MATEMATIKA 2
DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Last update: 6.7.2009 1:13

1. 10. knjižica (1. tjedan 3. ciklusa) – Dif. jed. prvog reda

1.1. Familija krivulja

Npr. odredi dif. jednadžbu familije parabola $y = C_1(x - C_2)^2$ (primjer 5, str. 5)

- eliminacija konstanti iz sustava deriviranjem parabole dok se neće moći riješiti kolike su konstante

1.2. Cauchyjeva zadaća

Određivanje funkcije y koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu n-tog reda i n početnih uvjeta:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1})$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

...

$$y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

naziva se Cauchyjeva zadaća. Tu su $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ zadani realni brojevi.

1.3. Polje smjerova (izokline)

Npr. 10. domaća zadaća zadaci 1 - 5

1.4. Separacija varijabli - $f(y)dy = g(x)dx$

- neposredno se integrira ($\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$) te ukoliko je zadan početni uvjet $y(x_0) = y_0$ onda su x_0 i y_0 donje granice određenog integrala

$\int\limits_{y_0}^{y} f(y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx + C_1$ (npr. 10. domaća zadaća zadaci 6 – 10)

- jednadžba oblika $y' = f(ax + by + c)$ supstitucijom $z = ax + by + c$ svodi se na jed. sa separiranim varijablama (primjer 12, str. 9)

1.5. Homogene jednadžbe - $M(tx, ty) = t^{\alpha} M(x, y); t > 0$

- supstitucija $z = \dfrac{y}{x}$ i $y' = z + z'x$ te onda prelazi u jednadžbu sa separiranim varijablama

- $M(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2x$ - homogena 1. stupnja

- $M(x, y) = x^3 \ln \dfrac{x}{y} + xy^2$ - homogena 3. stupnja

- $M(x, y) = x^2 y + xy^2 + 3$ - nije homogena

- jednadžba $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ biti će homogena ako su M i N homogene funkcije istog stupnja (primjer 20, str. 14)

1.6. Jednadžbe koje se svode na homogene - $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

- 1. slučaj: Sustav $\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{matrix}$ ima rješenje (x_0, y_0). Uvode se supstitucije $x = u + x_0$ i $y = v + y_0$ i jednadžba prelazi u homogenu (primjer 25, str. 17)
- 2. slučaj: Sustav nema rješenje. Supstitucijom $z = a_1x + b_1y$ jednadžba prelazi u jednadžbu sa separiranim varijablama (primjer 26, str. 18)

1.7. Ortogonalne ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) i izogonalne trajektorije

- 1. korak: Odredi dif. jedn. $F(x, y, y') = 0$ familije početne familije eliminacijom konstante C iz sustava jednadžbi
- 2. korak: $tg\alpha = \frac{y'_1 - y'_2}{1 + y'_1 y'_2}$. Izlučimo y'_1 kao funkciju od y'_2 (za $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ vrijedi $y'_1 = \frac{-1}{y'_2}$) i označimo $y'_1 = \psi(y'_2)$
- 3. korak: Tu vezu uvrstimo u dif. jed. familije krivulja. $F(x, y, y') = 0 \Rightarrow F(x, y, \psi(y'_2)) = 0$
- 4. korak: Riješimo dobivenu dif. jed. familije izogonalnih trajektorija te dobivamo traženu familiju krivulja $\phi_2(x, y, C) = 0$
- primjer 27, str. 19 ($\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$) i primjer 28, str. 21 ($\alpha = 45^\circ$)

1.8. Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda - $y' + p(x)y = q(x)$

- 1. korak: Pridružimo joj pripadnu homogenu jednadžbu $y' + p(x)y = 0$ i riješimo ju
- 2. korak: Opće rješenje jednadžbe ($y_h + y_p$) tražimo metodom varijacije konstante
- primjer 29, str. 22 i primjer 30, str. 23

1.9. Bernoulijeva dif. jed. - $y' + p(x)y = q(x) * y^n; n \neq \{0,1\}$

- supstitucijom $z = y^{1-n}$, tj. $\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$ svodi se na linearnu
- primjeri 33 i 34, str. 26

