Zadaci za dodatnu vježbu (gradivo 2. knjižice):

1. Naći jednadžbu sinusoide $y = A\sin(ax+b)$, ako je jedna od točaka maksimuma $(\frac{5}{2}, 3)$, a $(1,0)$ i $(4,0)$ su dvije susjedne nul-točke.

   Skicirati grafove sljedećih funkcija:

2. $f(x) = e^{-x} + 1$,
3. $f(x) = 1 - e^{x}$,
4. $f(x) = \ln(x+1)$,
5. $f(x) = arcsin(x-1)$,
6. $f(x) = \frac{\pi}{2} + arcsinx$,
7. $f(x) = arccos(2x)$,
8. $f(x) = 2arctgx$,
9. $f(x) = \pi - arcctgx$,
10. $f(x) = 1 - chx$,
11. $f(x) = 3thx$,
12. $f(x) = 1 + cthx$,
13. $f(x) = cth(x+1)$,
14. $f(x) = arch(x+1)$,
15. $f(x) = arth(x-1)$,
16. $f(x) = arth(2x)$,
17. $f(x) = arcth(2x-1)$.

    Za svaku od sljedećih funkcija ispitati je li parna i je li neparna:

18. $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$,
19. $f(x) = \sin^2 x$,
20. $f(x) = \cos^3 x$,
21. $f(x) = e^{x} - e^{-x}$,
22. $f(x) = e^{x} - 1$,
23. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

Odrediti prirodno područje definicije funkcije:

24. $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x + 10}$,

25. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 31x + 28}$,

26. $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$,

27. $f(x) = \ln(2 - |x - 4|)$,

28. $f(x) = \ln(1 - |x^2 - 3|)$,

29. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}-2}$,

30. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-x-6}}$,

31. $f(x) = \sqrt{\frac{\ln^2 x-1}{\ln^2 x-4}}$,

32. $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)}$,

33. $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x-3}\right)$,

34. $f(x) = arth\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right)$,

35. $f(x) = \ln(chx - 1)$,

36. $f(x) = \frac{1}{6sh(\ln x)-x}$,

37. $f(x) = \sqrt{arcctgx - \frac{\pi}{4}}$,

38. $f(x) = \ln(4x - x^2) \cdot \sqrt{ln(2\sin(2\pi x))}$.

39. Neka je $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$. Odrediti $f^{-1}(x)$. Odrediti prirodnu domenu i sliku funkcije f.

40. Neka je $f(x) = \frac{2^{x+1}-1}{2^{x-1}+1}$. Odrediti $f^{-1}(x)$. Odrediti prirodnu domenu i sliku funkcije f.

Rješenja dodatnih zadataka za vježbu - 2. knjižica

1. Neka je jednadžba sinuoside $y = A\sin(a(x - x_0))$. Očito je $A = 3$ i $x_0 = 1$. Nadalje je $a = \frac{2\pi}{T}$, gdje je T temeljni period sinusoide. Vrijedi $T = 6$, pa je $a = \frac{\pi}{3}$.

   Dakle, jednadžba sinusoide je $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}(x - 1)\right)$.

2. Zrcalimo krivulju $y = e^x$ s obzirom na os "y'' i translatiramo za 1 "prema gore".

3. Zrcalimo krivulju $y = e^x$ s obzirom na os "x'' i translatiramo za 1 "prema gore".

4. Translatiramo krivulju $y = \ln x$ za 1 "u lijevo".

5. Translatiramo krivulju $y = arcsinx$ za 1 "u desno".

6. Translatiramo krivulju $y = arcsinx$ za $\frac{\pi}{2}$ "prema gore".

7. Kontrakcija krivulje $y = arccosx$ za faktor 2 u smjeru osi "x''.

8. Dilatacija krivulje $y = arctgx$ za faktor 2 u smjeru osi "y''.

9. Zrcalimo krivulju $y = arcctgx$ s obzirom na os "x'' i translatiramo za π "prema gore".

10. Zrcalimo krivulju $y = chx$ s obzirom na os "x'' i translatiramo za 1 "prema gore".

11. Dilatacija krivulje $y = thx$ za faktor 3 u smjeru osi "y''.

12. Translatiramo krivulju $y = cthx$ za 1 "prema gore".

13. Translatiramo krivulju $y = cthx$ za 1 "u lijevo".

14. Translatiramo krivulju $y = arcthx$ za 1 "u lijevo".

15. Translatiramo krivulju $y = arthx$ za 1 "u desno".

16. Kontrakcija krivulje $y = arthx$ za faktor 2 u smjeru osi "x''.

17. Kontrakcija krivulje $y = arcthx$ za faktor 2 u smjeru osi "x'' i translacija za $\frac{1}{2}$ "u desno".

Rješenja nekih zadataka za dodatnu vježbu (gradivo 2. knjižice):

1. $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right)$
18. parna
19. parna
20. parna
21. neparna
22. ni parna ni neparna
23. neparna

24. Mora biti $x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2) \geq 0$, pa je $D(f) = (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$.

25. Mora biti $x^3 + 2x^2 - 31x + 28 \geq 0$. Odredimo najprije nul-točke polinoma $P(x) = x^3 + 2x^2 - 31x + 28$. Vodeći je koeficijent 1, pa znamo da cjelobrojne nul-točke polinoma moraju biti djelitelji slobodnog člana, tj. djelitelji broja 28, dakle, neki od brojeva $\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm14, \pm28$. Uvrštavanjem zaključujemo da je 1 nul-točka polinoma P. Dijeljenjem $P(x)$ s $x-1$ dobivamo $Q(x) = x^2 + 3x - 28$, čije su nul-točke -7 i 4.

