ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2
20.06.2008.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. [3 boda] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(3x + 6y^2)dx + (6xy + 4\frac{y^3}{x})dy = 0.$$

$$P = 3x + 6y^2 \Rightarrow P'_y = 12y$$

$$Q = 6xy + 4\frac{y^3}{x} \Rightarrow Q'_x = 6y - 4\frac{y^3}{x^2}$$

$P'_y \neq Q'_x$ pa jednadžba nije egzaktna – rješavamo preko Eulerovog multiplikatora

$$\frac{1}{Q}\left(P'_y - Q'_x\right) = \frac{1}{6xy - 4\frac{y^3}{x}} \cdot \left(6y + 4\frac{y^3}{x^2}\right) = \frac{x}{6x^2y - 4y^3} \cdot \frac{6x^2y - 4y^3}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Eulerov multiplikator je oblika $\mu = \mu(x)$

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}\left(P'_y - Q'\right)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\mu(x) = x$$

Sa x pomnožimo početnu jednadžbu:

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$$

i riješimo tu egzaktnu jednadžbu:

$$u(x, y) = \int_{x_0=0}^{x}\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \int_{y_0=0}^{y}\left(6x_0^2y + 4y^3\right)dy = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$$

i rješenje je:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

2. [3 boda] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + \frac{y}{x} = x^8.$$

Ovo je jednadžba oblika: $y' + p(x)y = q(x)$

1) najprije riješimo pripadnu homogenu jednadžbu:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = \ln\frac{C}{x} \Leftrightarrow y = \frac{C}{x} \quad \textbf{(*)}$$

2) varijacija konstante:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

3) to ubacujemo u početnu jednadžbu:

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{C(x)}{x}\frac{1}{x} = x^8$$

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^8 \Leftrightarrow C'(x) = x^9$$

//integriramo//

$$C(x) = \frac{x^{10}}{10} + C$$

4) *C(x)* ubacimo u **(*)**:

$$y = \frac{\frac{x^{10}}{10} + C}{x} = \frac{x^9}{10} + \frac{C}{x}$$

3. [4 boda] Naći krivulju koja nije pravac, a za koju tangenta u bilo kojoj točki čini s koordinatnim osima trokut površine 4.

Riješio kolega Wolfman ☺

Ja sam zapisao jednadžbu tangente ovako:

x/a+y/b=1 gdje su a i b segmenti koje tangenta odsjeca na osima x i y (dakle segmentni oblik jednadžbe).
Još ti je zadano da je površina trokuta konstantna, tj. P=|a*b|/2=4

|ab|=8

Onu segmentu jednadžbu deriviraš i dobivaš y'=-b/a, pa iz uvjeta slijedi b=8/a (uzet ćemo samo pozitivnu vrijednost da ne pišem stalno +-, na kraju samo napišeš taj plus/minus), tj. y'=-8/a^2.

a=Sqrt(-8/y')

iz jednadžbe tangente:

y=b(1-x/a), pa nakon uvrštavanja a i b dobivaš:

y=xy'+8*Sqrt(-y'/8), što je obična Clairautova jednadžba.
Tražiš partikularno rješenje, zamjena y'=p i deriviranje:

y'=p=p+xp'-p'/(2Sqrt(-p/8))
p'(x-1/2*Sqrt(-8/p))=0

p'=0 daje familiju pravaca, no to nas ne zanima, dakle:

x=1/2*Sqrt(-8/p) / sve na kvadrat

x^2=1/4*(-8)/p=-2/p

p=-2/x^2
y'=-2/x^2 =>y=2/x

Da smo na početku uzeli da je b=-8/a dobili bi y=-2/x, pa je rješenje

y=+-2/x :)

4. [**3 boda**] Naći opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = (y')^2 - 3xy' + 3x^2.$$