1.10. Riccatijeva dif. jed. - $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$

- ne može se eksplicitno riješiti ali pretpostavimo jedno partikularno rješenje $y_1(x)$
- uvedemo susptituciju $y = y_1 + z$ te se na taj način ona prevede u Bernoulijevu ($z' + (p + 2qy_1)z = -qz^2$) čije opće rješenje znamo
- primjer 35, str. 27

2. 11. knjižica (2. tjedan 3. ciklusa) – Dif. jed. prvog reda (nast)

2.1. Egzaktna diferencijalna jednadžba - $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

Za diferencijalnu jednadžbu $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ kažemo da je jednadžba sa potpunim diferencijalom ili egzaktna ako postoji funkcija dviju varijabla $u=u(x,y)$ kojoj je potpuni diferencijal lijeva strana jednadžbe $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ jednak $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Pdx+Qdy$.

Tada je $u=u(x,y)=C$ opće rješenje jednadžbe $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

2.2. Uvjet za potpuni diferencijal

Pretpostavimo da P i Q imaju neprekinute parcijalne derivacije na nekom području $D\subset R^2$. Da bi $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ bio potpuni diferencijal neke funkcije u nužno je i dovoljno da vrijedi $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ u svakoj točki područja D.

2.3. Rekonstrukcija funkcije iz potpunog diferencijala

Ako je $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ potpuni diferencijal funkcije u onda se ta funkcija može dobiti formulama $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$ ili $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$. Pretpostavlja se da su sve funkcije definirane u točkama (x_0,y_0) i duž puta integracije.

- primjer 2, str. 38

2.4. Eulerov multiplikator

Eulerov multiplikator $\mu=\mu(x)$ računa se formulom $\ln\mu(x)=\int\frac{1}{Q}(P'_y-Q'_x)dx$.

Eulerov multiplikator $\mu=\mu(y)$ računa se formulom $\ln\mu(y)=-\int\frac{1}{P}(P'_y-Q'_x)dy$.

Podintegralne funkcije moraju pritom ovisiti samo o varijabli x odnosno y.

- primjer 5, str. 42 i primjer 6, str. 43
- u zadatku nam može biti i zadano da je multiplikator nekog oblika, npr. $\mu=\varphi(x+y^2)$

→ svakako prouči primjer 7, str. 44

2.5. Parametarski oblik diferencijalne jednadžbe (1) - $y=f(x,y')$

- pretpostavka da se implicitna jednadžba $F(x,y,y')=0$ može napisati u obliku $y=f(x,y')$
- uvodimo parametar p tako da je $y'=p$ te dif. jed. sadrži nepoznanice x i p

$$y'=p$$

$$\frac{dy}{dx}p$$

$$dy=pdx$$

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp=pdx$$

- dobili smo dif. jed. iz koje treba izračunati p kao funkciju od x ili obratno te y određujemo iz $y=f(x,p)$

- primjer 8, str. 46 → pojavljivanje singularnog rješenja (pročitaj značenje ispod slike 11.2 na str. 47)

2.6. Parametarski oblik diferencijalne jednadžbe (2) - $F(y, y')=0$

- pretpostavka da jednadžbu možemo riješiti po nepoznanici y tako da dobivamo $y=f(y')$ odnosno nakon supstitucije $y'=p$ dobivamo $y=f(p)$

$$dy = pdx$$

$$dy = f'(p)dp$$

$$pdx = f'(p)dp$$

$$x = \int \frac{1}{p} f'(p)dp$$

- time smo dobili parametarku jednadžbu rješenja
- primjer 9, str. 48

2.7. Parametarski oblik diferencijalne jednadžbe (3) - $x = f(y, y')$

- riješavamo jednadžbu po nepoznanici x tako da dobijemo oblik $x=f(y,y')$
- uvodimo parametar p , tj. supstituciju $y'=p$
- diferenciranjem izraza $x=f(y,p)$ dobivamo

