Rješenja i postupci zadataka sa 1. masovnih instrukcija

1. (a) Trebalo je najprije prepoznati opći član niza (prvi dio u umnošku nazivnika): 2, 5, 8, 11, 14, ... Rekli smo da ako se ne može prepoznati odmah, „pomičete niz lijevo ili desno za 1“ dok ne dođete do nečeg poznatog. Ako „pomaknemo naš niz za 1 u desno“ dobijemo: 3, 6, 9, 12, 15, ... Ovo su višekratnici broja 3 pa to možemo zapisati kao $3n$, kada n kreće od 1. Da od niza 3, 6, 9, 12, 15, ... dobijemo 2, 5, 8, 11, 14, ... treba od $3n$ oduzeti 1, pa je opći član niza $(3n-1)$.

Niz 5, 8, 11, 14, ... (odnosno drugi dio našeg nazivnika) dobijemo tako da niz $(3n-1)$ uvećamo za 3, pa dobijemo $(3n+2)$. Sada možemo zapisati naš red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

Izraz $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ rastavimo preko parcijalnih razlomaka na $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right]$ pa imamo:

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right]$$

Naša suma je jednaka:

$$S_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}$$

(b) U ovom zadatku je trebalo najprije ispitati kako se $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ponaša za parne, a kako za neparne n-ove. Kada je $n = 2k$, dobijemo $\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$, a kada je $n = 2k+1$, dobijemo $\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k$, kada nam k kreće od 1 (jer nam n kreće od 3). Stoga naš red prelazi u sljedeći oblik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot(2k+1)\cdot(-1)^k}{(2k+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2(2k+1)}{2k(2k+2)}$$

$(-1)^k$ nam predstavlja samo alterniranje predznaka, a $\frac{2(2k+1)}{2k(2k+2)}$ rastavimo preko parcijalnih razlomaka na $\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}$ pa dobijemo za sumu:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}\right)$$

odnosno:

$$S_k=\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+(-1)^k\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}\right)\right]=-\frac{1}{2}+(-1)^k\frac{1}{2k+2}$$

$$S=\lim_{k\to\infty}S_k=-\frac{1}{2}$$

(c) E ovaj nisam riješio na masovnima, ali sam ga zadao na kraju... Uglavnom, zbog svojstava funkcije ln x vrijedi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\ln\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

Nadalje, zbroj i razliku kubova možemo napisati kao

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}$$

pa skraćivanjem dobivamo

$$S_n=\ln\left(\frac{1\cdot(2^2+2+1)}{3\cdot(1^2+1+1)}\cdot\frac{2\cdot(3^2+3+1)}{4\cdot(2^2+2+1)}\cdot\frac{3\cdot(4^2+4+1)}{5\cdot(3^2+3+1)}\cdots\frac{(n-2)[(n-1)^2+(n-1)+1]}{n[(n-2)^2+(n-2)+1]}\right.$$
$$\left.\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}\right)=\ln\left[\frac{1\cdot 2}{1^2+1+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]$$

Onda je suma reda jednaka

$$S=\lim_{k\to\infty}S_n=\ln\frac{2}{3}$$

(d) Ovo je običan geometrijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3\cdot 3^n}\right)=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}$$

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n}=\frac{2}{3}<1\rightarrow konvergira$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n\right)^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{3}<1\rightarrow konvergira$$

3. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}}{\frac{3^n n!}{2^{n+1}}}=\infty\rightarrow divergira$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2^{n+2}\cdot(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{n^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{n+1}\cdot n^{n+1}}{n!}}=\infty\rightarrow divergira$$

4. (a)

Zadani red usporedimo sa $\sum\frac{1}{n^2}$ i upotrijebimo granični oblik poredbenoga kriterija:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=[pređemo\ na\ limes\ funkcije]=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\neq 0$$

pa se naši redovi jednako ponašaju. Obzirom da $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergira, konvergira i početni red.

(b)

Zadani red usporedimo sa $\sum n^{-\frac{3}{2}}$ i upotrijebimo granični oblik poredbenoga kriterija:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1\neq 0$$

pa se naši redovi jednako ponašaju. Obzirom da $\sum n^{-\frac{3}{2}}$ konvergira, konvergira i početni red.

5. (a)

Funkcija je strogo padajuća na nekom intervalu $[N, \infty\rangle$ ako je $f'(x) < 0$, za svaki $x \in [N, \infty\rangle$.

$$f(t) = \frac{1}{t \ln t} \to f'(t) < 0 \to -\frac{\ln t + 1}{(t \ln t)^2} < 0 \to \ln t + 1 > 0 \to t > \frac{1}{e}$$

Obzirom da naš red kreće od 2, a ne od $\frac{1}{e}$, to je naš N u integralu jednak 2. Tada imamo integralni kriterij:

$$\int_N^\infty f(t)dt = \int_2^\infty \frac{dt}{t \ln t} = \cdots = \infty$$

Obzirom da integral divergira, onda i naš red divergira.

