8. DOMAĆA ZADAĆA IZ MATEMATIKE 1

1. Izračunaj derivaciju funkcija

1) $f(x) = \mathrm{tg}^3 \dfrac{\pi x}{3}$; **2)** $f(x) = \ln^2(\sin(5x))$;

3) $f(x) = x \cdot \cos^2(5x)$; **4)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

A) $f(x) = tg^3 \frac{\pi x}{3}$

$$f'(x) = 3tg^2 \frac{\pi x}{3} \cdot \frac{1}{cos^2 \frac{\pi x}{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi tg^2 \frac{\pi x}{3}}{cos^2 \frac{\pi x}{3}}$$

B) $f(x) = ln^2(\sin(5x))$

$$f'(x) = 2ln(\sin(5x)) \cdot \frac{1}{sin(5x)} \cdot cos(5x) \cdot 5 = 10ln(\sin(5x))ctg(5x)$$

C) $f(x) = xcos^2(5\mathrm{x})$

$$f'(x) = cos^2(5\mathrm{x}) + x \cdot 2cos(5x) \cdot \big(-sin(5x)\big) \cdot 5 = cos^2(5\mathrm{x}) - 5xsin(10x)$$

D) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

2. Nađi $f''(1)$ ako je $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(x^2+1)^2}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{x^4+2x^2+2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^4+2x^2+2) + 2x(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+2)^2}$$

$$f''(1) = \frac{-2(1+2+2) + 2(4+4)}{(1+2+2)^2} = \frac{-10+16}{25} = \frac{6}{25}$$

3. Pokaži da za funkciju $y = xe^{-x}$ vrijedi $xy' = (1-x)y$.

$$xy' = (1-x)y$$
$$x\left(e^{-x} + x(-e^{-x})\right) = (1-x)xe^{-x}$$
$$x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$$
$$xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

Pokazasmo.

4. Dokaži da za sve $x \neq 0$ vrijedi $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

$$(ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$$

5. Nađi n-tu derivaciju funkcije **1)** $f(x) = \sin x$; **2)** $f(x) = a^x$.

A) $f(x) = sinx$

$f'(x) = cosx$
$f''(x) = -sinx$
$f'''(x) = -cosx$
$f^{IV}(x) = sinx$

Pa imamo:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} cosx, n = 2k+1 & -cosx, n = 2k+3 \\ -sinx, n = 2k+2 & sinx, n = 2k+4 \end{cases}$$

B) $f(x) = a^x$

$f'(x) = a^x lna$
$f''(x) = a^x ln^2 a$
$f'''(x) = a^x ln^3 a$
$f^{IV}(x) = a^x ln^4 a$ i tako dalje...

Pa imamo:

$$f^{(n)}(x) = a^x ln^n a$$

Ovo zadnje možemo i eventualno dokazati indukcijom ako baš želite.

1. n = 1 → $f'(x) = a^x ln^1 a = a^x lna$

2. pretpostavka $f^{(n)}(x) = a^x ln^n a$

3. za n+1 → $f^{(n+1)}(x) = a^x ln^{n+1} a$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (a^x ln^n a)' = a^x ln^n a \cdot lna = a^x ln^{n+1} a$$

6. Postoji li $f'(0)$ ako je $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$?
(*Naputak:* Koristite definiciju derivacije funkcije.)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-(x+h)^2}} - \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-(0+h)^2}} - \sqrt{1-\sqrt{1-0^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-h^2}} - \sqrt{1-\sqrt{1}}}{h} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$$

Ne postoji, jer je $\frac{0}{0}$ nedefiniran oblik.

7. Postoji li $f'(0)$ za funkciju $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$? A postoji li $g'(0)$ za $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$? (*Naputak:* Koristite definiciju derivacije funkcije.)

Ne znam ovaj 7. majkemi. Trebalo bi kao preko definicije derivacije, ono s limesima, ne znam kak bih to u ovom zadatku, uvijek sam to prezirao.

8. Odredi parametar a tako da funkcija $f(x) = -1 + 4x - x^2$, $x < 1$, $f(x) = ax$, $x \geqslant 1$ bude neprekinuta, a potom ispitati postoji li $f'(1)$, te ako postoji, izračunati tu vrijednost. Odgovori na isto pitanje, ukoliko umjesto funkcije f imamo funkciju g definiranu na sljedeći način: $g(x) = -1 + 4x - x^2$, $x < 1$, $g(x) = ax^2$, $x \geqslant 1$.

