Skripta iz Teorije Matematike 1 - Prvi ciklus

Sudovi

Sud - izricanje neke tvrdnje o nekim objektima

- sud može biti istinit (T) ili lažan ($\perp$ / F)

Logičke operacije

Iz postojećih sudova novi se sudovi tvore logičkim operacijama

Definicija

Neka su X i y sudovi. Logičkim operacijama

1) $\neg$ - negacija
2) $\wedge$ - konjunkcija
3) $\vee$ - disjunkcija
4) $\Rightarrow$ - implikacija
5) $\Leftrightarrow$ - ekvivalencija

dobivamo iz njih nove sudove: $\neg X$, $X \wedge y$, $X \vee y$, $X \Rightarrow y$, $X \Leftrightarrow y$.
Istinitost tih novih sudova definira se u ovisnosti o istinitosti sastavnica X i y.

X	y	$\neg X$	$\neg y$	$X \wedge y$	$X \vee y$	$X \Rightarrow y$	$X \Leftrightarrow y$
F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	T	T

Stavak

1) $\neg(\neg X) \equiv X$

2) $\left.\begin{array}{l} X \wedge (y \vee z) \equiv (X \wedge y) \vee (X \wedge y) \\ X \vee (y \wedge z) \equiv (X \vee y) \wedge (X \vee z) \end{array}\right\}$ distributivnost

3) $\neg(X \wedge y) \equiv (\neg X) \vee (\neg y)$
$\neg(X \vee y) \equiv (\neg X) \wedge (\neg y)$ } de Morganov zakon

4) $X \Leftrightarrow y \equiv (X \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow X)$

5) $X \Rightarrow y \equiv (\neg y) \Rightarrow (\neg x)$ - obrat po kontrapoziciji

$\boxed{\text{Dokaz}}$

Tablica istinitosti.

Stavak

Slijedeće formule su identički uvijek istinite:

1) $(X \wedge (X \Rightarrow y)) \Rightarrow y$ modus ponens

2) $((X \Rightarrow y) \wedge \neg y) \Rightarrow (\neg x)$ modus tollens

3) $((\neg X \Rightarrow y) \wedge (\neg y)) \Rightarrow X$ dokaz iz protuslovlja

4) $((X \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (X \Rightarrow y)$ zakon silogizma

$\boxed{\text{Dokaz}}$

Tablica istinitosti.

Predikat

- sudna forma $P(X_1$ do $X_n)$ koja za svaki izbor elementa X_n, univerzalnog skupa U, postaje sud

Karakterističan skup (C_P) - skup svih X_n za koje je $P(X)$ istinit

Oznake kvantiteta

$\forall X$ - svaki X
} NEGACIJA
$\exists X$ - neki X

Preslikavanja (funkcije)

Funkcija - preslikavanje iz skupa S_1 u skup S_2 tako da se svakom $x \in S_1$ pridruži neki $x \in S_2$.

$D(f)$ - domena funkcije

$f: S_1 \to S_2$ oznaka

Slika - $Im(f) = \{f(s) \mid s \in S_1\}$

$\{y \in S_2 \mid \exists x S_1 \text{ t.d. je } f(x) = y\}$

Slika je podskup kodomene (S_2).

Surjektivnost - $f(S_1) = S_2$

$(\forall y \in S_2)(\exists x \in S_1) \text{ t.d. } f(x) = y$

Injektivnost - $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Funkcija je bijekcija ako je i injektivna i surjektivna.

Inverzno preslikavanje

$\forall x \in S_1 \quad g(f(x)) = x \qquad g \circ f = id\ S_1$

$\forall x \in S_2 \quad f(g(x)) = y \qquad f \circ g = id\ S_2$

Identiteta - svakom članu se pridružuje on sam

Binomni koeficijent

$n! = \prod_{x=1}^{n} x \qquad x \in N$

$0! = 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - binomni koeficijent

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \binom{n+1}{k}$

Binomna formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Matematička indukcija

Ako je neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n istinita za neki prirodan broj n_0, i ako iz istinitosti te tvrdnje za $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq n_0)$ slijedi da je istinita i za $n+1$, onda je ona istinita i za sve $n \in \mathbb{N}$ koji su veći od n_0.

Supremum i infimum omeđenog skupa

Za skup S kažemo da je omeđen odozgo ako postoji: $\exists M \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq M$; $\forall x \in S$

M = gornja međa

Analogno za omeđenost odozdo.

Supremum skupa je najmanja gornja međa skupa, infimum najveća donja.

Maksimum - supremum sadržan u skupu

Analogno vrijedi za minimum.

Kompleksni brojevi

$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ $i^2 = (-1)$

$z = a+bi$ $\bar{z} = a-bi$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$a = Re\{z\}$ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$b = Im\{z\}$

Svojstva kompleksnih brojeva

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

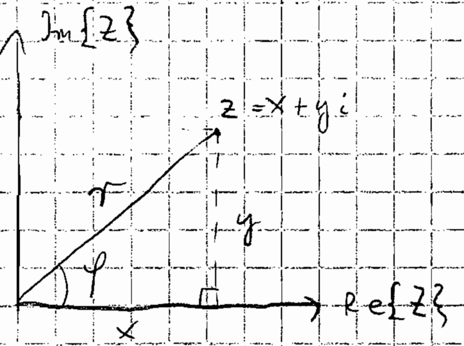
2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

5) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{z_1 / z_2}$

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$z^n = r^n (\mathrm{cis}\,(n\varphi))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\mathrm{cis}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$

Funkcije

$f: D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$D = D(f)$

$Im(f) = \{ f(x) \mid x \in D(f) \}$

$\Gamma(f) = \{ x, f(x) \mid x \in D(f) \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f: D(f) \to Im(f) \qquad D(f^{-1}) = Im(f)$

$f^{-1}: Im(f) \to D(f) \qquad Im(f^{-1}) = D(f)$

Parnost i neparnost

$f(x)$ je parna ako vrijedi $f(-x) = f(x)$.

$f(x)$ je neparna ako vrijedi $f(-x) = (-f(x))$.

Teorem

Neka je $y = f(x)$ parna i $y = g(x)$ bilokakva funkcija, kompozicija $(f \circ g)(x)$ je parna.

Periodičnost

$f(x)$ je periodična $\Rightarrow T > 0 \Rightarrow f(x+T) = f(x)$
$\forall x \in D(f)$

Transformacije nad funkcijama

$f(x) = A(Bx - C) + D$

A = skaliranje po y-osi

B = skaliranje po x-osi

- $B > 1$ stezanje
- $B < 1$ širenje

C = pomak lijevo / desno

- $c > 0$ pomak u lijevo za $|c|$
- $c < 0$ pomak u desno za $|c|$

D = vertikalna translacija

- $D > 0$ pomak prema gore za $|D|$
- $D < 0$ pomak prema dolje za $|D|$

Parametarski oblik jednadžbe krivulje

$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ je nekakva krivulja čija jednadžba u parametarskom obliku glasi

$\Gamma = \{x(t), y(t) \mid t \in [a, b]\}$

Matrice - tablice brojeva

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} (\ldots) a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} (\ldots) a_{2n} \\ (\ldots) & \\ a_{m1} & a_{m2} (\ldots) a_{mn} \end{bmatrix} = m \times n$$

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{;\, j=1}^{n}$$

Operacije s matricama

Resultat operacija s matricama je nova matrica.

$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$

1) Zbrajanje matrica

$C = A + B$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2) Množenje skalarom

$B = \lambda B$

$b_{ij} = \lambda a_{ij}$

3) Množenje matrica

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

$C = A \cdot B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Determinante

Determinanta - broj zapisan u matričnom obliku

$A = \begin{bmatrix} (\ldots) \end{bmatrix}$ matrica

$B = \det \begin{bmatrix} (\ldots) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (\ldots) \end{vmatrix}$ determinanta

$\det : M(R) \to R$

Raspis determinante

$n = 1$

$\det [a_{11}] = a_{11}$

$n = 2$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$n = 3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot a_{11} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot a_{12} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot a_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

- raspis po elementima 1. retka

\+ determinanta se može raspisati po bilokojem retku ili stupcu

M_{ij} minora = determinanta koja se dobije kada se iz originalne determinante izbace i redak i j stupac

$(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$ $\Rightarrow$ algebarski komplement

Svojstva determinanti

1. Ako determinanta ima redak ili stupac čiji su elementi svi 0, determinanta je jednaka 0.

Dokaz

Determinanta se raspiše po tom retku/stupcu.

) Ako determinanta ima dva jednaka retka, determinanta je jednaka 0.