Uzimamo zamjenu $y' = p$, gdje je p funkcija od x, tj. $p = p(x)$

$$y = p^2 - 3xp + 3x^2 \quad \textbf{(*)}$$

Tu jednadžbu deriviramo po x-u:

$$y' = 2pp' - 3p - 3xp' + 6x$$

$$p = 2pp' - 3p - 3xp' + 6x$$

$$2pp' - 4p - 3xp' + 6x = 0$$

$$p'(2p - 3x) - 2(2p - 3x) = 0$$

$$(p' - 2)(2p - 3x) = 0$$

1) Iz $p' - 2 = 0$ dobijemo **opće rješenje**:

$$p' = 2$$

$$\frac{dp}{dx} = 2 \Leftrightarrow dp = 2dx \Leftrightarrow p = 2x + C$$

i taj p ubacimo u **(*)** pa dobijemo:

$$y = (2x + C)^2 - 3x(2x + C) + 3x^2$$

2) Iz $2p - 3x = 0$ dobijemo **singularno rješenje**:

$$2p - 3x = 0 \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}x$$

i taj p ubacimo u **(*)** pa dobijemo:

$$y = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 3x \cdot \frac{3}{2}x + 3x^2$$

$$y = \frac{3}{4}x^2$$

5. [3 boda] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$2(y')^2 = (y-1)y''.$$

Uzmemo zamjenu $y' = p$. Trebamo naći y'' i onda to uvrstit u jednadžbu.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = pp'$$

Pa dobijemo:

$$2p^2 = (y-1)pp'$$

$$(y-1)p\frac{dp}{dy} = 2p^2 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}$$

//integriramo//

$$\ln p = \ln C_1(y-1)^2$$

$$p = C_1(y-1)^2$$

$$y' = C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2$$

$$\frac{1}{C_1}\frac{dy}{(y-1)^2} = dx$$

//integriramo//

//zamjena $y - 1 = u$ pa imamo dy = du, odnosno $\int \frac{du}{u^2}$//

$$\frac{1}{C_1}\frac{-1}{y-1} = x + C_2$$

$$(x+C_2)(y-1) = \frac{-1}{C_1}$$

Stavimo da je $\frac{-1}{C_1} = E$, a $C_2 = C$, pa je rješenje:

$$(x+E)(y-1) = C$$

6. [**4 boda**] Naći ono rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = \frac{1}{(\sin x)^3}$$

koje zadovoljava uvjete

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

1) riješimo pripadnu homogenu jednadžbu:

$$y'' + y = 0$$

Karakteristična jednadžba je:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i$$

$$r = \alpha \pm \beta i$$

Iz toga dobivamo da je $\alpha = 0$ i $\beta = 1$.

Pa nam je rješenje homogene jednadžbe:

$$y_H = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

2) varijacija konstante:

$$y_H = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

3) slijedi postupak (opisan na 99./100. str. u knjižici):

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{(\sin x)^3}$$

Prvu jednadžbu podijelimo sa cos *x*, a drugu sa sin *x* i zbrojimo ih:

$$C_1'(x) + C_2'(x) \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$-C_1'(x) + C_2'(x) \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{(\sin x)^3}$$

$$C_2'(x)\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{1}{(\sin x)^3}$$

$$C_2'(x)\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{1}{(\sin x)^3}$$

$$C_2'(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

//integriramo//

$$C_2(x)=-\frac{1}{\sin x}+C_2$$

Zatim $C_2'(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ ubacimo u jednu od gornjih jednadžbi da dobijemo $C_1'(x)$.

$$C_1'(x)+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\frac{\sin x}{\cos x}=0$$

$$C_1'(x)=-\frac{1}{\sin x}$$

//integriramo//

$$C_1(x)=-\ln\tan\frac{x}{2}+C_1$$

Pa je opće rješenje:

$$y=\left(-\ln\tan\frac{x}{2}+C_1\right)\cos x+\left(-\frac{1}{\sin x}+C_2\right)\sin x$$

Nađemo prvu derivaciju:

$$y'=\left(-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos x-\left(\ln\tan\frac{x}{2}+C_1\right)\sin x+C_2\cos x$$

Iskoristimo uvjete:

$$0=-1+C_2\Rightarrow C_2=1$$

$$1=-C_1\Rightarrow C_1=-1$$

Rješenje je:

$$y=\left(-\ln\tan\frac{x}{2}-1\right)\cos x+\left(-\frac{1}{\sin x}+1\right)\sin x$$