ISPIT IZ MATEMATIKE 2
11.07.2016.

1. (5 bodova)
a) (3b) Navedite svojstva skalarnog umnoška.
b) (2b) Dokažite distributivnost skalarnog umnoška koristeći skalarnu projekciju.

2. (5 bodova)
a) (2b) Odredite k takav da točka $A(3,4,k)$ leži u ravnini π koja sadrži os x i točku $B(1,1,1)$.
b) (3b) Odredite kut između ravnina $x = y$ i $y = z$.

3. (5 bodova)
a) (1b) Neka je $z = f(x,y)$ zadana diferencijabilna funkcija. Napišite vektor normale na tangencijalnu ravninu grafa funkcije $z = f(x,y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
b) (4b) Odredite sve točke na plohi $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ u kojima je tangencijalna ravnina na tu plohu paralelna s ravninom $\pi \ldots x + 2y + z = 3$.

4. (5 bodova) Zadana je funkcija $f(x,y,z) = xy + e^{yz} - e$ koja zadovoljava $f(0,1,1) = 0$.
a) (2b) Koristeći teorem o implicitno zadanoj funkciji pokažite da se u okolini točke $(x_0, y_0) = (0,1)$ može definirati funkcija $z(x,y)$ koja zadovoljava

$$z(0,1) = 1 \quad \text{i} \quad f(x,y,z(x,y)) = 0.$$

b) (3b) Izračunajte usmjerenu derivaciju funkcije $z(x,y)$ zadane implicitno s

$$xy + e^{yz} - e = 0$$

u smjeru vektora $\vec{h} = \vec{i} + 2\vec{j}$ u točki $T(0,1)$.

5. (**5 bodova**) Pravokutnik ima stranice čije su duljine x i y, a vezane su jednadžbom:

$$2x^2 + 3y^2 = 12.$$

Izračunajte maksimalnu površinu takvog pravokutnika, uz dokaz da se radi o maksimumu.

6. (**3 boda**) Za svaku od sljedećih tvrdnji utvrdite je li istinita ili neistinita, te ju dokažite ili opovrgnite protuprimjerom. Obrazložite sve svoje tvrdnje.

(T1) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(T2) Ako niz (a_n) konvergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Okrenite!

7. (**5 bodova**) Zadan je red potencija oko točke $c = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{7^n}(x-2)^{n-1}.$$

a) (2b) Odredite polumjer konvergencije gornjeg reda.
b) (3b) Koristeći deriviranje redova potencija odredite funkciju čiji je Taylorov razvoj oko točke $a = 2$ jednak gornjem redu.

8. (6 bodova)
a) (4b) Nađite ono partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(2x + y^3)\,dx + (3xy^2 - e^{-2y})\,dy = 0$$

koje prolazi točkom $T(-1, 0)$.
b) (2b) Odredite opće i singularno rješenje Clairautove diferencijalne jednadžbe

$$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2.$$

9. (6 bodova)
a) (2b) Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je $y = e^{rx}$ rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima, tada je r korijen pripadnog karakterističnog polinoma.
b) (2b) Dokažite da su funkcije $y_1(x) = \sin(2x)$, $y_2(x) = \cos(2x)$, $y_3(x) = 1$ linearno nezavisne.
c) (2b) Odredite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu trećeg reda čija su rješenja funkcije iz b) dijela zadatka.

10. (5 bodova) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' - 2y' + 2y = x + e^{-x}.$$

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.

RJEŠENJA LJETNOG ROKA IZ MATEMATIKE 2

11.07. 2016.

1) a) SKALARNI UMNOŽAK IMA SLJEDEĆA SVOJSTVA:

(S1) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ (POZITIVNOST)

(S2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ (HOMOGENOST)

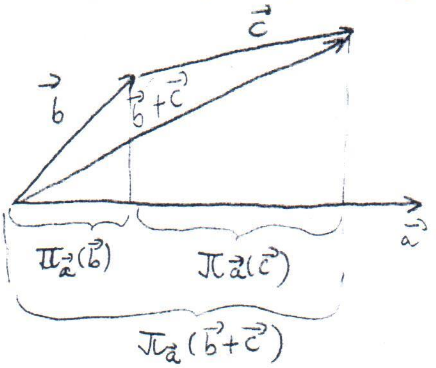
(S3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (KOMUTATIVNOST)

(S4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

b) DOKAZ DISTRIBUTIVNOSTI SKALARNOG UMNOŠKA KORISTEĆI VEKTORSKU PROJEKCIJU:

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\pi_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})$

$\pi_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})$ ← SKALARNA PROJEKCIJA VEKTORA $\vec{b}+\vec{c}$ NA VEKTOR $\vec{a}$.