(b)

Funkcija je strogo padajuća na nekom intervalu $[N, \infty\rangle$ ako je $f'(x) < 0$, za svaki $x \in [N, \infty\rangle$.

$$f(t) = \frac{t}{e^t} = te^{-t} \to f'(t) < 0 \to e^{-t}(1-t) < 0 \to 1 - t < 0 \to t > 1$$

Obzirom da naš red kreće od 1, onda je i naš N u integralu jednak 1. Tada imamo integralni kriterij:

$$\int_N^\infty f(t)dt = \int_1^\infty te^{-t}dt = \cdots = \frac{2}{e}$$

Obzirom da integral konvergira, onda i naš red konvergira.

6. Ovdje iskoristimo Leibnizov kriterij. Mora nam zadovoljavati dva uvjeta:

(1) niz $\sqrt{n^2+1} - n$ je padajući (u ovo se lako uvjerite)

(2) limes niza je jednak 0:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$$

Naš red je konvergentan.

7.

Uspoređujemo $\sin\left(\frac{n+1}{n^3+17}\right)$ s $\frac{1}{n^2}$ u limesu, pa dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{n^3+17}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{n^3+17}\right)\right|}{\frac{n+1}{n^3+17}}\cdot\frac{\frac{n+1}{n^3+17}}{\frac{1}{n^2}}=1\cdot 1=1$$

Obzirom da konvergira apsoultno, onda naš red konvergira i normalno, odnosno bezuvjetno.

8. (a)

Iskoristimo D'Alembertov kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\cdots=0, za\ sve\ x\in\mathbb{R}$$

(b)

Iskoristimo Cauchyjev kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{-x^2+3x+2}{\sqrt[n]{n}\cdot 2}\right|^n}=\frac{|-x^2+3x+2|}{2}<1$$

$$-2<-x^2+3x+2<2$$

I) $-x^2+3x<0\to x^2-3x>0\to x(x-3)>0\to$ iz ovog slijedi

II) $-x^2+3x+4>0\to x^2-3x-4<0\to$ iz ovog slijedi

Sve skupa je rješenje $x \in \langle -1,0\rangle \cup \langle 3,4\rangle$ a nakon što se ispita konvergencija u rubnim točkama -1, 0, 3 i 4 dobijemo da u točkama -1 4 konvergira uvjetno ali ne i apsoultno.

9. (a) Rekli smo da kod Taylorovog reda moramo imati $x - x_0$ pa na taj način prilagodimo naš razlomak:

$$f(x) = \frac{1}{3 - 2(x - x_0 + x_0)} = \frac{1}{3 - 2(x - 1 + 1)} = \frac{1}{1 - 2(x - 1)}$$

Znamo da je suma geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$$

U našem razlomku, naš q je $2(x - 1)$ pa imamo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [2(x-1)]^n$$

Red konvergira kad je $|2(x-1)| < 1 \rightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

Kada je $x = \frac{1}{2}$, dobijemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rightarrow divergira$$

Kada je $x = \frac{3}{2}$, dobijemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n \rightarrow divergira$$

pa nam je

$$x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$$

(b) Ovdje nemamo razlomak pa da se odmah poslužimo geometrijskim redom, nego tražimo derivacije:

$$f(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2(x_0 - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$f''(x_0) = -\frac{1}{2(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{(x_0 - 1)^3} = 1$$

$$f^{IV}(x_0) = -\frac{3}{(x_0 - 1)^4} = -3$$

$$f^{V}(x_0) = \frac{12}{(x_0 - 1)^5} = 12$$

I tako dalje... Dakle, dobijemo niz: $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -3, 12, \ldots$ Vidimo da nam predznak alternira u odnosu na broj derivacije, pa to zapišemo kao $(-1)^{n+1}$, gdje nam n kreće od 0. (Na masovnima sam zaboravio „uračunati" vrijednost funkcije u x_0).