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Općenito:

Recimo da determinanta ima dva jednaka retka, i i j.

Raspišimo determinantu po retku $\underline{k}$, $k \neq i$ i $k \neq j$.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} a_{kj} A_{kj} = \sum_{r=1}^{n+1} a_{kr} (-1)^{k+r} M_{kr} = 0$$

OVO JE MINORA KOJA IMA i i j REDAK ISTE

3) Determinanta se množi skalarom tako da se jedan redak (stupac) pomnoži skalarom.

$\boxed{\text{Dokaz}}$

Determinanta se raspiše po retku (stupcu) koji se množi skalarom:

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij}) A_{ij}' = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \lambda \det A$$

4) Ako se svi elementi nekog retka rastave na dva dijela, dobiju se dvije determinante:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 4x+1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Dokaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' + a_1'' \\ a_2 \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ a_2 \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' \\ a_2 \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}' + a_{1j}'') A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}' A_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}'' A_{1j}$$

5) Zamijenimo li dva retka determinante, ona mijenja predznak.

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i + a_j \\ (\dots) \\ a_j + a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_j + a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_j + a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = 0$$

6) Dodamo li retku determinante drugi redak pomnožen skalarom, determinanta ostaje ista.

Dokaz

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_j + \lambda a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ \lambda a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_j \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_i \\ (\dots) \\ a_n \end{vmatrix}}_{=0}$$

Rang i inverz matrice

$A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (\dots) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\dots) & 0 & 0 \\ & & (\dots) & & & \\ 0 & (\dots) & 0 & 1 & (\dots) & 0 \\ 0 & (\dots) & 0 & (\dots) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B = B \cdot A = I$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$1 = \det I = \det(A A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$

Matrica ima inverz ako $\det A \neq 0$.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Teorem

Neka je A kvadratna matrica $(m \times m)$. Postoji najviše jedna matrica A' takva da vrijedi $A' A = A A' = I$ $(*)$

Dokaz

Pretpostavimo da postoje A' i A'' tako da vrijedi $(*)$.

$$\left.\begin{aligned} (A'A)A'' &= I \cdot A'' = A'' \\ A'(AA'') &= A' \cdot I = A' \end{aligned}\right\} A'' = A'$$

Teorem

Ako su A i B invertibilne vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Dokaz

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$

Cramerovo pravilo

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = 0 \qquad i \neq k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{ji} = \begin{cases} \det A & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

Propozicija

Ako je $\det A \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\det A} \cdot a_{jk} A_{ji} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \left(\frac{A_{ji}}{\det A} \right) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

$$(A_{ij}) = \tilde{A} \qquad \tilde{A}^{T} \cdot A = (\det A) \cdot I$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ji} a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} A^{T}_{ij} a_{jk} = \begin{cases} \det A & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

$$\frac{\tilde{A}^{T}}{\det A} \cdot A = I \implies a^{-1}_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ji}$$

Elementarne transformacije

1) Zamjena dvaju redaka
2) Množenje reda skalarom ($\lambda \neq 0$)
3) Dodavanje jednog retka drugom pomnoženog sa skalarom

Dobivanje inversa matrice elementarnim transformacijama

$$[A \mid I] \sim [A_1 \mid E_1] \sim [A_2 \mid E_2 E_1] \sim (\dots) \sim [A_n \mid E_n (\dots) E_2 E_1]$$

$$A^{-1} = E_n (\dots) E_2 E_1$$

Reducirani oblik matrice

Prvi ne-0 element svakog retka je 1 => stožerni element

+ostali elementi u tom stupcu su 0

- svi retci samo sa 0-elementima, ako ih ima, se nalaze ispod onih sa barem jednim ne-0 elementom
- svaki idući stožerni element nalazi se desno od prethodnog

Rang i invers matrice

Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku.

$r(A) = \text{rang}$ $\quad r(A) \leq m \quad r(A) \leq n$

$A \in M_n(R)$

$r(A) = n \iff A_r = I$

$B = E_r (\dots) E_1 A$

$\det B = 0 \iff \det A = 0$

$$\det B = \underbrace{\det E_r (\dots) \det E_1}_{\neq 0} A$$

Ako je A invertibilna i $B \sim A \Rightarrow B$ je invertibilna.

Invertibilna matrica = regularna matrica

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$r(A) = n \iff A = I$

Kvadratna matrica je regularna $\iff r(A) = n$

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$r(A) = n \Rightarrow A_r = I$

$$I = A_r = \underbrace{(E_r (\dots) E_1)}_{A^{-1}} A$$

$$A^{-1} = E_r (\dots) E_1$$

A invertibilna ; $\det A \neq 0 \Rightarrow \det A_r \neq 0 \Rightarrow A_r \neq I \Rightarrow r(A) = 1$

Linearna nezavisnost vektora i rang matrice

V^n = prostor svih stupaca duljine n

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ (\dots) \\ (\dots) \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ (\dots) \\ (\dots) \\ (\dots) \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ (\dots) \\ (\dots) \\ (\dots) \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \qquad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ (\dots) \\ (\dots) \\ (\dots) \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ (\dots) \\ (\dots) \\ (\dots) \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

Neka su $a_1, a_2, (\dots), a_k$ bilo koji vektori iz prostora V^n.
Linearna kombinacija vektora a_1 do a_k je vektor oblika
$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + (\dots) + \lambda_k a_k$. $\lambda_1, (\dots), \lambda_k \in \mathbb{R}$
Skup svih ovakvih linearnih kombinacija nazivamo prostorom razapetim vektorima $a_1, (\dots), a_k$ i označavamo

$L(a_1, (\dots), a_k) = \{X \mid X = \lambda_1 a_1 + (\dots) + \lambda_k a_k\}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Kažemo da su vektori a_1 do a_k linearno nezavisni ako iz jednakosti $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + (\dots) + \lambda_k a_k$ slijedi da su svi jednaki 0.

Vektori a_1 do a_k su linearno zavisni ako nisu linearno ezavisni.

Pred- tvrdnja

Elementarne transformacije ne mijenjaju broj linearno nezavisnih redaka matrice.

1) Zamjena redaka
2) Množenje retka s $\lambda \neq 0$

$\Big\}$ očigledno

3) $a_1, (\dots), a_n$ $\quad L(a_1, (\dots), a_m) = L(a_1', (\dots), a_m')$

$a_2' = a_2 + \lambda a_1$ bez smanjenja općenitosti

$$\lambda_1 a_1' + \lambda_2 a_2' + (\dots) + \lambda_m a_m' = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 (a_2 + \lambda_1 a_1) + \lambda_3 a_3 + (\dots) + \lambda_m a_m$$

$$L(a_1', (\dots), a_m') \leq L(a_1, (\dots), a_m)$$

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + (\dots) + \mu_m a_m = \mu_1 a_1' + \mu_2 (a_2' - \lambda a_1') + \mu_3 a_3 + (\dots) + \mu_m a_m$$

$r(A)$ = broj linearno nezavisnih redaka matrice A

Teorem

Broj linearno nezavisnih redaka jednak je broju linearno nezavisnih stupaca.

Teorem

$A \in M_m(\mathbb{R})$ $\quad AX = 0$ ima jedinstveno rješenje $X = 0$ akko je A regularna.

$AX = 0 \,/\, A^{-1}$ s LIJEVA

$A^{-1} A X = 0 \Rightarrow X = 0$ $\qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (\dots) \\ x_n \end{bmatrix}$

Neka $AX = 0$ ima jedno rješenje $x = 0$.

$$AX - X_1 a^1 + X_2 a^2 + (\dots) + X_m a^m$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}}_{a_1} + X_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}}_{a_2} + X_3 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}}_{a_3}$$

Linearni sustavi

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + (\ldots) + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + (\ldots) + a_{2n}x_n = b_2$

$(\ldots)$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + (\ldots) + a_{nn}x_n = b_n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & (\ldots) & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & (\ldots) & a_{2n} \\ (\ldots) & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & (\ldots) & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (\ldots) \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (\ldots) \\ b_n \end{bmatrix}$$

Linearni sustavi mogu biti homogeni ili nehomogeni.

Općenito:

$Ax = b$

$b = 0$ — homogen sustav

$b \neq 0$ — nehomogen sustav

Rješavanje homogenog sustava

1) Sustav $Ax = 0$ se napiše u matričnom obliku
2) $[A \mid 0] \rightarrow [A_R \mid 0]$
3) Odrede se vezane nepoznanice (one u stupcu sa stožernim elementom), ostale su slobodne

$Ax = 0$ je uvijek ima barem jedno rješenje $(x = 0)$

Teorem

Opće rješenje sustava $Ax = b$ ima oblik $x = x_H + x_P$, gdje je x_H opće rješenje homogenog sustava $Ax = 0$, a x_P neko posebno rješenje od $Ax_P = b$.

