1. Ispitajte konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)^n.$$

Rješenje. Zapišimo red u sljedećem obliku:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^n.$$

Slijedi:
$$c_n=\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{n^2+2n-n^2+n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=$$
$$=\frac{3n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Upotrijebimo Cauchyjev kriterij:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{2}>1.$$

Zadani red **divergira**.

2. Ispitajte konvergenciju reda
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n.$$

Rješenje. Ponovno je zadatak moguće riješiti prema Cauchyjevom kriteriju:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}<1.$$

Zadani red **konvergira**. Isti rezultat dobio bi se i upotrebom D'Alembertovog kriterija.

3. Izračunajte sumu reda
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}.$$

Rješenje. Zadani izraz pod sumom moguće je napisati na sljedeći način:
$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}.$$

Množenjem cijelog izraza s n^2-1 slijedi:
$$1=A(n+1)+B(n-1)=n(A+B)+A-B\Rightarrow A=\frac{1}{2}\text{ i }B=-\frac{1}{2},$$

pa je:
$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Sada je moguće naći n-tu parcijalnu sumu:
$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Suma reda je jednaka:
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

4. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 \operatorname{ch}(n^3)}}.$$

Rješenje. Raspišimo $\operatorname{ch}\left(n^3\right)$:

$$\operatorname{ch}\left(n^3\right) = \frac{e^{n^3} + e^{-n^3}}{3} = \frac{1}{2}e^{n^3} - \frac{1}{2e^{n^3}}.$$

Kada $n \to \infty$ vrijedi $\operatorname{ch}\left(n^3\right) \sim \frac{1}{2}e^{n^3} \sim e^{n^3}$. Upotrijebimo D'Alembertov kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3 e^{n^3}}{(n+1)^3 e^{(n+1)^3}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{e^{n^3}}{e^{n^3}e^{3n^2+3n+1}}} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{e^{3n^2+3n+1}}} = 0 < 1,$$

pri čemu smo koristili prethodno navedene činjenice. Zadani red **konvergira**.

5. Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 n + 3^{n+1}}{4^{2n-1}}.$$

Rješenje. Zadani izraz pod sumom moguće je napisati na sljedeći način:

$$\frac{\operatorname{ch}^2 n + 3^{n+1}}{4^{2n-1}} = \frac{\left(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\right)^2 + 3^{n+1}}{4^{2n-1}} = \left(\frac{e^2}{16}\right)^n + 2\left(\frac{1}{16}\right)^n + \left(\frac{1}{16e^2}\right)^n + 12\left(\frac{3}{16}\right)^n.$$

Obzirom da je svaki od izraza pod n-tom potencijom po apsolutnoj vrijednosti manji od 1, gornja suma može se rastaviti na sljedeće geometrijske redove i izračunati joj sumu (**Pazi:** Indeks sumacije kreće od 1!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 n + 3^{n+1}}{4^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^2}{16}\right)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16e^2}\right)^n + 12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^n =$$

$$= \frac{\frac{e^2}{16}}{1-\frac{e^2}{16}} + 2\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}} + \frac{\frac{1}{16e^2}}{1-\frac{1}{16e^2}} + 12\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{3}{16}} = \frac{16\left(371e^4 - 9067e^2 + 371\right)}{195\left(16e^4 - 257e^2 + 16\right)} \approx 3.7692.$$

6. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n+1}\frac{1}{2^n}.$$

Rješenje. Provjerimo apsolutnu konvergenciju zadanog reda prema poredbenom kriteriju (granični oblik) uspoređujući s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. Najprije provjerimo kako se ponaša red s kojim uspoređujemo, npr. prema D'Alembertovom kriteriju:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Dakle, red s kojim uspoređujemo je konvergentan. Sada imamo (za apsolutnu konvergenciju izgubi se član $(-1)^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n+1}\frac{1}{2^n}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Obzirom da se redovi ponašaju isto, zadani red **konvergira apsolutno** pa **konvergira i obično**.

7. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n} + n + \sqrt{n}}.$$

Rješenje. Kada $n \to \infty$, za nazivnik općeg člana reda vrijedi $n\sqrt{n} + n + \sqrt{n} \sim n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$. Za opći član reda vrijedi:

$$|a_n| = \left| \frac{\sin n}{n\sqrt{n} + n + \sqrt{n}} \right| < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Obzirom da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira (jer je $\frac{3}{2} > 1$), zadani red **konvergira apsolutno**.