

Matematika 2

1. Masovne instrukcije

Redovi. Redovi potencija. Taylorov red.

25. veljače 2011.

(pripremio V. Čosić)

Zadatak 1. (Sume)

Odredite sume sljedećih redova:

(a)

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \dots$$

(b)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$$

Zadatak 2. (Cauchyjev kriterij)

Odredite konvergenciju sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+2} - 5 \cdot 3^n} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{-n^2}$$

Zadatak 3. (D'Alembertov kriterij)

Odredite konvergenciju sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{2^{n+1}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}} (2n)^{n+1}}{n!}$$

Zadatak 4. (Poredbeni kriterij)

Odredite konvergenciju sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$$

Zadatak 5. (Integralni kriterij)

Odredite konvergenciju sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

Zadatak 6. (Leibnizov kriterij)

Odredite konvergenciju sljedećeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)$$

Zadatak 7. (Apsolutna i uvjetna konvergencija)

Konvergira li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{n+1}{n^3+17} \right)$$

apsolutno? Konvergira li uvjetno?

Zadatak 8. (Određivanje područja konvergencije)

Odredite područje konvergencije i ispitajte ponašanje na rubu područja konvergencije sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2 + 3x + 2)^n}{n \cdot 2^n}$$

Zadatak 9. (Taylorov red)

Razvijte u Taylorov red funkciju f u točki x_0 ako je:

(a)

$$f(x) = \frac{1}{3 - 2x}, \quad x_0 = 1$$

(b)

$$f(x) = \ln \sqrt{x - 1}, \quad x_0 = 2$$

te odredite područje konvergencije dobivenog reda.

Zadatak 10. (Maclaurinov red)

Razvijte u Maclaurinov red sljedeće funkcije:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$$

(b)

$$f(x) = \frac{7}{(3x + 2)(2x - 1)}$$

te odredite područje konvergencije dobivenih redova.

Zadatak 11. (Deriviranje i integriranje geometrijskog reda)

Odredite sume sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n(n+1)}$$

Zadatak 12. (Svega pomalo...)

Odredite sume sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n! - (n+2)!}{(n+3)!} (n+1) + \frac{n+1}{n+3} \right]$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh n + \cosh n}{(10e)^n}$$

Odredite konvergenciju sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2+2n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

Odredite područje konvergencije i ispitajte ponašanje na rubu područja konvergencije sljedećih redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n(x-5)^n}$$

Razvijte u Taylorov red funkciju f u točki x_0 ako je:

(a)

$$f(x) = e^{2x-6}, \quad x_0 = 3$$

(b)

$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$