Rješavanje nehomogenog sustava

$X = X_p + X_H$

1) $AX = b \Rightarrow [A \mid b]$

2) $[A \mid b] \rightarrow [A_R \mid 0]$

$r(A) < r(A \mid b)$ nema rješenja

Inače:

3) Odrediti slobodne varijable po vezama

4) Rješenje zapisati u vektorskom obliku

Karakteristični polinom i svojstvene vrijednosti

Vektor $v \neq 0$ zovemo svojstvenim (vlastitim) vektorom matrice A ako postoji skalar λ takav da vrijedi $Av = \lambda v$.
Skalar λ zovemo svojstvenom (vlastitom) vrijednosti matrice A, koja odgovara svojstvenom vektoru v.

$A, v \neq 0$

$Av = \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$x, y \quad \lambda$

$Ax = \lambda y$

$$A(\underbrace{\alpha x + \beta y}_{w}) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

$Aw = \lambda w$

Za matricu I svaki je vektor svojstveni, a zajednička svojstvena vrijednost je 1, jer vrijedi $Iv = v \; ; \; \forall v$.

Skripta iz Teorije Matematike 1 - Drugi ciklus

Nizovi i limesi

$f: \mathbb{N} \to X$, $X = \mathbb{R}$

$f(1) = a_1$ PRVI ELEMENT

$f(2) = a_2$ DRUGI ELEMENT

$f(n) = a_n$ n-TI ELEMENT (OPĆI ČLAN)

Podniz

Niz (b_n) je podniz niza (a_n) ako postoji bijekcija indeksa niza (a_n) sa indeksima niza (b_n).

ili

ako strogo rastuća funkcija $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$b_n = a_{f(n)}$

Omeđenost

Niz je omeđen odozgo (~~odozdo~~) ako je skup $\{a_n\}$ omeđen odozgo (odozdo).

Niz je omeđen ako je omeđen odozgo i odozdo,

$a_n \leq M$

$\{a_1, a_2, (\ldots), a_n\} \leq M$

Okoliš

Okoliš br. a_0 je svaki skup za koji postoji ε okolina od a_0 koja je u njemu sadržana.

$\varepsilon > 0$, $a_0 \in \mathbb{R}$

$V_\varepsilon(a_0) = \{a \in \mathbb{R} \mid |a - a_0| < \varepsilon\} = (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$

Okoliš oko $\pm\infty$

Skup $V_M(+\infty) = \{a \in \mathbb{R} \mid a > M\} = (M, +\infty)$ naziva se M okoliš točke $+\infty$.

Skup $V_m(-\infty) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < m\} = (-\infty, m)$ naziva se m okoliš točke $-\infty$.

Gomilište niza

Realan br. A je gomilište niza (a_n) ako se unutar svakog okoliša oko njega nalazi beskonačno mnogo elemenata niza.

Ova se definicija može proširiti i na slučajeve $A = +\infty$ i $A = -\infty$.

Svaki omeđeni niz realnih br. ima barem jedno gomilište A $(A \in \mathbb{R})$.

Limes superior - najveće gomilište niza (a_n)

$\rightarrow \limsup (a_n)$

Limes inferior - najmanje gomilište niza (a_n)

$\rightarrow \lim \sup (a_n)$

Konvergencija

Niz realnih br. (a_n) konvergira (teži) realnom br. L, ako $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - L| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$.

$a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$

L = limes niza (a_n)

$L = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ ili $a_n \to L$

Ako niz realnih br. (a_n) ima $L \in \mathbb{R}$, onda je konvergentan.
Inače je divergentan.
Konvergentan niz je omeđen. Konvergentan niz ima samo jedan limes (gomilište).

$$|L_1 - L_2| \leq \underbrace{|L_1 - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - L_2|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$L_1 = L_2$$

Ako je (a_n) konvergentan sa limesom L, a (b_n) je podniz od (a_n), tada je (b_n) konvergentan i $\lim (b_n) = L$.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

<u>Sendvič - teorem</u>

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za svaki $n \geq n_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

tada je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Npr. $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$$|a_n - 0| < \varepsilon \iff |a_n| - 0 < \varepsilon$$

<u>Aritmetički niz - suma</u>

$$S = \frac{a_n(a_{n+1})}{2} \cdot n$$

<u>Geometrijski niz - suma</u>

$$1 + q + q^2 + (\ldots) + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Operacije sa limesima

(a_n) i (b_n) konvergentni nizovi

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Dokaz (za a))

$\varepsilon > 0$

$n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$

a je limes od $a_n \Rightarrow$ može se naći $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

b je limes od $b_n \Rightarrow$ može se naći $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Dokaz (za c))

$\varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \; n \geq n_0 \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon$

$|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$

$= |a_n| \underbrace{|b_n - b|}_{\frac{\varepsilon}{2M}} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{\frac{\varepsilon}{2|b|}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n| \leq M \quad \forall n$

Nizovi sa beskonačnim limesima

Niz realnih br. (a_n) divergira u beskonačnost $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \to \infty$, ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in N$ takav da $n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$. Analogno za $-\infty$, ako za svaki $m < 0$ postoji $n_0 \in N$ takav da $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < m$.

Neka su nizovi (a_n) i (b_n) takvi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ i $b_n > 0$.

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Nizovi (a_n), (b_n) i (c_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = C$$

Tada vrijedi

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = +\infty \Rightarrow c > 0$

$-\infty \Rightarrow c < 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

Dokaz (za b))

$\lim_{n\to\infty} (a_n + c_n) = +\infty$

$M > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$?? $n \geq n_0 \Rightarrow a_n + c_n > M$

$n_1 \in \mathbb{N}$ $a_n > M + \varepsilon - C$

$n_2 \in \mathbb{N}$ $c_n > C - \varepsilon$

$a_n + c_n > M + \varepsilon - \cancel{C} + \cancel{C} - \varepsilon$

$a_n + c_n > M$

Konvergencija, monotonost i omeđenost

Niz (a_n) je rastući ako za $n > m$ vrijedi $a_m \geq a_n$.

Padajući: $n > m$ $a_n \leq a_m$.

Ako je niz realnih br. monoton i omeđen, onda je i konvergentan.

Dokaz

Neka je (a_n) rastući omeđeni niz.

$S = \{a_n \mid n \in N\}$ (Neka je S skup vrijednosti n)

Ako je omeđen, ima supremum. Taj supremum je limes.

$L = \sup S$ Tvrdnja: $L = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in N$, $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$\exists a_{n_0} > L - \varepsilon$

$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > L - \varepsilon$

i znamo $a_n < L \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Definicija neprekinute funkcije

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Neizmjerno velike veličine

(a_n) i (b_n) su neizmjerno velike veličine istog reda ako vrijedi

$$\lim a_n = \lim b_n = \infty \quad i \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = C \in \mathbb{R}^+$$

Za $C = 1$ a_n i b_n su E.N.V.V.

Neka su a_n i b_n E.N.V.V. i c_n bilo koja N.V.V.
Tada vrijedi

$$\lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{b_n}{c_n}$$

Limes funkcija

$f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$

Da li postojao $\lim f(x)$ u $x = a$ $D(f)$ mora zadovoljavati

$\exists \delta > 0$ $\langle a-\delta, a+\delta\rangle \setminus \{a\} \subseteq D(f)$

$a = +\infty$

$\exists M > 0$ takav da je $\langle M, +\infty\rangle \subseteq D(f)$

$a = -\infty$

$\exists m < 0$ takav da je $\langle -\infty, m\rangle \subseteq D(f)$

$L \in \mathbb{R}$ je limes funkcije f u $x = a$ ($\lim_{x\to a} f(x) = L$) ili $f(x) \to L$ kada $x \to a$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f), x \neq a)(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$$

ili

$$(x \in \langle a-\delta, a+\delta\rangle) \Rightarrow (f(x) \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle)$$

Funkcija f ima limes u točci $x=a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$) ako za $\forall (x_n) \subseteq D(f)$ i za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ vrijedi $\lim\limits_{n} f(x_n)=L$.

Neodređeni oblici

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \left\{ \frac{c}{\pm\infty} = 0 \right\}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad \left\{ \frac{c}{0} = \infty \right\}$$

$\infty + \infty = \infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, (\infty - \infty), 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, (0 \cdot \infty)$ - Neodređeni oblici

Neprekinute funkcije

Funkcija je neprekinuta u točci $x=a$ ako je $a \in D(f)$ i vrijedi:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ takav da je $\forall x \in D(f)$ $(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)-f(a)| < \varepsilon)$

Ako funkcija nije neprekinuta, onda je prekinuta.