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp$$

$$dy = pdx$$

$$dy = p(\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp)$$

- iz ove jednadžbe nalazimo y kao funkciju parametra p što zajedno s $x=f(y,p)$ daje parametarsko rješenje jednadžbe
- primjer 10, str. 48

2.8. Parametarski oblik diferencijalne jednadžbe (4) - $F(x, y')=0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

$$x = f(y') = f(p)$$

$$dx = f'(p)dp$$

$$dy = pdx$$

$$dy = pf'(p)dp$$

$$y = \int pf'(p)dp + C$$

- eliminacijom parametra p dobivamo opće rješenje u obliku $\phi(x,y,C)=0$.
- primjer 11, str. 49

2.9. Rješenje diferencijalne jednadžbe

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = f(x,y)$ je familija funkcija $y = \varphi(x,C)$ koja zadovoljava uvjete:

1) Za svaku moguću vrijednost od C funkcija $y = \varphi(x,C)$ zadovoljava jednadžbu: $\varphi'_x(x,C) = f(x,\varphi(x,C))$

2) Za bilo koju točku $(x_0, y_0) \in D$ možemo odrediti konstantu $C = C_0$ tako da bude $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Za rješenje jednadžbe reći ćemo da je na intervalu I:

1) singularno ako je u svakoj točki integralne krivulje narušen uvjet jednoznačnosti (tj. kroz svaku njegovu točku prolazi i neko drugo rješenje)

2) regularno ako je u svakoj njegovoj točki ispunjen uvjet jednoznačnosti (tj. niti kroz jednu njegovu točku ne prolazi neko drugo rješenje)

Partikularno rješenje dobivamo uvrštavanjem konkretne vrijednosti za konstantu u opće rješenje.

2.10. Postojanje rješenja – Peanov teorem egzistencije

Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekinuta u nekom pravokutniku D oko točke (x_0, y_0). Cauchyjeva zadaća $\begin{matrix} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{matrix}$ ima bar jedno rješenje u nekom okolišu točke x_0.

- primjer 12, str. 51

2.11. Jednoznačnost rješenja – Picardov teorem jednoznačnosti

Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana na pravokutniku D oko točke (x_0, y_0) i ima sljedeća svojstva:

1) f je neprekinuta na D;

2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena na D.

Onda postoji interval $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ na kojem postoji jednoznačno rješenje Cauchyjeve zadaće.

- primjeri 13, 14 i 15, str. 53

2.12. Lagrangeova jednadžba - $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, $p \neq \varphi(p)$

- jed. rješavamo uvodeći parametar $y' = p$ koji će biti funkcija od x

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi(p)}{p - \varphi(p)}, \; p \neq \varphi(p)$$

- dobivamo linearnu jednadžbu po x koju možemo lako riješiti

2.13. Clairautova dif. jednadžba - $y = y'x + \psi(y')$, $p = \varphi(p)$

- zanima nas 2. slučaj kad dobivamo singularno rješenje $x = -\psi'(p)$
- zajedno s $y = px + \psi(p)$ dobivamo parametarski zadanu funkciju

$$x = -\psi'(p)$$
$$y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

Ovo rješenje možemo dobiti iz jednadžbe diferenciranjem po p: $0 = x + \psi'(p)$

- primjer 19, str. 56

2.14. Dif. jed. prvog reda n-tog stupnja - $A_n(x,y)(y')^n + \ldots + A_1(x,y)y' + A_0(x,y) = 0$

- pokušaju se pogoditi rješenja kvadratne jednadžbe te se jednadžba svede na dvije dif. jed.

prvog reda 1. stupnja (primjer 21, str. 59)

- rješenja kvadratne jednadžbe se dobivaju uvrštavanjem u formulu (primjer 22, str. 59)

2.15. Nalaženje singularnog rješenja dif. jednadžbe

Singularno rješenje možemo dobiti tamo gdje su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1) $F(x, y, y')=0$

2) $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}=0$ ili $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}=\infty$

