

STUDENTSKA TRIBINA NA FERu IZ DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI: 333 zadataka

Mervan Pašić

Faculty of Electrical Engineering and Computing
University of Zagreb, CROATIA

A302, FER, subota 02. 07. 2012.

OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z1) *Riješiti diferencijalnu jednačbu:*

$$y' + 1 = (x + y)^7 e^x.$$

Rješenje.



OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z1) *Riješiti diferencijalnu jednadžbu:*

$$y' + 1 = (x + y)^7 e^x.$$

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;

OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z1) Riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$y' + 1 = (x + y)^7 e^x.$$

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;
- $z' = z^7 e^x$, $\frac{dz}{z^7} = e^x dx$, $\int z^{-7} dz = \int e^x dx$, $\frac{z^{-6}}{-6} = e^x + c$;

OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z1) Riješiti diferencijalnu jednačbu:

$$y' + 1 = (x + y)^7 e^x.$$

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;
- $z' = z^7 e^x$, $\frac{dz}{z^7} = e^x dx$, $\int z^{-7} dz = \int e^x dx$, $\frac{z^{-6}}{-6} = e^x + c$;
- $z(x) = (-6e^x + c)^{-1/6} \Rightarrow y(x) = (-6e^x + c)^{-1/6} - x$. □

1. SUPSTITUCIJOM DO SEPARACIJE

PRVA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z2) *Riješiti diferencijalnu jednadžbu:*

$$y' + 1 = (x + y)^n f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$.

Rješenje.



1. SUPSTITUCIJOM DO SEPARACIJE

PRVA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z2) Riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$y' + 1 = (x + y)^n f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$.

Rješenje.



- $z = x + y, z = z(x), z' = 1 + y';$

PRVA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z2) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + 1 = (x + y)^n f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$.

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;
- $z' = z^n f(x)$, $\frac{dz}{z^n} = f(x)dx$, $\int z^{-n} dz = \int f(x)dx$,
 $\frac{z^{-n+1}}{-n+1} = F(x) + c$;

1. SUPSTITUCIJOM DO SEPARACIJE

PRVA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z2) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + 1 = (x + y)^n f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$.

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;
- $z' = z^n f(x)$, $\frac{dz}{z^n} = f(x)dx$, $\int z^{-n} dz = \int f(x)dx$,
 $\frac{z^{-n+1}}{-n+1} = F(x) + c$;
- $z(x) = [(-n+1)F(x) + c]^{\frac{-1}{-n+1}} \Rightarrow$
 $y(x) = [(-n+1)F(x) + c]^{\frac{-1}{-n+1}} - x.$



1. SUPSTITUCIJOM DO SEPARACIJE

DRUGA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z3) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + 1 = g(x + y)f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$ i $1/g(s)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$ i $G(s) = \int \frac{1}{g(s)} ds$.

Rješenje.



DRUGA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z3) Riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$y' + 1 = g(x + y)f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$ i $1/g(s)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$ i $G(s) = \int \frac{1}{g(s)} ds$.

Rješenje.



- $z = x + y, z = z(x), z' = 1 + y';$

DRUGA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z3) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + 1 = g(x + y)f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$ i $1/g(s)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$ i $G(s) = \int \frac{1}{g(s)} ds$.

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;
- $z' = g(z)f(x)$, $\frac{dz}{g(z)} = f(x)dx$, $\int \frac{dz}{g(z)} = \int f(x)dx + c$,
 $G(z) = F(x) + c$;

DRUGA VARIJACIJA NA OGLEDNI PRIMJER 1.1

(Z3) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + 1 = g(x + y)f(x),$$

gdje znamo integrirati $f(x)$ i $1/g(s)$, te neka je $F(x) = \int f(x)dx$ i $G(s) = \int \frac{1}{g(s)} ds$.

Rješenje.



