2. MEĐUISPIT IZ MATEMATIKE 2

17.05.2006.

1. Ispitati postojanje limesa
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2}.$$

2. **a)** Naći z'_x i z'_y za funkciju $z = \ln\cos\frac{x}{y}$.

b) Odrediti jednadžbu tangencijalne ravnine u točki $A(\frac{\pi}{4}, 1, z_0)$.

3. Izračunati približnu vrijednost funkcije
$$f(x,y) = x\ln y + y\ln x$$
u točki $(2.5, 2.8)$ koristeći prvi diferencijal funkcije u točki (e,e). Vrijednost broja e na dvije decimale je $e = 2.72$.

4. Ako je $F(\alpha) = \int_1^e \frac{\ln(\alpha x)}{x}\,dx$, izračunati $F'(e^2)$.

5. Vektorska jednadžba gibanja točke u prostoru je
$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + e^t\vec{k},\ t\in\mathbb{R}.$$

a) Odrediti iznos brzine točke u trenutku $t=0$, tj. izračunati $\|\vec{r}\,'(0)\|$.
b) Odrediti kanonsku jednadžbu tangente na krivulju u točki koja odgovara parametru $t=0$.

6. Dokazati da za $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ i $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ vrijedi
$$\nabla f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

7. Napisati funkciju
$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 + x - y + 1$$
po potencijama od $(x-1)$ i $(y+1)$ koristeći Taylorovu formulu.

8. **a)** Napisati nužne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema funkcije dviju varijabli.
b) Dokazati tvrdnju pod a).

9. Naći i ispitati ekstreme funkcije $z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 2y + 1$.

10. Naći i ispitati ekstreme funkcije $z = 2x + y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 1$.

Napomena: Svi zadaci nose **2 boda**. Vrijeme pisanja je **90 minuta**.

Rješenja 2. međuispita iz Matematike 2
17.05.2006.

1. Uvedemo li polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi \quad \text{i} \quad y = r\sin\varphi$$

ovaj se limes svodi na

$$\lim_{r\to 0}\frac{3r^3\cos^3\varphi - 2r^3\sin^3\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0}(r(3\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi))$$

a kako je za svaki $\varphi \in \mathbb{R}$ izraz $(3\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi)$ konačan, slijedi da ovaj limes postoji i jednak je 0, tj. vrijedi:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

2. a) $z'_x = \dfrac{1}{\cos\frac{x}{y}}\cdot\left(-\sin\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{y}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right) \qquad z'_y = \dfrac{1}{\cos\frac{x}{y}}\cdot\left(-\sin\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = \dfrac{x}{y^2}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

b) vrijedi $z(\frac{\pi}{4},1) = \ln\cos\frac{\pi}{4} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2$ pa tangencijalnu ravninu tražimo u točki $A(\frac{\pi}{4},1,-\frac{1}{2}\ln 2)$
Kako je

$$(z'_x)_T = -1 \quad \text{i} \quad (z'_y)_T = \frac{\pi}{4}$$

dobivamo tangencijalnu ravninu $z + \frac{1}{2}\ln(2) = -1(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}(y-1)$ odnosno

$$x - \frac{\pi}{4}y + z + \frac{1}{2}\ln 2 = 0.$$

3. Vrijedi

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\triangle y.$$

Parcijalne derivacije zadane funkcije su

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(e,e)} = \left(\ln y + \frac{y}{x}\right)_{(e,e)} = 2 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(e,e)} = \left(\frac{x}{y} + \ln x\right)_{(e,e)} = 2$$

Uzimamo $(x,y) = (e,e)$, $x+\triangle x = 2.5$ i $y + \triangle y = 2.8$ pa je

$$\triangle x = 2.5 - e = 2.5 - 2.72 = -0.22 \quad \text{i} \quad \triangle y = 2.8 - 2.72 = 0.08.$$

Slijedi:

$$f(2.5, 2.8) \approx f(e,e) - 2\cdot(0.22) + 2\cdot(0.08) = 5.16$$

4.

$$F'(\alpha) = \int_1^e \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\ln(\alpha x)}{x}\right)dx = \int_1^e \frac{1}{\alpha x}\,dx$$

$$F'(e^2) = \int_1^e \frac{1}{e^2 x}\,dx = \frac{1}{e^2}\cdot\left(\ln|x|\Big|_1^e\right) = \frac{1}{e^2}.$$

5. a) $\vec{r}\,'(t) = 2t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{r}\,'(0) = \vec{j} + \vec{k} \;\Rightarrow\; \|\vec{r}\,'(0)\| = \sqrt{2}.$

b) Vrijednosti $t = 0$ odgovara točka $(0,0,1)$, vektor smjera u toj točki je $\vec{r}\,'(0)$ pa je kanonska jednadžba tangente u toj točki

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

6. Po teoremu o deriviranju složene funkcije je

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r) = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r} \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(r) = f'(r)\frac{y}{r} \qquad \frac{\partial}{\partial z}f(r) = f'(r)\frac{z}{r}$$

a znamo da je $\nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial x}f(r)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}f(r)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}f(r)\vec{k}$, pa slijedi tvrdnja.

7. Razvijamo funkciju u Taylorov red oko točke $T(1,-1)$. Budući da su sve parcijalne derivacije ove funkcije reda strogo većeg od 2 jednake nuli imamo:

$$\begin{aligned} f_T(x,y) &= f(1,-1)+f'_x(1,-1)(x-1)+f'_y(1,-1)(y+1)+ \\ &+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(1,-1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,-1)(x-1)(y+1)+f''_{yy}(1,-1)(y+1)^2\right) \end{aligned}$$

Izračunajmo potrebne parcijalne derivacije. Imamo:

$$f'_x(x,y)=2x+3y+1, \quad f'_y(x,y)=3x+2y-1 \quad \Rightarrow f'_x(1,-1)=0, \quad f'_y(1,-1)=0$$

$$f''_{xx}=2, \quad f''_{xy}=3, \quad f''_{yy}=2.$$

Kako je $f(1,-1)=2$ dobivamo:

$$f_T(x,y)=2+\frac{1}{2!}(2(x-1)^2+6(x-1)(y+1)+2(y+1)^2)=2+(x-1)^2+3(x-1)(y+1)+(y+1)^2$$

8. (Vidi 9. cjelina, str.6)

a) Ako je $\mathbf{a}$ lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije f, onda je $\nabla f(\mathbf{a})=0$.
b) Funkcija jedne varijable g(t)=f($\mathbf{a}$+t$\mathbf{h}$), gdje je $\mathbf{h}$ bilo koji učvršćeni vektor, ima po pretpostavci lokalni ekstrem u točki $t=0$, dakle $g'(0)=0$. Odatle po pravilu za derivaciju kompozicije slijedi

$$\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}=0, \quad \forall\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n.$$

Stavljajući $\mathbf{h}=\nabla f(\mathbf{a})$ dobivamo $\|\nabla f(\mathbf{a})\|^2=0$, dakle $\nabla f(\mathbf{a})=0$.

9. $z'_x=4x-4y \quad z'_y=-4x+6y-2 \Rightarrow$ stacionarna točka je $T(1,1)$.