Dakle, konačno smo dobili $x^3 + 2x^2 - 31x + 28 = (x+7)(x-1)(x-4) \geq 0$, odnosno $D(f) = [-7, 1] \cup [4, +\infty)$.

26. Mora biti $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \geq 0$. Odredimo najprije nul-točke polinoma $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Vodeći je koeficijent 1, pa znamo da cjelobrojne nul-točke polinoma moraju biti djelitelji broja 2, dakle, neki od brojeva $\pm1, \pm2$. Uvrštavanjem zaključujemo da je -2 nul-točka polinoma P. Dijeljenjem $P(x)$ s $x+2$ dobivamo $Q(x) = x^2 + x + 1$, koji nema realnih nul-točaka.

Dakle, konačno smo dobili $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x^2+x+1) \geq 0$, odnosno $D(f) = [-2, +\infty)$.

27. Mora biti $2 - |x-4| > 0$, tj. $|x-4| < 2$. Geometrijski interpretirajući, tražimo x koji su udaljeni od 4 za ne više od 2, pa je $D(f) = (2, 6)$.

28. Mora vrijediti $1 - |x^2 - 3| > 0$, tj. $|x^2 - 3| < 1$. Dakle, mora biti $x^2 - 3 < 1$ i $x^2 - 3 > -1$, odnosno $x^2 < 4$ i $x^2 > 2$. Dakle, $D(f) = (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$.

29. Mora vrijediti $x^2 - 1 \geq 0$ i $\sqrt[3]{x} \neq 2$, tj. $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, 8) \cup (8, +\infty)$.

30. Mora vrijediti $\frac{x-1}{x^2-x-6} \geq 0$, tj. $x - 1 \geq 0$ i $x^2 - x - 6 > 0$ ili $x - 1 \leq 0$ i $x^2 - x - 6 < 0$, pa je $D(f) = (-2, 1] \cup (3, +\infty)$.

31. Mora vrijediti $\frac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x - 4} \geq 0$, tj. $\ln^2 x - 1 \geq 0$ i $\ln^2 x - 4 > 0$ ili $\ln^2 x - 1 \leq 0$ i $\ln^2 x - 4 < 0$, odnosno $\ln^2 x > 4$ ili $\ln^2 x \leq 1$, tj. $\ln x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, +\infty)$. Konačno imamo $D(f) = (0, e^{-2}) \cup [e^{-1}, e] \cup (e^2, +\infty)$.

32. Mora vrijediti $-1 \leq \frac{x-2}{2x+3} \leq 1$ i $\arcsin\left(\frac{x-2}{2x+3}\right) \geq 0$. Drugi uvjet je ekvivalentan uvjetu $\frac{x-2}{2x+3} \geq 0$. Zaključujemo da treba naći sve x za koje vrijedi $0 \leq \frac{x-2}{2x+3} \leq 1$.

Rješenje nejednadžbe $\frac{x-2}{2x+3} \geq 0$ je $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$. Nejednadžba $\frac{x-2}{2x+3} \leq 1$ je ekvivalentna s $\frac{-x-5}{2x+3} \leq 0$, a njezino rješenje je $(-\infty, -5] \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$.

Presjek rješenja tih dviju nejednadžbi je prirodno područje definicije funkcije f, a to je $D(f) = (-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$.

33. Mora vrijediti $-1 \leq \frac{1}{x-3} \leq 1$, tj. $\frac{1}{|x-3|} \leq 1$ uz $x \neq 3$, odnosno $|x-3| \geq 1$ (za $x = 3$ ova nejednadžba nije zadovoljena pa ne moramo pisati uvjet $x \neq 3$). Njezino rješenje je (geometrijski očevidno)$D(f) = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$.

34. Mora vrijediti $-1 < \frac{1}{x^2-4} < 1$, tj. $\frac{1}{|x^2-4|} < 1$, uz $x^2 \neq 4$, odnosno $|x^2 - 4| > 1$ (za $x^2 = 4$ i onako nejednadžba nije zadovoljena, pa taj uvjet više nećemo navoditi).

Dakle, mora biti $x^2 - 4 > 1$ ili $x^2 - 4 < -1$, odnosno $x^2 > 5$ ili $x^2 < 3$. Konačno je $D(f) = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$.

35. Mora biti $chx > 1$, tj. $x \neq 0$, pa je $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

36. Mora biti $x > 0$. Za $x > 0$ je $f(x) = \frac{x}{2x^2-3}$, pa je $D(f) = (0, \infty) \backslash \{\sqrt{\frac{3}{2}}\}$.

37. Mora vrijediti $arcctgx \geq \frac{\pi}{4}$, odnosno $x \leq 1$. Dakle, $D(f) = (-\infty, 1]$.

38. Mora vrijediti $4x - x^2 > 0$ i $2\sin(2\pi x) \geq 1$.

Drugu nejednadžbu moramo rješavati grafički, jer funkcija sinus nije monotona. Njezino rješenje je $\cup_{k \in \mathbf{Z}} [\frac{1}{12} + k, \frac{5}{12} + k]$.

Prva nejednadžba ima rješenje $(0, 4)$.

Dakle, prirodno područje definicije je $[\frac{1}{12}, \frac{5}{12}] \cup [\frac{13}{12}, \frac{17}{12}] \cup [\frac{25}{12}, \frac{29}{12}] \cup [\frac{37}{12}, \frac{41}{12}]$.

39. $f^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$, domena: $D(f) = (0, \infty) \backslash \{e\}$, slika: $Im(f) = \mathbf{R} \backslash \{-1\}$.

40. $f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{2x+2}{4-x}\right)$, domena:$D(f) = \mathbf{R}$, slika: $Im(f) = (-1, 4)$.