- $z = x + y$, $z = z(x)$, $z' = 1 + y'$;
- $z' = g(z)f(x)$, $\frac{dz}{g(z)} = f(x)dx$, $\int \frac{dz}{g(z)} = \int f(x)dx + c$,
 $G(z) = F(x) + c$;
- $z(x) = G^{-1}(F(x) + c) \Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x) + c) - x$. □

1. SUPSTITUCIJOM DO SEPARACIJE - NAJEDNOSTAVNIJI SLUČAJ

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 1.1

(Z4) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 1.2

(Z5) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 1.3 (OPREZ)

(Z6) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

1. SUPSTITUCIJOM DO SEPARACIJE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 1.4

(Z7) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$(y' + 1) \ln \frac{y + x}{x + 3} = \frac{y + x}{x + 3}.$$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 1.5

(Z8) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}.$$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 1.6 (OPREZ)

(Z9) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}$.

Rješenje: $2\sqrt{\frac{1}{xy^2} - 1} = -\ln(cx)$; singularno: $xy^2 = 1$.

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - PRVI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.1

(Z10) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - PRVI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.1

(Z10) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



- $u = x - x_0, v = y - y_0, du = dx, dv = dy;$

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - PRVI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.1

(Z10) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



- $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, $du = dx$, $dv = dy$;
- x_0 i y_0 su rješenja sustava: $2x - 4y + 6 = 0$, $x + y - 3 = 0$;

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - PRVI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.1

(Z10) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



- $u = x - x_0, v = y - y_0, du = dx, dv = dy;$
- x_0 i y_0 su rješenja sustava: $2x - 4y + 6 = 0, x + y - 3 = 0;$
- $u = x - 1, v = y - 2, (2u - 4v)dx + (u + v)dy = 0, \dots$ □

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - PRVI KLASIČNI SLUČAJ

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.1

(Z11) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.

Rješenje: $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = c$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.2

(Z12) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy.$$

Rješenje: $(y + 2)^2 = c(x + y - 1)$; singularno: $y = 1 - x$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.3 (OPREZ)

(Z13) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Rješenje: $y + 2 = ce^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}}$.

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - DRUGI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.2

(Z14) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x - 2y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - DRUGI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.2

(Z14) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x - 2y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



- $z = x - 2y, z = z(x), y = (x - z)/2, y' = (1 - z')/2;$

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - DRUGI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.2

(Z14) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x - 2y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



- $z = x - 2y, z = z(x), y = (x - z)/2, y' = (1 - z')/2;$
- $(2z + 6) + (z - 3)(1 - z')/2 = 0 \Rightarrow \frac{5z+9}{z-3} = z' ;$

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - DRUGI KLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.2

(Z14) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$(2x - 4y + 6)dx + (x - 2y - 3)dy = 0.$$

Rješenje.



- $z = x - 2y$, $z = z(x)$, $y = (x - z)/2$, $y' = (1 - z')/2$;
- $(2z + 6) + (z - 3)(1 - z')/2 = 0 \Rightarrow \frac{5z+9}{z-3} = z'$;
- $\frac{z-3}{5z+9} dz = dx \Rightarrow \int \frac{z-3}{5z+9} dz = \int dx$.



2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - DRUGI KLASIČNI SLUČAJ

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.4

(Z15) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$$

Rješenje: $2x + y - 1 = ce^{2y-x}$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.5

(Z16) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$$

Rješenje: $(y - x + 2)^2 + 2x = c$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.6

(Z17) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}.$$

Rješenje: $3x + 2y \ln |x + y - 1| = c$.

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - NEKLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.3

(Z18) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$2x^4 yy' + y^4 = 4x^6.$$

Rješenje.



2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - NEKLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.3

(Z18) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$2x^4yy' + y^4 = 4x^6.$$

Rješenje.



- $y = z^m, y' = mz^{m-1};$

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - NEKLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.3

(Z18) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$2x^4yy' + y^4 = 4x^6.$$

Rješenje.