Neka je I interval ili unija intervala ili cijeli $\mathbb{R}$. Kažemo da je $f(x)$ neprekinuta u I ako je neprekinuta $\forall x \in I$.

1) f i g funkcije takve da je $f(D(f)) \subseteq D(g)$

Ako je f neprekinuta u točci $x=a$ i funkcija g je neprekinuta u $x=f(a)$, tada je i $g(f(x))$ neprekinuta u $x=a$.

) Neka su f i g neprekinute u $x=a$. Tada su i njihove funkcije neprekinute u $x=a$.

$f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$ i $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$.

I) Neka je funkcija $y = f(x)$ neprekinuta u $x = a$. Tada postoji limes funkcije u $x = a$ i vrijedi $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

II) Neka funkcija $f(x)$ ima limes u $x = a$. Neka je $a \in D(f)$ i neka je $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Tada je funkcija neprekinuta u $x = a$.

Svojstva neprekinutih funkcija

Neka je I otvoren interval ili čitav $\mathbb{R}$. Neka je f neprekinuta na I i neka su a i $b \in I$ proizvoljne vrijednosti, $a < b$, takve da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada $\exists\, c \in \langle a, b \rangle$ takav da je $f(c) = 0$. (Funkcija ima nultočku u tom intervalu ako $f(x)$ mijenja predznak. S obzirom da je $f(x)$ neprekinuta, negdje siječe x-os.)

x_M je točka maksimuma funkcije f na intervalu I ako je $f(x_M) \geq f(x)$ $\forall x \in I$. Analogno za minimum.

Rolleov teorem

Neka je $f(x)$ neprekinuta na $I^{OT} \subseteq \mathbb{R}$. Neka su a i $b \in I$, $a < b$ tako da je $f(a) = f(b) = 0$ (ili bilo koji drugi broj). Tada na intervalu $\langle a, b \rangle$ $f(x)$ poprima lokalni ekstrem.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f neprekinuta na $[a, b]$

Tada funkcija f na $[a, b]$ poprima i min i max. (Funkcija iz zatvorenog intervala preslikava vrijednosti u zatvoreni interval).

Neka je g neprekinuta funkcija je (a_n) konvergentan niz. Tada vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$

Neka funkcija f ima limes u točci $x=a$ i g je neprekinuta. Tada je $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = g(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

f i g moraju biti takve da $f(D(f)) \subseteq D(g)$

Ekvivalentne neizmjerno male veličine

Funkcije x, $\ln(1+x)$, (e^x-1), $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{arsh} x$, i $\operatorname{arth} x$ se ponašaju kao x kada $x \to 0$.

Derivacija funkcije

$I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f: I \to \mathbb{R}$, $x \in I$

f ima derivaciju u točci x ako $\exists$ br. $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + o(h)$$

$o(h)$ je nepoznata funkcija za koju vrijedi $\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$.

Dokaz

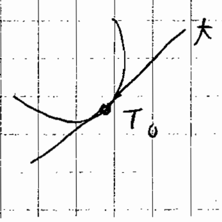
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{o(h)}{h} \quad /\cdot \lim_{h\to 0}$$

$$f'(x) = f'(x) + 0$$

Tangenta na krivulju

Tangenta na krivulju $y=f(x)$ u točci $T(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



Derivacije višeg reda

$f''(x) = (f'(x))'$

$f^{k}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$

$f^{0}(x) = f(x)$

$\frac{df}{dx}, \frac{d^2 x}{dx^2}, \frac{d^k f}{dx^k}$

Derivacija i neprekinutost

Ako je $f(x)$ derivabilna u x, onda je i neprekinuta u x. Obrat ne vrijedi.

Dokaz

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, f diferencijabilna

$\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x))^{*} = \lim_{h \to 0} h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \cdot \lim_{h \to 0} h$

$= f'(x) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow f$ neprekinuta u x

$^{*} \lim_{x_1 \to x} (f(x_1) - f(x)) = 0$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.d. $\forall x_1 \in D(f)$ $(|x_1 - x| < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x)| < \varepsilon)$

Osnovna pravila deriviranja

Neka su f i g diferencijabilne u x. Tada vrijedi

a) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

b) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g + f(x)\, g'(x)$

c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$

Dokaz (za a) i b))

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Dokaz (za c))

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)g(x)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)g(x+h)+(f(x)g(x+h)-f(x)g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x) =$$

$$f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Dokaz (za d))

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Napomena!

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$

$$c' f(x) + c\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = c\cdot f'(x)$$

Derivacija složene funkcije

Neka je $f \circ g$ definirana u X.

Neka je g dif. u točci x, a f dif. u $g(x)$.

Tada je $(f \circ g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (g(x) - g(x_0)) = 0$$

Tablica derivacija funkcija realne varijable

$x^a = a\,x^{(a-1)}$

$\sin x = \cos x$

$\cos x = -\sin x$

$\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\mathrm{ctg}\, x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{arc\,tg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$

$\mathrm{arc\,ctg}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$

$e^x = e^x$

$a^x = a^x \ln a$

$\ln x = \frac{1}{x}$

$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

$\mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x$

$\mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x$

$\mathrm{th}\, x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

$\mathrm{cth}\, x = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

$\mathrm{arsh}\, x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\mathrm{arch}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\mathrm{ar\,th}\, x = \frac{1}{1-x^2}$

$\mathrm{ar\,cth}\, x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$|x| = \frac{x}{|x|}$

Derivacija inverzne funkcije

$(f^{-1} \circ f)(x) = x \;/'$

$(f^{-1} \circ f)'(x) = 1$

$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

$\boxed{\text{Primjer}}$

$\ln(e^x) = x \;/'$

$\ln'(e^x) \cdot e^x = 1$

$\ln'(e^x) = \dfrac{1}{e^x} \quad \Rightarrow \quad |\, e^x = y \,|$

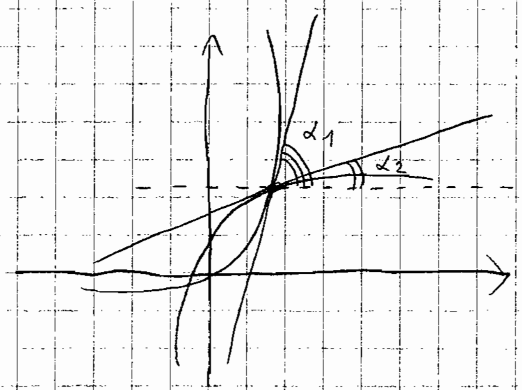
$\ln'(y) = \dfrac{1}{y}$

Kut među krivuljama

Kut među krivuljama se definira kao kut među tangentama obiju krivulja u točci dodirivanja krivulja.

$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$

$tg\, \alpha = k$



$tg\, \varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \dfrac{tg\, \alpha_1 - tg\, \alpha_2}{1 + tg\, \alpha_1\, tg\, \alpha_2}$

$$\boxed{tg\, \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}}$$

Kut tangente se smatra onaj kut koji tangenta zatvara s x-osi.

Diferencijal

Linearna funkcija koja nam govori kako se tražena funkcija ponaša u okolišu oko neke točke x_0 i približno iznosi

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h \quad [f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h]$

Osnovni teoremi diferencijalnog računa

$f : S \to \mathbb{R} \quad S$ neprazan skup

Ako za $a \in S$ vrijedi $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in S$ kažemo da je a točka maksimuma na skupu S. $f(a) = \max\{f(x) : x \in S\} = \max\limits_{x \in S} f(x)$

$f(a) \to$ max funkcije. Analogno za minimum.

Min i max su ekstremi.

Fermatov teorem

$f: I \to \mathbb{R}$ I otvoren interval, f diferencijabilna

Ako f ima u $a \in I$ lokalni ekstrem, tada je $f'(a) = 0$.

$\boxed{\text{Dokaz}}$

Neka je točka a max.

$$\frac{\overset{<0}{f(x) - f(a)}}{\underset{>0}{x - a}} \leq 0 \qquad x > a \;/ \lim_{x \to a^+} \qquad f'(a^+) \leq 0$$

$$\frac{\overset{<0}{f(x) - f(a)}}{\underset{<0}{x - a}} \geq 0 \qquad x < a \;/ \lim_{x \to a^-} \qquad f'(a^-) \geq 0$$

$f'(a) \geq 0$ i $f'(a) \leq 0$

Ako oba uvjeta vrijede, $f'(a)$ mora biti 0.

