Ilkove budnice / zetovi:

1. budnica – trebalo je odrediti jesu li tvrdnje istinite ili lažne i objasniti zašto su lažne tvrdnje lažne

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})(\forall y \epsilon \mathbb{R})(x^6 = y^6 => x = y)$$

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})(\forall y \epsilon \mathbb{R})(x = y => x^6 = y^6)$$

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})(\forall y \epsilon \mathbb{R})(x = 2y => x^3 - 2x^2 y = 0)$$

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})(\forall y \epsilon \mathbb{R})(x^3 - 2x^2 y = 0 => x = 2y)$$

$$(\exists y \epsilon \mathbb{R}^+)(\forall x \epsilon \mathbb{R}^+)(x > y)$$

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R}^+)(\exists y \epsilon \mathbb{R}^+)(x > y)$$

2. budnica – matematička indukcija

a) Iskažite princip matematičke indukcije.
b) Matematičkom indukcijom dokažite da je $5^{n-1} + 2^n$ djeljivo s 3 za svaki prirodni broj N.

3. ZET – kompleksni brojevi

1. Skicirajte sljedeće krivulje u kompleksnoj ravnini
   a) $\arg(z - i) = \frac{3\pi}{4}$, b) $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$, c) $|z + 1| = 2$, d) $|z| + |z + 2i| = 3$, e) $Re\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0$
   Ukoliko je u nekom od zadataka dobivena krivulja neka od krivulja drugog reda, napišite o kojoj se krivulji radi.

4. ZET – funkcije

1. Odredite jednadžbu krivulje koja nastaje zrcaljenjem krivulje y = ln x
   a) oko pravca x = 2, b) oko pravca y = 2.
   Skicirajte sve tri krivulje.
   Primjedba. Prilikom skiciranja krivulja, obavezno naznačite, ako postoje, asimptote i nultočke.
2. Napišite jednadžbu sinusoide prema slici (na ploči). -> ima fazni pomak, točke su A (3, 2) na brijegu i B (6, -2) na dolu
3. Zadane su funkcije $f(x) = \arccos(2x)$, $g(x) = 2\, arctg(x - 1)$, $h(x) = 2 + thx$. Skicirajte njihove grafove i toga odredite domene i slike tih funkcija.
4. Odredite jednadžbu krivulje koja nastaje zrcaljenjem krivulje $y = 1 - e^x$ oko pravca $y = x$. Skicirajte obje krivulje (ista primjedba kao i u 1.)
5. Skicirajte sljedeće krivulje dane jednadžbama u polarnim koordinatama:
   a) $r = 1 - sin\Phi$, b) $r^2 = \sin(2\Phi)$.

5. ZET – matrice

1. Za svaku od sljedećih tvrdnji ispitajte je li istinita:
   a) $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2, \forall A, B \in M_n$, b) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2, \forall A, B \in M_n$
   c) $(A \cdot B \cdot A^{-1})^n = A \cdot B^n \cdot A^{-1}, \forall A, B \in M_n$, d) $X^2 - A \cdot X = 0 => X = 0\ ili\ X = A, \forall A \in M_n$
2. Je li $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ inverz matrice $\begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$?
3. Neka su A, B, C regularne matrice. Riješite matričnu jednadžbu $X^{-1} \cdot A = B \cdot C$ (tj. izrazite X kao umnožak matrica A, B, C ili njihovih inverza).

6. ZET – matrice

1. Za svaku od sljedećih tvrdnji ispitajte je li istinita:
   a) $\det(A+B)=\det A+\det B\,,\forall A,B\in M_n$, b) $\det(\lambda A)=\ \lambda\det A,\forall A\in M_n$
   c) $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)\,,\forall A,B\in M_n$.
2. Neka je $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$. Izračunajte $(A^{-1}\cdot B^{-1})^{-1}$.
3. Neka je $A=(a_{ij})\in M_6$,
   $a_{ij}=\begin{cases}i+1, i\le j\\ 1, i>j\end{cases}$ Izračunajte det A.

7. ZET – matrice

1. Napišite definiciju linearne nezavisnosti vektora.
   a. Jesu li vektori $\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix}$ linearno nezavisni?
2. Zadana je matrica $A=\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\-4&a&0&-6\\2&2&a&5\\-2&-2&2&a\end{bmatrix}$. U ovisnosti o $a\in\mathbb{R}$ odredite rang matrice A i riješite sustav $A\vec{x}=\vec{0}$.

8. ZET – limesi

1. Odrediti limese:
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right)^{2-x}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{(\sqrt{X}+1)^2}$, d) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+1)\cdot\arcsin(e^{-x})$
   e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^2(5x)}{sin^2(7x)}$, f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2x}}$, g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{4x+3}+\sqrt{4x-1}}$, h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)\cdot\operatorname{arctg}x$
   i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^3(4x)}{x^2\cdot\cos 2x}$
2. Za koje vrijednosti parametra $a\epsilon\mathbb{R}$ krivulja $y=\frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}+a}$ ima desnu kosu asimptotu te za takav a odredite tu asimptotu?

9. ZET – derivacije

1. Koristeći definiciju derivacije, dokažite da je $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^3}$.
2. a) Koristeći da je $(e^x)'=e^x$ i $(e^{-x})'=-e^{-x}$ te osnovna pravila deriviranja, izvedite derivaciju funkcije sinus hiperbolički.
   b) Koristeći izvedeno pod a) i pravilo za derivaciju inverzne funkcije, izvedite derivaciju funkcije area sinus hiperbolički.
3. Točka se giba po krivulji $y=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ tako da joj apscica raste jednoliko brzinom 3 cm/s. Kojom brzinom opada njezina ordinata prilikom prolaska kroz točku T (1, 1)?
4. Odredite vrijednost pozitivnog realnog parametra a, ako je poznato da tangenta na krivulju $y=a\sin(4x)$ u točki (0, 0) zatvara s pozitivnom x-osi kut od 45°. Nacrtajte sliku!
5. Odredite sve točke na krivulji:
   a) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, b)$3x^2y-2y^3+2x^3=2$
   u kojima je tangenta na krivulju paralelna s x-osi.
6. Na krivulji $y=\ln\sqrt{x}$ odredite točku koja je najbliže pravcu $y=\frac{x}{4}+7$. Nacrtajte sliku!

7. Odredite vrijednost parametra a tako da pravac $y = 3x - 5$ bude tangenta krivulje $y = ax^6$. Nacrtajte sliku!
8. Neka je $f(x) = \frac{1}{ax+b}, a, b \neq 0$. Odredite $f^{(n)}$, n-tu derivaciju funkcije f.

10. ZET – diferencijalni račun

1. Bakrena posuda oblika „otvorenog“ kružnog valjka ima oplošje $9\pi cm^2$. Koliko je maksimalni volumen te posude?
2. Dva vrha pravokutnika leže na krivulji $y = e^{-x^2}$, a dva na njenoj asimptoti. Kolika je maksimalna površina tog pravokutnika?
3. Funkciju $f(x) = sh\, x$ treba na intervalu $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$aproksimirati trećim Maclaurinovim polinomom (ili četvrtim, svejedno ☺); dokažite da je pogreška aproksimacije manja od 10^{-3}.

11. BOŽIĆNI POKLON KOJI NAM JE ILKO DAO

1. U lik omeđen krivuljama $y = \sqrt{2 - x^2}$ i $y = |x|$ upisati pravokutnik paralelan koordinantnim osima tako da mu je površina maksimalna.