- $y = z^m, y' = mz^{m-1};$
- $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6 \Rightarrow 4 + (2m - 1) = 4m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2};$

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - NEKLASIČNI SLUČAJ

OGLEDNI PRIMJER 2.3

(Z18) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$2x^4yy' + y^4 = 4x^6.$$

Rješenje.



- $y = z^m, y' = mz^{m-1};$
- $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6 \Rightarrow 4 + (2m - 1) = 4m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2};$
- $y = z^{3/2} \Rightarrow 3x^4z^2z' + z^6 = 4x^6.$ □

2. SUPSTITUCIJOM DO HOMOGENOG STUPNJA - NEKLASIČNI SLUČAJ

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.7

(Z19) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y'/2 + x/4 = \sqrt{y}.$$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.8

(Z20) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 2.9 (OPREZ)

(Z21) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}.$$

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

OGLEDNI PRIMJER 3.1

(Z22) *Riješiti diferencijalnu jednačbu:*

$$y = xf(y') + g(y').$$

Rješenje.



3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

OGLEDNI PRIMJER 3.1

(Z22) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y = xf(y') + g(y').$$

Rješenje.



- $y' = p, p = p(x), y = xf(p) + g(p);$

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

OGLEDNI PRIMJER 3.1

(Z22) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y = xf(y') + g(y').$$

Rješenje.



- $y' = p, p = p(x), y = xf(p) + g(p);$
- $y' = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p' \Leftrightarrow p - f(p) = p'(xf'(p) + g'(p));$

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

OGLEDNI PRIMJER 3.1

(Z22) Riješiti diferencijalnu jednačbu:

$$y = xf(y') + g(y').$$

Rješenje.



- $y' = p, p = p(x), y = xf(p) + g(p);$
- $y' = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p' \Leftrightarrow p - f(p) = p'(xf'(p) + g'(p));$
- $\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p-f(p)}x = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$ uz uvjet $p - f(p) \neq 0;$

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

OGLEDNI PRIMJER 3.1

(Z22) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y = xf(y') + g(y').$$

Rješenje.



- $y' = p, p = p(x), y = xf(p) + g(p);$
- $y' = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p' \Leftrightarrow p - f(p) = p'(xf'(p) + g'(p));$
- $\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p-f(p)}x = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$ uz uvjet $p - f(p) \neq 0;$
- moguće singularno rješenje nalazimo iz uvjeta: $y' = f(y').$ □

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.1

(Z23) *Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy'^2 - 2y'^3$.*



Rješenje:

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.1

(Z23) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy'^2 - 2y'^3$.



Rješenje: $x = c(p - 1)^{-2} + 2p + 1$, $y = cp^2(p - 1)^{-2} + p^2$;
singularna: $y = 0$, $y = x - 2$.

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.1

(Z23) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy'^2 - 2y'^3$.



Rješenje: $x = c(p - 1)^{-2} + 2p + 1$, $y = cp^2(p - 1)^{-2} + p^2$;
singularna: $y = 0$, $y = x - 2$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.2

(Z24) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $2y'^2(y - xy') = 1$.

Rješenje: $2c^2(y - cx) = 1$; singularno: $8y^3 = 27x^2$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.3

(Z25) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y'^3 = 3(xy' - y)$.

Rješenje: $c^3 = 3(cx - y)$; singularno: $9y^2 = 4x^3$.

3. OPREZ: IAKO JE CLAIRAUT-OVA JEDNADŽBA SPECIJALNI OBLIK LAGRANGE-OVE JEDNADŽBE, POSTUPAK JE DRUKČIJI

OGLEDNI PRIMJER 3.2

(Z26) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y = xy' + g(y')$.

Rješenje.



3. OPREZ: IAKO JE CLAIRAUT-OVA JEDNADŽBA SPECIJALNI OBLIK LAGRANGE-OVE JEDNADŽBE, POSTUPAK JE DRUKČIJI

OGLEDNI PRIMJER 3.2

(Z26) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy' + g(y')$.