Rolleov teorem

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f neprekinuta na $[a,b]$, diferencijabilna na $\langle a,b \rangle$

Ako je $f(a) = f(b)$ tada $\exists c \in \langle a,b \rangle$ da je $f'(c) = 0$.

$\boxed{\text{Dokaz}}$

Ako je funkcija konstanta $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \langle a,b \rangle$

Ako nije:

$\exists$ točka min ili max

Neka je c max.

$f(c) \neq f(x) \qquad x \in \langle a,b \rangle \setminus \{c\}$

$f'(c) = 0$

Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f neprekinuta na $[a,b]$, diferencijabilna na $\langle a,b \rangle$

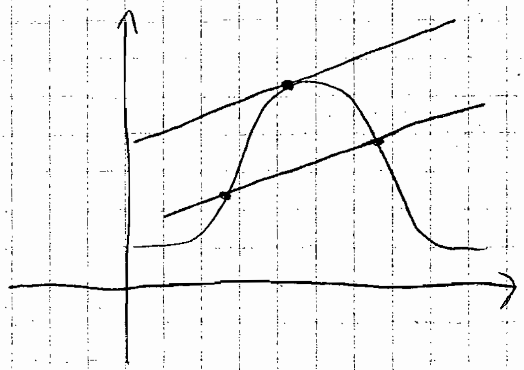
tada $\exists c \in \langle a,b \rangle$ takav da je $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$

$F(x) = f(x) - \lambda x$

$F(a) = F(b)$

$f(a) - \lambda(a) = f(b) - \lambda(b)$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$\exists c \in \langle a,b \rangle$ takav da je $F'(c) = 0$

$F'(x) = f'(x) - \lambda$

$0 = F'(c) = f'(c) - \lambda$

$\lambda = f'(c)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tj. za svaku sekantu na $\langle a,b \rangle$ postoji paralelna tangenta.

(I) $f : I \to \mathbb{R}$ f diferencijabilna

Ako je $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ tada je f konstanta.

(II) $g, f : I \to \mathbb{R}$ g i f diferencijabilne

Ako je $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$

Tada $\exists c \in \mathbb{R}$ da je $f(x) = g(x) + c$

Rast i pad funkcije

$f : I \to \mathbb{R}$ f diferencijabilna

$f'(x) > 0$ $\forall x \in I \to f$ raste na I

$f'(x) < 0$ $\forall x \in I \to f$ padna na I

Cauchyev teorem o srednjoj vrijednosti

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f i g neprekinute na $[a,b]$

diferencijabilne na $\langle a, b \rangle$, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dokaz

$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$

$F(a) = F(b)$

$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad g(a) \neq g(b)$$

Po rolleovom teoremu primjenjenom na F $\exists\, c \langle a,b \rangle$ takav da je $F'(c) = 0$; tj $f'(c) - \lambda g'(x) = 0$; tj $\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Taylorov polinom

I otvoren interval, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ i ima derivacije do $f^{(n)}$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x_0)$$

$$R(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{n!} (x - x_1)^{(n+1)} \qquad x_1 \in \langle x_0, x \rangle$$

Ako je $x_0 = 0$, taj se polinom naziva MacLaurinov polinom.

L'Hospitalova pravila

Neka su f i g diferencijabilne na $S = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ i $g'(x) \neq 0$ na S. Ako vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ (ili ∞)

i postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

onda $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad c \in \langle a, b \rangle$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$x_1 \in \langle x_0, x \rangle$$

L'Hospitalova pravila vrijedi samo za slučajeve $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

Ostali oblici se svode na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

$(0 \cdot \infty) = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ ili $(0 \cdot \infty) = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

Oblici 0^0, 1^∞ i ∞^0 se svode preko e na poznate oblike.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$$

$$(\infty - \infty) = f(x) - g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \quad L'H$$

Asimptote

1) Vertikalne asimptote

Traži se ponašanje funkcije u točkama prekida domene.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty \qquad x = c \text{ je vertikalna asimptota}$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$$

2) Horizontalne asimptote

Ispituje se ponašanje funkcije u "točkama" $\pm\infty$.

$$l = \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad y = l \text{ je desna horizontalna asimptota}$$

$$p = \lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad y = p \text{ je lijeva horizontalna asimptota}$$

3) Kose asimptote

Horizontalna asimptota je poseban pod-slučaj kose asimptote.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = kx + l \qquad \text{je desna kosa asimptota}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = kx + l \qquad \text{je lijeva kosa asimptota}$$

Postojanje jedne kose asimptote se povlači nužno postojanje druge.

Kose asimptote se traže na slijedeći način:

$$f(x) \approx kx + l \quad /:x$$

$$\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x}$$

$$k \approx \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$l = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

Skripta iz Teorije Matematike 1 - Treći ciklus

Pad i rast funkcije

Funkcija f raste na intervalu $\langle a, b \rangle$ ako i samo ako je

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Analogno vrijedi za pad.

$f'(x) = 0$ određuje stacionarne točke.

Sedlo - točka gdje je $f'(x) = 0$, ali nije ekstrem

Nalaženje intervala monotonosti

1) Izračuna se $f'(x)$
2) $f'(x) = 0$
   → odrede se stacionarne točke
3) Tablica - stacionarne točke dijele područje definicije na intervale stroge monotonosti
4) Provjeri se predznak $f'(x)$ u svakom intervalu

Ekstremi

Definicija

Funkcija f ima u x_0 lokalni minimum ako postoji interval $\langle a, b \rangle$ tako da vrijedi $f(x_0) \leq f(x)$. $\forall x \in \langle a, b \rangle$

Analogno vrijedi za maksimum.

Minimum i maksimum su lokalni ekstremi.

Propozicija

Ako f ima lokalni ekstrem u $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Nalaženje lokalnih ekstrema

1) Odrede se stacionarne točke
2) Odrede se intervali monotonosti
3) Tablica - na temelju derivacije se odredi koje stacionarne točke su ekstremi

Globalni ekstremi

Nužni uvjeti za globalni ekstrem: Na intervalu $[a, b]$ funkcija može imati ekstrem u točkama gdje:

1) Derivacija ne postoji
2) Derivacija je jednaka 0
c) je rub intervala

Druga derivacija i ekstremi

Ako vrijedi $f''(X) > 0$, u točci X je globalni minimum.
Analogno vrijedi za maksimum.
To je tako jer:
Pri aproksimaciji funkcije Taylorovim polinomom, uz drugu derivaciju se aproksimira parabolom. Ako vrijedi $f''(X) > 0$ parabola je konveksna i tjeme je minimum; analogno vrijedi za maksimum.

Teorem

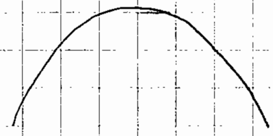
Ako vrijedi $f'(c) = f''(c) = (\ldots) = f^{(n-1)}(c) = 0$

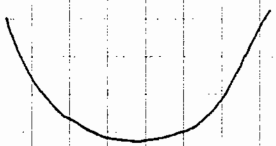
i $f^{(n)}(c) \neq 0$

Onda c nije točka ekstrema ako je n neparan, a jest ako je n paran i tada je c:

1) lokalni minimum ako $f^{(n)}(c) > 0$
2) lokalni maksimum ako $f^{(n)}(c) < 0$

Konveksnost i konkavnost





konkavno

- k tangente stalno pada

$(f''(x) < 0)$

konveksno

- k tangente stalno raste

$(f''(x) > 0)$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f''(x) \text{ mijenja predznak u } x_0 \end{array}\right\} \text{Uvjeti za točku infleksije}$$

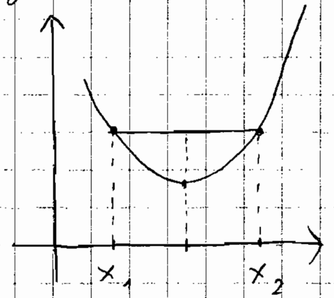
Nalaženje točaka infleksije:

1) $f''(x) = 0$

   → Nađu se točke infleksije

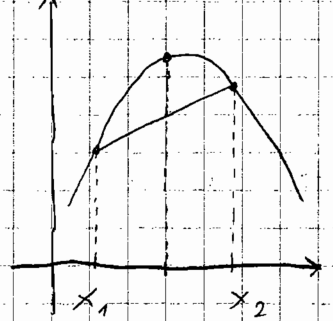
2) Tablica - gleda se predznak druge derivacije; gdje je manja od 0 funkcija je konkavna; analogno za konveksnost

