

1. Odredite smjer najbržeg rasta funkcije $f(x, y, z) = 15 + \sin 2x \sin y + 3 \cos 2x + 4 \sin 2z$ u točki $T\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Izračunati $\nabla(x^2 + xy^3 + ye^z)$ u točki $T(1, 1, 1)$. Odrediti jednadžbu tangencijalne ravnine.
3. Za funkciju $u = f(x, y, z)$ definirati usmjerenu derivaciju u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ u smjeru zadanog vektora $\vec{s} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$.
4. Izračunajte usmjerenu derivaciju funkcije $z = \arctg(xy)$ u točki $T\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ u smjeru vektora $\vec{h} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$.
5. (a) Dokazati da je $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$, gdje je $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
(b) Dokaži da za $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ i $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ vrijedi $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$.
(c) Izračunajte $\nabla \ln(r)$.
6. Odredite $\frac{\partial \left(\frac{\text{tg}(r)}{r}\right)}{\partial x}$, gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
7. Dokažite da za funkciju $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ vrijedi $\nabla f(r) = -2e^{-r^2} \vec{r}$, gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
8. Za funkciju $y = y(x)$ zadanu implicitno sa $x^2 y^3 + \sin(x - y) = 0$, odredi $\frac{dy}{dx}$.
9. Za funkciju $z = z(x, y)$ zadanu implicitno sa $x^2 + y^2 + ze^{yz} = 5$, odredi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ u točki $T(2, 1, 0)$.
10. Nađi dz i d^2z za funkciju zadanu implicitno sa $z = e^{x+y+z-1}$.
11. Nađi dz i d^2z za funkciju zadanu implicitno sa $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - z + 4 = 0$ u točki $T(2, 0, 1)$.
12. Za funkciju $z = z(x, y)$ zadanu implicitno sa $x^2 z + yz^3 = 5$ odredi:
(a) jednadžbu tangencijalne ravnine i normale u $(1, 4, 1)$,
(b) kosinus kuta između gradijenata u točkama $T_1(1, -5, -1)$ i $T_2(3, 2, 1)$.
13. Odredi jednadžbu tangencijalne ravnine u točki $(1, -1, z_0)$ za funkciju $z = z(x, y)$ zadanu implicitno sa $x^2 y + xy^2 + x^2 yz - z + e^{2z} - 1 = 0$.
14. Napiši Taylorov polinom funkcije $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + x - y + 1$ po potencijama od $(x - 1)$ i $(y + 1)$.
15. Nađi Taylorov polinom 2. stupnja u točki $(0, 0)$ funkcije $f(x, y) = e^x \cos(x + y)$.
16. Nađi Taylorov polinom funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno sa $z + xy + e^z = 3$ u točki $(2, 1)$ za $z(2, 1) = 0$.