MATEMATIKA 2

2. domaća zadaća

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$$

Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|10x|^n} = |10x| = 10|x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{10}$$

$$R = \frac{1}{10}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$$

Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3x}{\sqrt{2}}\right|^n} = \frac{3|x|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$|x| < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$$

D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n x^{2n}}{2^{n-1} x^{2(n-1)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n x^{2n}}{2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{2n} \cdot \frac{1}{x^2}}\right| = 2|x^2| < 1$$

$$|x^2| < \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}x^{2n}$$

$D'Alembert$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!\,x^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!\,x^{2n}}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n\cdot 2\cdot n!\,(n+1)x^{2n}x^2}{(n+1)^n(n+1)}}{\frac{2^n n!\,x^{2n}}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2x^2}{(n+1)^n}}{\frac{1}{n^n}}\right| =$$

$$= 2|x^2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2|x^2|\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n-1}\right)^{-n-1}\right]^{\frac{n}{-n-1}} = \frac{2|x^2|}{e} < 1$$

$$|x^2| < \frac{e}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

$D'Alembert$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}}\cdot x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{(n+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}}\right)\cdot x\right| = |x| < 1$$

$$R = 1$$

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n-1}$$

$D'Alembert$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{3n+2}}{\frac{x^n}{3n-1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n-1}{3n+2}\right| = |x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

1) $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

a) $\frac{1}{3n-1}$ je padajući niz

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} = 0$

Red konvergira.

2) $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

Ovaj red je usporediv sa harmonijskim redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(harmonijski red je „veći“ od ovoga reda). S obzirom da harmonijski red divergira, onda i početni red divergira.

Područje konvergencije je: $[-1, 1\rangle$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{2^n+1}}$$

D' Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^n x}{(n+1)\sqrt{2\cdot 2^n+1}}}{\frac{x^n}{n\sqrt{2^n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x \frac{n}{n+1} \sqrt{\frac{2^n+1}{2\cdot 2^n+1}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$|x| < \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

1) $x = -\sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^n}{n\sqrt{2^n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2^n}}{n\sqrt{2^n+1}}$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

a) $\frac{\sqrt{2^n}}{n\sqrt{2^n+1}}$ je padajući niz

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{n\sqrt{2^n+1}} = 0$

Red konvergira.

2) $x = \sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{n\sqrt{2^n+1}}$$

Ovaj red je usporediv sa harmonijskim redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(harmonijski red je „veći“ od ovoga reda). S obzirom da harmonijski red divergira, onda i početni red divergira.

Područje konvergencije je: $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\rangle$

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$$

$D'Alembert$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3\cdot 3^n x^n \cdot x}{\sqrt{(3n+1)2^n\cdot 2}}}{\frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}} \right| = 3|x| \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{3n-2}{6n+2}} \right| = \frac{3|x|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$|x| < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

1) $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{(3n-2)2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{(3n-2)}}$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

a) $\frac{1}{\sqrt{(3n-2)}}$ je padajući niz

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-2)}} = 0$

Red konvergira.

2) $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-2)}}$$

Ovaj red je usporediv sa sljedećim redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

S obzirom da je $\frac{1}{2} < 1$, onda ovaj red divergira, pa i početni red divergira.

Područje konvergencije je: $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\rangle$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$$

D' Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)(x+2)^n(x+2)}}{\frac{1}{n(x+2)^n}} \right| = \frac{1}{|x+2|} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{1}{|x+2|} < 1$$

$$|x+2| > 1$$

$$x+2 > 1 \to x > -1$$

$$x+2 < -1 \to x < -3$$

1) $x = -3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(-3+2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

a) $\frac{1}{n}$ je padajući niz

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Red konvergira.

2) $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Ovo je harmonijski red i on divergira.

Područje konvergencije je: $\langle -\infty, -3] \cup \langle -1, \infty \rangle$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$$

D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(-1)\frac{(x-4)^n(x-4)}{(n+2)^2}}{(-1)^n\frac{(x-4)^n}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}|4-x| = |4-x| < 1$$

$$4-x<1\rightarrow x>3$$

$$4-x>-1\rightarrow x<5$$

1) $x=3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

Očito je da ovaj red konvergira (možete ga usporediti sa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ako vam je gušt... Ako nije, ne morate... Mislim, mogli biste... Mdaaaa...).