Graf i sekante



konveksnost - spojnica bilo kojih dviju točaka je iznad grafa

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



konkavnost - spojnica bilo kojih dviju točaka je ispod grafa

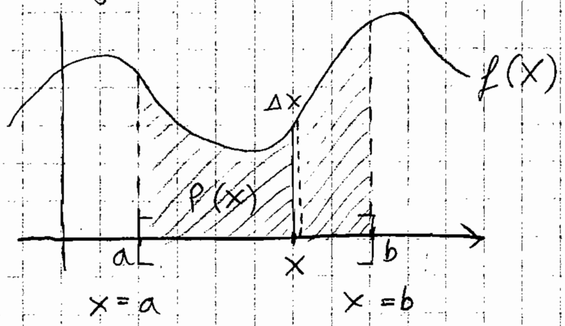
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Tijek (tok) funkcije

Za određivanje toka funkcije bitni su slijedeći elementi, oni nam daju dovoljno informacija da možemo nacrtati graf zadane funkcije:

1) $D(f)$ - i prekidi domene
2) $N(f)$ - nultočke funkcije
3) Parnost, neparnost, periodičnost
4) Asimptote
5) $f'(x)$, nultočke, tablica
 → intervali monotonosti i ekstremi
6) $f''(x)$
 → intervali konkavnosti / konveksnosti i točke infleksije

Integralni račun



$x \in [a,b]$

$P(a) = 0$

$P(b) = P$

$P(\Delta x) \approx \Delta x \cdot f(x)$

↑

$[x, x+\Delta x]$

$P(\Delta x) = (f(x)+\varepsilon)\cdot \Delta x \;/:\Delta x$

$\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \to 0$

$(f(x)+\varepsilon) \to \varepsilon$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\varepsilon\to 0} (f(x)+\varepsilon) = f(x)$$

$$P'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (f(x)+\varepsilon) = f(x)$$

$P(x+\Delta x) = P(x) + (f(x)+\varepsilon)$

$P'(x) = f(x)$

P - primitivna funkcija od f

Primitivna funkcija

Neka je f definirana na $I = \langle a, b \rangle$.

F zovemo primitivnom funkcijom od f na I ako za $\forall x \in I$ vrijedi $F'(x) = f(x)$.

Svaka funkcija ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija, ali svaka primitivna funkcija daje točno jednu funkciju kada se derivira.

Stavak 1

Neka su F_1 i F_2 primitivne funkcije od f na I. Tada vrijedi

$F_2 = F_1 + C$; $C \in \mathbb{R}$

Obratno, ako je F_1 primitivna funkcija od f na I, tada je i $F_2 = F_1 + C$ primitivna funkcija.

Dokaz

1) $F'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

$F_2 = F_1 + C$

2) $F_1' = f(x) \quad \forall x \in I$

$F_2'(x) = F_1'(x) + 0 = f(x)$ Q.E.D.

Neodređeni integral

Neodređeni integral funkcije f na I je skup svih primitivnih funkcija od f na I.

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x)\,dx = FX + C \qquad C \text{ proizvoljan}$$

$f(x)$ – PODINTEGRALNA FUNKCIJA

dx – DIFERENCIJAL ARGUMENTA

C – ZBROJIDBENA KONSTANTA

Tablica neodređenih integrala

1) $\int 0 \cdot dx = C$

2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int x^a \, dx = \frac{x^{(a+1)}}{a+1} + C$

$\hookrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

5) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6) $\int e^x \, dx = e^x + C$

7) $\int \sin x \, dx = (-\cos x) + C$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = (-\operatorname{ctg} x) + C$

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$\hookrightarrow a > 0$

11)* $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

$= (-\arccos x) + C$

12) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$\hookrightarrow a > 0$

12)* $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$

$= (-\operatorname{arcctg} x) + C$

13) $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$

14) $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = (-\operatorname{cth} x) + C$

16) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

$\hookrightarrow a \neq 0$

17)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

18) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\hookrightarrow a > 0$

18)* $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

U SLUČAJEVIMA POD * $\Rightarrow a = 1$

Svojstva integrala

1) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

3) $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$; tj. $\int d f(x)\,dx = f(x) + c$

4) $\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

5) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Dokazi

1. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x) + c\right) = F'(x) + 0 = f(x)$

2. $d\left(\underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)+c}\right) = d\left(F(x) + c\right) = F'(x)\cdot dx + 0 = f(x)\,dx$

3. $\int f(x)\,dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$

   $(f(x) + c)' = f'(x) + 0 = \int f'(x)\,dx$

4. $\left(a \int f(x)\,dx\right)' = a\left(\int f(x)\,dx\right)' = a \cdot f(x)$

5. $\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = (F(x) + c_1 + G(x) + c_2)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

Metoda supstitucije

$(f \circ \varphi)'(u) = f'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$

Neka je $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$, $\varphi(u)$ diferencijabilna na $[\alpha, \beta] \to [a,b]$ i φ injektivna. Onda vrijedi

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u)\,du$$

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$F' = f$

$$\int f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u) = \int F'[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u)\, du = \int (F \circ \varphi)'(u)\, du$$

$$= (F \circ \varphi)(u) + C$$

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

$$x = \varphi(u)$$

Napomena: Treba gledati kako da deriviranjem dobijemo ono što piše pod integralom (odnosno prepoznati supstituciju i naći njezinu derivaciju pod integralom)

Parcijalna integracija

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = \int (f(x)\, g(x))'\, dx - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

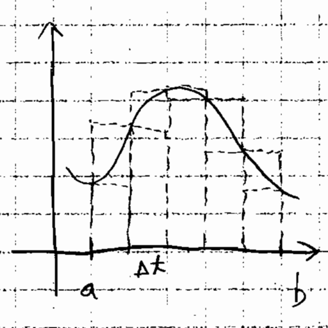
$$= \int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

Ili

$$\int u v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \quad \Rightarrow \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Određeni integral

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$



$$F = c \cdot x$$

$$c \to c(x)$$

$$\Delta t \to dt$$

$$\sum \to \int$$

Definicija

Skup točaka $\Delta = \{x_0, x_1, (\dots), x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < (\dots) < x_n = b$ zove se razdioba intervala $[a,b]$.
Točke x_i zovu se djelištima razdiobe Δ, a $I_i = [x_{i-1}, x_i]$
i-ti pod-interval razdiobe Δ, $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$
$\|\Delta\|$ duljina najduljeg intervala razdiobe

$$\|\Delta\| = \max_i (\Delta_i x)$$

Definicija

Neka je f omeđena funkcija na $I = [a, b]$.

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ - neka točka

$$m_i = \inf_{I_i} f \qquad M_i = \sup_{I_i} f$$

Vrijedi

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

Također vrijedi

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1})$$

A onda vrijedi i

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x}_{s\Delta} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x}_{\sigma\Delta} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x}_{S\Delta}$$

$s\Delta$ - donji integralni zbroj
$\sigma\Delta$ - integralni zbroj
$S\Delta$ - gornji integralni zbroj

$m = \inf f$ na $[a,b]$ $\quad m \leq m_i$

$M = \sup f$ na $[a,b]$ $\quad M \geq M_i$

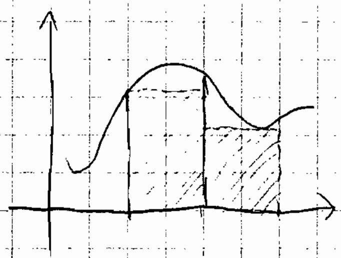
$$\sum_{i=1}^{n} m \Delta_i X \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i X$$

$$m(b-a) \leq s\Delta \leq \sigma\Delta \leq S\Delta \leq M(b-a)$$

<u>Definicija</u>

Za razdiobu Δ' kažemo da je profinjenje razdiobe Δ intervala I ako je i Δ' razdioba od I te ako je $\Delta \subseteq \Delta'$.

$$s\Delta \leq s\Delta' \leq S\Delta \leq S\Delta'$$



PRIJE PROFINJENJA

$s\Delta$

NAKON PROFINJENJA

$s\Delta'$

$s\Delta \leq s\Delta'$

<u>Definicija</u>

Neka je f omeđena na $I = [a,b]$.

Realni broj $I_* = I_*(f,[a,b]) = \sup\{s\Delta \mid \Delta \text{ razdioba na } I\}$ zove se donji Riemannov integral.

$I^* = I^*(f,[a,b]) = \inf\{S\Delta \mid \Delta \text{ razdioba na } I\}$ zove se gornji Riemannov integral.

