Rješenja međuispita iz Matematike 1

20. studenog 2012.

1. [**6 bodova**] (a) (2 boda) $z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j), \quad j = 1, 2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Tvrdnja: $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. (*)

- baza indukcije: $n = 1$, $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$
- pretpostavka indukcije: pretp. da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
- korak indukcije: pokažimo da vrijedi $z^{n+1} = r^{n+1}\big(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)\big)$. Imamo:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big) \cdot r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) \\ &= \text{pomnožiti izraze te iskoristiti (a)} \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)). \end{aligned}$$

Prema principu mat. indukcije vrijedi tvrdnja (*).

(b) (4 boda)

$$w = \cos\big(\frac{7\pi}{12}\big) + i\sin\big(\frac{7\pi}{12}\big), \quad z^4 = w^3 = \cos\big(\frac{7\pi}{4}\big) + i\sin\big(\frac{7\pi}{4}\big),$$
$$z_k = \cos\big(\frac{7\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\big) + i\sin\big(\frac{7\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\big), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Skica obavezna.

2. [**5 bodova**] (a) (2 boda) Prirodno područje definicije funkcije $g \circ f$ je $[0, 6]$.

(b) (3 boda) $g \circ f$ je strogo rastuća funkcija na $[0, 3]$. Slika funkcije $g \circ f$ je $[0, \sqrt{2(\operatorname{ch} 3 - 1)}]$.

3. [**5 bodova**] (a) (2 boda)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(b) (3 boda)

$$X = A^{-1}B - A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. [**4 boda**] $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad v = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (v \neq 0)$

   $\lambda_3 = 2, \quad v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (v \neq 0)$

5. [**5 bodova**] (a) (1 bod) npr. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ uz obrazloženje

   (b) (1 bod) npr. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ uz dokaz.

   (b) (3 boda) Tvrdnja 1: $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq 0$ (dokazuje se mat.ind.)

   Tvrdnja 2: $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$ (dokazuje se mat.ind.)

   Prema teoremu 11, knjižica 6, str. 11 niz (a_n) je konvergentan pa postoji $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Iz rekurzivne relacije kojom je zadan niz slijedi $L = 0$.

6. [**5 bodova**] (a) (2 boda) knjižica 7.

   (b) (1 bod) 2

   (c) (2 boda) -2