$z''_{xx}=4>0, \quad z''_{xy}=-4, \quad z''_{yy}=6 \Rightarrow \Delta_T=\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}=8>0$ pa se radi o **lokalnom minimumu**.

10. Zapišimo prvo Lagrangeovu funkciju za ovaj problem

$$L(x,y)=2x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} &L'_x(x,y)=2+2\lambda x=0 \\ &L'_y(x,y)=1+2\lambda y=0 \\ &x^2+y^2=1 \end{aligned}$$

dobivamo stacionarne točke:

$T_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ za koju je $\lambda=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $T_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ za koju je $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ispitajmo dovoljne uvjete. Drugi diferencijal Lagrangeove funkcije je

$$d^2L=2\lambda((dx)^2+(dy)^2)$$

Za točku $\mathbf{T_1}$je $d^2L=-\sqrt{5}((dx)^2+(dy)^2)<0$ pa se radi o **lokalnom maksimumu**.
Za točku $\mathbf{T_2}$ je $d^2L=\sqrt{5}((dx)^2+(dy)^2)>0$ pa se radi o **lokalnom minimumu**.

Napomena: Zadatak se može riješiti i kao *primjer 3.* na str. 4 devete cjeline.

PONOVLJENI ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2
05.07.2006.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. [**2 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy' = \cos^2 y \cdot \ln x$$

koje zadovoljava uvjet $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

2. [**3 boda**] Naći ono rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' - \frac{y}{x} = x^5$$

koje zadovoljava uvjet $y(1) = 1$.

3. [**4 boda**]
a) Izvesti formulu za Eulerov multiplikator $\mu = \mu(x)$ za jednadžbu

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

b) Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(x\sin y - y)\,dx + (x^2\cos y - x\ln x)\,dy = 0.$$

koristeći Eulerov multiplikator $\mu = \mu(x)$.

4. [**2 boda**] Naći opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = xy' + (y')^2.$$

5. [**3 boda**]Naći jednadžbu familije krivulja za koje je u svakoj točki odsječak tangente na osi y jednak udaljenosti te točke od ishodišta koordinatnog sustava.

6. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$2yy'' - 3(y')^2 = 0.$$

7. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = \cos x.$$

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

8. [**3 boda**] Naći područje konvergencije i ispitati konvergenciju na rubovima područja za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} \ .$$

9. [**3 boda**]
a) Napisati opću jednadžbu ravnine π kroz točke $A(1,2,3)$, $B(0,2,-1)$, $C(1,1,1)$.
b) Napisati parametarsku jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $T(1,-1,1)$ i paralelan je s pravcem

$$q \ldots \begin{cases} x = t+5 \\ y = 2t+1 \\ z = 6t+2 \end{cases}$$

c) Naći presjecište pravca p i ravnine π.

10. [**3 boda**]
a) Napisati definiciju parcijalne derivacije $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funkcije $z = f(x,y)$ u točki $T_1(x_1, y_1)$.
b)Naći gradijent funkcije $f(x,y) = x^2 y + \ln(xy)$ u točki $T(1,2)$.
c) Napisati prvi diferencijal funkcije iz b) dijela zadatka u točki $T(1,2)$.

11. [**3 boda**] Napisati Taylorov polinom drugog stupnja za funkciju

$$f(x,y) = e^x \cos(x+y)$$

u točki $T(0,0)$.

12. [**3 boda**] Naći stacionarne točke i ispitati dovoljne uvjete za postojanje ekstrema funkcije $z = z(x,y)$ zadane implicitno s

$$x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0.$$

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.

Rješenja ponovljenog završnog ispita iz Matematike 2
05.07.2006.

1. Ovo je jednadžba sa separiranim varijablama

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Budući da je $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \mathrm{tg} y + C_1$ i $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C_2$ rješenje je

$$\mathrm{tg} y = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Uvjet je zadovoljen za $C = 1$ pa je traženo rješenje

$$\mathrm{tg} y = \frac{\ln^2 x}{2} + 1.$$

2. Ovo je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda. Riješimo prvo homogenu jednadžbu.

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

Separacijom varijabli lako se dobije $y_H = Cx$. Pretpostavimo sada da je rješenje oblika $y = C(x)x$ i provedimo varijaciju konstanti. Dobivamo jednadžbu za $C(x)$

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x^5 \;\Rightarrow\; C(x) = \int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} + C$$

pa je opće rješenje $y = \frac{x^6}{5} + Cx$. Uvjet je zadovoljen za $C = \frac{4}{5}$ pa je traženo rješenje

$$y = \frac{x}{5}(x^5 + 4).$$

3. **a)**Da bismo ovu jednadžbu sveli na egzaktnu pomnožimo je s nepoznatom funkcijom $\mu = \mu(x)$:

$$\mu(x)P(x,y)dx + \mu(x)Q(x,y)dy = 0.$$

Iz uvjeta egzaktnosti dobivamo

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = \mu(Q'_x - P'_y) \quad (*)$$

Budući da je $\mu = \mu(x)$ slijedi da je $\mu'_y = 0$. Pisat ćemo μ' umjesto μ'_x. Jedanadžba $(*)$ tada prelazi u

$$\mu' Q = \mu(P'_y - Q'_x) \;\Rightarrow\; \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)\, dx.$$

Da bi lijeva strana bila funkcija samo nepoznanice x i desna strana to mora biti. Zato je naša pretpostavka opravdana ukoliko je

$$\frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)$$

funkcija samo varijable x. Tada se multiplikator μ računa formulom

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x) dx.$$

b) Prema formuli iz a) dijela zadatka imamo

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{x^2 \cos y - x \ln x}(x \cos y - 1 - 2x \cos y + 1 + \ln x) dx = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

pa iz ovog lako slijedi

$$\mu(x) = \frac{1}{x}$$

Dobivamo egzaktnu diferencijalnu jednadžbu

$$(\sin y - \frac{y}{x})\, dx + (x \cos y - \ln x)\, dy = 0$$

$$u(x, y) = \int_1^x (\sin y - \frac{y}{x}) dx + \int_0^y \cos y\, dy = x \sin y - y \ln x$$

pa je opće rješenje ove jednadžbe

$$x \sin y - y \ln x = C.$$

4. Jednadžba je Clairautova pa je njeno opće rješenje

$$y = xC + C^2.$$

Singularno rješenje dobivamo eliminacijom parametra p iz sustava

$$\begin{aligned} y &= xp + p^2 \\ 0 &= x + 2p \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe je $p = -\frac{x}{2}$ pa je traženo singularno rješenje $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

5. Segmentni oblik jednadžbe tangente na krivulju u proizvoljnoj točki $T(x_0, y_0)$ je

$$\frac{x}{x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}} + \frac{y}{y_0 - y'(x_0)x_0} = 1.$$

Znamo da je udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ od ishodišta dana formulom $d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ pa dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$y - y'x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

koja je homogena i rješava se supstitucijom $u = \frac{y}{x}$. Dobivamo jednadžbu $-u'x = \sqrt{1 + u^2}$(separirane varijable) čije je rješenje

