hospitalovo pravilo za $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$?

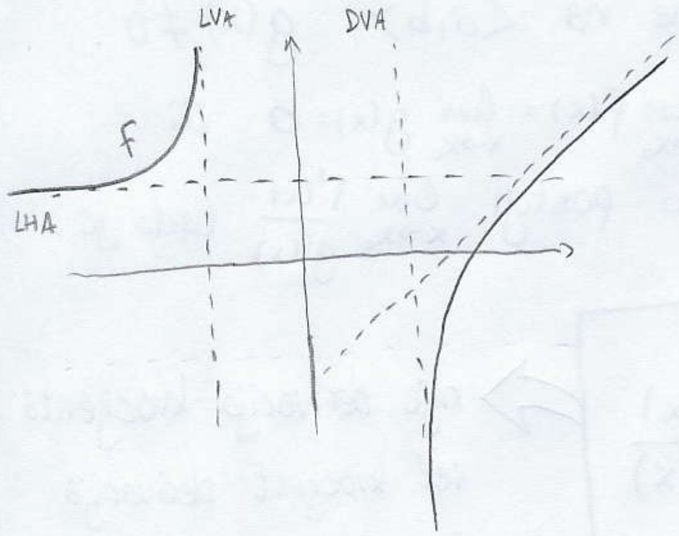
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \cancel{\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}}$$ taj limes ne postoji.

Ne može se upotrijebiti L'Hospitalovo pravilo jer $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, ali se limes može izračunati:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\overbrace{\sin x}^{[-1,1]}}{x+\underbrace{\cos x}_{[-1,1]}} \begin{array}{l} /:x \\ /:x \end{array} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\cancel{\frac{\sin x}{x}}}^{0}}{1+\underbrace{\cancel{\frac{\cos x}{x}}}_{0}} = 1$$

9.3. Asimptote

- <u>pravac</u> čija udaljenost od funkcije teži nuli



- <u>def.</u> Kažemo da je pravac $x=c$ VERTIKALNA ASIMPTOTA ako je

$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$. C su točke sa ruba domene, odnosno izbačene iz domene.

- <u>def.</u> Kažemo da je $y=b$ HORIZONTALNA ASIMPTOTA ako je

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ (desna horizontalna asimptota) ili

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ (lijeva horizontalna asimptota).

- <u>def.</u> Pravac $y=kx+l$ je KOSA ASIMPTOTA ako je $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx-l]=0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx-l]=0 \quad /:x$$

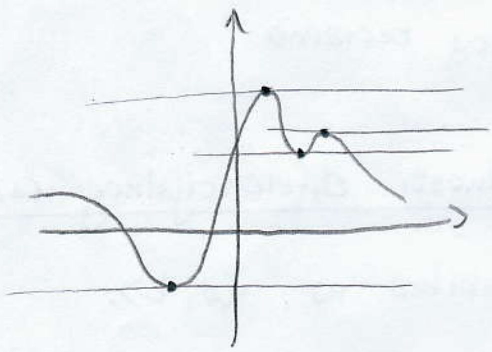
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)-kx-l}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\underbrace{\frac{l}{x}}_{\to 0}\right)=0$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad l=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$$

9.4. Osnovni teoremi diferencijalnog računa

- za točku $a \in S$ kažemo da je točka maksimuma funkcije f ako $\forall x \in S : f(x) \leq f(a)$, $f(a) = \max f$
- analogno vrijedi za minimum $(\min f)$

- sve minimume i maksimume zajedno zovemo EKSTREMI FUNKCIJE
  - globalni ekstremi - $a \in D(f)$
  - lokalni ekstremi - $a \in S$