← IZ SLIKE VIDIMO

$\pi_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = \pi_{\vec{a}}(\vec{b}) + \pi_{\vec{a}}(\vec{c})$

DOBIVAMO

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\pi_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\left(\pi_{\vec{a}}(\vec{b}) + \pi_{\vec{a}}(\vec{c})\right) = |\vec{a}|\,\pi_{\vec{a}}(\vec{b}) + |\vec{a}|\,\pi_{\vec{a}}(\vec{c})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

2) a) $A(3,4,k)$ leži u ravnini π

RAVNINA π SADRŽI $O(0,0,0)$, $C(1,0,0)$, $B(1,1,1)$

jednadžba ravnine kroz 3 točke
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$0\cdot x - y(1-0) + z(1-0) = 0$$
$$-y + z = 0$$

$A(3,4,k)\in\pi \Rightarrow -4+k=0$ $\boxed{k=4}$

c) $x - y = 0$ $\quad \vec{n}_1 = \vec{i} - \vec{j}$

$y - z = 0$ $\quad \vec{n}_2 = \vec{j} - \vec{k}$

$$\cos\sphericalangle(\pi_1,\pi_2) = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

uzimamo šiljasti kut $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$

(3) a) $z = f(x,y)$ diferencijabilna funkcija.

VEKTOR NORMALE $\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}$

b) $z = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

TANGENCIJALNA RAVNINA u (x_0, y_0, z_0) IMA JEDNADŽBU

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

MORA VRIJEDITI $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 \vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 \vec{j} - \vec{k} = \lambda\vec{i} + 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}$

$\lambda = -1$

$\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} = \lambda$

$\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} = 2\lambda$

ODNOSNO DOBIVAMO

$\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} = -1$ $\quad x_0 = -x_0^2 + y_0^2$

$\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} = -2$ $\quad y_0 = -2x_0^2 - 2y_0^2$

$\Rightarrow y_0 = 2x_0$

$x_0 = -x_0^2 - 4x_0^2 \Rightarrow 5x_0^2 + x_0 = 0$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$ $\quad (0,0) \notin \mathcal{D}(f)$

$x_0 = -\frac{1}{5}$ $\quad y_0 = -\frac{2}{5}$

$$\boxed{T\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}\ln 5\right)}$$

$z = \ln\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \ln\sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{2}\ln 5$

) a) $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{yz}\cdot y = ye^{yz}$ $\quad f$ je klase C^1

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = e \neq 0$ $\quad$ PREMA TM O IMPLICITNOJ funkciji takva funkcija postoji

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{y}{ye^{yz}} = -e^{-yz}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{x+ze^{yz}}{ye^{yz}}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -\frac{1e^1}{1e^1} = -1$

$\nabla z(0,1) = -\frac{1}{e}\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{h}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ $\quad \nabla z(0,1)\cdot\vec{h}_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}e} - \frac{2}{\sqrt{5}}$

(5) $P(x,y) = xy$

$\varphi(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 12 = 0$

TRAŽIMO UVJETNI MAKSIMUM FUNKCIJE $P(x,y)$ uz uvjet $\varphi(x,y)=0$

LAGRANGEOVA FUNKCIJA

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(2x^2+3y^2-12)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x' = y + 4\lambda x = 0 \\ L_y' = x + 6\lambda y = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{y}{4x} = \frac{x}{6y} \iff 3y^2 = 2x^2 \qquad \left(\lambda = -\frac{y}{4x}\right)$$

$$L_\lambda' = 2x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \qquad 4x^2 = 12 \quad x^2 = 3 \quad x = \sqrt{3} \quad (x = -\sqrt{3} \text{ otpada jer } x>0)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2} \qquad \left(\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\right)$$

stacionarna točka $S(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ $\lambda = -\frac{\sqrt{6}}{12}$

$$d^2L = 4\lambda(dx)^2 + 2\,dx\,dy + 6\lambda(dy)^2$$

DIFERENCIJAL UVJETA $4x\,dx + 6y\,dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{2x}{3y}dx$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}dx = -\frac{\sqrt{6}}{3}dx$$

$$d^2L\Big|_S = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)(dx)^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}(dx)^2 - \frac{6\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{6}{9}(dx)^2 = -\frac{4\sqrt{6}}{3}(dx)^2 < 0$$

$\Rightarrow$ u točki S je lokalni uvjetni maksimum

(6) (T1) AKO RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA TADA JE $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

TVRDNJA JE TOČNA! (NUŽAN UVJET KONVERGENCIJE REDA)

DOKAZ $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$

Red $\sum a_n$ KONVERGIRA ZNAČI DA NIZ (S_n) KONVERGIRA ODNOSNO

POSTOJI $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

SADA IMAMO

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

(T2) AKO NIZ (a_n) KONVERGIRA TADA I RED $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA

TVRDNJA JE NETOČNA!