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = \frac{1}{Cx}$$

pa je krajnje rješenje

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{1}{C}.$$

6. Jednadžba je homogena po y, y', y'' pa je rješavamo zamjenom $y = e^{\int z(x)\, dx}$. Tada je $y' = zy$ i $y'' = (z' + z^2)y$. Tada dobivamo jednadžbu

$$y^2(2z' + 2z^2 - 3z^2) = 0$$

pa je jedno rješenje $y \equiv 0$ a drugo dobivamo iz jednadžbe

$$2z' = z^2$$

što je jednadžba sa separiranim varijablama i njeno rješenje je $z(x) = \frac{-2}{x+C}$ pa slijedi da je $\int z(x)\, dx = -2 \ln K|x + C| = \ln \frac{1}{K^2(x+C)^2}$. Vracanjem sustitucije se dobiva

$$y = e^{\ln \frac{1}{K^2(x+C)^2}} = \frac{1}{K^2(x + C)^2}.$$

7. Karakteristična jednadžba je $r^2+1=0$ čiji su korijeni $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i$ pa je rješenje homogene $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Zbog oblika desne strane jaso je da partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = x(A\cos x + B\sin x).$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $A=0$ i $B=\frac{1}{2}$ pa je $y_p = \frac{1}{2}x\sin x$. Opće rješenje je

$$y = C_1\cos x + (C_2 + \frac{1}{2}x)\sin x.$$

8.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^n}{n^2}}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x-2|$$

Prema D'Alambertovom kriteriju da bi red konvergirao mora biti $|x-2|<1$ pa red sigurno konvergira za $x\in\langle 1,3\rangle$. Za rubove je potrebno provjeriti.

Za $x=1$ dobivamo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ koji konvergira (prema Leibnitzovom kriteriju.)

Za $x=3$ dobivamo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ koji konvergira.

Red konvergira za $x\in[1,3]$.

9. a) Jednadžba ravnine kroz tri točke

$$[\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4(x-1)-2(y-2)+(z-3)=0$$

pa je tražena jednadžba

$$-4x-2y+z+5=0.$$

b) Vektor smjera danog pravca je $\vec{c}=(1,2,6)$ pa je

$$p\ldots\begin{cases} 1+t \\ -1+2t \\ 1+6t \end{cases}$$

c)$-4(1+t)-2(-1+2t)+(1+6t)+5=0 \Rightarrow t=2$ pa je tražena točka $(3,3,13)$.

10. a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1) = \lim\limits_{\triangle y\to 0}\dfrac{f(x_1,y_1+\triangle y)-f(x_1,y_1)}{\triangle y}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy+\dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=5$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+\dfrac{1}{y} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\dfrac{3}{2}$

$$\nabla f(1,2) = 5\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$$

c) $df(1,2) = 5\,dx + \dfrac{3}{2}\,dy.$

11.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x\cos(x+y) - e^x\sin(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x\sin(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2e^x\sin(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -e^x\sin(x+y) - e^x\cos(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x\cos(x+y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1$$

Tražen polinom drugog stupnja je

$$T_2(x,y) = f(0,0)+[f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y]+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(0,0)x^2+2f''_{xy}(0,0)xy+f''_{yy}(0,0)y^2] = 1+x-xy-\frac{1}{2}y^2.$$

12. Neka je $F(x,y,z) = x^2+y^2-4y+z^2$. Nađimo stacionarne točke:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{y-2}{z}$$

Izjednačavajem parcijalnih derivacija s 0 dobivamo $x = 0$ i $y = 2$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $z = \pm 2$ pa su stacionarne točke

$$T_1(0,2,-2) \quad \text{i} \quad T_2(0,2,2).$$

Računamo druge derivacije

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{z}) = -\frac{z^2+x^2}{z^3} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Big|_{T_1} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Big|_{T_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{z}) = -\frac{x(y-2)}{z^3} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\Big|_{T_1} = 0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Big|_{T_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y-2}{z}) = -\frac{z^2+(y-2)^2}{z^3} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Big|_{T_1} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Big|_{T_2} = -\frac{1}{2}$$

Provjerimo za točku T_1

$$\Delta_{T_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{T_1} = \frac{1}{2} > 0$$

pa je točka T_1 **lokalni minumum**.
Provjerimo za točku T_2

$$\Delta_{T_2} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{T_2} = -\frac{1}{2} < 0$$

pa je točka T_2 **lokalni maksimum**.

ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2

28.06.2006.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. [**3 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xyy' = y^2 - x^2$$

koje zadovoljava uvjet $y(1) = \sqrt{2}$.

2. [**2 boda**] Naći krivulje koje sijeku familiju krivulja $y = Ce^x$ pod pravim kutem.

3. [**2 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + y\,\mathrm{tg}x = 2\cos^2 x.$$

4. [**2 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(2x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$$

5. [**3 boda**]
a) Za koji $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ postoji singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = axy' + \frac{1}{2}(y')^2.$$

b) Za takav a naći opće rješenje jednadžbe iz a) dijela zadatka.

6. [**3 boda**] Supstitucijom $y = e^{\int z(x)\,dx}$ riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$y\,y'' - 2(y')^2 - y^2 = 0.$$

7. [**2 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''' - y'' = 0$$

koje zadovoljava uvjete

$$y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2.$$

8. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = \mathrm{ctg}x.$$

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

9. [**3 boda**] Naći područje konvergencije i ispitati konvergenciju na rubovima područja za red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n} \ .$$

10. [**3 boda**]
a) Zadane su točke $T_1(1,0,2)$, $T_2(2,1,3)$ i ravnina
$$\pi \ldots 2x + y + z - 12 = 0.$$
Naći probodište pravca p, koji prolazi kroz točke T_1 i T_2, s ravninom π.
b) Odrediti kosinus kuta
$$\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{T_1T_2}, \vec{n}),$$
gdje su T_1 i T_2 točke iz a) dijela zadatka i $\vec{n}$ je normala na ravninu π.

11. [**3 boda**] Zadana je funkcija $u = x^2 - y^2 - z^2$. Točke u kojima je gradijent funkcije u okomit na radijvektor $\vec{r}$ točke $T(x,y,z)$ tvore plohu. Napisati jednadžbu te plohe i skicirati je u $OXYZ$ sustavu.

12. [**3 boda**]
a) Napisati definiciju parcijalne derivacije $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ funkcije $z = f(x,y)$ u točki $T_0(x_0,y_0)$.
b) Naći i ispitati lokalne ekstreme funkcije
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4.$$

13. [**3 boda**] Naći opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe
$$y' + p(x)y = q(x).$$

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.

Rješenja završnog ispita iz Matematike 2
28.06.2006.