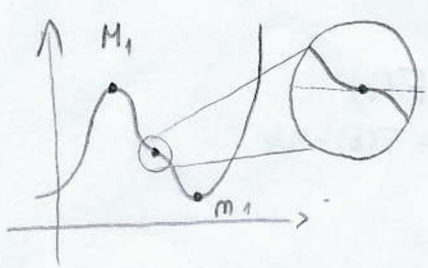


- ekstremi
  - nultočke prve derivacije

TM - Fermateov teorem

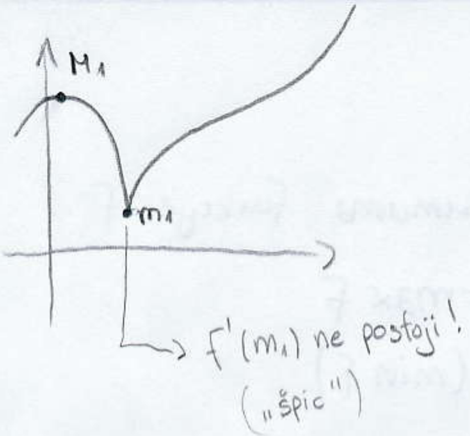
Neka je I otvoren interval na $\mathbb{R}$ i neka je f diferencijabilna na I. Ako je a točka lokalnog ekstrema, tada je $f'(a) = 0$. $\longrightarrow$ obrat ne vrijedi

DOKAZ: očito sa slike.



def. Točke koje su rješenje jednadžbe $f'(x) = 0$ nazivaju se STACIONARNE TOČKE.

Stacionarne točke su kandidati za ekstreme.



- **def** KRITIČNE TOČKE su točke u kojima je prva derivacija jednaka nuli i točke u kojima derivacija ne postoji.

- kritične točke su kandidati za ekstreme

TM - Rolleov teorem

Neka je f neprekinuta i diferencijabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$f(a) = f(b) \longrightarrow \exists c \in \langle a, b \rangle : f'(c) = 0.$$

DOKAZ: Očito slijedi iz Fermateovog teorema.

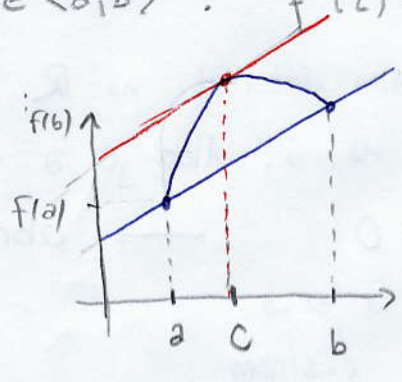
TM - Lagrangeov teorem srednje vrijednosti diferencijalnog računa

Neka je f neprekinuta i diferencijabilna na $\langle a, b \rangle$.

$\hookrightarrow f \ \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

Tada postoji $c \in \langle a, b \rangle : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA:



DOKAZ: $F(x) = f(x) - \lambda x$, $\lambda \to F(a) = F(b)$

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Iskoristimo Rolleov teorem za $F(x) \to F'(c) = 0$

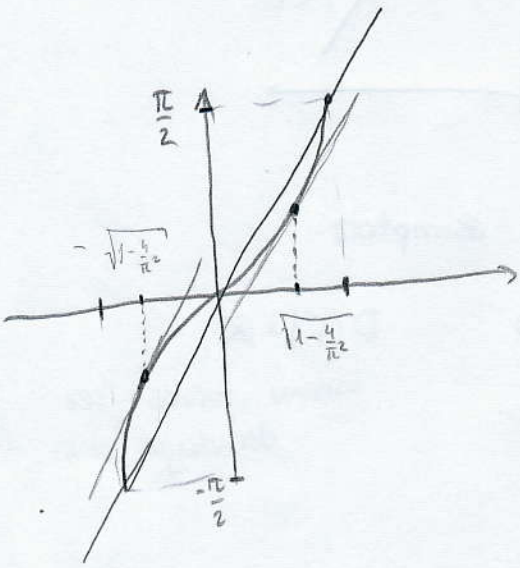
$$F'(x) = f'(x) - \lambda$$

$$F'(c) = 0 \qquad f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{TT}$$

9.DZ. 7) $f(x) = \arcsin x$, $a=-1$, $b=1$

- primjeni Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, odredi c i geometrijski interpretiraj.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1-(-1)} = \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$$