PROTUPRIMJER $a_n = 1 \quad \forall n \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

red $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ DIVERGIRA

7) a) Polumjer konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,5^n}{7^n}(x-2)^{n-1}$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)5^{n+1}}{7^{n+1}}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}\,5^{1+\frac{1}{n}}}{7^{1+\frac{1}{n}}}} = \frac{7}{5}$$

d'Alembert: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{5}{7}|x-2|$

$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{5}{7}|x-2| < 1$

$|x-2| < \frac{7}{5}$

$R = \frac{7}{5}$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{7}(x-2)\right)^{n-1}\cdot\frac{5}{7} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{7}(x-2)\right)^n\right]' =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{7}(x-2)\right)^n\right)' = \left(\frac{1}{1-\frac{5}{7}(x-2)}\right)' = \left(\frac{7}{17-5x}\right)' = -\frac{7}{(17-5x)^2}(-5) =$$

$$= \frac{35}{(17-5x)^2}$$

8 a) $\underbrace{(2x+y^3)}_{P}dx + \underbrace{(3xy^2 - e^{-2y})}_{Q}dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{EGZAKTNA JEDN.}$$

$$\int_{x_0=0}^{x} (2x+y^3)\,dx + \int_{y_0=0}^{y} (\underbrace{3x_0y^2}_{=0} - e^{-2y})\,dy = C$$

$$(x^2+y^3x)\Big|_0^x + \frac{e^{-2y}}{2}\Big|_0^y = C$$

$$x^2+xy^3+\frac{1}{2}e^{-2y} - \frac{1}{2} = C$$

$$x^2+xy^3+\frac{1}{2}e^{-2y} = \underbrace{C+\frac{1}{2}}_{K} \quad \text{OPĆE RJ.}$$

$$y(-1) = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^2 + (-1)\cdot 0 + \frac{1}{2}e^0 = K \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

RJ: $\underline{\underline{x^2+xy^3+\frac{1}{2}e^{-2y} = \frac{3}{2}}}$

8) b) $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$

a) Clairautova jednadžba

$y' = p$

$dy = p\,dx$

$y = xp + \frac{1}{2}p^2$

$dy = p\,dx + (x+p)\,dp$

$p\,dx = p\,dx + (x+p)\,dp = 0$

$p'(x+p) = 0$

$p' = 0 \qquad x = -p$

$y' = c$

$y = xc + \frac{1}{2}c^2$ OPĆE RJEŠENJE

$x = -p \Rightarrow p = -x$

$y = xp + \frac{1}{2}p^2$

$$\boxed{y = -x^2 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{x^2}{2}}$$

$y = -\frac{x^2}{2}$ SINGULARNO RJEŠENJE.

b) $y = -\frac{x^2}{2}$

$y = xc + \frac{1}{2}c^2$

$-\frac{x_0^2}{2} = x_0c + \frac{1}{2}c^2$

$c^2 + 2cx_0 + x_0^2 = 0$

$c_{1/2} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2}}{2} = -x_0$

9) (a) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow \ldots \Rightarrow y^{(n)} = r^n e^{rx}$

$r^n e^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + \ldots + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0$

$e^{rx}[r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1r + a_0] = 0$

$\ne 0 \qquad P(r) = 0$

(b)

$$W = \begin{vmatrix} \sin(2x) & \cos(2x) & 1 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & 0 \end{vmatrix} = y_1'y_2'' - y_2'y_1'' =$$

$= 2\cos(2x)(-4\cos(2x)) + 2\sin(2x)(-4\sin(2x))$

$= -8\cos^2(2x) - 8\sin^2(2x) =$

$= -8(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)) = -8 \neq 0$

$y_1' = 2\cos(2x)$

$y_2' = -2\sin(2x)$

$y_1'' = -4\sin(2x)$

$y_2'' = -4\cos(2x)$

FUNKCIJE SU LINEARNO NEZAVISNE

c) NULTOČKE $r_1 = 2i \quad r_2 = -2i \quad r_3 = 0$

$(r^2+4)r = 0 \qquad r^3 + 4r = 0 \qquad y''' + 4y' = 0$

(10) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$r^2 - 2r + 2 = 0$

$r_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$r_1 = 1 + i \quad r_2 = 1 - i$

$y_H = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$

Desna strana $\quad f_1(x) = x \quad\quad \alpha = 0, \beta = 0, \quad p = 1$
$m = 0$

(1) $y_{P_1} = (Ax + B)$

$y_{P_1}' = A \quad\quad 0 + 2A + 2(Ax + B) = x \quad\quad 2A = 1 \quad\quad A + B = 0$

$y_{P_2}'' = 0 \quad\quad (2A + 2B) + 2Ax = x \quad\quad A = \frac{1}{2} \quad\quad B = -\frac{1}{2}$

$y_{P_1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(2) Desna strana $\quad f_2(x) = e^{-x}$

$\alpha = -1, \beta = 0 \quad m = 0 \quad p = 0$

$y_{P_2} = Ae^{-x}$

$y_{P_2}' = -Ae^{-x}$

$y_{P_2}'' = Ae^{-x}$

$Ae^{-x} + 2Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = e^{-x}$

$5Ae^{-x} = e^{-x} \quad\quad 5A = 1 \quad\quad A = \frac{1}{5} \quad\quad y_{P_2} = \frac{1}{5}e^{-x}$

Rj $\quad y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}e^{-x}$