1. REDOVI

Red je uređen par dvaju nizova (a_n) i (S_n). Članove niza (a_n) nazivamo i članovima reda, a (S_n) nazivamo nizom parcijalnih suma tog reda. Red zapisujemo simbolom $\sum a_n$.

Kažemo da red $\sum a_n$ ***konvergira*** prema S, odnosno da mu je zbroj jednak S ako je ispunjeno $lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

nuždan uvjet konvergencije reda

Da bi $\sum a_n$ konvergirao, nužno je da bude $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ naziva se ***harmonijski red***. Harmonijski red divergira.

Red s pozitivnim članovima konvergira onda i samo onda ako mu je odozgo ograđen niz parcijalnih suma.

granični oblik poredbenog kriterija

Neka su (a_n) i (b_n) nizovi s pozitivnim članovima takvi da postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

gdje je L broj različit od nule. Tada ili oba reda konvergiraju ili oba divergiraju.

integralni kriterij

Neka je $a_n = f(n)$ pri čemu je funkcija f pozitivna, neprekinuta i opadajuća na intervalu (N, +∞). Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_N^{\infty} f(t)dt$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

D'Alembertov kriterij

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji limes $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ tada vrijedi:

1) za q<1 red konvergira
2) za q=1 nema odluke o konvergenciji
3) za q>1 red divergira

Cauchyjev kriterij

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ tada vrijedi:

1) za q<1 red konvergira
2) za q=1 nema odluke o konvergenciji
3) za q>1 red divergira

Za red $\sum a_n$ kažemo da ***apsolutno konvergira*** ako konvergira red $\sum |a_n|$. Apsolutno konvergentan red je konvergentan. Obrat ne vrijedi.

redovi s alterniranim predznacima

Liebnizov kriterij (doboljan uvjet konvergencije)

Ako za red s alterniranim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ vrijede sljedeći uvjeti:

1) niz (a_n) je padajući
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

tada je on konvergentan.

Umnožak redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ je red $\sum c_n$ kojem su elementi definirani ovako:

$c_1 = a_1 b_1$

$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$

$\vdots$

$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$

Umnožak dvaju konvergentnih redova s pozitivnim članovima je konvergentan red i suma mu je jednaka umnošku njihovih suma.

2. Redovi potencija, Taylorov red

Područje konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

je interval sa središtem u točki a: $D = \{x : |x-a| < R\}$

Za svaki $x \in D$ red konvergira apsolutno. Broj R naziva se ***polumjerom konvergencije reda***. Na skupu $\{x : |x-a| > R\}$ red divergira. Na rubovima područja konvergencije red može ili konvergirati ili divergirati.

Polumjer konvergencije reda R možemo računati formulama:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ ili } R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Ako je f funkcija definirana u nekoj okolini točke a, a ona ima derivacije svakog reda, tada se red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

naziva ***Taylorov red*** funkcije f oko točke a.

Ako izaberemo red potencija oko ishodišta, tj. za a=0, onda se dobiveni red naziva ***Maclaurinov red*** funkcije f:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Neka $f^{(n)}$ postoji u intervalu (a-$\delta, a+\delta$). Tada za svaki xϵ(a-$\delta, a+\delta$) vrijedi formula:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x)$$

Tu je $R_n(x)$ ostatak koji se može prikazati na različite načine.

Lagrangeov ostatak

$$R_n^L(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta(x-a)) \text{ za neki } \vartheta \epsilon (0,1)$$

Cauchyjev ostatak

$$R_n^C(x) = \frac{(x-a)^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \vartheta(x-a)) \text{ za neki } \vartheta \epsilon (0,1)$$

eksponencijalna funkcija

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

sinus i kosinus hiperbolički

$$shx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$chx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

sinus i kosinus

$$sinx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

logaritamska funkcija

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

integriranje i deriviranje reda potencija

Ako je funkcija f prikazana u obliku reda potencija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

koji konvergira na intervalu $D = \{x : |x-a| < R\}$ za neki R>0, tada se njezina derivacija i integral mogu računati formulama:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

Kažemo da niz funkcija (f_n) ***konvergira po točkama*** prema funkciji f na području D, ako za svaki x iz D i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da vrijedi

$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ čim je $n \geq n_0$. Pišemo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Kažemo da niz funkcija (S_n) konvergira ***jednoliko (uniformno)*** prema funkciji S na području D, ako za svaki ε>0 postoji prirodan broj n_0 takav da za svaki $x \epsilon D$ vrijedi

$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ čim je $n \geq n_0$.