Napisati definiciju reda i definiciju konvergencije reda.

a) Definicija reda: Red je uređeni par dvaju nizova (a_n) i (S_n). Članove niza (a_n) nazivamo članovima reda, a (S_n) nazivamo nizom parcijalnih suma tog reda. Red zapisujemo simbolom $\sum a_n$.

Definicija konvergencije reda: Kažemo da red $\sum a_n$ konvergira prema S, odnosno da mu je zbroj jednak S ako je ispunjeno $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} = S$

Iskazati i dokazati nuždan uvjet konvergencije reda.

. ***ISKAZ***: Da bi $\sum a_n$ konvergirao, nužno je da bude $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DOKAZ: Opći član može se zapisati kao razlika dviju uzastopnih parcijalnih suma:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Ako je red konvergentan, onda je konvergentan i niz (S_n). U tom slučaju možemo u ovoj relaciji pustiti da n teži u beskonačnost:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

---

a) Izvesti formulu za sumu geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} q^n,\ q \in \mathbb{R}$.

Za koje q taj red konvergira?

a) Red očito divergira za $|q| \geq 1$ budući da mu opći član ne teži u nulu. n-ta parcijalna suma ovog reda je

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = 1 + q(1 + q + \ldots + q^{n-2}) = \\ &= 1 + q(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) - q^n = 1 + qS_n - q^n \end{aligned}$$

tj.

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}q^n.$$

Za $|q| < 1$ limes ovog niza postoji i jednak je $\frac{1}{1-q}$.
Dakle vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1$.

(2 boda) Iskažite i dokažite Leibnizov kriterij za konvergenciju alterniranog reda.

Vidi 1. knjižica, str.24, Teorem 14 i dokaz tog teorema.

---

a) Iskažite granični oblik poredbenog kriterija konvergencije reda s pozitivnim članovima (tzv. limes varijantu).

Ako za nizove (a_n) i (b_n) pozitivnih realnih brojeva vrijedi da psotoji broj $L \neq 0$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, tada ili oba reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju ili oba divergiraju.

(2 boda) (a) (1 bod) Iskažite integralni kriterij konvergencije reda realnih brojeva.
b) (1 bod) Dokažite da je za svaki $\alpha \in (0,1)$ red $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergentan.

8. [2 boda] a) Neka je $a_n = f(n)$ pri čemu je f pozitivna, neprekinuta i padajuća funkcija na $\langle N, +\infty\rangle$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_N^\infty f(t)dt$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

b) $\alpha \in \langle 0,1\rangle, \sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergentan red

Za $\alpha > 0$ je $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pozitivna, neprekinuta i padajuća fja. na $[1, +\infty\rangle$

$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \int_1^\infty t^{\ \alpha} dt = \frac{1}{1\ \alpha}(\lim_{t\to\infty} t^{1\ \ \alpha} - 1)$. Ovaj limes ne postoji za $\alpha \in \langle 0,1\rangle$, pa je red divergentan.

---

a)(1b) Dokažite sljedeću tvrdnju: Apsolutno konvergentan red je konvergentan.
b)(1b) Pokažite primjerom da obrat gornje tvrdnje ne vrijedi.

(**2 boda**) Pogledaj dokaz Teorema 13, str. 22, knjižica Redovi

b)(1b) NPR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ 1)^n}{n}$ konvergira prema Leibnizovom kriteriju, dok red $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(\ 1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira tj. alternirani harmonijski red konvergira, a ne konvergira apsolutno

---

(3 boda) Dokažite da je područje konvergencije Maclaurinovog reda od e^x cijeli skup realnih brojeva. Izvedite Taylorov red za funkciju $\operatorname{ch} x$ oko 0 koristeći se gore navedenim redom potencija.

Rješenje: D'Alambertovim kriterijem dobivamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \to 0$, za svaki fiksni $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\sum \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum \frac{2x^{2n}}{(2n)!} = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(2 boda) Iskažite Cauchyev kriterij konvergencije redova s pozitivnim članovima, te ga dokažite koristeći poredbeni kriterij.

Rješenje: Vidi knjižicu 1.