2) $x=5$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:
a) $\frac{1}{(n+1)^2}$ je padajući niz
b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$

Red konvergira.

Područje konvergencije je: [3,5]

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{2^{n+1}n^2}$$

D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln^{n+1}x}{2^{n+2}(n+1)^2}}{\frac{\ln^n x}{2^{n+1}n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln x}{2}\right| = \frac{|\ln x|}{2} < 1$$

$$|\ln x| < 2$$

$$-2 < \ln x < 2$$

$$e^{-2} < x < e^{2}$$

1) $x = e^{-2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n e^{-2}}{2^{n+1}n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2 \cdot 2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2 \cdot 2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2}$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

a) $\frac{1}{2n^2}$ je padajući niz

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$

Red konvergira.

2) $x = e^{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n e^{2}}{2^{n+1}n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2 \cdot 2^n n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Očito je da ovaj red konvergira.

Područje konvergencije je: $[e^{-2}, e^{2}]$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}} x^n$$

Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} x\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} x\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n+\sqrt{n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}\right)^{-\frac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}\right]^{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}}\right| = |x|e^{-1} = \frac{|x|}{e} < 1$$

$$|x| < e$$

$$-e < x < e$$

1) $x = -e$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}(-e)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}e\right]^n$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}e\right]^n = \infty$$

Red divergira (jer ne zadovoljava onaj drugi kriterij, da je limes niza jednak 0).

2) $x = e$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}e^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}e\right]^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}e\right]^n = \infty$$

Red divergira jer ne zadovoljava nuždan uvjet za konvergenciju.

Područje konvergencije je: $\langle -e, e\rangle$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3-x)^n}\left(\frac{n-1}{3n}\right)^n$$

Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3-x}\left(\frac{n-1}{3n}\right)\right|^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3-x}\left(\frac{n-1}{3n}\right)\right| = \frac{1}{|3-x|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{3n}\right| = \frac{1}{3|3-x|} < 1$$

$$|3-x| > \frac{1}{3}$$

$$3 - x > \frac{1}{3} \to x < \frac{8}{3}$$

$$3 - x < -\frac{1}{3} \to x > \frac{10}{3}$$

1) $x = \frac{8}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(3-\frac{8}{3}\right)^n}\left(\frac{n-1}{3n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$$

Divergira oujeah.

2) $x=\frac{10}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(3-\frac{10}{3}\right)^n}\left(\frac{n-1}{3n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Ovo je alternirajući red – Leibnitz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$$

Red divergira (jer ne zadovoljava onaj drugi kriterij, da je limes niza jednak 0).

Područje konvergencije je: $\langle-\infty,\frac{8}{3}\rangle\cup\langle\frac{10}{3},\infty\rangle$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$$

Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\sqrt[n]{n}\cdot 9}{2}x(1-x)\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[n]{n}\cdot 9}{2}x(1-x)\right|=\frac{9}{2}|x(1-x)|<1$$

$$|x(1-x)|>\frac{2}{9}$$

$$x-x^2<\frac{2}{9}\leftrightarrow x^2-x+\frac{2}{9}>0$$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}$$

1) $x=\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}\frac{1}{3^n}\frac{2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

Divergira oujeah.

2) $x=\frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}\frac{2^n}{3^n}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

Opet govno divergira.

$$x - x^2 > -\frac{2}{9} \leftrightarrow x^2 - x - \frac{2}{9} < 0$$

$$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{6}$$

3) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \left(\frac{3-\sqrt{17}}{6} \cdot \left(1 - \frac{3-\sqrt{17}}{6} \right) \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \left(\frac{3-\sqrt{17}}{6} \cdot \frac{3+\sqrt{17}}{6} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \left(-\frac{2}{9} \right)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

Ovo divergira (limes niza nije 0).

4) $x = \frac{3+\sqrt{17}}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \left(\frac{3+\sqrt{17}}{6} \cdot \left(1 - \frac{3+\sqrt{17}}{6} \right) \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \left(\frac{3+\sqrt{17}}{6} \cdot \frac{3-\sqrt{17}}{6} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \left(-\frac{1}{6} \right)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

Ista stvar.

