8. Ispitajte konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 (2n)}.$$

Rješenje. Riješimo ovaj zadatak pomoću integralnog kriterija. Zapišimo opći član reda kao sljedeću funkciju:
$$f(t) = \frac{1}{t \ln^3 (2t)}.$$

Zatim tražimo točke ekstrema preko izjednačavanja prve derivacije s nulom:
$$f'(t) = -\frac{\ln (2t) + 3}{t^2 \ln^4 (2t)} = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2e^3}$$

Kako odabiremo N kao donju granicu integrala? Vrlo jednostavno: ako je t_0 veći od broja od kojeg kreće indeks sumacije n, onda je $N = t_0$, a ukoliko je t_0 manji od broja od kojeg kreće indeks sumacije n, onda je N broj od kojeg kreće indeks sumacije. Obzirom da je u ovom slučaju $t_0 = \frac{1}{2e^3} < 1$, slijedi da je $N = 1$. Izračunajmo naš integral:
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t \ln^3 (2t)} dt = \begin{bmatrix} u = \ln (2t) \\ du = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^3} = \cdots = \frac{1}{2 \ln^2 (2)}.$$

Obzirom da integral konvergira, i zadani red **konvergira**.

9. Ispitajte konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+7}}{n\sqrt{n}}.$$

Rješenje. Zapišimo opći član reda na sljedeći način:
$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+7}}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+7}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+7}} = -\frac{7}{n^2 + n\sqrt{n^2+7n}}.$$

Kada $n \to \infty$, za gornji izraz možemo pisati:
$$-\frac{7}{n^2 + n\sqrt{n^2+7n}} \sim \frac{1}{n^2+n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

S ovim redom, koji konvergira jer je $2 > 1$, možemo usporediti početni red:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{7}{n^2+n\sqrt{n^2+7n}}}{\frac{1}{n^2}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2}{n^2 + n\sqrt{n^2+7n}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{7}{1 + \sqrt{1 + \frac{7}{n}}} = -\frac{7}{2} \neq 0.$$

Obzirom da se redovi ponašaju isto, zadani red **konvergira**.

10. Izračunajte sumu reda
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}.$$

Rješenje. Obzirom da je svaki od izraza pod n-tom potencijom po apsolutnoj vrijednosti manji od 1, gornja suma može se rastaviti na sljedeće geometrijske redove i izračunati joj sumu (**Pazi:** Indeks sumacije kreće od 1!):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{13}{6}.$$

11. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Rješenje. Zapišimo opći član reda na sljedeći način:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right).$$

Kada $n \to \infty$, za gornji izraz možemo pisati:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{n-1} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

S ovim redom, koji konvergira jer je $\frac{3}{2} > 1$, možemo usporediti početni red:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) = \begin{bmatrix} x = \frac{2}{n-1} \Rightarrow n = \frac{x+2}{x} \\ n \to \infty \Rightarrow x \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x} \ln(1+x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x} \cdot x = \lim_{x\to 0} (x+2) = 2 \neq 0,$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da $\ln(1+x) \sim x$ kada $x \to 0$. Obzirom da se redovi ponašaju isto, zadani red **konvergira**.

12. Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n-1)}.$$

Rješenje. Ovaj zadatak identičan je 1. zadatku iz 1. domaće zadaće čija rješenja možete naći na *materijali.fer2.net*. Rješenje je $S = \frac{1}{2}$.

13. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}.$$

Rješenje. Kada $n \to \infty$, za nazivnik općeg člana reda vrijedi $n(n+1)(n+2) \sim n^3$. Za opći član reda vrijedi:

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}\right| < \frac{1}{n^3}.$$

Obzirom da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergira (jer je $3 > 1$), zadani red **konvergira apsolutno**.

14. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 \operatorname{ch}(n^3)}}.$$

Rješenje. Indentičan kao **4.** zadatak.

15. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Rješenje. Upotrijebimo Cauchyjev kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left[1+\frac{1}{-(n+1)}\right]^n =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left\{\left[1+\frac{1}{-(n+1)}\right]^{-(n+1)}\right\}^{\frac{n}{-(n+1)}} = \frac{1}{3e} < 1.$$

Zadani red **konvergira**.