1. Jednadžba je homogena. Dijeljenjem sa x^2 dobivamo jednadžbu

$$\frac{y}{x}y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$$

pa uvodimo zamjenu $z = \frac{y}{x}$, iz čega slijedi da je $y' = z + xz'$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$z(z + xz') = z^2 - 1 \Rightarrow xzz' = -1 \Rightarrow z\,dz = -\frac{dx}{x},$$

iz čega integracijom slijedi $z^2 = 2\ln\frac{c}{x}$, pa uvrštavanjem $z = \frac{y}{x}$ dolazimo do rješenja

$$y^2 = x^2 \ln\frac{c^2}{x^2}$$

Rješenje koje zadovoljava početni uvjet je

$$y^2 = x^2 \ln\frac{e^2}{x^2}.$$

2. Najprije odredimo diferencijalnu jednadžbu familije krivulja $y = Ce^x$. Deriviranjem možemo eliminirati parametar C.

$$y = Ce^x, \quad y' = Ce^x \;\Rightarrow y' = y.$$

Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu početne familije. Diferencijalna jednadžba ortogonalne familije je tada

$$y' = -\frac{1}{y}$$

što je jednadžba sa separiranim varijablama pa dobivamo rješenje

$$y^2 + 2x = C$$

3. Jednadžba je linearna prvog reda. Riješimo prvo homogenu jednadžbu

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 0$$

Dobije se

$$\frac{dy}{y} = -\mathrm{tg}\,x\,dx$$

odakle integracijom slijedi

$$\ln y = \ln(C\cos x), \;\Rightarrow y_H = C\cos x$$

Pretpostavimo da je rješenje u obliku $y = C(x)\cos x$ i provedimo varijaciju konstanti. Dobivamo

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\sin x = 2\cos^2 x \;\Rightarrow C'(x) = 2\cos x \;\Rightarrow C(x) = 2\sin x + C$$

iz čega slijedi da je opće rješenje dane jednadžbe

$$y = (2\sin x + C)\cos x.$$

4. Neka je $P(x,y) = 2x + y + 1$ i $Q(x,y) = x + 2y$. Budući da vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

jednadžbaje egzaktna. Imamo

$$u(x,y) = \int_0^x (2x + y + 1)\,dx + \int_0^y 2y\,dy = x^2 + yx + x + y^2$$

pa je opće rješenje ove jednadžbe

$$x^2 + y^2 + yx + x = C.$$

5. a) Neka je $y' = p$. Singularno rješenje zadovoljava sustav

$$\begin{aligned} y &= axp + \tfrac{1}{2}p^2 \\ 0 &= ax + p \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe imamo $p = -ax$ pa uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$y = -a^2x^2 + \frac{1}{2}a^2x^2 = -\frac{1}{2}a^2x^2$$

Odredimo sada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koji jednadžba ima singularno rješenje. Uvrštavanjem $y = -\frac{1}{2}a^2x^2$ u jednadžbu i dijeljenjem s a^2x^2 dobije se kvadratna jednadžba $\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{1}{2} = 0$ čije je rješenje $a = 1$. U tom slučaju imamo Clairautovu diferencijalnu jednadžbu sa singularnim rješenjem $y = -\frac{1}{2}x^2$
b) Za $a = 1$ dobivamo jednadžbu $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$ koja je Clairautova, pa je njeno opće rješenje

$$y = xC + \frac{1}{2}C^2.$$

6. Jednadžba je homogena po y, y', y''. Uvođenjem supstitucije $y = e^{\int z(x)\,dx}$, $y' = zy$ i $y'' = (z' + z^2)y$ imamo

$$y^2(z' + z^2) - 2z^2y^2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow y^2(z' - z^2 - 1) = 0$$

pa je $y \equiv 0$ jedno rješenje. Drugo dobijemo pomoću jednadžbe

$$z' = z^2 + 1 \;\Rightarrow \frac{dz}{z^2+1} = dx \Rightarrow \;\mathrm{arctg} z = x + C \;\;\Rightarrow\;\; z(x) = \mathrm{tg}(x + C).$$

$$\int z(x)\,dx = \int \mathrm{tg(x + C)}dx = \left| \begin{array}{l} \cos(x+C) = v \\ -\sin(x+C) = dv \end{array} \right| = -\int \frac{dv}{v} = -\ln K\cos(x{+}C) = \ln\frac{1}{K\cos(x+C)}$$

pa je

$$y = e^{\int z(x)\,dx} = \frac{1}{K\cos(x+C)}.$$

7. Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

i njeni su korijeni $\lambda_1 = 0$(dvostruki) i $\lambda_2 = 1$(jednostruki), pa je opće rjesenje

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x$$

Iz početnih uvjeta dobivamo konstante C_1 , C_2, C_3.

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= C_2 + C_3 = 1 \\ y''(0) &= C_3 = 2 \end{aligned}$$

pa je

$$C_1 = C_2 = -1, \quad C_3 = 2$$

pa je rješenje koje zadovoljava uvjete

$$y = -1 - x + 2e^x$$

8. Riješimo prvo homogenu jednadžbu. Karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 1 = 0$ i njeni su korijeni $\lambda = \pm i$. Rješenje homogene jednadžbe je tada $y_H = C_1\cos x + C_2\sin x$. Pretpostavimo da je rješenje oblika

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

i izvršimo varijaciju konstanti. Dolazimo do sustava za C_1' i C_2'.

$$\begin{aligned} C_1'\cos x + C_2'\sin x &= 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x &= \mathrm{ctg}x \end{aligned}$$

iz kojeg dobivamo

$$C_1'(x) = -\cos x \quad C_2'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

$$C_1(x) = -\int \cos x\, dx = -\sin x + C.$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \cos x + D = \ln|\mathrm{tg}(\frac{x}{2})| + \cos x + D$$

pa je traženo rješenje

$$y = (-\sin x + C)\cos x + (\ln|\mathrm{tg}(\frac{x}{2})| + \cos x + D)\sin x$$

9.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n3^n}}\right| = \frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-2|}{3}$$

Prema D'Alambertovom kriteriju da bi red konvergirao mora biti $\frac{|x-2|}{3} < 1$ pa red sigurno konvergira za $x \in \langle -1, 5\rangle$. Za rubove je potrebno provjeriti.

Za $x = 1$ dobivamo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ koji konvergira (prema Leibnitzovom kriteriju.)

Za $x = 5$ dobivamo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ koji divergira.

Područje konvergencije ovog reda je interval $[-1, 5\rangle$.

10. a) $\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Jednadžba pravca p u parametarskom obliku glasi

$$p \ldots \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine slijedi da pravac siječe ravninu za $t = 2$, dakle u točki $T(3, 2, 4)$.

b) Vektor normale je $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Kosinus kuta između vektora $\vec{n}$ i vektora $\overrightarrow{T_1T_2}$ računamo po formuli

$$\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{T_1T_2}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\overrightarrow{T_1T_2}\|} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

11. $\nabla u = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$. Mora vrijediti $\nabla u \cdot \vec{r} = 0$ pa dobivamo plohu $x^2 = y^2 + z^2$.

12. a) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{T_0} = \lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$

b) Iz $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 6 = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y - 2 = 0$ dobivamo jednu stacionarnu točku $T(4, -1)$.
Računamo druge derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$

$$\triangle_T = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$

pa se radi o lokalnom minimumu.

13. (vidi 10. knjižica str. 22.)

2. MEĐUISPIT IZ MATEMATIKE 2

09.05.2007.