1) $f(x) = \begin{cases} -1 + 4x - x^2, & x < 1 \\ ax, & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (-1 + 4x - x^2) = -1 + 4^- - 1^- = 4^- - 2^- = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} ax = a$

$a = 2$

Derivacije moraju biti iste da bi postojala derivacija:

$f'(x) = 4 - 2x$, pa je $f'(1) = 4 - 2 = 2$

$f'(x) = a$, pa je $f'(1) = 2$

Derivacije su iste pa postoji prva derivacija u 1.

2) $g(x) = \begin{cases} -1 + 4x - x^2, & x < 1 \\ ax^2, & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (-1 + 4x - x^2) = -1 + 4^- - 1^- = 4^- - 2^- = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} ax^2 = a$

$a = 2$

Derivacije moraju biti iste da bi postojala derivacija:

$f'(x) = 4 - 2x$, pa je $f'(1) = 4 - 2 = 2$

$f'(x) = 2ax$, pa je $f'(1) = 4$

Derivacije nisu iste pa ne postoji prva derivacija u 1.

9. Odredi jednadžbu tangente povučene na graf funkcije $y = x \cdot \sqrt[3]{x-1}$ u točki:
a) s apscisom $x = 0$, b) s apscisom $x = \frac{3}{4}$, c) s apscisom $x = 1$.

Jednadžba tangente u nekoj točki $T(x_0, y_0)$ je:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Prva derivacija naše funkcije u x_0 je:

$$f'(x_0) = \sqrt[3]{x-1} + x \cdot \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

A) $x_0 = 0$

$y_0 = x_0\sqrt[3]{x_0 - 1} = 0$

Pa je naša točka $T(0,0)$

Prva dericija je:
$f'(0) = \sqrt[3]{0-1} + \frac{0}{3\sqrt[3]{(0-1)^2}} = -1$

Jednadžba tangente je:

$y - 0 = -1(x - 0)$

$t \ldots y = -x$

B) $x_0 = \frac{3}{4}$

$y_0 = x_0\sqrt[3]{x_0 - 1} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4} - 1} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

Pa je naša točka $T\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right)$

Prva derivacija je:

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\frac{3}{4}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0$$

Jednadžba tangente je:

$$y + \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} = 0\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$t \dots y = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

C) $x_0 = 1$

$$y_0 = x_0\sqrt[3]{x_0 - 1} = 0$$

Pa je naša točka $T(1,0)$

Prva derivacija je:

$$f'(1) = \sqrt[3]{1-1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-1)^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ova tangenta mora biti okomica na x-os, a kako prolazi kroz $x = 1$, onda je tangenta

$$t \dots x = 1$$

10. Nađi amplitudu A i kutnu brzinu ω tako da sinusoida $y = A \cdot \sin(\omega x)$ ima tangentu u ishodištu koeficijenta smjera $k = 1$, a period $T = 4\pi$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$T(0,0)$ - ishodište

$k = f'(x_0) = A\omega cos(\omega x_0) = \frac{A}{2} cos\frac{x_0}{2} = 1$

$\frac{A}{2} cos\frac{x_0}{2} = 1 \leftrightarrow \frac{A}{2} cos\frac{0}{2} = 1 \leftrightarrow \frac{A}{2} = 1 \leftrightarrow A = 2$

$$y = 2sin\frac{x}{2}$$

11. Nađi $\lambda \in \mathbf{R}$ tako da je pravac $y = x$ tangenta na graf funkcije $y = \lambda e^x$ u nekoj točki, te nađi $\lambda \in \mathbf{R}$ tako da je pravac $y = x$ okomit na graf funkcije $y = \lambda e^x$ u nekoj točki. U oba slučaja nađi x koordinatu te točke.

1)
funkcija: $y = \lambda e^x$
tangenta: $y = x$

Imaju zajedničku točku --> $\lambda e^x = x \leftrightarrow \lambda = xe^{-x}$ (*)

Također vrijedi da je $(\lambda e^x)' = 1 \leftrightarrow \lambda e^x = 1 \leftrightarrow \lambda = e^{-x}$ (**)

Ubacimo (**) u (*):

$$e^{-x} = xe^{-x} \leftrightarrow x = 1$$

Za taj x nam je $\lambda = xe^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

2)
funkcija: $y = \lambda e^x$
normala: $y = x$

Imaju zajedničku točku --> $\lambda e^x = x \leftrightarrow \lambda = xe^{-x}$ (*)

Također vrijedi da je $-\frac{1}{(\lambda e^x)'} = 1 \leftrightarrow -\frac{1}{\lambda e^x} = 1 \leftrightarrow \lambda = -e^{-x}$ (**)