Nadalje, iz svega možemo izlučiti $\frac{1}{2}$ pa dobijemo niz:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}(0, 1, 1, 2, 6, 24, \ldots)$$

odnosno, našu n-tu derivaciju zapišemo u obliku:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}(n-1)!$$

S time da će nam n krenuti od 1, jer je vrijednost funkcije u x_0 jednaka 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-2)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-2)^n$$

Konvergenciju ispitamo D'Alembertovim kriterijem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}(x-2)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{-1}{n+1}(x-2)}{\frac{1}{n}}\right| = |x-2| < 1$$

$$-1 < x-2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

Kada je $x = 1$, dobijemo:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to divergira$$

Kada je $x = 3$, dobijemo:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \to konvergira\ uvjetno$$

$$x \in \langle 1, 3]$$

10. (a)

Maclaurinov red je Taylorov red oko 0. Pa imamo:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} = x^2 \cdot \frac{1}{1-x} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}$$

Red konvergira kada je $|x^{n+2}| < 1$, odnosno:

$$-1 < x^{n+2} < 1$$

I) $x^{n+2} < 1 \to (n+2)\ln x < \ln 1 = 0 \to (n+2) > 0 \to \ln x < 0 \to x < 1$

II) $x^{n+2} > -1 \to x > -1$

$$x \in \langle -1, 1\rangle$$

(b)

Najprije rastavimo na parcijalne razlomke:

$$f(x) = \frac{7}{(3x+2)(2x-1)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{3x+2}$$

Ovo sada zapišemo u poznatom obliku preko sume geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

odnosno:

$$f(x) = -2 \cdot \frac{1}{1-2x} - 3 \cdot \frac{1}{2+3x} = -2 \cdot \frac{1}{1-(2x)} - 3 \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{3x}{2}\right)}$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{1-(2x)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{3x}{2}\right)} = -2 \cdot \frac{1}{1-q_1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-q_2}$$

$$f(x) = -2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3x}{2}\right)^n$$

Konvergira ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$|2x| < 1 \rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\left|-\frac{3x}{2}\right| < 1 \rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Zajednički uvjet je $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Kada je $x = -\frac{1}{2}$, dobijemo:

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3x}{2}\right)^n = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow divergira$$

Kada je $x = \frac{1}{2}$, dobijemo:

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}1^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = -2\sum_{n=0}^{\infty}1^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow divergira$$

$$x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$$

11. (a)

Najprije naš red zapišemo u pogodnom obliku:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n$$

Znači, trebamo naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n$: Krećemo od sume geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Da bismo dobili n ispred, cijeli red deriviramo (pri tome nam je 1' = 0, pa izgubimo jedan član, pa nam se mijenja broj od kojeg kreće n!!!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

Onda sve pomnožimo sa x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots$$

pa sve ponovno deriviramo kako bismo opet spustili n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^2} = 1 + 4x + \cdots + n^2x^{n-1} + \cdots$$

i konačno sve pomnožimo sa x da dobijemo oblik koji tražimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^2}$$

Naš x je jednak $\frac{1}{3}$ pa se dobije:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{8}{27}} = \frac{3}{2}$$

(b)

Ovdje ćemo malo integrirati:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$

Ponovno krenemo od sume geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

pa integriramo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$$

i još jednom:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$$

kada stavimo da nam n kreće od 1, dogodi se sljedeće:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$$

Sada još samo sve podijelimo sa x da dobijemo oblik koji nam treba:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=-\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Naš x je jednak $\frac{3}{4}$ pa se dobije:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}=-\ln\left(1-\frac{3}{4}\right)+1+\frac{\ln\left(1-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}}=1-\frac{4}{3}\ln 4+\ln 4=1-\frac{\ln 4}{3}$$

12. (a)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$$

(b)

$$\frac{n!-(n+2)!}{(n+3)!}(n+1)+\frac{n+1}{n+3}=\frac{n!-n!\,(n+1)(n+2)}{n!\,(n+1)(n+2)(n+3)}(n+1)+\frac{n+1}{n+3}=$$

$$=\frac{1-(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}+\frac{n+1}{n+3}=\frac{1-(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n=\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{e^n-e^{-n}}{2}+\frac{e^n+e^{-n}}{2}}{(10e)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{10}{9}$$

(a) Upotrijebite Cauchyjev kriterij. (divergira)

(b) Upotrijebite D'Alembertov kriterij. (divergira)

(a) Upotrijebite Cauchyjev ili D'Alembertov kriterij pa se dobije da mora biti $|x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$

Kada je x = -1, dobijete da prema Leibnizu konvergira.

Kada je x = 1, dobijete red koji usporedite sa harmonijskim, odnosno divergira.

$$x \in [-1, 1\rangle$$

(b) Upotrijebite Cauchyjev kriterij pa dobijete da mora biti

$$\frac{3}{|x-5|} < 1 \rightarrow |x-5| > 3$$

$$3 < x - 5 < -3$$

$$8 < x < 2$$

Kada je x = 2 dobije se da red divergira.

Kada je x = 8 dobije se da red konvergira uvjetno.

$$x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup [8, \infty\rangle$$

(a) Prikažete funkciju kao $f(x) = e^{2(x-x_0)} = e^{2(x-3)}$, a znamo da je razvoj eksponencijalne funkcije u red jednak

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

onda je naš razvoj jednak

$$e^{2(x-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2(x-3)]^n}{n!}$$

(b)

Da ne raspisujem preveč:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$