Ekstremi

6. [**6 bodova**] Odredite točku na paraboli $y = 1 - x^2, x \in \langle 0, 1]$, takvu da je površina trokuta koju tangenta na parabolu u toj točki zatvara s koordinatnim osima minimalna. Dokažite da se radi o minimumu. Koliko iznosi ta površina?

5. [**5 bodova**] Odredite površinu najvećeg pravokutnika čija dva susjedna vrha leže na asimptoti krivulje $y = 1 - e^{-x^2}$, a preostala dva vrha nalaze se na samoj krivulji. Nacrtajte sliku.

Integrali

ZI 2013/14

2. [**5 bodova**] Izračunajte integral

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^{-2}x - \mathrm{tg}^2\, x}}.$$

LJIR 2012/13

9. [**5 bodova**] Izračunajte integral

$$\int e^x \cos^2 x \, dx.$$

ZIR 2012/13.

9. [**5 bodova**] Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{(e^x+1)(e^{2x}+1)} dx.$$

ZI 2014/15

4. (**3 boda**) Ispitajte konvergenciju integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx.$$

LJIR 2014/15

8. (**5 bodova**) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 2\ln x$, $y = \ln(6-x)$ i osi x. Nacrtajte sliku.

ZI 2014/15

3. (**6 bodova**)
(**a**) (1 bod) Nadopunite* tvrdnju sljedećeg teorema:
TEOREM. Neka je f neprekinuta funkcija na segmentu $[a,b]$, te neka je $x \in [a,b]$. Tada je $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ diferencijabilna na (a,b) i vrijedi $\Phi'(x) =$ _____.
(**b**) (2 boda) Dokažite teorem iz (a) dijela zadatka.
(**c**) (2 boda) Ako je $\Phi(x) = \int_1^x \sin(\pi t)\,dt$, odredite $\Phi(1)$ i $\Phi'(\frac{1}{2})$.
(**d**) (1 bod) Odredite primitivnu funkciju F od $f(x) = x^2$, takvu da vrijedi $F(2) = 0$.

Stavak 13. *Neka je f neprekinuta na $I = [a,b]$, te $x \in I$. Onda je $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ diferencijabilna funkcija na I i vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$.*

Dokaz. $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = (x+\Delta x - x)f(\xi) = \Delta x \cdot f(\xi)$, za neki $\xi \in (x, x+\Delta x)$, po *Stavku 8.* Stoga je

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) == \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x),$$

jer iz $\Delta x \to 0$ slijedi $\xi \to mx$, a f je neprekinuta. ■

Primjedba. Ovdje treba razlikovati gornju granicu x integrala od tekuće varijable x, koja se mijenja od dolnje do gornje granice integrala i svejedno je kakko ćemo je označiti,

Matrice

A) OSNOVNA SVOJSTVA I MATRIČNE JEDNADŽBE

MI 2012/2013

3. **[5 bodova]** (a) (2 boda) Gaussovom metodom odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) (3 boda) Riješite matričnu jednadžbu

$$(X + A)^2 = [(X + A)^{-1} \cdot X^{-1}]^{-1} + B$$

pri čemu je matrica A dana u (a) dijelu zadatka, a $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ZI 2015

7. **(6 bodova)**

(a) (2 boda) Dokažite tvrdnju: Za matrice A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times p$ vrijedi

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(b) (2 boda) Koristeći tvrdnju iz (*a*) dijela zadatka, dokažite da za matrice A tipa $m \times n$, B tipa $n \times p$ i C tipa $p \times r$ vrijedi

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T.$$

(c) (2 boda) Neka je S simetrična matrica takva da je umnožak $A^T S A$ definiran. Dokažite da je $A^T S A$ simetrična matrica.

LJIR 2015

9. (**6 bodova**) Zadana je matrica A,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite matricu B za koju vrijedi: $AB = A^T$.

(b) Odredite sve realne svojstvene vrijednosti matrice B te izračunajte pripadne svojstvene vektore.

ZI 2014

6. [**6 bodova**] (a) (2 boda) Napišite definiciju po retcima ekvivalentnih matrica.
Dokažite tvrdnju: ako je kvadratna matrica $\mathbf{A}$ regularna i $\mathbf{B}$ s njom po retcima ekvivalentna, tada je i $\mathbf{B}$ regularna.
(b) (4 boda) Riješite matričnu jednadžbu $(\mathbf{AXB}^{-1})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{B}^2\mathbf{A}^{-1}$ gdje je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ZIR 2013

2. [**4 boda**] Kažemo da je kvadratna matrica ortogonalna ako vrijedi $AA^\top = A^\top A = I$.

(a) (1 bod) Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna, mora li biti regularna? Objasnite svoju tvrdnju.

(b) (3 boda) Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna matrica. Dokažite da je onda i A^{-1} ortogonalna.

DIR 2013

4. [**5 bodova**]

(a) (2 boda) Odredite inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po definiciji provjerite da se zaista radi o inverzu.

(b) (3 boda) Dokažite da je inverz regularne simetrične matrice također simetrična matrica.

B) DETERMINANTE

MI 2006/2007

5. (2 boda) Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

ZI 2015

6. (**4 boda**) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\det(A^2)$.

C) RANG I LINEARNA NEZAVISNOST

DZ 4

5. U zavisnosti o realnom parametru λ odredi rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

ZI 2015

8. (**5 bodova**)

(**a**) (1 bod) Napišite definiciju linearne nezavisnosti vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, gdje je $\mathbf{a}_i \in V^n$, $i = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$.

(**b**) (2 boda) Ispitajte jesu li vektori

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni.

(**c**) (2 boda) Neka su $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ kao u (*b*). Da li se vektor $\mathbf{a}_3$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$? Detaljno obrazložite svoj odgovor. Ukoliko je on potvrdan, prikažite vektor $\mathbf{a}_3$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$.

D) LINEARNI SUSTAVI

ZIR 2013

3. [**6 bodova**] Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \phantom{{}- 3x_4} &= 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ -x_1 - 3x_2 + \lambda x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 4 \end{aligned}$$

ima: (a) jednoznačno rješenje, (b) beskonačno mnogo rješenja, (c) nema rješenja? (4 boda)

U slučaju (b) odredite rješenja te ih prikažite u vektorskom obliku. (2 boda)

E) SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI I VEKTORI

JIR 2015

11. (**3 boda**) Neka su $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in \mathcal{M}_3$. Odredite sve svojstvene vrijednosti matrice A^2. Detaljno objasnite svoj odgovor.

ZI 2015

9. **(7 bodova)**

(a) (1 bod) Napišite definiciju svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti kvadratne matrice A.

(b) (2 boda) Dokažite tvrdnju: Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako su sve njezine svojstvene vrijednosti različite od 0.

(c) (4 boda) Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$