Ubacimo (**) u (*):

$$-e^{-x} = xe^{-x} \leftrightarrow x = -1$$

Za taj x nam je $\lambda = -xe^{-x} = -e^1 = -e$

12. Za koju vrijednost parametra a graf funkcije $f_1(x) = \ln x$ dira graf funkcije $f_2(x) = ax^2$.

Ako se diraju, znači da im je jedna točka zajednička. Također imaju zajedničku u toj točki.

$$lnx = ax^2 \leftrightarrow a = \frac{lnx_0}{x_0^2}$$

$$\frac{1}{x_0} = 2ax_0 \leftrightarrow a = \frac{1}{2x_0^2}$$

Izjednačimo:

$$\frac{lnx_0}{x_0^2} = \frac{1}{2x_0^2}$$

$$lnx_0 = \frac{1}{2} \leftrightarrow x_0 = \sqrt{e}$$

Pa je parameter jednak:

$$a = \frac{1}{2e}$$

13. Odredi jednadžbe obiju tangenata povučenih iz točke $M(-2,-3)$ na parabolu $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

Vrijedi:

$$y+3=f'(x_0)(x+2)$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}$$

Iz toga dobijemo:

$$y+3=\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

Točka $T(x_0,y_0)$ leži i na paraboli in a tangenti:

(*) $y_0+3=\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}\right)(x_0+2)$

(**) $y_0=\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{4}$

Ubacimo (**) u (*) pa dobijemo:

$$\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{4}+3=\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}\right)(x_0+2)$$

$$\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{2}x_0+\frac{9}{4}=\frac{1}{2}x_0^2+x_0+\frac{1}{2}x_0+1$$

$$\frac{1}{2}x_0^2+x_0-\frac{5}{4}=0$$

$$x_0^2+4x_0-5=0$$

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm 3$$

$$x_1=-5\leftrightarrow y_1=3$$

$$x_2=1\leftrightarrow y_1=0$$

Pa su nam tangente:

$$t_1 \ldots y+3=\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$t_1 \ldots y+3=-\frac{5}{2}x-5+\frac{1}{2}x+1$$

$$t_1 \ldots y=-2x-7$$

$$t_1 \ldots y+3=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$t_1 \ldots y+3=x+2$$

$$t_1 \ldots y=x-1$$

14. Odredi točku na paraboli $y=x^2+x-2$ najbližu pravcu $y=5x-10$.

Točka na toj paraboli bit će točka tangente na parabolu koja ima isti koeficijent smjera kao i pravac, to jest 5.

$$f'(x_0)=2x_0+1=5$$

Iz toga slijedi da je $x_0=2$, pa je $y_0=4$. To jest, ta točka je $T(2,4)$.

15. Odredi točku na hiperboli $y=\sqrt{x^2+1}$ najbližu točki $T\,(3,0)$.

Ta točka na hiperboli i točka *T* zadovoljavat će jednadžbu pravca kroz dvije točke, odnosno:

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ je koeficijent smjera tog pravca. Ovdje će za najbližu udaljenost taj pravac biti normala na hiperbolu, odnosno taj koeficijent je jednak $-\frac{1}{f\prime(x_0)}=-\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{{x_0}^2+1}}\cdot 2x_0}=-\frac{\sqrt{{x_0}^2+1}}{x_0}$.

Kad to uvrstimo u prvu jednadžbu dobijemo:

$$y-y_0==-\frac{\sqrt{{x_0}^2+1}}{x_0}(x-x_0)$$

x i y ćemo uzeti iz točke *T*.

$$0-y_0==-\frac{\sqrt{{x_0}^2+1}}{x_0}(3-x_0)$$

$$y_0=\frac{\sqrt{{x_0}^2+1}}{x_0}(3-x_0)$$

$$y_0=\frac{3\sqrt{{x_0}^2+1}}{x_0}-\sqrt{{x_0}^2+1}$$

Odnosno, možemo pisati samo:

$$y=\frac{3\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x^2+1}$$

Tu jednadžbu uvrstimo u jednadžbu hiperbole i dobit ćemo točku koju tražimo:

$$\frac{3\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{3\sqrt{x^2+1}}{x} = 2\sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{3}{x} = 2 \leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{9}{4}+1} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Točka je $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

