6. DOMAĆA ZADAĆA IZ MATEMATIKE 1

1. Mali Ivica
2. Mali Ivica
3. Mali Ivica
4. Mali Ivica
5. Mali Ivica

6.

$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{(n+a)^4}{(n+3)^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+6n^3+9n^2-n^4-4n^3a-6n^2a^2-4na^3-a^4}{n^2+6n+9}\right)=$
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3(6-4a)+n^2\left(9-6a^2\right)a-4na^3-a^4}{n^2+6n+9}\right)$

Ovdje provjerimo uvjete. Ako je $6-4a\neq 0$, to jest, ako je $a\neq\frac{3}{2}$, onda nam je limes ovakav:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3(6-4a)}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6-4a}{\frac{1}{n}}=\infty$$

Ako je $a=\frac{3}{2}$, onda nam je limes ovakav:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{9}{2}n^2}{n^2}\right)=-\frac{9}{2}$$

7. Mali Ivica
8. Mali Ivica
9. Mali Ivica
10. Mali Ivica (11. zadatak)
11. Mali Ivica (15. zadatak)
12. Mali Ivica (16. zadatak)
13. Mali Ivica (17. zadatak)

14. Mali Ivica (12. zadatak)
15. Mali Ivica (14. zadatak)

16.

$a_1 = 2$
$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$

Iz ovoga gore možemo dobiti nekoliko prvih članova niza:

$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{5}{4}, \ldots$

Pretpostavljamo da je niz monoton i padajući i da je omeđen odozdol sa 1. Dokažimo pretpostavku indukcijom:

1. $a_1 > a_2 \leftrightarrow 2 > \frac{3}{2}$

2. $a_{n-1} > a_n$ - pretpostavka

3. dokaz za $n + 1$ član

$$a_{n-1} > a_n$$

$$a_{n-1} + 1 > a_n + 1$$

$$\frac{a_{n-1} + 1}{2} > \frac{a_n + 1}{2}$$

$$a_n > a_{n+1}$$

I sad izračunamo limes:

$$L = \frac{L + 1}{2} \leftrightarrow 2L = L + 1 \leftrightarrow L = 1$$

17. Mali Ivica (19. zadatak)

18.

$$a_n = \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}}}$$

gdje opći član ima n korijena

Kako je $a_1 = \sqrt[3]{9}$, a $a_2 = \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9}}$, vrijedi nam rekurzivna formula:

$a_{n+1} = \sqrt[3]{9 \cdot a_n}$

Niz je monoton i rastući, i omeđen je odozgor sa 3. Dokažimo pretpostavku indukcijom:

1. $a_1 < a_2 \leftrightarrow \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9}}$

2. $a_{n-1} < a_n$ - pretpostavka

3. dokaz za $n + 1$ član

$$a_n < a_{n+1}$$

$$\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}}} < \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}}}}$$

Izraz s lijeve strane ima n korijena, a s desne strane $n + 1$ korijena. Sve to lijepo kubiramo pa imamo:

$$9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}} < 9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}}}$$

$$\sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}} < \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{9}}}$$

Izraz s lijeve strane ima $n-1$ korijena, a s desne strane n korijena, odnosno

$$a_{n-1} < a_n$$

pa nam vrijedi i

$$a_n < a_{n+1}$$

Izračunajmo limes:

$$L = \sqrt[3]{9L} \leftrightarrow L^3 = 9L \leftrightarrow L^3 - 9L = 0 \leftrightarrow L(L^2 - 9) = 0$$

$L = 0$ nam otpada, pa nam ostaje samo $L = \pm 3$, pa nam $L = -3$ otpada i ostaje samo $L = 3$.

19. Mali Ivica (20. zadatak)

20. Uzmete neku vrijednost iz ovog intervala, npr. 0.5 pa skužite da je niz rastući i omeđen odozgor sa nekom brojkom (ne znam izračunajte na digitronu).

Indukcijom dokažete da vrijedi $a_n < a_{n+1}$, i onda samo uvrstite umjesto općih članova L, da dobijete limes:

$L = 2L - L^2 \leftrightarrow L^2 - L = 0 \leftrightarrow L(L-1) = 0 \leftrightarrow L = 1$