Redovi brojeva

Ljubo Marangunić

29.02.2012.

Ispitati konvergenciju harmonijskog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \dots+\frac{1}{n}+\ \dots$$

Aritmetička sredina → $a=\frac{x+y}{2}$

Geometrijska sredina → $q=\sqrt{xy}$

Harmonijska sredina → $\frac{1}{h}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}$

2^1 članova ↓ 2^2 članova ↓ 2^3 članova ↓

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right\}+\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right\}+\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ \dots\right.$$

$$=>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+\ \dots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ \dots=\infty$$

Dakle, harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira, ali izrazito sporo. Treba uzeti 12 000 članova da bi suma bila 10, $7\cdot10^{406}$ da bi suma bila 100!

Može se pokazati $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\approx\log n+0.57721$

↑ Eulerova konstanta

Redovi s pozitivnim članovima

$\sum a_n \qquad a_n>0 \qquad \forall n$

Za ove redove očevidno slijedi sljedeći stavak:

Ljubin broj stavka

STAVAK 2:

S obzirom da je (S_n) za redove pozitivnih članova očevidno rastući niz $(S_n\ =\ S_{n-1}\ +\ a_n>S_{n-1})$, onda $\sum a_n$ konvergira onda i samo onda ako je niz parcijalnih suma ograđen odozgor.

Usporedbe redova s pozitivnim članovima

Neka je $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ ... + \ a_n + \ ...$

$\sum b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ ... + \ b_n + \ ...$

$a_n \geq b_n = n \geq n_0$

$b_n \leq a_n = n \geq n_0$

↑ Gotovo svi članovi

N·S·O (ne smanjujući općenitost) $n_0 = 1$

$\sum a_n$= Majoranta reda $\sum b_n$

$\sum b_n$= Minoranta reda $\sum a_n$

DEFINICIJA 3:

Ako za gotovo sve članove reda $\sum a_n$ vrijedi $a_n \geq b_n$ kažemo da je red $\sum a_n$ majoranta reda $\sum b_n$. Ako za gotovo sve članove reda $\sum b_n$ vrijedi $b_n \leq a_n$kažemo da je red $\sum b_n$ minoranta $\sum a_n$.

Vrijedi ovaj kriterij usporedbe:

Vrlo važno!

STAVAK 3 A

Red $\sum b_n$ konvergira ako ima konvergentnu majorantu.

DOKAZ

Pretpostavimo da je $\sum a_n$majoranta koja konvergira, dakle $\sum a_n = M$(konačan broj). Za niz parcijalnih suma taj red vrijedi:

$S_n = a_1 + a_2 + \ ... + a_n \leq M$

Sada je $b_1 + b_2 + \ ... + b_n \leq a_1 + a_2 + \ ... + a_n \leq M$

Dakle, niz parcijalnih suma $\sum b_n$ograđen pa je red $\sum b_n$ prema stavku 2 konvergentan.

STAVAK 3 B

Red $\sum a_n$ divergira ako ima divergentnu majorantu.

DOKAZ

Koristimo tautologiju $A => B <=> \bar{B} => \bar{A}$

Prema stavku 3 A $\sum a_n$konvergira $\rightarrow$ $\sum b_n$ konvergira

$\sum b_n$divergira $\rightarrow$ $\sum a_n$ divergira

Ispitaj konvergenciju sljedećih redova:

ZADATAK 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $\qquad \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ $\qquad$ za $n \geq 3$

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad$ Divergira jer ima divergentnu minorantu.

Majoranta(DIV) ↑ $\qquad$ ↑ Minoranta(DIV)

ZADATAK 2 $\qquad$ ↓Geometrijski red

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ $\qquad \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad$ za $n \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\qquad$ Konvergira jer ima konvergentnu majorantu.

Minoranta(KON) ↑ $\qquad$ ↑ Majoranta(KON)

STAVAK 4 (Kriterij usporedbe – limes varijanta)

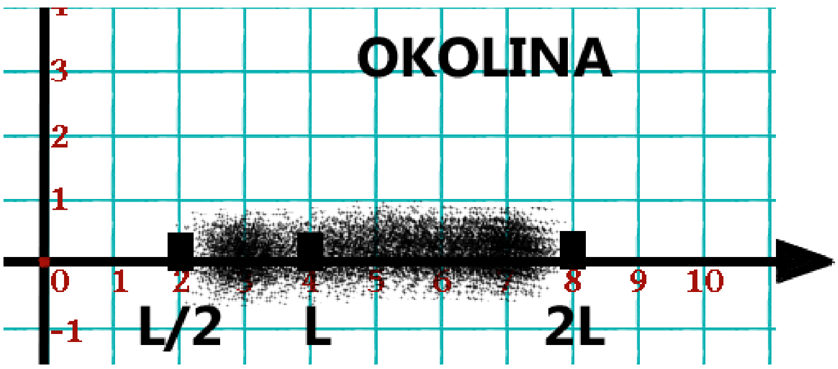
Neka su (a_n) i (b_n) nizovi s pozitivnim članovima takvi da postoji:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L_n \qquad L \neq 0,\ L \neq \infty$$