KOROLARI LAGRANGEOVOG TEOREMA SREDNJE VRIJEDNOSTI

1) $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \longrightarrow f$ je konstanta

2) Ako je $f'(x) = g'(x)$, tada se one razlikuju za konstantu, tj. $\boxed{f(x) = g(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$

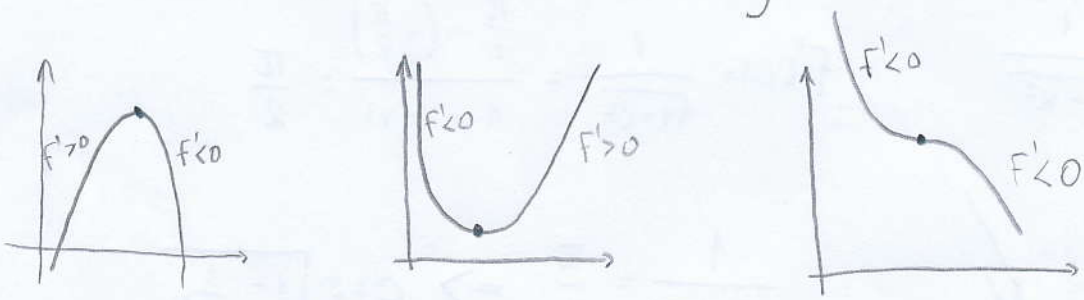
3) Ako je $f'(x) > 0$ na I, tada je f strogo rastuća na I.

Pokaz: $x_1 < x_2 \xrightarrow{LGTSUDR} \exists c \in \langle x_1, x_2 \rangle$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$. Ako je $f'(c) > 0$, tada i $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tj. $f(x_2) > f(x_1)$, tj. funkcija strogo raste.

10.1. Intervali monotonosti i ekstremi

$$\left.\begin{array}{lll} f(x) \text{ rastuća} & \Longleftrightarrow & f'(x) \geq 0 \\ f(x) \text{ padajuća} & \Longleftrightarrow & f'(x) \leq 0 \end{array}\right\} \text{intervali monotonosti}$$



Pr. $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ $\qquad D(f) = \mathbb{R}$, nema asimptote

$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = x^2(5x^2 - 8x + 3) = 0$ $\qquad D(f') = \mathbb{R}$

$x = 0$ $\qquad x = 1$, $x = \frac{3}{5}$

nema točaka bez derivacije

	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$ … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	+	+	−	+
$f(x)$	↗	↗	↘	↗

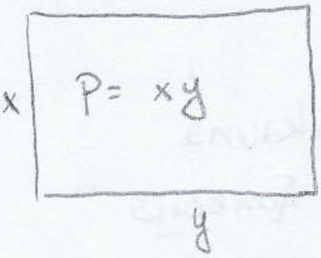
M (u $x=\frac{3}{5}$), m (u $x=1$)

$M\left(\frac{3}{5}, f\left(\frac{3}{5}\right)\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{5}, 0{,}031\right)$

$m(1, 0)$

• Zadaci s riječima (primjena ekstrema)

ZI-10-1) Pravokutnu livadu želimo ograditi ogradom (100 kn/m) i prekriti podlogom (200 kn/m²).
Na raspolaganju imamo 20 000 kn.
Odredi maksimalnu površinu koju možemo ograditi i prekriti!



$$(2x+2y)\cdot 100 + 200xy = 20\,000$$

$$x + y + xy = 100 \Rightarrow y = \frac{100-x}{1+x}$$

$$P(x) = x \cdot \frac{100-x}{1+x} \quad / \frac{d}{dx}$$

$$P'(x) = \frac{100 - x^2 - 2x}{(1+x)^2}$$ $\longrightarrow$ ekstrem može biti i $x_0 \notin D(f')$

