

Matematika 2

2. predmeđuispit

4. svibnja 2011.

Zadatak 1.

(a) Ispitati postojanje limesa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2(x^2+y^2)}}$$

(b) Dokažite da je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3 - x - y) = 0$$

Zadatak 2.

Odrediti realne parametre a i b tako da funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{a+2} + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ b^2 + 2b + 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

bude neprekinuta.

Zadatak 3.

Neka je $z(x, y) = \frac{x+3y}{2x-y}$. Izračunajte, po definiciji parcijalne derivacije, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 3)$.

Zadatak 4.

Dokažite diferencijabilnost funkcije $f(x, y) = 2xy + x^2$ u točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadatak 5.

Izračunajte približno polumjer opisane kružnice pravokutnika čije su stranice $a = 6.2$ i $b = 7.8$.

Zadatak 6.

Odredite, u ovisnosti o realnom parametru a , sve točke plohe zadane jednadžbom $z = ax^3 + 3ax^2y - 6y^3$ u kojima su tangencijalne ravnine paralelne s ravninom $x + y + z = 0$.

Zadatak 7.

Zadana je funkcija $z = f\left(\frac{x}{y}, x^2 - y^2\right)$. Izračunajte $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$.

Zadatak 8.

Odredite $F'(1)$ ako je

$$F(x) = \int_0^\infty ye^{-y} \ln(xy) dy$$

Zadatak 9.

Naći one točke na krivulji

$$\mathfrak{C} \dots \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 3t^2 \\ z(t) = 5 - \frac{9}{2}t^3 \end{cases}$$

u kojima je tangenta na krivulju \mathfrak{C} okomita na ravninu $2x + 2y - \frac{3}{2}z = 0$.

Zadatak 10.

(a) Neka je $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Izvedite formulu za $\nabla f(\|\mathbf{r}\|)$.

(b) Dokaži da za radijalno skalarno polje $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i bilo koji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\nabla f(\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\|) = f'(\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\|) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\|}$$

(c) Izračunajte $\nabla 2r \cos r$.

Zadatak 11.

Pokažite da se stožac $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ i sfera $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ diraju u točkama $(0, \pm b, c)$.

Zadatak 12.

Nađite d^2z u točki $(2, 0, 1)$ funkcije z zadane implicitno jednadžbom

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - z + 4 = 0$$

Zadatak 13.

Nađite drugi Taylorov polinom funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno sa

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

u točki $(1, 1, z > 0)$.

Zadatak 14.

Ispitajte postojanje ekstrema funkcije

$$z = \ln(e^x - xy)$$

Zadatak 15.

Od svih kvadara obujma 27 pronađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Zadatak 16.

Metodom Lagrangeovih multiplikatora pronađi i ispitaj točke lokalnih uvjetnih ekstrema ako je $f(x, y) = xy$ uz uvjet $x^2 + y^2 - 2 = 0$.