Rješenje.



- $y' = p, p = p(x), y = xp + g(p);$

3. OPREZ: IAKO JE CLAIRAUT-OVA JEDNADŽBA SPECIJALNI OBLIK LAGRANGE-OVE JEDNADŽBE, POSTUPAK JE DRUKČIJI

OGLEDNI PRIMJER 3.2

(Z26) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy' + g(y')$.

Rješenje.



- $y' = p, p = p(x), y = xp + g(p);$
- $y' = p + xp' + g'(p)p' \Leftrightarrow 0 = p'(x + g'(p));$

3. OPREZ: IAKO JE CLAIRAUT-OVA JEDNADŽBA SPECIJALNI OBLIK LAGRANGE-OVE JEDNADŽBE, POSTUPAK JE DRUKČIJI

OGLEDNI PRIMJER 3.2

(Z26) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy' + g(y')$.

Rješenje.



- $y' = p$, $p = p(x)$, $y = xp + g(p)$;
- $y' = p + xp' + g'(p)p' \Leftrightarrow 0 = p'(x + g'(p))$;
- ako je $x + g'(p) \neq 0$, tada je $p' = 0$ odnosno $p = c$, rješenje:
 $y = cx + g(c)$;

3. OPREZ: IAKO JE CLAIRAUT-OVA JEDNADŽBA SPECIJALNI OBLIK LAGRANGE-OVE JEDNADŽBE, POSTUPAK JE DRUKČIJI

OGLEDNI PRIMJER 3.2

(Z26) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y = xy' + g(y')$.

Rješenje.



- $y' = p$, $p = p(x)$, $y = xp + g(p)$;
- $y' = p + xp' + g'(p)p' \Leftrightarrow 0 = p'(x + g'(p))$;
- ako je $x + g'(p) \neq 0$, tada je $p' = 0$ odnosno $p = c$, rješenje:
 $y = cx + g(c)$;
- ako je $p' \neq 0$, tada je $x + g'(p) = 0$, odnosno singularno rješenje:
 $x = -g'(p)$, $y = -pg'(p) + g(p)$. □

3. OPREZ: CLAIRAUTOVA JEDNADŽBA

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.4

(Z27) *Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y = xy' - y'^2$.*



Rješenje:

3. OPREZ: CLAIRAUTOVA JEDNADŽBA

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.4

(Z27) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y = xy' - y'^2$.



Rješenje: $y = cx - c^2$; singularna: $4y = x^2$.

3. OPREZ: CLAIRAUTOVA JEDNADŽBA

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.4

(Z27) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y = xy' - y'^2$.



Rješenje: $y = cx - c^2$; singularna: $4y = x^2$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.5 (OPREZ)

(Z28) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y = xy' - (2 + y')$.

Rješenje: $y = cx - c - 2$; singularno: NEMA.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.6

(Z29) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $xy' - y = \ln y'$.

Rješenje: $y = cx - \ln c$; singularno: $y = \ln x + 1$.

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - BERNOULLI

OGLEDNI PRIMJER 3.3

(Z31) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Rješenje.



3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - BERNOULLI

OGLEDNI PRIMJER 3.3

(Z31) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Rješenje.



- $y^{-n}y' + f(x)y^{1-n} = g(x), z = z(x), z = y^{1-n};$

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - BERNOULLI

OGLEDNI PRIMJER 3.3

(Z31) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Rješenje.



- $y^{-n}y' + f(x)y^{1-n} = g(x)$, $z = z(x)$, $z = y^{1-n}$;
- $z' = (1 - n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = z'/(1 - n)$;

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - BERNOULLI

OGLEDNI PRIMJER 3.3

(Z31) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Rješenje.