- primjer 25, str. 61

2.16. Ovojnica

- $F(x, y, y')=0$ je dif. jed. familije krivulja $\phi(x, y, C)=0$

- iz sustava $\begin{matrix} F(x, y, y')=0 \\ \frac{\partial F(x, y, p)}{dp}=0 \end{matrix}$ uz supstituciju $y'=p$ i kasnije eliminacijom parametra p dobivamo singularno rješenje koje je ujedno i ovojnica familije $\phi(x, y, C)=0$, ukoliko ona postoji

- primjer 26, str. 62

3. 12. knjižica (3. tjedan 3. ciklusa) – Dif. jed. višeg reda

Opći oblik dif. jed. n-tog reda: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

3.1. Integriranje snižavanjem reda jed. (1) - $y^{(n)} = f(x)$

- uzastopno integriranje (primjer 1, str. 71)

3.2. Integriranje snižavanjem reda jed. (2) - $F(x, y^{(n)}) = 0$

- ako se može riješiti po $y^{(n)}$ onda se svodi na 3.1
- ako nemože onda rješenje tražimo u parametarskom obliku
- stavimo supstitucije $\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{matrix}$ tako da početna jed. bude zadovoljena, tj. $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$
- nakon n integriranja dobivamo rješenje u parametarskom obliku $\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, ..., C_n) \end{matrix}$
- primjer 2, str. 72

3.3. Integriranje snižavanjem reda jed. (3) - $F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0, 1 \le k \le n$

- supstitucijom $y^{(k)} = z$ snižavamo red jednadžbe ($z = z(x)$ je funkcija varijable x)
- primjer 3, str. 72

3.4. Integriranje snižavanjem reda jed. (4) - $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

- supstitucijom $y' = p$ snižavamo red jednadžbe pri čemu je $p = p(y)$ funkcija varijable y.
- početna jednadžba prelazi u $F(y, y', ..., y^{(n)}) = F(y, p, pp', pp'^2, p^2 p'', ...) \equiv F_1(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0$
- primjer 4, str. 73

3.5. Integriranje snižavanjem reda homogene jed. (5) - $y, y', ..., y^{(n)}$

- ako funkcija F za sve $t > 0$ zadovoljava uvjet $F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ... y^{(n)})$ onda ćemo za jed. $F(x, y, y', ... y^{(n)}) = 0$ reći da je homogena u $y, y', ..., y^{(n)}$
- snižavamo red supstitucijama $y = e^{\int z(x)dx}, y' = zy, y'' = (z' + z^2)y$
- primjer 5, str. 74

3.6. Jednadžbe s potpunim diferencijalom - $F(x, y, y', ... y^{(n)}) = 0$

- jednadžbe oblika $F(x, y, y', ... y^{(n)}) = 0$ za koje je funkcija s lijeve strane jednakosti potpuni diferencijal neke funkcije ϕ, dakle oblika $F(x, y, y', ... y^{(n)}) = \dfrac{d}{dx}\phi(x, y, y', ... y^{(n-1)})$
- ako je ovo istina možemo integrirati $\phi(x, y, y', ... y^{(n-1)}) = C$ i na taj način sniziti red jednadžbe
- primjer 6, str. 74 i primjer 7, str. 75 kada je potrebno jed. svesti na potpuni diferencijal

3.7. Picardov teorem jednoznačnosti rješenja dif. jed. višeg reda

Neka je funkcija f definirana u nekom okolišu D točke $(x_0, y_0, y_1, ... y_{n-1})$ i na njemu zadovoljava uvjete:

1) $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ je neprekinuta funkcija,

2) postoji $M > 0$ takav da je $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le M, \left|\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right| \le M, ..., \left|\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right| \le M$.

Onda postoji interval (x_0-h,x_0+h) oko točke x_0 u kojem jednadžba $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ ima jednoznačno rješenje koje zadovoljava početne uvjete $\begin{matrix} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{matrix}$.