---

5. **a)** Definirati skalarni umnožak dvaju vektora u V^3.

b) Izvesti formulu za skalarni umnožak vektora

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

a) Neka su $\vec{a}$ i b zadani vektori i $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, b)$. **Skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definira se kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi.$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\
&= a_xb_x\vec{i} \cdot \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \cdot \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \cdot \vec{k} + \\
&+ a_yb_x\vec{j} \cdot \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \cdot \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \cdot \vec{k} + \\
&+ a_zb_x\vec{k} \cdot \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \cdot \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \cdot \vec{k} = \\
&= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.
\end{aligned}$$

---

a) Napisati definiciju vektorskog umnoška vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

---

b) Napisati vektorski oblik jednadžbe ravnine. Nacrtati sliku.
c) Napisati opći oblik jednadžbe ravnine.

b) Neka je T_1 zadana točka ravnine, r_1 njen radijvektor i neka je $\vec{n}$ normala na ravninu. Vektorski oblik jednadžbe ravnine je

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0.$$

Napomena: Skicirati sliku.
c) Opći oblik jednadžbe ravnine je:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

---

a) Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$. Kakva je geometrijska interpretacija mješovitog produkta ako je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$, ili ako je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$?

Mješoviti produkt je nula ako i samo ako su dana tri vektora komplanarna. Ako je mjeősviti produkt različit od nule, onda je njegova vrijednost upravo volumen paralelepipeda opisanog tim vektorima.

---

a) Napišite kanonsku jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(x_0, y_0, z_0)$ i okomit je na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$.

Vektor smjera pravca dan je izrazom $A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \vec{s}$ (što je normala polazne ravnine).

a) Napisati vektor u smjeru kojega funkcija $u = f(x, y, z)$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ najbrže raste.

a) $\nabla u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}.$

---

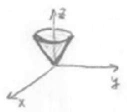
a) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$.

b) Skicirajte plohu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) JEDNADŽBA TANGENCIJALNE RAVNINE NA PLOHU $z = f(x, y)$ u TOČKI $T_0(x_0, y_0, z_0)$ JE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = z - z_0$$

b) PLOHA JE KRUŽNI STOŽAC ($z \geq 0$)



---

a) Napišite definiciju usmjerene derivacije funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{h}$.

b) Napišite i dokažite formulu kojom se usmjerena derivacija funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{h}$ računa pomoću ∇f.

a) $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t}$ $\qquad \vec{h} = h_1\vec{i} + h_2\vec{j}$

b) $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h}$

DOKAŽ: USMJERENA DERIVACIJA JE BRZINA RASTA FUNKCIJE f DUŽ PRAVCA KOJI SPAJA TOČKE (x_0, y_0) i $(x_0 + th_1, y_0 + th_2)$. TO JE DAKLE DERIVACIJA FUNKCIJE $t \mapsto f(x_0 + th_1, y_0 + th_2)$ ZA $t = 0$.

$$\frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \frac{o(th)}{t}$$

IZ ČEGA PRELASKOM NA LIMES KADA $t \to 0$ SLIJEDI TVRDNJA

---

a) Neka je zadana funkcija

$$f : D \to \mathbb{R},$$

gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Definirajte pojam grafa funkcije $z = f(x, y)$.

Skup $\Gamma = \{(x, y, z) \mid f(x, y) = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ zovemo graf funkcije f.

---

a) **(1 bod)** Prostorna krivulja $\mathcal{C}$ zadana je parametarskim jednadžbama

$$\mathcal{C} \ldots \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Neka je $T_0 \in \mathcal{C}$ točka kojoj odgovara vrijednost parametra $t = t_0$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u točki T_0.

a) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf eksplicitno zadane funkcije

$$z = f(x, y)$$

u točki grafa (x_0, y_0, z_0).

b) Napišite formulu za parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za funkciju z implicitno zadano jednadžbom

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

c) Koristeći formule iz a) i b) dijela zadatka, izvedite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\Phi(x, y, z) = 0$ u točki plohe (x_0, y_0, z_0).

Tangencijalna ravnina na funkciju $f(x, y)$ dana je s:

$$\pi \ldots z - z_0 = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Parcijalne derivacije od z su $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z)}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z)}$.
Uvrštavanjem parcijalnih derivacija i množenjems $\Phi'_z(x_0, y_0, z_0)$ dobivamo

$$\partial_x \Phi(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \partial_y \Phi(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \partial_z \Phi(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

---

a) Prostorna krivulja $\mathcal{C}$ zadana je s pomoću vektorske funkcije

$$r(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}.$$

Neka je $T \in \mathcal{C}$ točka kojoj odgovara vrijednost $t = t_0$. Odredite jednadžbu tangente na $\mathcal{C}$ u točki T.

Opća tražena tangenta je oblika

$$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}.$$

Dokazati da za $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ i $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vrijedi

$$\nabla f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) \quad f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} \quad f'(r)\frac{x}{r} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(r) \quad f'(r)\frac{y}{r} \qquad \frac{\partial}{\partial z} f(r) \quad f'(r)\frac{z}{r}$$

a znamo da je $\nabla f(r) \quad \frac{\partial}{\partial x} f(r)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} f(r)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} f(r)\vec{k}$, pa slijedi tvrdnja.