- $y^{-n}y' + f(x)y^{1-n} = g(x)$, $z = z(x)$, $z = y^{1-n}$;
- $z' = (1 - n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = z'/(1 - n)$;
- $z' + (1 - n)f(x)z = (1 - n)g(x)$; $F(x) = (1 - n)f(x)$,
 $G(x) = (1 - n)g(x)$;

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - BERNOULLI

OGLEDNI PRIMJER 3.3

(Z31) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Rješenje.



- $y^{-n}y' + f(x)y^{1-n} = g(x)$, $z = z(x)$, $z = y^{1-n}$;
- $z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = z'/(1-n)$;
- $z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x)$; $F(x) = (1-n)f(x)$,
 $G(x) = (1-n)g(x)$;
- $y(x) = z^{\frac{1}{1-n}}(x)$, $z(x) = e^{-\int F(x)dx} \left(c + \int G(x)e^{\int F(x)dx} \right)$. □

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.7

(Z32) *Riješiti diferencijalnu jednačinu: $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.*



Rješenje:

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.7

(Z32) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.



Rješenje: $y(x + 1)(\ln |x + 1| + c) = 1$; singularno: $y = 0$.

3. SUPSTITUCIJOM DO LINEARNE JEDNADŽBE - LAGRANGE

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.7

(Z32) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.



Rješenje: $y(x + 1)(\ln |x + 1| + c) = 1$; singularno: $y = 0$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.8

(Z33) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $xy^2y' = x^2 + y^3$.

Rješenje: $y^3 = cx^3 - 3x^2$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 3.9

(Z34) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Rješenje: $y = x^4 \ln^2 cx$; singularno: $y = 0$.

4. ZAMJENA PORETKA: $y(x) \leftrightarrow x(y)$

OGLEDNI PRIMJER 4.1

(Z35) *Riješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$f(x, y, y') = 0,$$

zamjenom poredka: $y(x) \leftrightarrow x(y)$.

Rješenje.



4. ZAMJENA PORETKA: $y(x) \leftrightarrow x(y)$

OGLEDNI PRIMJER 4.1

(Z35) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$f(x, y, y') = 0,$$

zamjenom poredka: $y(x) \leftrightarrow x(y)$.

Rješenje.



$$\bullet f\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(x(y), y, \frac{1}{dx/dy}\right) = 0;$$

4. ZAMJENA PORETKA: $y(x) \leftrightarrow x(y)$

OGLEDNI PRIMJER 4.1

(Z35) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$f(x, y, y') = 0,$$

zamjenom poredka: $y(x) \leftrightarrow x(y)$.

Rješenje.



- $f(x, y(x), \frac{dy}{dx}) = 0 \Leftrightarrow f(x(y), y, \frac{1}{dx/dy}) = 0;$
- $f(x(y), y, \frac{1}{dx/dy}) = 0 \Leftrightarrow g(y, x(y), \frac{dx}{dy}) = 0.$



4. ZAMJENA PORETKA: $y(x) \leftrightarrow x(y)$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 4.2

(Z36) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.



Rješenje:

4. ZAMJENA PORETKA: $y(x) \leftrightarrow x(y)$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 4.2

(Z36) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.



Rješenje: $y^2 e^{-\frac{1}{xy}} = c$; singularna: $y = 0$ i $x = 0$.

4. ZAMJENA PORETKA: $y(x) \leftrightarrow x(y)$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 4.2

(Z36) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.



Rješenje: $y^2 e^{-\frac{1}{xy}} = c$; singularna: $y = 0$ i $x = 0$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 4.3

(Z37) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Rješenje: $x = (c - \cos y) \sin y$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 4.4

(Z38) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Rješenje: $x = cy^3 + y^2$; singularno: $y = 0$.

