Dodatni zadatci za vježbu - 1. knjižica

1. Napišite tablicu istinitosti za sljedeće formule algebre sudova:

    (a) $(x \Rightarrow y) \vee \neg y$

    (b) $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$

2. Maksimalno pojednostavnite formulu algebre sudova $\neg(\neg A \wedge (B \vee \neg C))$.

3. Zadan je sud "Postoji naseljeni otok u državi Liliput čiji svi stanovnici govore engleski i francuski". Koji je od sljedećih sudova negacija zadanog suda:

    (a) Na svakom naseljenom otoku države Liliput svaki stanovnik ne govori engleski ili ne govori francuski (ili oboje).

    (b) Na svakom naseljenom otoku države Liliput postoji stanovnik koji ne govori engleski ili ne govori francuski (ili oboje).

    (c) Postoji naseljeni otok države Liliput na kojem postoji stanovnik koji ne govori engleski ili ne govori francuski (ili oboje).

    (d) Na svakom naseljenom otoku države Liliput postoji stanovnik koji ne govori ni engleski ni francuski.

    (e) Postoji naseljeni otok države Liliput na kojem postoji stanovnik koji ne govori ni engleski ni govori francuski.

4. Zadani su sljedeći sudovi

    $A \equiv (\forall x \in \mathbf{R}^+)(\exists y \in \mathbf{R}^+)(y \geq x^2 \wedge y \leq x^3)$

    $B \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x^2 = 2xy \Rightarrow x = 2y)$

    $C \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$

    $D \equiv (\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$.

    Negirajte svaki od danih sudova i zapišite ga ne koristeći znak negacije. Koji je od sudova istinit: A ili $\neg A$, B ili $\neg B$, C ili $\neg C$, D ili $\neg D$?

5. Neka je A skup od m elemenata, a n skup od n elemenata, $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$.

    (a) Postoji li injekcija iz A u B ?

    (b) Postoji li injekcija iz B u A ?

    (c) Postoji li surjekcija iz A u B ?

    (d) Postoji li surjekcija iz B u A ?

Obrazložite odgovore !

6. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \to (-\infty, 2010]$, $f(x) = 2010 - |x|$.
   (a) Je li to surjekcija ?
   (b) Je li to injekcija ?
7. Matematičkom indukcijom dokažite da je
   (a) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
   (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
   (c) $5^n + 2^{n-1}$ djeljivo s 3, $\forall n \in \mathbf{N}$.
   (d) $3^n \cdot (n!)^2 < (2n)!$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 5$.
8. Skicirajte u Gaussovoj ravnini krivulje zadane uvjetom:
   (a) $|z - 1 + i| = 2$
   (b) $|z + 1| + |z - 1| = 3$
   (c) $arg(z^6) = \frac{3\pi}{2}$
9. Nađite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:
$$|z| = 1$$
$$|z - i| = 1$$
10. Riješite jednadžbu u skupu $\mathbf{C}$:
   (a) $z^4 = (1 - \sqrt{3}i)^8$
   (b) $z^6 = (1 - \sqrt{3}i)^5 \cdot (\sqrt{3} + i)^{13}$
   (c) $z^3 = \frac{(1-i)^9}{(-\sqrt{3}+i)^6}$
   (d) $z^5 = \overline{z}$
   (e) $z^5 \cdot (1 + i) = \overline{z}$
   (f) $z^8 + 3z^4 + 2 = 0$
   (g) $z^3 + z^{-3} = i$
   (h) $z^8 + z^6 + 2z^4 + z^2 + 1 = 0$
11. Nađite sve $z \in \mathbf{C}$ koji zadovoljavaju jednadžbu
$$\left(z + \frac{3}{4}i\right)^3 = i$$
i ispitaj je li za neko od tih rješenja z vrijedi $Imz > 0$.
12. Nađi sve $z \in \mathbf{C}$ za koje vrijedi $arg(z^3) = \frac{3\pi}{2}$ i $|z - 2| = 1$.

Rješenja dodatnih zadataka za vježbu - 1. knjižica

1. Obje formule su tautologije.

2. $\neg(\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \equiv A \vee \neg(B \vee \neg C)) \equiv A \vee (\neg B \wedge C)$.

3. Sud b).

4. $\neg A \equiv (\exists x \in \mathbf{R}^+)(\forall y \in \mathbf{R}^+)(y < x^2 \vee y > x^3)$
   $\neg B \equiv (\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x^2 = 2xy \wedge x \neq 2y)$
   $\neg C \equiv (\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x < y \wedge x^2 \geq y^2)$
   $\neg D \equiv (\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x^2 = y^2 \wedge x \neq y)$.
   Istiniti su sudovi $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ i $\neg D$.

5. (a) Ne.
   (b) Da.
   (c) Da.
   (d) Ne.

6. (a) Da.
   (b) Ne.