1. (2 boda)

a) Napisati definiciju parcijalne derivacije $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$.

b) Napisati definiciju diferencijabilnosti funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T(x, y)$.

2. (2 boda) Naći jedinični vektor u smjeru kojega iz točke $T(1, 1, 0)$ funkcija

$$f(x, y, z) = x^3 + x^2 y + \sin z$$

najbrže raste.

3. (3 boda) Na plohu $z = xy$, u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ postavljena je tangencijalna ravnina π koja na koordinatnim osima x i y odsijeca odreske $m = 2$ i $n = 3$. Izračunati koliki odrezak ravnina π odsijeca na z osi.

4. (2 boda) Pokazati da funkcija $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ zadovoljava jednadžbu

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

5. (2 boda) Odrediti točke na krivulji

$$\mathcal{C} \ldots \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = t^2 - 2t \end{cases}$$

u kojima je tangenta na krivulju paralelna s ravninom $2x - y + 2z - 1 = 0$.

6. (2 boda) Izračunati $\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}(1, 2)$, ako je $I(\alpha, \beta)$ integral zadan s

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{\alpha^2} \frac{\cos(\alpha\beta^2 x)}{x} dx\ .$$

7. (2 boda) Naći Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $z = \ln(x + y^2)$ u točki $T_0(e, 0)$.

8. (3 boda) Naći i ispitati točke lokalnih ekstrema funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x - 16z + 13 = 0.$$

9. (2 boda) Metodom Lagrangeovog multiplikatora naći i ispitati uvjetne ekstreme funkcije

$$u = xy + 2xz + 3yz,$$

ako su nezavisne varijable x, y, z vezane uvjetom $x + y + z = 6$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **90 minuta**.

Rješenja 2. međuispita iz Matematike 2
09.05.2007.

1. a) Neka je $z = f(x, y)$ neprekinuta i definirana na otvorenom skupu $M \subseteq R^2$, $T_0(x_0, y_0) \in M$. Parcijalna derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ se definira kao

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}$$

b) Neka je $z = f(x, y)$ i $h = (h_1, h_2)$ te $o(h)$ beskonačno mala skalarna veličina višeg reda od $\|h\|$ tj.

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Ako promjenu funkcije $\triangle f = f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)$ možemo prikazati u obliku

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) = a_1 h_1 + a_2 h_2 + o(h)$$

za neki $a = (a_1, a_2)$ onda kažemo da je funkcija $f(x, y)$ diferencijabilna u točki $T(x, y)$.

2. $f(x, y, z) = x^3 + x^2 y + \sin z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos z$$

Funkcija najbrže raste u smjeru gradijenta. Traženi jedinični vektor je

$$\frac{\nabla f(1,1,0)}{\|\nabla f(1,1,0)\|} = \frac{5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{25 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{27}}(5\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

3.

$$\pi \ldots z - z_0 = (f'_x)_0 (x - x_0) + (f'_y)_0 (y - y_0) = y_0 (x - x_0) + x_0 (y - y_0)$$

$$\pi \ldots y_0 x + x_0 y - z = 2x_0 y_0 - z_0 = 2x_0 y_0 - x_0 y_0 = x_0 y_0$$

$$\pi \ldots \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{-x_0 y_0} = 1$$

Odavde slijedi da je $x_0 = m = 2$, $y_0 = n = 3$. Traženi odsječak na z osi je $p = -x_0 y_0 = -6$.

4.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu slijedi tvrdnja.

5. Vektor smjera tangente je

$$\vec{c} = 2t\vec{i} + 3t^2 \vec{j} + (2t - 2)\vec{k}.$$

Tražena tangenta paralelna je s danom ravninom pa je okomita na njenu normalu, tj. vrijedi

$$\vec{c} \cdot \vec{n_\pi} = 4t - 3t^2 + 4t - 4 = 0$$

odnosno

$$3t^2 - 8t + 4 = 0$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = \frac{2}{3}$ i $t_2 = 2$. Tražene točke su

$$T_1\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, -\frac{8}{9}\right) \qquad \text{i} \qquad T_2(4, 8, 0).$$

6.

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)=\frac{\cos(\alpha^3\beta^2)}{\alpha^2}\cdot 2\alpha-\int_{\frac{1}{\beta}}^{\alpha^2}\frac{\sin(\alpha\beta^2x)}{x}\cdot\beta^2x\,dx=\frac{2\cos(\alpha^3\beta^2)}{\alpha}-\int_{\frac{1}{\beta}}^{\alpha^2}\sin(\alpha\beta^2x)\cdot\beta^2\,dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(1,2)=2\cos 4-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin(4x)\,dx=2\cos 4+\cos(4x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=2\cos 4+\cos 4-\cos 2=3\cos 4-\cos 2.$$

7. Imamo

$$z'_x=\frac{1}{x+y^2}\qquad z'_y=\frac{2y}{x+y^2}$$

$$z''_{xx}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}\qquad z''_{xy}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}\qquad z''_{yy}=\frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}$$

U točki T_0 je

$$z(T_0)=1,\ z'_x(T_0)=\frac{1}{e},\ z'_y(T_0)=0\ z''_{xx}(T_0)=-\frac{1}{e^2}\ z''_{xy}(T_0)=0\ z''_{yy}(T_0)=\frac{2}{e}$$

pa je traženi drugi Taylorov polinom

$$T_2(x,y)=1+\frac{1}{e}(x-e)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{e^2}(x-e)^2+\frac{2}{e}y^2)=1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\frac{1}{e}y^2.$$

8. $F(x,y,z)=x^2+4y^2+4z^2-2x-16z+13$

$$z'_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x-2}{8z-16}=0\qquad z'_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y}{z-2}=0$$

Dobivamo $x=1$ i $y=0$. z koordinatu izračunamo uvrštavanjem u jednadžbu. Dobivamo $z=1$ i $z=3$. Stacionarne tocke su $T_1(1,0,1)$ i $T_2(1,0,3)$. Izračunajmo druge derivacije ove funkcije

$$z''_{xx}=-\frac{(4z-8)-(x-1)4\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)}{(4z-8)^2}\qquad z''_{xy}=-\frac{-(x-1)4\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{(4z-8)^2}\qquad z''_{yy}=-\frac{(z-2)-y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{(z-2)^2}$$

U točki T_2 imamo

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(T_2) & z''_{xy}(T_2)\\ z''_{xy}(T_2) & z''_{yy}(T_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}>0\quad\text{i}\quad z''_{xx}(T_2)=-\frac{1}{4}<0$$

pa je u T_2 lokalni maksimum. U točki T_1 imamo

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(T_2) & z''_{xy}(T_2)\\ z''_{xy}(T_2) & z''_{yy}(T_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}>0\quad\text{i}\quad z''_{xx}(T_2)=\frac{1}{4}>0$$

pa u točki T_1 imamo lokalni minimum.

