Izvanredni dekanski dodatni ispitni rok iz Matematike 2

5. rujna 2011.

Zadaci iz 1. ciklusa

1. (1 bod) a) Iskažite integralni krterij konvergencije za redove s pozitivnim članovima.
(2 boda) b) Dokažite integralni krterij konvergencije za redove s pozitivnim članovima.
(2 boda) c) Koristeći se gore navedenim kriterijem odredite konvergira li red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}.$$

◇

2. (1 bod) a) Izračunajte radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}.$$

(2 boda) b) Ispitajte ponašanje navedenog reda potencija u rubovima intervala konvergencije.
(1 bod) c) Napišite područje konvergencije navedenog reda.
(1 bod) d) Napišite područje apsolutne konvergencije navedenog reda.

◇

3. (5 bodova) Koristeći se postupkom deriviranja i integriranja redova potencija nađite MacLaurinov red funkcije

$$f(x) = \ln(1 + x - 2x^2).$$

◇

4. (5 bodova) Vrh trostrane piramide nalazi se u točki V s radij-vektorom $\vec{v} = 6\vec{k}$, a bridovi iz vrha V su zadani sljedećim vektorima

$$\overrightarrow{VA} = -2\vec{j} - 6\vec{k},$$
$$\overrightarrow{VB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k},$$
$$\overrightarrow{VC} = -4\vec{i} + 6\vec{k}.$$

(3 bod) a) Pokažite da visine iz vrhova B i C na suprotne strane piramide leže na pravcima koji se ne sijeku te
(2 boda) b) odredite udaljenost tih dvaju mimoilaznih pravaca.

Vrijeme pisanja je **60min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.

Izvanredni dekanski dodatni ispitni rok iz Matematike 2

5. rujna 2011.

Zadaci iz 2. ciklusa

1. (2 boda) a) Iskažite teorem o implicitnoj funkciji u općem obliku.
(3 boda) b) Neka je funckija $z = z(x, y)$ zadana implicitno jednadžbom

$$y \sin x + x^2 y + y^3 e^z + z^2 = 3.$$

Pokažite da Schwarzov teorem vrijedi na primjeru te funkcije.

◇

2. (3 boda) a) Izračunajte $\frac{\partial w}{\partial r}$ i $\frac{\partial w}{\partial s}$ ako je

$$w = \ln(x^2 + y^2 + 2z),$$

gdje je $x = r + s$ i $y = r - s$, te $z = 2rs$.
(2 boda) b) Dokažite da funkcija $u = x\varphi(\frac{x}{y^2})$ zadovoljava sljedeću jednadžbu

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u.$$

◇

3. (1 boda) a) Iskažite Sylvesterov teorem.
(2 boda) b) Koristeći se diskriminantom odgvarajućeg kvadratnog polinoma, dokažite Sylvesterov teorem.
(2 boda) c) Odredite i karakterizirajte ekstreme funkcije

$$u(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

◇

4. (5 bodova) Izračuanjte ekstremalne vrijednosti funkcije

$$f(x, y, z) = 8x + 9y - 3z$$

i odredite točke u kojima se postižu ti ekstremi na skupu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ koji je određen uvjetima

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ i } y - z + 2 = 0.$$

Vrijeme pisanja je **60min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.

Izvanredni dekanski dodatni ispitni rok iz Matematike 2

5. rujna 2011.

Zadaci iz 3. ciklusa

1. (2 bod) a) Zadana je familija krivulja opisana jednadžbom

$$F(x, y, y') = 0,$$

gdje je $F(x, y, z) = x^2 + 2yz + e^{xz}$. Odredite diferencijalnu jednadžbu familije krivulja koja siječe zadanu familiju pod pravim kutem.

(3 boda) b) Nađite izogonalne trajektorije koje zadanu familiju parabola $y^2 = 4ax$ sijeku pod kutem $\varphi = 45°$.

◇

2. (2 boda) a) Neka su r_1, r_2 i r_3 tri različita realna broja. Napišite odgovarajuću homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima tako da zadani realni brojevi budu rješenja ogdovarajuće karakteristične jednadžbe. Pokažite da su rješenja te homogene linearne diferencijalne jednadžbe linearno nezavisna.

(3 boda) b) Odredite opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y^{IV} + y''' + y'' = 0,$$

te pokažite linearnu nezavisnost funkcija koje razapinju to opće rješenje.

◇

3. (5 bodova) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + \operatorname{tg} x y' = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

◇

4. (5 bodova) Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2},$$

gdje je $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Vrijeme pisanja je **60min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.