7. (a) Tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
   Pretpostavimo sada da je $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ za neki $n \in \mathbf{N}$. Tada je, po toj pretpostavci, $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$.
   (b)
   (c) Za $n = 1$ je $5 + 1 = 6 = 2 \cdot 3$.
   Pretpostavimo sada da je $5^n + 2^{n-1}$ djeljivo s 3 za neki $n \in \mathbf{N}$. Tada je $5^{n+1} + 2^n = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot (5^n + 2^{n-1})$, što je, po pretpostavci djeljivo s 3.
   (d) Tvrdnja vrijedi za $n = 5$.
   Pretpostavimo sada da je $3^n \cdot (n!)^2 < (2n)!$ za neki $n \in \mathbf{N}, n \geq 5$. Tada je, po toj pretpostavci, $3^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2 = 3 \cdot 3^n \cdot (n+1)^2 \cdot (n!)^2 < 3(n+1)^2 \cdot (2n)!$.
   Pokažemo li da je $3(n+1)^2 \cdot (2n)! \leq (2n+2)!$, tvrdnja će biti dokazana. Ta je nejednakost ekvivalentna s $3(n+1)^2 \leq (2n+2)(2n+1)$, odnosno s $3n^2 + 6n + 3 \leq 4n^2 + 6n + 2$, tj. s $n^2 \geq 1$, što je ispunjeno za svaki $n \in \mathbf{N}$.

8. (a) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; to je kružnica sa središtem u točki $(1,-1)$ i polumjerom 2.

   (b) Stavimo li $z=x+yi$, dobivamo jednadžbu
   $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=3$
   koja, nakon sređivanja, prelazi u $\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{5}=1$; radi se o elipsi.
   Primjedba: Prisjetite se definicije elipse i zadatak ćete riješiti brže.

   (c) $argz=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$, $k=0,1,2,3,4,5$; radi se o šest polupravaca (koji, u ovom slučaju, tvore tri pravca); oprez - $argz=\phi$, za dani ϕ jest polupravac, a ne pravac.

9. Iz sustava jednadžbi $x^2+y^2=1$ i $x^2+(y-1)^2=1$, lagano dobivamo $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $y=\frac{1}{2}$, pa su rješenja $z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,
   Savjet: Geometrijski interpretirajte uvjete zadatka.

10. (a) $z_{1,2,3,4}=4\text{cis}(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2})$, $k=0,1,2,3$.
   Napomena: cisϕ označava $\cos\phi+i\sin\phi$.
   Oprez: Pogrešno bi bilo kratiti potencije; kompleksni korijen je višeznačan; jednadžba $z^n=w$, gdje je w zadani kompleksan broj ima n rješenja.
   Savjet: Skicirajte rješenja u Gaussovoj ravnini i geometrijski ih interpretirajte.

   (b) $z_{1,2,3,4,5,6}=8\text{cis}(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3})$, $k=0,1,2,3,4,5$.
   Savjet: Skicirajte rješenja u Gaussovoj ravnini i geometrijski ih interpretirajte.

   (c) Zadatak je sličan prethodnima.

   (d) Vrijedi $arg(z^5)=arg(\overline{z})+2k\pi$ i $|z^5|=|\overline{z}|$.
   Tako imamo $5argz=-argz+2k\pi$, tj. $6argz=2k\pi$, odakle imamo

$$argz=\frac{k\pi}{3},\qquad k=0,1,2,3,4,5.$$

   Iz drugog uvjeta slijedi $|z|=1$ ili $|z|=0$.
   Tako ukupno imamo sedam rješenja:
   $z_{1,2,3,4,5,6}=\text{cis}(\frac{k\pi}{3})$, $k=0,1,2,3,4,5$.
   $z_7=0$.
   Savjet: Napišite prvih šest rješenja bez korištenja funkcija sinus i kosinus.
   Primjedba: Zadatak se može riješiti i na drugi način, tako da se polazna jednadžba najprije pomnoži sa z, čime se dobiva $z^6=|z|^2$. Odatle odmah slijedi $|z|=0$ ili $|z|=1$. Prvi slučaj vodi na rješenje $z=0$, a drugi na $z^6=1$, što daje preostalih šest rješenja.

(e) Zadatak je sličan prethodnome. Na početku imamo $arg(z^5(1+i)) = arg(\overline{z}) + 2k\pi$ i $|z^5 \cdot (1+i)| = |\overline{z}|$.

Tada je $5arg z + arg(1+i) = -arg z + 2k\pi$ i $|z|^5 \cdot |1+i| = |z|$, itd.

(f) $z^8 + 3z^4 + 2 = (z^4+1)(z^4+2) = 0$.Rješenja su četvrti korijeni iz -1 i četvrti korijeni iz -2.

Primjedba: Kako se radi o algebarskoj jednadžbi osmog stupnja, odmah znamo da ona ima osam kompleksnih rješenja brojeći njihovu kratnost (u ovom slučaju, sva su rješenja kratnosti 1).

(g) Zadatak je sličan prethodnome. Iz $z^3+z^{-3} = i$ dobivamo $z^6 - iz^3 + 1 = 0$; rješavamo najprije kvadratnu jednadžbu u varijabli z^3, a potom vadimo treće korijene $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{cis}\frac{\pi}{2}}$ i $z_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{cis}\frac{3\pi}{2}}$.

Dovršite sami.

(h) $z^8 + z^6 + 2z^4 + z^2 + 1 = z^8 + z^6 + z^4 + z^4 + z^2 + 1 = z^4(z^4 + z^2 + 1) + z^4 + z^2 + 1 = (z^4+1)(z^4+z^2+1) = 0$, itd.

11. $z + \frac{3}{4}i = \sqrt[3]{i}$, itd.

12. $arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Interpretirajte li geometrijski ovaj uvjet (z leži na nekom od tri polupravca, te interpretirate li geometrijski drugi uvjet $|z-2| = 1$ (z leži na kružnici sa središtem u točki $(2, 0)$ i polumjerom 1), odmah se vidi da se rješenje može dobiti jedino eventualno za slučaj $arg z = \frac{11\pi}{6}$. Uvrstavanjem u drugi uvjet lako se dobije rješenje $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.