3.8. Linearna dif. jed n-tog reda - $A_n(x)y^{(n)}+A_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+A_1(x)y'+A_0(x)y=h(x)$

- ako je funkcija smetnje $h(x)\equiv 0$ za jednadžbu kažemo da je homogena
- u slučaju kada su funkcije $A_n,A_{n-1},...,A_1,A_0$ konstante, jednadžba $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=h(x)$ se zove linearna dif. jed. s konstantnim koeficijentima

3.9. Postojanje i oblik rješenja homogene LDJ drugog reda

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$

Ako je y_1 bilo koje rješenje homogene linearne dif. jed. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ onda svako drugo rješenje ima prikaz $y(x)=y_1(x)(C_2\int\frac{1}{y_1(x)^2}e^{-\int p(x)dx}dx+C_1)$.

Opće rješenje ove jed. može se napisati u obliku $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ gdje su y_1,y_2 dva linearno nezavisna rješenja ove jed., a C_1,C_2 bilo koje konstante.

3.10. Baza rješenja. Opće rješenje homogene jednadžbe

Za par funkcija y_1 i y_2 kažemo da čine bazu rješenja homogene linearne dif. jed. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ ako vrijedi:

1) y_1 i y_2 su rješenja ove jed.
2) te su funkcije linearno nezavisne.

Opće rješenje ove jednadžbe može se napisati u obliku $y=C_1y_1+C_2y_2$

- primjer 10, str. 80

3.11. LDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima - $y''+a_1y'+a_0y=0$

- karakteristična jednadžba: $r^2+a_1r+a_0=0$
- karakteristični polinom: $r^2+a_1r+a_0$

Neka su r_1,r_2 rješenja karakteristične jednadžbe. Tri su mogućnosti:

1) r_1,r_2 su realni i različiti
2) r_1,r_2 su realni i jednaki ($r_1=r_2=r$)
3) r_1,r_2 su konjugirano kompleksni

1. slučaj: realna i različita rješenja

- linearno nezavisna rješenja jednadžbe $y''+a_1y'+a_0y=0$ su $y_1=e^{r_1x},y_2=e^{r_2x}$ pa opće rješenje ima oblik $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ (primjer 11, str. 81)

2. slučaj: dvostruko i realno rješenje ($r_1=r_2=r$)

- opće rješenje ima oblik $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_1x}$

3. slučaj: kompleksno konjugirana rješenja

- rješenja oblika $r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$
- koristimo Eulerovu formulu $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ kako bi opće rješenje koje je u kompleksnom

obliku $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ doveli u realan oblik $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

- primjer 14, str. 83

3.12. Opće rješenje LDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima

Homogena linearna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ima za bazu rješenja sljedeće funkcije, u ovisnosti o naravi korijena r_1, r_2 pripadne karakteristične jednadžbe:

1) Ako su r_1, r_2 realni i različiti, bazu čine funkcije $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$.

2) Ako su korijeni realni i jednaki, $r_1 = r_2$, bazu čine funkcije $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_1 x}$.

3) Ako su korijeni kompleksno konjugirani brojevi, $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, bazu čine funkcije $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

- primjer 15, str. 84

4. 13. knjižica (4. tjedan 3. ciklusa) – LDJ višeg reda

4.1. Determinanta Wronskog i linearna nezavisnost

Neka su $y_1,...,y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$. Determinanta Wronskog (Wronskijana) definira se s

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ako Wronskijana nije identički jednaka nuli tada su funkcije linearno neavisne.
- 13. domaća zadaća, zadaci 1 i 2

4.2. Baza (temeljni sustav) rješenja

Skup $\{y_1,...,y_n\}$ linearno nezavisnih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda naziva se baza rješenja ili temeljni sustav rješenja linearne dif. jed.

4.3. Nalaženje partikularnog rješenja – metoda varijacije konstanti

- nehomogena jednadžba $y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+...+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x)$
- svako rješenje takve jed. može se prikazati u obliku y_h+y_p gdje je y_h opće rješenje pripadne homogene jednadžbe a y_p partikularno rješenje nehomogene jed.

Metoda varijacije konstanti
- prvo riješimo homogonu jednadžbu tako da je lijeva strana $=0$
- onda se metodom varijacije konstanti odrede konstante, kako?