[ovdje je to -1, a $x>0$]

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+400}}{-2} \qquad x > 0$$

$$\underline{x = \sqrt{101} - 1}$$

-provjera (nosi 1 bod)

		0		$\sqrt{101}-1$	
P'			$+$		$-$
P			$\nearrow$	M	$\searrow$

$x = \sqrt{101} - 1$

$$y = \frac{100 + 1 - \sqrt{101}}{\sqrt{101}} = \frac{101}{\sqrt{101}} - \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{101}} =$$

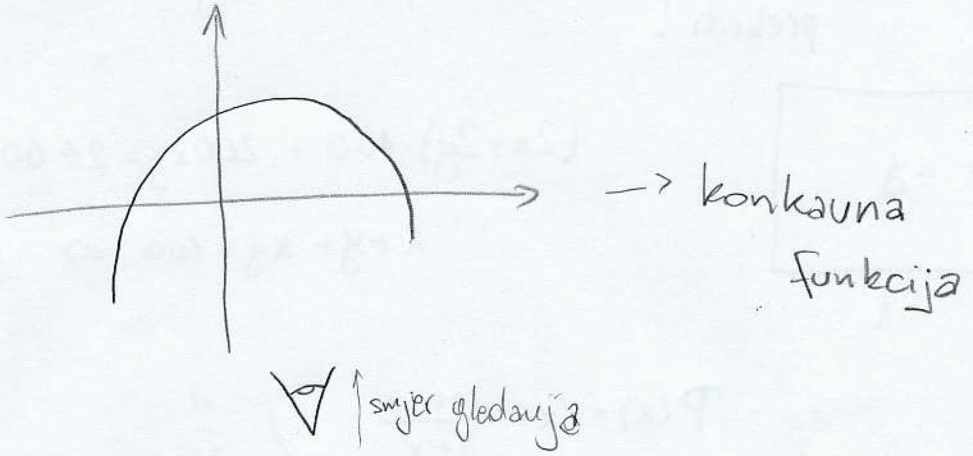
$$= \sqrt{101} - 1 = x$$

$$P = x \cdot y = x^2 = 101 - 2\sqrt{101} + 1 = 102 - 2\sqrt{101}$$

10.2. Konkavnost i konveksnost

Ako je $f''(x) < 0$, funkcija je tužna. $\cap$

Ako je $f''(x) > 0$, funkcija je sretna. $\cup$



def. Ako je na intervalu $\langle a, b \rangle$ i $f'' > 0$,
f' raste i kažemo da je funkcija konveksna.

Ako je na intervalu $\langle a, b \rangle$ $f'' < 0$, f' pada
i kažemo da je funkcija konkavna.

def. Točku kod koje dolazi do promjene predznaka druge derivacije
zovemo TOČKA PREGIBA (INFLEKSIJE.

10.3. Kvalitativni graf funkcije

1) DOMENA
2) NULTOČKE, PARNOST, NEPARNOST, PERIODIČNOST
3) ASIMPTOTE
4) RAST, PAD, EKSTREMI → prva derivacija
5) KIKI - KONKAVNOST I KONVEKSNOST INFLEKSIJE
6) GRAF

21-07-3) Nacrtaj kvalitativni graf funkcije $f(x) = (x^2-3) \cdot e^x$

1) Domena → $D(f) = \mathbb{R}$

2) i) nultočke $(x^2-3) \cdot e^x = 0$ → $x = \pm\sqrt{3}$

$\downarrow$

$e^x > 0$

ii) parnost, neparnost, ~~periodičnost~~ $f(-x) = (x^2-3) \cdot e^{-x}$ $\neq f(x)$

$\neq -f(x)$

3) Asimptote - VA → nema $(D = \mathbb{R})$