Onda redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju tj. imaju istu konvergenciju ($\sum a_n \sim \sum b_n$)

DOKAZ

Zbog pretpostavljene konvergencije niza $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ prema L, za dovoljno veliki n vrijedi:



$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L \qquad n \geq n_0$ $\qquad$ ↓Majoranta konvergira

Zato je $a_n < 2L \cdot b_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < 2L \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Ako $\sum b_n$ konvergira onda i $\sum a_n$ konvergira. → Stavak 3A

Ako $\sum a_n$ divergira onda i $\sum b_n$ divergira. → Stavak 3B

Analogno iz nejednakosti $\frac{L}{2} < b_n < a_n \qquad n \geq n_0$

slijedi $L\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

ZADATAK 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+5}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+5}} \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2-3n+5}}} = \frac{\sqrt{n^2-3n+5}}{n} = \sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} \to 1$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2-3n+5}}} = 1 = L \neq 0$ Prema stavku 4 zadani red divergira jer je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentan.

Došao na ispitu!

STAVAK 5 (Integralni kriterij)

$$a_n = a(n)$$

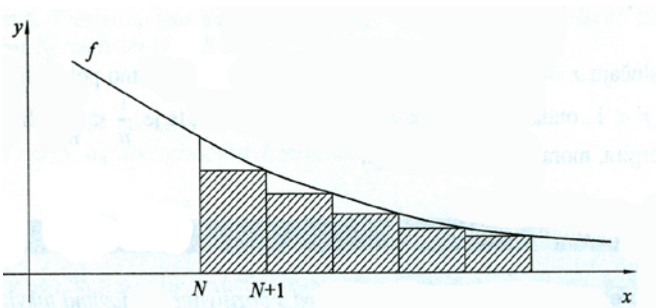
Pri čemu je funkcija a pozitivna, neprekinuta na intervalu $< n_0, \infty >$.

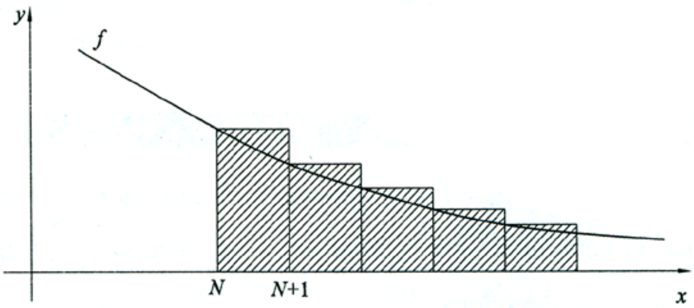
Onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_{n_0}^{\infty} a(t)dt$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \int_{n_0}^{\infty} a(t)dt}$$

DOKAZ

Neka je $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n0} + \dots + a_n \qquad n \geq n_0$





$$S_n = S_{n0} + a_{n+1} + \dots + a_n = S_{n0} + a(n_0+1) + \dots + a(n)$$

$$= S_{n0} + zbroj\ osjenčanih\ površina\ sa\ lijeve\ slike \leq S_{n0} + \int_{n_0}^{\infty} a(t)dt$$

ZAKLJUČAK 1:

Ako nepravi integral konvergira, onda je S_n konačan, dakle je niz S_n omeđen odozgo, pa je po stavku 2 S_n konvergentan red.

ZAKLJUČAK 2:

Neka sad $\sum a_n$konvergira i neka mu je suma jednaka S. Sada mu je $\int_{n_0}^{\infty} a(t)dt = površina\ ispod\ lika\ krivulje\ a(x)$ nad intervalom (n_0, ∞) manja ili jednaka zbroju osjenčanih površina sa desne slike.

$$\int_{n_0}^{\infty} a(t)dt = a(n_0) + a(n_0 + 1) + \ \dots + a(n) + \ \dots$$
$$= a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ \dots + a_n + \ \dots = S - S_{n_0-1} < \infty$$

Nepravi integral $\int_{n_0}^{\infty} a(t)dt$ → Konvergentan

ZADATAK 2 Ispitati konvergenciju reda

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ $\quad r \in \mathbb{R}$

- za r $\leq$ 0 red divergira jer nije ispunjen nuždan uvjet za konvergenciju. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} \neq 0$
- za $r > 0$ $\ a(n) = \frac{1}{n^r}$ (ili $a(x) = \frac{1}{x^r}$) pozitivno, neprekinuta i opadajuća na intervalu $(1, \infty)$, pa je moguće primjeniti stavak 5.

- Ako ima grešaka (matematičkih ili gramatičkih, kako koga smeta :D) ili nešto nedostaje (moguće da nije sve zapisano) ili imate neku ideju, javite mi na PM ili direktno mailom na Telefunken@fer2.net