1. korak: umjesto C uvrštavamo $C(x)$ u homogenu jednadžbu i tu jednadžbu ubacujemo u zadanu (prvu; po potrebi deriviramo jednom ili više puta ako u toj prvoj jednadžbi imamo prvu, drugu, itd... derivaciju)

2. korak: $C(x)$ se moraju pokratiti i ostaje $C'(x)$ kojeg izlučimo, integriramo i riješimo te dobijemo $C(x)$

3. korak: $C(x)$ uvrštavamo u homogenu i ako je zadan uvjet iskoristimo ga i to je to

- pogledajte još postupke rješavanja zadataka 13 – 16 iz 13. domaće zadaće ili knjižicu na str. 99 – 100

4.4. Algoritam za rješavanje homogene jednadžbe

Homogenu linearnu dif. jed. n-tog reda s konstantnim koeficijentima $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=0$ rješavamo ovako:

1) Nađemo sve nultočke karakterističnog polinoma: $P(r)=(r-r_1)^{n_1}\cdots(r-r_k)^{n_k}$.

2) Svakom realnom korijenu r_i višestukosti n_i odgovara n_i nezavisnih rješenja: $e^{r_ix}, xe^{r_ix},...,x^{n_i-1}e^{r_ix}$.

3) Svakom paru kompleksno-konjugiranih nultočaka $r_i=\alpha+i\beta, r_{i+1}=\alpha-i\beta$ višestrukosti $n_i(n_i=n_{i+1})$ odgovara $2n_i$ rješenja dif. jed. $\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,...,x^{n_i-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,...,x^{n_i-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}$.

Opće rješenje homogene jed. jest linearna kombinacija svih $n=n_1+n_2+...+n_k$ rješenja ovog oblika
- primjer 9, str. 103

4.5. Algoritam za određivanje partikularnog rješenja

1. Ako je funkcija smetnje oblika $f(x)=e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x\right]$ gdje su Q_1, Q_2 polinomi stupnja $\leq p$, tad jednadžba $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1 y'+a_0 y=f$ ima partikularno rješenje $y_p=x^m e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos\beta x+R_2(x)\sin\beta x\right]$.
Ovdje je m višestrukost broja $\alpha+i\beta$ kao nultočke karakterističnog polinoma. R_1 i R_2 su polinomi stupnja p, kojima koeficijente određujemo uvrštavanjem funkcije y_p u jednadžbu $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1 y'+a_0 y=f$.
2. Ako je $f(x)=f_1(x)+...+f_k(x)$ i y_p partikularno rješenje jednadžbe $Ly=f_i$, onda je $y_p=y_{p_1}+...+y_{p_k}$ partikularno rješenje jednadžbe $Ly=f$.
3. Ako f nije gornjeg oblika, tada y_p možemo odrediti metodom varijacije konstante.
- primjer 10, str. 104

4.6. Eulerova jednadžba - $x^2 y''+pxy'+qy=0$ (2. reda)

- karakteristična jednadžba Eulerove dif. jed.: $k^2+(p-1)k+q=0$.

1. slučaj: rješenja su realna i različita
- opće rješenje ima oblik: $y=C_1x^{k_1}+C_2x^{k_2}$.
- primjer 12, str. 105 i primjer 13, str. 106

2. slučaj: dvostruko realno rješenje
- opće rješenje ima oblik: $y=x^{k_1}(C_1+C_2\ln x)$.
- primjer 13, str. 106

3. slučaj: kompleksno konjugirana rješenja
- opće rješenje ima oblik: $y=x^{\alpha}\left[C_1\cos(\beta\ln x)+C_2\sin(\beta\ln x)\right]$.

4.7. Rješavanje Eulerove jed. zamjenom varijabli

- zamjena varijabli $x=e^t$
- iz jednadžbe eliminiramo x i na kraju dobivamo jed. s konstantnim koeficijentima

4.8. Rješavanje dif. jed. s pomoću redova

4.9. Singularne točke

4.10. Besselova dif. jednadžba