9. Definiramo Langrangeovu funkciju
$L(x,y,z)=xy+2xz+3yz+\lambda(x+y+z-6)$

$$\begin{aligned}L'_x&=y+2z+\lambda=0\\ L'_y&=x+3z+\lambda=0\\ L'_z&=2x+3y+\lambda=0\\ x+y+z&=6\end{aligned}$$

Stacionarna točka je $T(0,3,3)$ i dobivamo $\lambda=-9$. Za drugi diferencijal dobivamo

$$d^2L=2dx\;dy+4dx\,dz+6dy\,dz$$

Uvrštavanjem uvjeta $dx=-dy-dz$ dobivamo

$$d^2L=-2(dy)^2-4(dz)^2<0$$

pa dobivamo da je točka $T(0,3,3)$točka lokalnog uvjetnog maksimuma.

PONOVLJENI ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2

03.07.2007.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$$

2. [**2 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(x^2+y^2+2x)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

3. [**3 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' - \operatorname{tg}(x)y = \frac{2x}{\cos x}$$

koje zadovoljava uvjet $y(0) = 1$.

4. [**3 boda**] Odrediti opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$2y = x\frac{(y')^2}{y'+2}.$$

5. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0.$$

6. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 9y = \frac{3}{\sin 3x}.$$

7. [**3 boda**] Odrediti ono rješenje diferencijalne jenadžbe

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x,$$

koje zadovoljava uvjete

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

8. [**3 boda**] Naći područje konvergencije i ispitati konvergenciju na rubovima područja za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{(3n-2)2^n}.$$

9. [**3 boda**] Odrediti jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu

$$x + 3y - 2z + 6 = 0$$

i siječe ju po pravcu koji leži u xOy ravnini.

10. [**3 boda**] Neka je $z(x, y) = \arcsin(\frac{y}{x})$.
a) Naći područje definicije funkcije $z(x, y)$.
b) Naći gradijent funkcije z u točki $T(1, \frac{1}{2})$.

11. [**3 boda**] Metodom Lagrangeovih multiplikatora odrediti uvjetne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

uz uvjet $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Obrazložiti zašto su to ekstremi.

12. [**3 boda**] Neka je r dvostruka nultočka karakterističnog polinoma diferencijalne jednadžbe

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

a) Dokazati da je $y = xe^{rx}$ jedno rješenje.
b) Dokazati da su $y_1 = e^{rx}$ i $y_2 = xe^{rx}$ linearno nezavisna rješenja.

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.

Rješenja ponovljenog završnog ispita iz Matematike 2

3.07.2007.

1. $((z-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4})^{\frac{1}{2}}x = e^{\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2(z-\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}}$

2. $\frac{x^2}{3}+xy^2+x^2=C.$

3. $y(x)=\frac{x^2+1}{\cos(x)}.$

4. Opće rješenje je $2Cy=(Cx-2)^2$, singularna rješenja su $y=0$ i $y=-4x$.

5. $y=C_2e^{C_1x^2}.$

6. $y(x)=\frac{1}{3}\ln|\sin(3x)|\sin(3x)+C_1\sin(3x)-x\cos(3x)+C_2\cos(3x).$

7. $y(x)=\frac{13}{6}e^{3x}-3e^{2x}-\frac{1}{6}\sin(3x)+\frac{5}{6}\cos(3x).$

8. Red konvergira za $x\in[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\rangle$.

9. **a)**$x=-6-3t, \quad y=t, \quad z=0, \quad t\in\mathbb{R}.$

b)$x+3y+5z+6=0.$

10. **a)** $|y|\le|x|$, $x\neq 0$. Skicirati sliku.

b)$\nabla f(1,0.5)=\frac{-1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{j}.$

11. Stacionarne točke su $T_1(\frac{6}{\sqrt{66}},\frac{3}{\sqrt{66}},\frac{2}{\sqrt{66}})$ i $T_1(-\frac{6}{\sqrt{66}},-\frac{3}{\sqrt{66}},-\frac{2}{\sqrt{66}})$. Prva je uvjetni maksisum, a druga minimum.

12. a) $y=xe^{rx}$ se uvrsti u jednadžbu.

b) $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx}+rxe^{rx}\end{vmatrix}=e^{2rx}\neq 0$

ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2

26.06.2007.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(y^4 - x^2y^2)\,dx + 2x^3y\,dy = 0.$$

2. [**3 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$e^{-y}\,dx + (1 - xe^{-y})\,dy = 0$$

koje zadovoljava uvjet $y(0) = 5$.

3. [**3 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + xy = x\cos(\frac{x^2}{2})$$

koje zadovoljava uvjet $y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2}$.

4. [**2 boda**] Naći opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = xy' + \frac{1}{y'}.$$

Rješenja prikazati grafički.

5. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$yy'' + 2(y')^2 = 0.$$

6. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$$

7. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

8. [**3 boda**]
a) Napisati definiciju reda i definiciju konvergencije reda.
b) Razviti funkciju $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ u Maclaurinov red i naći područje konvergencije.

9. [**3 boda**]
a) Napisati definiciju skalarnog umnoška dvaju vektora.
b) Napisati vektorski oblik jednadžbe ravnine. Nacrtati sliku.
c) Napisati opći oblik jednadžbe ravnine.

10. [**3 boda**] Funkcija $z = f(x, y)$ zadana je implicitno jednadžbom

$$x^2 z + yz^3 = 5.$$

a) Napisati jednadžbu tangencijalne ravnine i normale u točki $(1, 4, 1)$ na plohu određenu sa $z = f(x, y)$.
b) Naći kosinus kuta između gradijenata dane funkcije u točkama $T_1(1, -5, -1)$ i $T_2(3, 2, 1)$.

11. [**3 boda**] Metodom Lagrangeovih multiplikatora naći i ispitati uvjetne ekstreme funkcije $z = xy$ ako su nezavisne varijable x i y vezane uvjetom $2x + 3y = 12$.

12. [**3 boda**] Naći rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

koje zadovoljava uvjete $y(0) = 2,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -4$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.

Rješenja završnog ispita iz Matematike 2
26.06.2007.

1. Jednadžba se može zapisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2 - y^4}{2x^3y} \quad \text{tj.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{y}{x}$$

Sada lako uočavamo da je ova jednadžba homogena. Uvodi se supstitucija $y = zx, \quad y' = z'x + z$. Sada imamo:

$$z'x + z = \frac{1}{2}z(1 - z^2) \Rightarrow z'x = -\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}z(z^2 + 1) \Rightarrow \frac{dz}{z(z^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

Rastavom lijeve strane na parcijalne razlomke dobivamo:

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}\right)dz = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2}{z}\right)dz = \frac{dx}{x}$$

Integriranjem dobivamo:

$$\ln(z^2+1) - 2\ln z = \ln(Cx)$$

$$\frac{z^2+1}{z^2} = Cx \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = Cx\frac{y^2}{x^2}$$

Opće rješenje ove jednadžbe je

$$x^2 + y^2 = Cxy^2.$$

2. $P(x,y) = e^{-y}$, $Q(x,y) = 1 - xe^{-y}$
Budući da vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

jednadžba je egzaktna pa imamo

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = \int_0^x e^{-y}\,dx + \int_0^y 1\,dy = xe^{-y} + y$$

Opće rješenje je $e^{-y}x + y = C$. Uvjet $y(0) = 5$ je zadovoljen za $C = 5$ pa je traženo rješenje $xe^{-y} + y = 5$.