---

a) Napisati nužne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema funkcije dviju varijabli.
b) Dokazati tvrdnju pod a).

a) Ako je $\mathbf{a}$ lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije f, onda je $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.
b) Funkcija jedne varijable g(t)=f($\mathbf{a}$+t$\mathbf{h}$), gdje je $\mathbf{h}$ bilo koji učvršćeni vektor, ima po pretpostavci lokalni ekstrem u točki $t = 0$, dakle $g'(0) = 0$. Odatle po pravilu za derivaciju kompozicije slijedi

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Stavljajući $\mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{a})$ dobivamo $\|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 = 0$, dakle $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

---

a) Napisati definiciju parcijalne derivacije $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$.

b) Napisati definiciju diferencijabilnosti funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T(x, y)$.

a) Neka je $z = f(x, y)$ neprekinuta i definirana na otvorenom skupu $M \subseteq R^2$, $T_0(x_0, y_0) \in M$. Parcijalna derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ se definira kao

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}$$

b) Neka je $z = f(x, y)$ i $h = (h_1, h_2)$ te $o(h)$ beskonačno mala skalarna veličina višeg reda od $\|h\|$ tj.

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Ako promjenu funkcije $\triangle f = f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)$ možemo prikazati u obliku

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) = a_1 h_1 + a_2 h_2 + o(h)$$

za neki $a = (a_1, a_2)$ onda kažemo da je funkcija $f(x, y)$ diferencijabilna u točki $T(x, y)$.

---

2. (3 boda) a) Pomoću limesa definirajte pojam usmjerene derivacije funkcije $f(\overrightarrow{x})$ u smjeru zadanog vektora $\overrightarrow{s}$.
b) Koristeći danu definiciju napiište i izvedite formulu za računanje usmjerene derivacije funkcije $f(\overrightarrow{x})$ s pomoću njenog gradijenta.

Rješenje: Usmjerena derivacija funkcije f u smjeru vektora $\overrightarrow{s}$ iz točke $\overrightarrow{x}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}(\overrightarrow{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{s}) - f(\overrightarrow{x})}{t}.$$

Definiramo funkciju $F(t) = f(\overrightarrow{x} + t\overrightarrow{s})$, te neka je u bazi e_i vektor $\overrightarrow{s} = \sum_{i=1}^n s_i e_i$. Kako je, po definiciji $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}(\overrightarrow{x}) = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}\frac{de_1}{dt}(\overrightarrow{x})s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial e_n}\frac{de_n}{dt}(\overrightarrow{x})s_n = \nabla f(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{s}$.

(3 boda) a) Definirajte neprekinutost funkcije dvije varijable u nekoj točki.
b) Odredite sve realne brojeve α i β tako da je sljedeća funkcija f neprekinuta u točki $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} (\alpha + 1)\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0), \\ \beta - 3, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Rješenje: Za a) dio vidi knjižicu 6.-7., str. 5.
Prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ dobivamo da je $f(x, y) = (\alpha + 1)|r|\cos(2\phi)$, pa u limesu $(x, y) \to (0, 0)$ dobivamo $f(x, y) \to 0$, neovisno o vrijednosti α, pa α može biti bilo koji realan broj. Kako $f(x, y) \to \beta - 3$ (pri silasku u ishodište), to mora biti $\beta - 3 = 0$, pa je $\beta = 3$.

(a) (**1 bod**) Iskažite definiciju parcijalne derivacije $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ funkcije f po varijabli x_i u točki $T_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

Rj. Neka je

$$\varphi_i(x_i) = f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots x_n^0)$$

Tada je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 := \varphi_i'(x_i^0) = \lim_{x_i\to x_i^0}\frac{\varphi_i(x_i)-\varphi_i(x_i^0)}{x_i-x_i^0}$$

(b) (**2 boda**) Dokažite diferencijabilnost funkcije $f(x,y) = x^2+2y^2-1$ u točki $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Rj. Neka je $\vec{h} = (\Delta x,\Delta y) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$. Promjena funkcije Δz iznosi

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 + 2(y+\Delta y)^2 - 1] - [x^2+2y^2-1] =$$

$$= 2x\Delta x + 4y\Delta y + [(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2]$$

Izraz u uglatoj zagradi je beskonačno mala veličina višeg reda od $||\vec{h}||$ jer je

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{(\Delta x)^2+2(\Delta y)^2}{||\vec{h}||} = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \le$$

$$\le \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0$$

Ostaje

$$\Delta z = (2x\vec{i} + 4y\vec{j})\cdot\vec{h} + o(\vec{h})$$

a to je definicija diferencijabilnosti.

Gornji limes smo mogli dobiti i prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.