Vrijedi

$$s\Delta \leq I_* \leq I^* \leq S\Delta$$

Definicija

Kažemo da je f integrabilna na $I = [a,b]$ (u Riemannovom smislu) ako je $I_* \equiv I^* \equiv I \equiv \int_a^b f(x)\,dx$

I je određeni integral funkcije na $[a,b]$

Teorem

$f(x)$ omeđena na $[a,b]$ je integrabilna na I ako i samo ako za $\forall \varepsilon > 0$ postoji Δ razdioba takva da

$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

Teorem

f neprekinuta na $I = [a,b] \Rightarrow f$ integrabilna

Dokaz

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.d. $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Tj. razdiobe intervala moraju biti toliko male da su i gornje i donje sume približno jednake, a to se postiže za $|x - x'| < \delta$

Definicija

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Teorem

1) Ako je f integrabilna na $[a,b] \Rightarrow f$ integrabilna na $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$

2) $a < c < b$ $\quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

3) f_1, f_2 integrabilne na $[a, b]$

Ako je $f_1 \leq f_2$

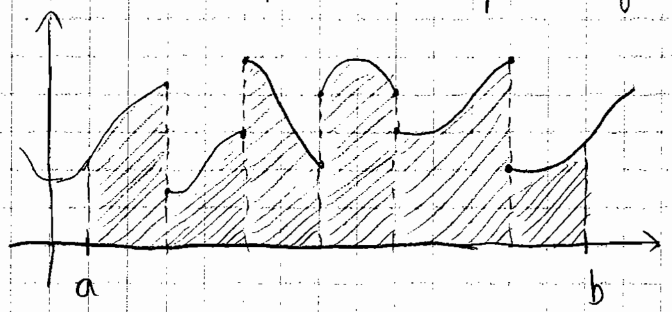
Vrijedi

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx$$

4) $$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Teorem

Ako je f omeđena na $I = [a, b]$ i ako na I ima konačan br. točaka prekida $\Rightarrow f$ integrabilna na I



Teorem

Ako je f na I omeđena i monotona, onda je i integrabilna.

Teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa

Neka je f neprekinuta na $[a, b]$. Onda postoji $\xi \in (a, b)$ takav da je $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

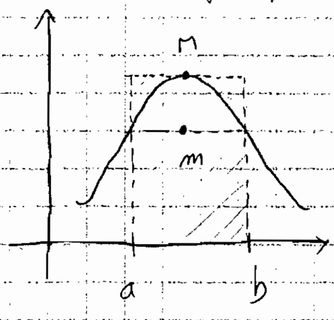
Dokaz

formalni dokaz:

$$m(b-a) \leq s\Delta \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S\Delta \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M \qquad f \text{ neprekinuta} \Rightarrow \xi \text{ t.d. } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Malo manje formalni dokaz:



Postoji neka međuvrijednost između minimuma i maksimuma koja, ako se uzme kao jedan rub pravokutnika, a $x = a$ i $x = b$ kao ostale strane, taj pravokutnik je jednak površini ispod grafa.

Teorem

Neka je f neprekinuta na $I = [a, b]$ $\quad x \in I$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Ako je funkcija diferencijabilna, tada vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$.

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\, \Delta x}{\Delta x} \qquad \xi \in [x, x + \Delta x]$$

Newton - Leibnitz

Neka je f neprekinuta na $[a, b]$ i $F(x)$ neka primitivna funkcija.

Tada vrijedi $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \Phi'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$$

$$C = ?$$

$$\Phi(a)^{*} = F(a) + C$$

$$\Uparrow$$

$$0 \qquad C = -F(a)$$

$$^{*}\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\Phi(x) = F(x) - F(a)$$

$$x = b$$

$$\Phi(b) = F(b) - F(a)$$

Parcijalna integracija - Određeni integral

Neka su f i g neprekinute i diferencijabilne na $[a, b]$.

Vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \left(f(x)\,g(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Dokaz}}$

$$\left[f(x)\,g(x) - \int_a^x f'(x)\,g(x)\,dx\right]' = \cancel{f'(x)\,g(x)} + f(x)\,g'(x) - \cancel{f'(x)\,g(x)}$$

$$= f(x)\,g'(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)\,g(b) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx - f(a)\,g(a)$$

$$+ \underbrace{\int_a^a f'(x)\,g(x)\,dx}_{=0}$$

Supstitucija - Određeni integral

Neka je f neprekinuta na $[a, b]$ i neprekidno diferencijabilna i injektivna na $[a, b]$ i $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$.

Tada vrijedi

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,du$$

Dokaz

F primitivna funkcija od $f \Rightarrow F' = f$

$$\frac{d}{du} F(\varphi(u)) = F'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\, du = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\, du$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\, du = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\text{(\#)} \quad \int_a^b f(x)\, dx = \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(u) & \alpha = \varphi^{-1}(\alpha) \\ dx = \varphi'(u)\, du & \beta = \varphi^{-1}(\beta) \end{array} \right|$$

Integrali racionalnih funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad \text{- POLINOMI}$$

$$st\, P_n = n$$

$$st\, Q_m = m$$

$n < m$ PRAVA RACIONALNA FUNKCIJA

$n \geq m$ NEPRAVA RACIONALNA FUNKCIJA

$$n \geq m \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{O(x)}{Q_m(x)}$$

$st\, O < m$

$st\, R_{(n-m)} = (n-m)$

Stavak 1

Neka je Q_m realni polinom stupnja m.
Tada postoji rastav na jednoznačno određene faktore (linearne ili kvadratne):

$$Q_m(x) = a_m \cdot \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j + q_j)^{\beta_j}$$

$$p_j^2 - 4 q_j < 0 \quad \forall j = 1, (\ldots), s$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2 \cdot \sum_{j=1}^{s} \beta_j = m$$

Stavak 2

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$Q_m(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j} \quad ; \quad p_j^2 - 4q_j < 0$$

$$f(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x - x_1} + (\dots) + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + (\dots) + \frac{A_1^{(r)}}{x - x_r} + (\dots) + \frac{A_{\alpha_r}^{(r)}}{(x - x_r)^{\alpha_r}}$$

$$+ \frac{B_1^{(1)} x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + (\dots) + \frac{B_{\beta_1}^{(1)} x + C_{\beta_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + (\dots) + \frac{B_1^{(s)} x + C_1^{(s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)}$$

$$+ \frac{B_{\beta_s}^{(s)} x + C_{\beta_s}^{(s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}}$$

U pojedinim rastavljanjima mogu se dobiti sljedeći oblici:

1) $\int \frac{1}{x - x_0}\, dx = \ln|x - x_0| + C$

2) $\int \frac{1}{(x - x_0)^m}\, dx = \left| \begin{matrix} t = x - x_0 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^m} = \frac{1}{(-m+1)(x - x_0)^{m-1}} + C$

3) $\int \frac{1}{x^2 + px + q}\, dx = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{a^2}} = \left| \begin{matrix} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{a}\right) + C$

(#) $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{x^2 + px + q}\, dx + \int \frac{B}{x^2 + px + q}\, dx$

$t^2 + a^2 \qquad t = x + \frac{p}{2} \qquad x = t - \frac{p}{2}$

$$4)\ \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = x+\frac{p}{2} & x = t-\frac{p}{2} \\ dt = dx & \end{array} \right| = \frac{A}{2}\underbrace{\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}}_{*} + \underbrace{\int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(t^2+a^2)^n}\,dt}_{+}$$

$$* = \frac{A}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{l} u = t^2+a^2 \\ du = 2t\,dt \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{A}{2}\cdot \frac{1}{(-n+1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C$$

$$+\ \ I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{1}{a^2}\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}}_{I_{(n-1)}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{(n-1)} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^n} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot I_{(n-1)}$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right) + C$$

Integrali iracionalnih funkcija

$$1)\ \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_m(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

POLINOM

$st\, Q_m = (n-1)$

$a < 0$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \frac{1}{2k}\arcsin\frac{t}{k}$$

$a > 0$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

$$2)\ \int R\left[x, \sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}}, \sqrt[q_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}}, \ldots\right] dx$$

$q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots \in \mathbb{Z}$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \qquad n = NZV(q_1, q_2, \ldots)$$

Integrali trigonometrijskih funkcija

$$\int R(\sin X, \cos X)\, dX$$

Universalna trigonometrijska supstitucija:

$t = tg\left(\frac{X}{2}\right) \qquad X = 2 \operatorname{arctg} t$

$$dX = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$\sin X = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos X = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ako vrijedi $R(-\sin X, -\cos X) = R(\sin x, \cos X)$

$t = tg\, X \qquad x = \operatorname{arctg} t$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin X = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos X = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ako vrijedi $R(-\sin X, \cos X) = -R(\sin X, \cos X)$