3. Ovo je linearna obična diferencijalna jednadžba. Riješimo prvo homogenu.

$$y' = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x\,dx$$

Integriranjem dobivamo $\ln y = -\frac{x^2}{2} + C$ pa je rješenje homogene jedndžbe $y_H = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Provedimo sada varijaciju konstanti, pretpostavljamo da je rješenje oblika $y(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x\cos(\frac{x^2}{2})$$

pa imamo

$$C'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}x\cos(\frac{x^2}{2}).$$

Integriranjem imamo

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}\left(\cos(\frac{x^2}{2}) + \sin(\frac{x^2}{2})\right) + C$$

Opće rješenje ove jednadžbe je

$$y = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{x^2}{2}) + \sin(\frac{x^2}{2})\right) + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Početni uvjet zadovoljen je za $C = 0$.

4. Jednadžba je Clairautova pa je opće rješenje

$$y = xC + \frac{1}{C}.$$

Singularno rjesenje dobivamo eliminacijom parametra p iz sustava

$$\begin{gathered} y = xp + \tfrac{1}{p} \\ 0 = x - \tfrac{1}{p^2} \end{gathered}$$

Ako uvrstimo iz druge jednadžbe $x = \frac{1}{p^2}$ u prvu jednadžbu dobivamo $y = \frac{2}{p}$ iz čega slijedi da je $p = \frac{2}{y}$ pa je traženo singularno rješenje $x = \frac{y^2}{4}$.
Napomena: treba još skicirati rješenja.

5. Jednadžba je oblika $F(y, y', y'') = 0$ Snižavamo red jednadžbe uvođenjem zamjene $y' = p$ gdje je $p = p(y)$. Imamo

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = pp' \;\Rightarrow\; ypp' + 2p^2 = 0.$$

Podijelimo jednadžbu s p. Imamo

$$y\frac{dp}{dy} + 2p = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} + \frac{2}{y}\,dy = 0.$$

Integriranjem imamo

$$\ln p + 2\ln y = \ln K_1 \;\Rightarrow\; p = \frac{K_1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K_1}{y^2} \;\Rightarrow\; y^2\,dy = K_1\,dx \;\Rightarrow\; \frac{y^3}{3} = K_1x + K_2.$$

Traženo rješenje je

$$y = \sqrt[3]{C_1x + C_2}.$$

Uočimo da dijeljenjem s p nismo izgubili nul funkciju kao rješenje.

6. Riješimo prvo homogenu jednadžbu $y'' + 5y' + 6y = 0$. Karakteristična jedndadžba je $r^2 + 5r + 6 = 0$. Korijeni ove jednadžbe su $r_1 = -2$ i $r_2 = -3$. Rješenje homogene jednadžbe je

$$y_H = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

Partikularno rješenje je oblika $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.
y_{p_1} je partikularno rješenje jednadžbe $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$. Tražimo ga u obliku $y_{p_1} = Ce^{-x}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $C = \frac{1}{2}$ tj. $y_{p_1} = \frac{1}{2}e^{-x}$
y_{p_2} je partikularno rješenje jednadžbe $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$. Tražimo ga u obliku $y_{p_2} = Dxe^{-2x}$ budući je $r_1 = -2$ nultočka karakteristične jednadžbe. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $D = 1$ tj. $y_{p_2} = xe^{-2x}$. Opće rješenje dane jednadžbe je

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{2} + xe^{-2x}.$$

7. Rješenje homogene jednadžbe je

$$y_H = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x).$$

Provodimo varijaciju konstanti. Pretpostavimo da je rješenje oblika

$$y(x) = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x).$$

Funkcije $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ dobivamo iz sustava

$$\begin{gathered} C_1'\cos(2x) + C_2'\sin(2x) = 0 \\ -2C_1'\sin(2x) + 2C_2'\cos(2x) = \tfrac{1}{\cos(2x)}. \end{gathered}$$

Odavde dobivamo $C_1'(x) = -\frac{\mathrm{tg}(2x)}{2} \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos(2x)| + K_1 \quad C_2'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2(x) = \frac{x}{2} + K_2$ pa je opće rješenje:

$$y = K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\ln|\cos(2x)| + \frac{x}{2}\sin(2x).$$

8. **a) Definicija reda**: Red je uređeni par dvaju nizova (a_n) i (S_n). Članove niza (a_n) nazivamo članovima reda, a (S_n) nazivamo nizom parcijalnih suma tog reda. Red zapisujemo simbolom $\sum a_n$.
Definicija konvergencije reda: Kažemo da red $\sum a_n$ konvergira prema S, odnosno da mu je zbroj jednak S ako je ispunjeno $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Pišemo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = S$
b) Polazimo od zapisa geometrijskog reda $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Deriviranjem posljednje jednakosti imamo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Ovaj red konvergira za $|x| < 1$ kao i geometrijski.

9. **a)** Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani vektori i $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Skalarni umnožak definira se kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi.$$

b) Neka je T_1 zadana točka ravnine, r_1 njen radijvektor i neka je $\vec{n}$ normala na ravninu. Vektorski oblik jednadžbe ravnine je

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0.$$

Napomena: Skicirati sliku.
c) Opći oblik jednadžbe ravnine je:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

10. **a)**Iz $F(x, y, z) = x^2z + yz^3 - 5$ imamo

$$F'_x = 2xz \quad F'_y = z^3 \quad F'_z = x^2 + 3yz^2$$

$$F'_x(1, 4, 1) = 2 \quad F'_y(1, 4, 1) = 1 \quad F'_z(1, 4, 1) = 13$$

Tražena ravnina je

$$2(x-1) + 1(y-4) + 13(z-1) = 0 \qquad \text{tj.} \qquad 2x + y + 13z - 19 = 0.$$

Normala je

$$n \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{13}.$$

b) $f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xz}{x^2+3yz^2} \qquad f'_y = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z^3}{x^2+3yz^2}$
$\vec{a} = \nabla f(1, -5, -1) = -\frac{2}{14}\vec{i} - \frac{1}{14}\vec{j} \qquad \vec{b} = \nabla f(3, 2, 1) = -\frac{6}{15}\vec{i} - \frac{1}{15}\vec{j}$ pa imamo

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{5}\sqrt{37}}$$

pa je

$$\varphi = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{5}\sqrt{37}}\right)$$

11. $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 12)$
$L'_x = y + 2\lambda = 0$
$L'_y = x + 3\lambda = 0$
$2x + 3y = 12$
Odavde dobivamo stacionarnu točku $S(3, 2)$ kojoj odgovara $\lambda = -1$. Izračunajmo drugi diferencijal u toj točki.

$$d^2L(S) = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 1 \cdot dx\, dy + 0 \cdot (dy)^2 = 2dx\, dy = -\frac{4}{3}(dx)^2 < 0.$$

Posljednju jednakost dobili smo iz uvrštavanja uvjeta. Diferenciranjem uvjeta smo dobili $2dx + 3dy = 0$. Budući je $d^2L(S) < 0$ u točki S je lokalni uvjetni maksimum.