Područje konvergencije je: $\langle \frac{3-\sqrt{17}}{6}, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, \frac{3+\sqrt{17}}{6} \rangle$

**Moje rješenje nije krivo, nego su ga oni smao zapisali drugačije. $\sqrt{153} = \sqrt{9 \cdot 17} = 3\sqrt{17}$ i kad se malo pokrati dobije se ovaj gornji zapis ☺

15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n$$

Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x(x+n)}{n} \right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2 + xn}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{n} + x \right| = |x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

1) $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-1(-1+n)}{n}\right]^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}\neq 0$$

Divergira oujeah.

2) $x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=e\neq 0$$

Divergiše.

Područje konvergencije je: $\langle -1,1\rangle$

16.

U ovim zadacima uvijek se kreće od formule za sumu geometrijskog reda, s time da morate paziti odakle kreće indeks sumacije!

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$$

Treba se izračunati suma reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

Znači, mi moramo najprije naći opću formulu za sumu reda oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n}$$

Dakle kreće od poznate formule za sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}=\frac{1}{1-x}$$

Ovo zatim deriviramo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=0+1+2x+3x^{2}+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^{2}}$$

Primijetite da je pri deriviranju 1 postala 0 i taj član se izgubio! Zbog toga nako deriviranja, indeks sumacije kreće od 1 a ne od 0 (ja to zovem: „ako gore maknemo, dolje stavimo“ i obrnuto).

Zatim sve pomnožimo sa x da dobijemo formulu koja nas zanima:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

I sada samo umjesto x ubacimo $\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

17.

Ovo je alternirajući geometrijski red (koji se traži u zadatku), stoga krećemo od sljedeće formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

U razlomku je sada + jer je $q = -x$.

Naš posao je naći sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

odnosno najprije opću formulu za sumu reda oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n$$

Krećemo dakle od sljedećeg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

To deriviramo (opet uočite kako se 1 „pretvori“ u 0 i kako se izgubi jedan član pa indeks sumacije kreće sada od 1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = 0 - 1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Zatim sve pomnožimo sa x:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n = -x + 2x^2 - 3x^3 + \cdots + (-1)^n n x^n = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

Zatim opet deriviramo ovo sve, kako bismo dobili n^2 (uočite da indeks sumacije opet kreće od 1, jer ovim deriviranjem sada nismo izgubili član):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1} = -1 + 4x - 9x^2 + \cdots + (-1)^n n^2 x^{n-1} = \frac{x^2-1}{(1+x)^4}$$

Opet sve pomnožimo sa x:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n = -x + 4x^2 - 9x^3 + \cdots + (-1)^n n^2 x^n = \frac{x^3-x}{(1+x)^4}$$

I konačno sve pomnožimo sa -1 i „uguramo taj“ -1 pod znak sume:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2 x^n = x - 4x^2 + 9x^3 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2 x^n = \frac{x-x^3}{(1+x)^4}$$

I sad umjesto x ubacimo našu $\frac{1}{2}$ i dobijemo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{2}{27}$$

18.

Ovdje ćemo malo integrirati ☺

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(0.5)^n$$

Krenemo od osnovne formule za sumu geometrijskog reda.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

To sve integriramo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = -\ln|1-x|$$

Zatim sve to još jednom integriramo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \cdots = -\int \ln(1-x)\, dx$$

Zatim malo prilagodimo indeks sumacije:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\left(x\ln(1-x) + \int \frac{xdx}{1-x}\right) = -\left(x\ln(1-x) - \int \frac{1-x-1}{1-x}dx\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\left(x\ln(1-x) - \int dx + \int \frac{dx}{1-x}\right) = -(x\ln(1-x) - \ln(1-x) - x)$$

Podijelimo sve sa x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\left(\ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1-x) - 1\right)$$

Ubacimo naš 0.5 pa dobijemo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^n}{n(n+1)} = -\left(\ln(1-0.5) - \frac{1}{0.5}\ln(1-0.5) - 1\right) = 1 - \ln 2$$

19.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2n+1}$$

Tražimo formulu za

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{2n+1}$$

Krenemo od

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Ovo integriramo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Ovo sve podijelimo sa x i dobijemo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Ubacimo $\frac{1}{2}$ umjesto x i dobijemo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \ln 3$$

20.

Stranica 10 u knjižici, tamo je izvedena formula za sinus hiperbolni, slično se izvodi i za kosinus hiperbolni, pa iskoristimo tu formulu:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Mi imamo zadano izračunati sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{(2n)!}$$

što možemo zapisati kao (i ujedno riješiti):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} 3 = \frac{1}{2}\left(e^3 + e^{-3}\right)$$