$t = \cos X$

Ako vrijedi $R(\sin X, -\cos X) = -R(\sin X, \cos x)$

$t = \sin X$

Trikovi

- Provjeriti je li brojnik derivacija nazivnika

→ ako je: supstitucija = nazivnik (rješenje: $\ln|t| + C$)

\# $\int \sin^n X\, dX$, $\int \cos^n X\, dX$ $\qquad t = \cos X$

$\Downarrow$ $\qquad d(-\cos X) \qquad dt = (-\sin X)$

$n \% 2 = 1$

$$\int \sin^{2k+1} dX = \int \underbrace{\sin^{2k} X}_{(1-\cos^2 X)^k} \cdot \sin X\, dX = -\int (1-t^2)^k\, dt$$

$$I_n = \int \sin^n X\, dX = \frac{n-1}{n} I_{(n-2)} - \frac{1}{n} \sin^{(n-1)} X \cos X$$

- Ako imamo određeni integral racionalne funkcije na intervalu $[-a, a]$ i podintegralna funkcija je neparna, rješenje integrala je 0

Integrali hiperbolnih funkcija

$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$

Supstitucije :

| L |

$\operatorname{th} \frac{x}{2} = t \qquad x = 2 \operatorname{ar\,th} x$

$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}$

$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$t = e^x$

$x = \ln t$

$dx = \frac{dt}{t}$

Još neke supstitucije

$\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2})\, dx$

$x = k \sin t$

$\int R(x, \sqrt{k^2 + x^2})\, dx$

$x = k \operatorname{sh} t$

Nepravi integrali prve vrste

Definicija

Neka je funkcija $f : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na $\forall [a, B]$, $B < \infty$.

Ako postoji konačan limes $\lim\limits_{B \to \infty} \int_a^B f(x)\, dx$

onda se taj integral zove nepravi integral funkcije f na skupu $[a, +\infty\rangle$,

$\int_a^\infty f(x)\, dx$ - integral konvergira

Ako je taj limes jednak $\pm\infty$, kažemo da integral divergira u $\pm\infty$. Ako limes ne postoji, integral divergira.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to(-\infty)} \int_A^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to(-\infty)\\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx$$

Teorem

Ako je $|f(x)| \leq F(x)$ za $x\in[a,+\infty\rangle$ i vrijedi da integral $\int_a^\infty F(x)\,dx$ konvergira $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergira

Nepravi integral druge vrste

Teorem

Neka je $f:[a,c\rangle \cup \langle c,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[a,c-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ i $[c+\delta,b]$, $d>0$ i $f(x)$ nije omeđena u bilo kojem okolišu od c.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

ako oba limesa postoje kažemo da I konvergira, inače divergira.

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$ točka prekida je rub intervala

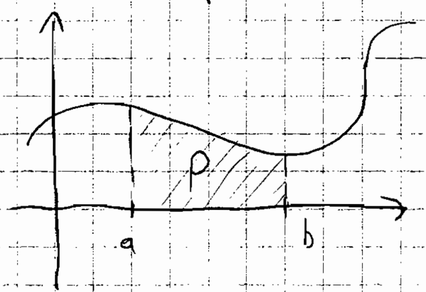
Teorem - nepravi integral II. vrste; $c\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

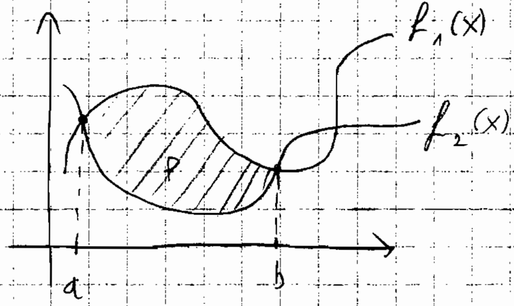
$$g(x),\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \int_a^b g(x)\,dx$$

Primjena integrala

Površina ispod krivulje



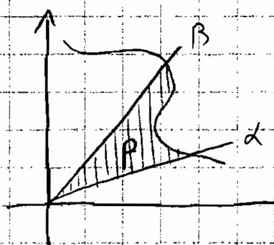
$$P = \int_a^b f(x)\, dx$$



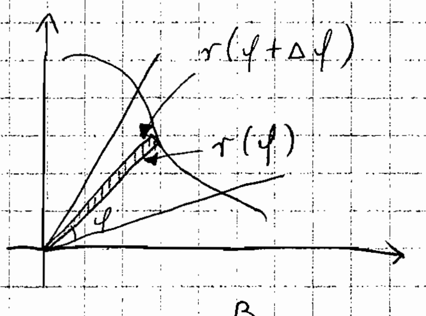
$$f_1(x) \leq f_2(x)$$

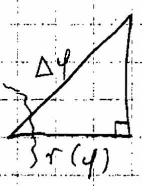
$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx$$

Polarni koordinatni sustav



- granice integracije su kutevi



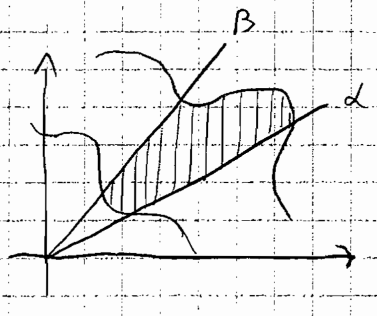


$$P = \frac{1}{2} \cdot v \cdot B$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot r(\varphi) + r(\varphi+\Delta\varphi) \cdot \sin \Delta\varphi$$

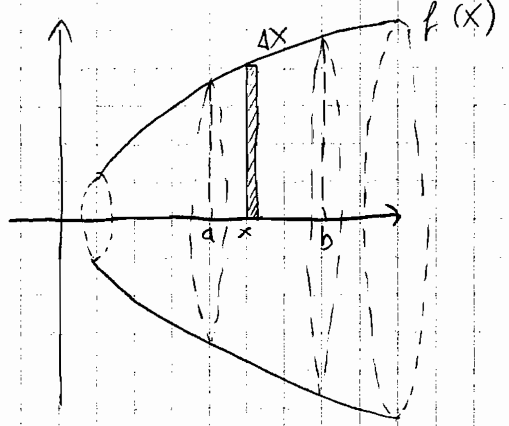
$$\sim \Delta\varphi$$

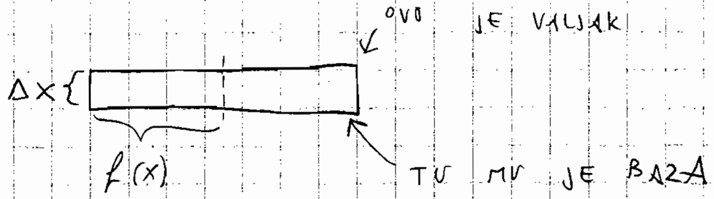
$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi) \cdot r(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi$$



$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_2^2(\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_1^2(\varphi)\, d\varphi$$

Izračunavanje volumena - rotacija oko x-osi



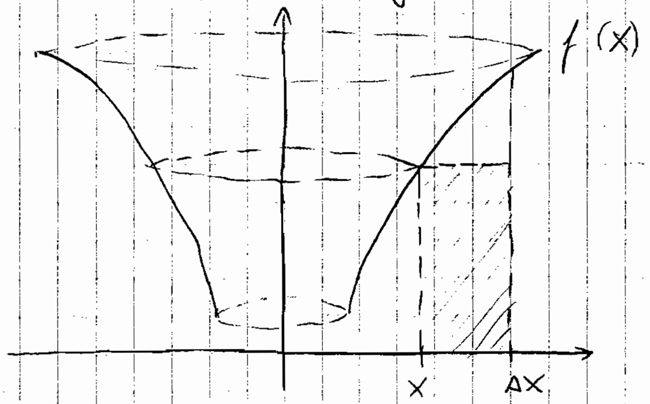


$$V_v = B \cdot h = \pi \cdot f^2(x) \cdot \Delta x$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$$

Rotacija oko y-osi



$$V_{šv} = V_{vv} - V_{mv} = \left(\pi (x+\Delta x)^2 \cdot f(x)\right) - \left(\pi x^2 f(x)\right)$$

$$= f(x)\pi\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\right)$$

$$\approx \pi f(x)\, 2x \Delta x$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b f(x)\,dx}$$

* BINOMNI INTEGRALI

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p\,dx \qquad m, n, p \in \mathbb{Q};\ a, b \neq 0$$

1) $p \in \mathbb{Z} \to x = t^k$ k = zajednički nazivnik brojeva m i n

2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \to a + bx^n = t^k$ k = nazivnik od p

3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \to ax^{-n} + b = t^k$ k = nazivnik od p