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.1

(Z39) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.1

(Z39) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(p)$;

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.1

(Z39) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(p)$;
- $x = F(p) \Rightarrow dx = F'(p)dp \Rightarrow dy = p dx = p F'(p) dp$;

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.1

(Z39) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(p)$;
- $x = F(p) \Rightarrow dx = F'(p)dp \Rightarrow dy = p dx = p F'(p) dp$;
- rješenje u parametarskom obliku: $x = F(p)$, $y = \int p F'(p) dp$;

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.1

(Z39) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(p)$;
- $x = F(p) \Rightarrow dx = F'(p)dp \Rightarrow dy = p dx = p F'(p) dp$;
- rješenje u parametarskom obliku: $x = F(p)$, $y = \int p F'(p) dp$;
- ako je to moguće, eliminerati parametar p i napisati rješenje u obliku $y=f(x)$.



5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.1

(Z40) *Riješiti diferencijalnu jednačinu: $x = y'^3 + y'$.*



Rješenje:

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.1

(Z40) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $x = y'^3 + y'$.



Rješenje: $x = p^3 + p$, $4y = 3p^4 + 2p^2 + c$.

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y')$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.1

(Z40) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $x = y'^3 + y'$.



Rješenje: $x = p^3 + p$, $4y = 3p^4 + 2p^2 + c$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.2

(Z41) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$.

Rješenje: $x = p \sqrt{p^2 + 1}$, $3y = (2p^2 - 1) \sqrt{p^2 + 1} + c$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.3

(Z42) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y'(x - \ln y') = 1$.

Rješenje: $x = \ln p + \frac{1}{p}$, $y = p - \ln p + c$.

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.2

(Z43) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y, y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.2

(Z43) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y, y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y, y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(y, p);$

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.2

(Z43) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y, y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y, y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(y, p)$;
- $x = F(y, p) \Rightarrow dx = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow$

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.2

(Z43) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y, y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y, y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(y, p)$;
- $x = F(y, p) \Rightarrow dx = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow$
- $dy = p dx = p \frac{\partial F}{\partial y} dy + p \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow 0 = (p \frac{\partial F}{\partial y} - 1) dy + p \frac{\partial F}{\partial p} dp$;

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.2

(Z43) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y, y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y, y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(y, p)$;
- $x = F(y, p) \Rightarrow dx = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow$
- $dy = p dx = p \frac{\partial F}{\partial y} dy + p \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow 0 = (p \frac{\partial F}{\partial y} - 1) dy + p \frac{\partial F}{\partial p} dp$;
- $x = F(y, p), y = G(p)$;

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

OGLEDNI PRIMJER 5.2

(Z43) Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$x = F(y, y'),$$

pomoću parametra: $p = y'$.

Rješenje.



- $x = F(y, y')$ i $y' = p \Rightarrow x = F(y, p)$;
- $x = F(y, p) \Rightarrow dx = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow$
- $dy = p dx = p \frac{\partial F}{\partial y} dy + p \frac{\partial F}{\partial p} dp \Rightarrow 0 = (p \frac{\partial F}{\partial y} - 1) dy + p \frac{\partial F}{\partial p} dp$;
- $x = F(y, p), y = G(p)$;
- ako je to moguće, eliminirati parametar p i napisati rješenje u obliku $y=f(x)$.

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.4

(Z44) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.



Rješenje:

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.4

(Z44) Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.



Rješenje: $cx = \ln(cy)$, singularno: $y = ex$.

5. PARAMETARSKO RJEŠAVANJE: $x = F(y, y')$

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.4

(Z44) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.



Rješenje: $cx = \ln(cy)$, singularno: $y = ex$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.5

(Z45) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $y'^3 + y^2 = xyy'$.

Rješenje: $pxy = y^2 + p^3$, $y^2(2p + c) = p^4$, singularno: $y = 0$.

PRIMJER ZA SAMOSTALNI RAD 5.6

(Z46) Riješiti diferencijalnu jednačbu: $2xy' - y = y' \ln(yy')$.

Rješenje: $y^2 = 2cx - c \ln c$, $2x = 1 + 2 \ln |y|$.