

Matematika 2

2. Masovne instrukcije

Vektori. Pravac i ravnina.

11. ožujka 2011.

(pripremio V. Ćosić)

Zadatak 1. (Skalarni produkt)

Zadani su vektori $\vec{p} = \lambda\vec{a} + 17\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, gdje je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Odredi:

- (a) koeficijent λ tako da vektori \vec{p} i \vec{q} budu međusobno okomiti,
- (b) duljinu vektora $\vec{r} = 4\vec{p} - 23\vec{q}$.

Zadatak 2. (Skalarna i vektorska projekcija)

Zadane su točke $A(2, 3, 2)$, $B(0, 1, 1)$, $C(4, 4, 0)$ i $D(8, 6, 6)$. Odredite vektorsku projekciju vektora \overrightarrow{AB} na vektor \overrightarrow{CD} i njezinu duljinu.

Zadatak 3. (Vektorski produkt)

Dani su vektori $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ i $\vec{c} = (-1, -2, -1)$.

- (a) Odredite parametar λ takav da je $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda$.
- (b) Odredite vektor \vec{d} koji zadovoljava uvjete $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.
- (c) Pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.

Zadatak 4. (Linearna kombinacija vektora)

(a) Zadan je deltoid $ABCD$. Neka je točka E presjecište dijagonala. Prikaži vektor \overrightarrow{BE} kao linearnu kombinaciju vektora \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BC} .

(b) Točke P i Q imaju radij vektore \vec{p} i \vec{q} s obzirom na ishodište O . Neka je točka X polovište od \overrightarrow{PQ} i točka Y takva da je $\overrightarrow{OY} = 2\overrightarrow{YX}$. Prikaži \overrightarrow{OY} i \overrightarrow{PY} pomoću \vec{p} i \vec{q} .

Zadatak 5. (Površina i visina trokuta i paralelograma)

(a) Trokut ABC $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. Odredite površinu P i visinu v_c spuštenu iz vrha C .

(b) Odredite površinu paralelograma s dijagonalama $\vec{e} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{f} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 8\vec{k}$.

Zadatak 6. (Površina i duljina dijagonala romba)

Neka su \vec{a} i \vec{b} jedinični vektori koji zatvaraju kut od $\frac{\pi}{3}$. Izračunajte duljine dijagonala i površinu romba razapetog vektorima \vec{a} i \vec{b} .

Zadatak 7. (Mješoviti produkt)

Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ i $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$.

- (a) Izračunajte mješoviti produkt vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} .
- (b) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da su vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} komplanarni.

Zadatak 8. (Volumen i visina paralelepipeda)

- (a) Izračunajte volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$ i $\vec{c} = (1, 2, 1)$.
- (b) Izračunajte visinu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = (3, 2, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, 4)$ i $\vec{c} = (1, -3, 1)$ ako je osnovica paralelogram razapet vektorima \vec{a} i \vec{b} .

Zadatak 9. (Jednadžba ravnine)

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T_0 = (2, -1, 3)$ i:

- (a) na koordinatnim osima odsijeca iste odsječke $a \neq 0$,
- (b) sadrži x -os,
- (c) sadrži ishodište i točku $T = (1, 1, 1)$.

Zadatak 10. (Pramen ravnina)

Kroz presjek ravnina $4x - y + 3z - 1 = 0$ i $x + 5y - z + 2 = 0$ postavi ravninu tako da:

- (a) prolazi točkom $M(1, 0, 2)$,
- (b) je paralelna sa xy -ravninom,
- (c) je okomita na ravninu $2x - y + 5z - 3 = 0$.

Zadatak 11. (Okomite ravnine)

- (a) Odredite jednadžbu ravnine π_0 koja prolazi točkom $M(2, -1, 1)$ i okomita je na ravnine

$$\begin{aligned}\pi_1 \dots 3x + 2y - z - 4 &= 0 \\ \pi_2 \dots x + y + z - 3 &= 0\end{aligned}$$

- (b) Odredite jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $A(1, 2, 3)$ i $B(3, 2, 1)$ i okomita je na ravninu $\pi_1 \dots 4x - y + 2z - 7 = 0$.

Zadatak 12. (Jednadžba pravca)

Odredite kanonsku i parametarsku jednadžbu pravca koji:

(a) prolazi točkama $M(1, 2, -1)$ i $N(2, 0, 3)$,

(b) je zadan kao presjek ravnina

$$\begin{aligned}\pi_1 \dots x - y + z - 4 &= 0 \\ \pi_2 \dots 2x + y - 2z + 5 &= 0\end{aligned}$$

Zadatak 13. (Okomiti pravci)

Zadane su točke $A(1, 2, 2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(-1, 5, 2)$ i $D(2, -1, 0)$. Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $T(1, 2, 3)$ i okomit je na pravce određene vektorima \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{CD} .

Zadatak 14. (Ravnina paralelna pravcu)

Odredite jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $A(1, 0, -1)$ i $B(-1, 2, 1)$, a paralelna je s pravcem p koji je presjek ravnina

$$\begin{aligned}\pi_1 \dots 3x + y - 2z - 6 &= 0 \\ \pi_2 \dots 4x - y + 3z &= 0\end{aligned}$$

Zadatak 15. (Sjecište pravca i ravnine)

Zadan je pravac p kao presjek ravnina $\pi_1 \dots x - 2z - 3 = 0$ i $\pi_2 \dots y - 2z = 0$. Odredite sjecište pravca p i ravnine $\pi \dots x + 3y - z + 4 = 0$.

Zadatak 16. (Sjecište dvaju pravaca)

Odredite sjecište pravaca

$$\begin{aligned}p_1 \dots \frac{x-1}{4} &= \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1} \\ p_2 \dots \frac{x}{3} &= \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{0}\end{aligned}$$

Zadatak 17. (Ortogonalna projekcija točke na pravac)

Odredite točku N simetričnu točki $M(1, 0, 2)$ s obzirom na pravac

$$p \dots \frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{1}$$

Zadatak 18. (Ortogonalna projekcija točke na ravninu)

Odredite ortogonalnu projekciju točke $M(-1, 0, 1)$ na ravninu $2x + y - z = 7$.

Zadatak 19. (Ortogonalna projekcija pravca na ravninu)

Odredite parametarsku jednadžbu ortogonalne projekcije q pravca

$$p \dots \frac{x}{-2} = \frac{y - \frac{12}{7}}{1} = \frac{z - \frac{10}{7}}{3}$$

na ravninu $\pi \dots 2x - y + 5z - 5 = 0$.

Zadatak 20. (Udaljenost točaka)

Odredite jednadžbu skupa točaka jednako udaljenih od točaka $A(2, -1, 2)$ i $B(0, 1, 0)$.

Zadatak 21. (Udaljenost ravnina)

Nađite udaljenost između ravnina

$$\begin{aligned}\pi_1 \dots 2x + 3y - 6z + 14 &= 0 \\ \pi_2 \dots 2x + 3y - 6z - 35 &= 0\end{aligned}$$

Zadatak 22. (Udaljenost pravca od ravnine)

Nađite ravninu π koja je paralelna i jednako udaljena od pravaca

$$p_1 \dots \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3x + 2 \end{cases}$$

$$p_2 \dots \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = 4x - 1 \end{cases}$$

Zadatak 23. (Udaljenost točke od pravca)

Odredite udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca

$$p \dots \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

Zadatak 24. (Udaljenost paralelnih pravaca)

Odredite udaljenost između paralelnih pravaca

$$p_1 \dots \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

$$p_2 \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$