# KRATKI TUTORIAL IZ INTEGRALA

Daklem, integrale možemo rješavati na tri osnovna načina (barem sam ih ja tako sebi podijelio još u srednjoj :D).

Prvi je **SUPSTITUCIJA.** Kad koristimo supstituciju? Nju koristimo kada (sročit ću sada jednu lijepu rečenicu) deriviranjem jednog dijela integrala možemo dobiti drugi. Evo, ako vam to zvuči zbunjujuće, pokažimo to na jednostavnom primjeru:

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

Uzmemo recimo kao supstituciju $\sin x = t$. Što dobijemo deriviranjem ovoga? Dobijemo sljedeće:

$$\cos x \, dx = dt$$

Znači, uspjeli smo dobiti drugi dio našeg integrala ☺

I jednostavno crveni dio koji u sebi ima oznake *x* zamijenimo s onim dijelom koji u sebi ima oznake sa *t*.

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C$$

S obzirom da je naš integral neodređen, to jest nema granice, moramo vratiti naše *x*-eve s početka:

$$\frac{\sin^2 x}{2} + C$$

U ovom zadatku se mogla koristiti i supstitucija $\cos x = t$ a deriviranjem ovo izraza dobili smo

$$-\sin x \, dx = dt \rightarrow \sin x \, dx = -dt$$

Konačno rješenje bi bilo

$$-\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$$

Ova rješenja su u biti ista (primijetite da se kosinus može prikazati kao sinus s pomakom od $\frac{\pi}{2}$). Upravo će ova konstanta *C* pridonijeti tome, to jest, kada bismo ubacili neke granice, vidjeli bismo da su rješenja ista. Okej, da ne čavrljam bezveze idemo dalje.

Ovdje ću navesti čisto nekoliko primjera koji se rješavaju najosnovnijom supstitucijom.

**Pr. 1.**

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left[\ln x = t \rightarrow \frac{dx}{x} = dt\right] = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

**Pr. 2.**

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \begin{bmatrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \to xdx=\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{t}dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$$

**Pr. 3.**

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} x} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x = t \\ \operatorname{sh} x\, dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{ch} x| + C$$

Supstitucija će se također koristit ako imamo neki polinom koji je teško raspisati ili bi njegovo raspisivanje dugo trajalo, npr. $(2x+1)^5$. U tom slučaju zamjenjujemo izraz koji je u zagradi. Također, ako imamo neki izraz pod korijenom. Mi npr. ne znamo automatski izračunati integral od $\sqrt{3x-1}$, ali bismo od $\sqrt{t}$ znali jer je to obična potencija, $t^{\frac{1}{2}}$.

Evo još nekoliko izraza za koje je dobro znati koja se supstitucija koristi:

1.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$$

Ovakve integrale rješavamo ili supstitucijom $x = a\sin t$ ili $x = a\cos t$. Zašto? Time postižemo sljedeće:

$$x = a\sin t \to dx = a\cos t\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t\, dt = a\int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\cos t\, dt = a^2 \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

a ovo dalje znate riješiti ☺

2.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

Ovakve integrale rješavamo ili supstitucijom $x = a \operatorname{sh} t$. Zašto? Time postižemo sljedeće:

$$x = a \operatorname{sh} t \to dx = a \operatorname{ch} t \, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} \cdot a \operatorname{ch} t \, dt = a \int \sqrt{a^2(1 + \operatorname{sh}^2 t)} \operatorname{ch} t \, dt = a^2 \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \operatorname{ch} t \, dt =$$

$$= a^2 \int \operatorname{ch}^2 t \, dt = a^2 \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} dt$$

Slične zamjene možete raditi u takovim zadacima, a sve se to može izvesti iz osnovnih formula

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Eto, to bi recimo bilo to što se tiče supstitucije.

Nadalje, kad zadatak ne možemo riješiti supstitucijom, obično pribjegavamo **PARCIJALNOJ INTEGRACIJI**. Formula za parcijalnu integraciju glasi:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Pogledajmo naprimjer sljedeći integral:

$$\int x \sin x \, dx$$

Ako pokušamo primijeniti supstituciju vidjet ćemo sljedeće:

1) supstitucija ***x*** **=** ***t***. Ovime dobijemo samo ***dx*** **=** ***dt***. Nismo dobili **sin*x*** ***dx*** što znači da nam je supstitucija FAIL.

2) supstitucija **sin*x*** **=** ***t***. Ovime dobijemo samo **cos*x*** **dx =** ***dt***. Nismo dobili ***x dx*** što znači da su pokušaji supstitucije kod ovog integrala DOUBLE FAIL.

Pokušajmo sada riješiti ovaj integral parcijalnom integracijom. Najprije pogledamo koji dio možemo integrirati. Uočavamo da bismo mogli integrirati i $xdx$ i $\sin x \, dx$. Znači da bilo koji od dva dijela možemo upotrijebiti kao $dv$. Međutim, pogledajmo što bi se desilo kada bismo integrirali $xdx$. Povećali bi stupanj polinom i dobili bismo $\frac{x^2}{2}$, što naravno ne želimo.

Znači da odabiremo sljedeće:

$$\begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$uv - \int vdu = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Evo sada opet nekoliko primjera parcijalne integracije:

**Pr. 1.**

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

**Pr. 2.**

$$\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Primijetite da tu nismo izabrali $u = x$, bez obzira što će nam se stupanj polinoma povećavati. Odabrali smo $u = \ln x$ jer ne znamo njegov integral.

**Pr. 3.**

$$I = \int e^{-x}\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x} & dv = \cos x\,dx \\ du = -e^{-x}dx & v = \sin x \end{bmatrix} = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{-x} & dv = \sin x\,dx \\ du = -e^{-x}dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx =$$

$$= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - I$$

$$I = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - I$$

$$2I = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$$

$$I = \frac{e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x}{2} + C$$

I konačno, **PARCIJALNI RAZLOMCI**. Kad ćemo se služiti tom metodom? Pa kad imamo je li, neki razlomak :D, to jest u nazvniku imamo umnožak, to jest, faktorizirani polinom, ili polinom koji možemo faktorizirati.

Evo nekoliko primjera:

**Pr. 1.**

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

Moramo izraz $\frac{1}{x^2(x+1)}$ razbiti na jednostavnije dijelove:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

Kada u nazivniku imamo polinom prvog stupnja, kao na primjer $x + 1$, u brojnik ide samo konstanta.

Kada u nazivniku imamo polinom drugog stupnja, kao na primjer $x^2 + x + 1$, u brojnik ide polinom prvog stupnja, općeg oblika $Ax + B$.

Da u nazivniku imamo polinom trećeg stupnja, kao na primjer $2x^3 + 4$, u brojnik ide polinom drugog stupnja, općeg oblika $Ax^2 + Bx + C$ i tako dalje...

Naš izraz pomnožimo sa $x^2(x+1)$ pa dobijemo:

$$1 = (Ax + B)(x + 1) + Cx^2$$

$$1 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$$

$$1 = x^2(A + C) + x(A + B) + B$$

Na desnoj strani imamo $x^2$ a na lijevoj ne, što znači da je $A + C = 0$. Isto tako slijede i druge dvije jednadžbe, pa dobijemo sustav:

$$A + C = 0$$

$$A + B = 0$$

$$B = 1$$

A time je i $A = -1$ i $C = 1$. Pa naš integral prelazi u:

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2} = \int \frac{-x + 1}{x^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x + 1| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C$$

**Pr. 2.**

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = Ax + A + Bx - B = x(A+B) + A - B$$

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$