16. Odredi y' i y'' u točki $T(1,-1)$ za funkciju $y = y(x)$ zadanu implicitno s

$$xy^2 + e^{x+y} = 2.$$

Prva derivacija:

$$y^2 + 2xyy' + e^x e^y + e^x e^y y' = 0$$

$$y'(2xy + e^x e^y) = -y^2 - e^x e^y$$

$$y' = -\frac{y^2 + e^x e^y}{2xy + e^x e^y}$$

$$y' = -\frac{1 + e^1 e^{-1}}{-2 + e^1 e^{-1}} = -\frac{2}{-2+1} = 2$$

Druga derivacija:

$$y'' = -\frac{(2yy' + e^x e^y + e^x e^y y')(2xy + e^x e^y) - (y^2 + e^x e^y)(2y + 2xy' + e^x e^y + e^x e^y y')}{(2xy + e^x e^y)^2}$$

$$y'' = -\frac{(-4+1+2)(-2+1) - (1+1)(-2+4+1+2)}{(-2+1)^2} = \frac{1-10}{1} = -9$$

17. Odredi jednadžbu tangente i normale u točki $T(1,1)$ na krivulju $y = y(x)$ zadanu implicitno s

$$y^x + \sin(x-1) = \sqrt{y}.$$

Napišimo funkciju u malo ljepšem obliku, pogodnijem za derviranje:

$$e^{xlny} + sin(x-1) = \sqrt{y}$$

Pa kad deriviramo:

$$e^{xlny} \cdot \left(lny + x\frac{1}{y}y'\right) + cos(x-1) = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$$

$$e^{xlny}lny + \frac{xy'e^{xlny}}{y} + cos(x-1) = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$$

$$y' = \frac{e^{xlny}lny + cos(x-1)}{\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{xe^{xlny}}{y}}$$

$$y' = \frac{e^0 \cdot 0 + cos(0)}{\frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{e^0}{1}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

18. Odredi y', y'' i y''' za funkciju y zadanu parametarskim jednadžbama:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

1)

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{sint}{1 - cost}$$

2)

$$y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{(1 - cost)cost - sintsint}{(1 - cost)^3} = \frac{1 - cos^2t - sin^2t}{(1 - cost)^3} = 0$$

3)

$$y''' = \frac{\dot{x}^4\dddot{y} - \dot{x}^3\dddot{x}\dot{y} - 3\dot{x}^3\ddot{x}\ddot{y} + 3\dot{x}^2\ddot{x}^2\dot{y}}{\dot{x}^7} =$$

$$= \frac{(1 - cost)^4(-sint) - (1 - cost)^3 costcost - 3(1 - cost)^3 sintcost + 3(1 - cost)^2 sin^2tsint}{(1 - cost)^7} =$$

$$= \frac{(1 - cost)^4(-sint) - (1 - cost)^3 cos^2t - 3(1 - cost)^3 sintcost + 3(1 - cost)^2 sin^2tsint}{(1 - cost)^7} =$$

$$= \frac{(-sint)}{(1 - cost)^3} - \frac{cos^2t}{(1 - cost)^4} - \frac{3sintcost}{(1 - cost)^4} + \frac{3sin^3t}{(1 - cost)^5}$$

ovo zadnje ne znam dal sam dobro derivirao, ima toga šest milijona deriviranja.

19. Odredi jednadžbu tangente i normale na krivulju zadanu parametarski

$$\begin{cases} x = \sin^2 t - \cos t \\ y = \ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}) \end{cases}$$

u točki kojoj odgovara parametar $t = \frac{\pi}{2}$.

Točka kojoj odgovara zadani parametar je:

$$x_0 = sin^2 t - cost = sin^2 \frac{\pi}{2} - cos\frac{\pi}{2} = 1$$

$$y_0 = ln\left(tg\frac{t}{2}\right) = ln\left(tg\frac{\pi}{4}\right) = ln1 = 0$$

Koeficijent smjera tangente je:

$$k_t = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{1}{tg\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(tg\frac{t}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}}{2sintcost + sint} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

Koeficijent smjera normale jest:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -4$$

Jednadžbe tangente odnosno normale su:

$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$t \ldots y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y - y_0 = k_n(x - x_0)$$

$$y - 0 = -4(x - 1)$$

$$n \ldots y = -4x + 4$$

20. Odredi kut pod kojim se sijeku krivulje $y = e^{2x}$ i $y = e^{-3x}$.

$$k_1 = (e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$k_2 = (e^{-3x})' = -3e^{-3x}$$

Sjecište krivulja:

$$e^{2x} = e^{-3x} \leftrightarrow 2x = -3x \leftrightarrow 5x = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$k_1 = 2e^0 = 2$$

$$k_2 = -3e^0 = -3$$

Vrijedi:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{-3 - 2}{1 - 6}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$$