12. Karakteristična jednadžba je $r^3 - r^2 + r - 1 = 0$. Korijeni karakteristične jednadžbe su $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, pa je opće rješenje

$$y_H = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Uvrštavanjem uvjeta koje rješenje mora zadovoljavati dolazimo na sustav

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ -1 &= C_1 + C_3 \\ -4 &= C_1 - C_2 \end{aligned}$$

čija su rješenja $C_1 = -1$, $C_2 = 3$, $C_3 = 0$ pa je traženo rješenje

$$y = -e^x + 3 \cos x.$$

2. MEĐUISPIT IZ MATEMATIKE 2

30.04.2008.

1. **(2 boda)** Odredite i skicirajte područje definicije funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{\arcsin \frac{1 - y^2}{x}}.$$

2. **(2 boda)** Zadana je funkcija $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$. Postoji li limes dane funkcije u točki $(0, 0)$?

3. **(3 boda)**

a) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$.

b) Skicirajte plohu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ u točki $T(2, 1, z_0)$.

4. **(2 boda)** Kvadar ima stranice $a = 5cm$, $b = 3cm$, $c = 6cm$. Za koliko se približno promijeni njegovo oplošje ako stranicu a povećamo za $1mm$, stranicu b smanjimo za $2mm$, a stranicu c ne mijenjamo? Da li se oplošje smanji ili poveća? Koristite aproksimaciju prvim diferencijalom.

5. **(2 boda)** Izračunajte $F'(\frac{1}{2})$ ako je $F(\alpha) = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx$.

6. (**2 boda**) Na krivulji

$$\mathcal{C} \ldots \begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t \\ z = 3t^3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

nađite točku u kojoj je tangenta paralelna s pravcem

$$p \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z - 1}{-11}.$$

7. (**4 boda**)

a) Napišite definiciju usmjerene derivacije funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{h}$.

b) Napišite i dokažite formulu kojom se usmjerena derivacija funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ u smjeru jediničnog vektora $\vec{h}$ računa pomoću ∇f.

c) Izračunajte usmjerenu derivaciju funkcije $z = \operatorname{arctg}(xy)$ u točki $T_0(\frac{1}{2}, 2)$ u smjeru vektora $\vec{h} = \dfrac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$.

8. **(3 boda)** Nađite drugi Taylorov polinom funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s

$$z + xy + e^z = 3$$

u točki $T_0(2, 1)$ i $z(2, 1) = 0$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **90 minuta**.

2. MEĐUISPIT - MATEMATIKA 2

1° $f(x,y) = \sqrt{\arcsin \frac{1-y^2}{x}}$

$-1 \leq \frac{1-y^2}{x} \leq 1$ $\quad$ $\arcsin \frac{1-y^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1-y^2}{x} \geq 0$ i $x \neq 0$

1° $1-y^2 \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 1$

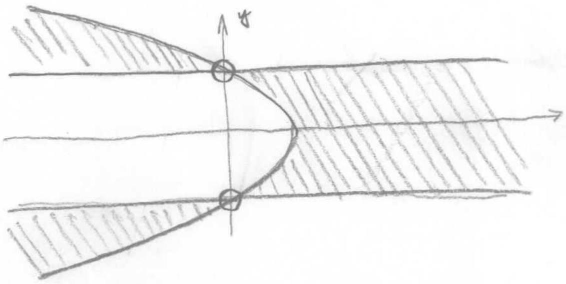
$x > 0$

U TOM SLUČAJU IMAMO $\frac{1-y^2}{x} \leq 1 \Rightarrow x \geq 1-y^2$ $\quad \left.\right\}$ $|y| \leq 1$, $x > 0$, $x \geq 1-y^2$

2° $1-y^2 \leq 0 \Rightarrow |y| \geq 1$

$x < 0$

U TOM SLUČAJU IMAMO $\frac{1-y^2}{x} \leq 1 \Rightarrow 1-y^2 \geq x$ $\quad \left.\right\}$ $|y| \geq 1$, $x < 0$, $x \leq 1-y^2$



PODRUČJE DEFINICIJE NE SADRŽI TOČKE $(0,1)$ i $(0,-1)$.

2° UVODE SE POLARNE KOORDINATE $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$

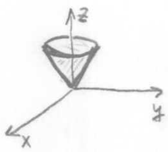
$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1$$

LIMES POSTOJI I JEDNAK JE 1.

3° a) JEDNADŽBA TANGENCIJALNE RAVNINE NA PLOHU $z = f(x,y)$ u TOČKI $T_0(x_0,y_0,z_0)$ JE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) = z - z_0$$

b) PLOHA JE KRUŽNI STOŽAC $(z \geq 0)$



c) $T(2,1,z_0) \Rightarrow z_0 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}(x-2) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y-1) = z - \sqrt{5}$

$2x - 4 + y - 1 = \sqrt{5}z - 5$

$\boxed{2x + y - \sqrt{5}z = 0}$

4°

$a = 5cm \qquad \Delta a = \frac{1}{10} \qquad \Delta b = -\frac{2}{10} \qquad \Delta c = 0$

$b = 3cm$

$c = 6cm$

$$O = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$dO = \frac{\partial O}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial O}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial O}{\partial c}\Delta c = (2b+2c)\Delta a + (2a+2c)\Delta b + (2a+2b)\Delta c$$

$$= (b+c)\,2\Delta a + (a+c)\cdot 2\Delta b$$

$$= 9\cdot\frac{2}{10} - 11\cdot\frac{4}{10} = \frac{18}{10} - \frac{44}{10} = -\frac{26}{10} = -2.6.$$

OPLOŠJE SE SMANJI ZA $2{,}6\ cm^2$.

5°

$$F(\alpha) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$$

$$F'(\alpha) = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_{x=\pi}^{x=2\pi} = \frac{1}{\alpha}\left(\sin(2\pi\alpha) - \sin(\pi\alpha)\right)$$

$$F'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\sin\pi - \sin\tfrac{\pi}{2}\right) = -2$$

6°

VEKTOR SMJERA TANGENTE JE

$$\vec{t} = 2t\vec{i} + 3\vec{j} + (9t^2+2)\vec{k}$$

DA BI TANGENTA BILA PARALELNA S DANIM PRAVCEM MORA BITI:

$$2t = 2\lambda \implies t = -1$$
$$3 = -3\lambda \implies \lambda = -1$$
$$9t^2 + 2 = -11\lambda$$

TRAŽENU TOČKU KRIVULJE DOBIVAMO AKO UVRSTIMO $t = -1$.

DOBIVAMO $T(1,-3,-5)$.

7°

a) $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th_1, y_0+th_2) - f(x_0,y_0)}{t} \qquad \vec{h} = h_1\vec{i} + h_2\vec{j}$

b) $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{h}$

$\boxed{\text{DOKAZ}}$ USMJERENA DERIVACIJA JE BRZINA RASTA FUNKCIJE f DUŽ PRAVCA KOJI SPAJA TOČKE (x_0,y_0) i (x_0+th_1, y_0+th_2). TO JE DAKLE DERIVACIJA FUNKCIJE $t \mapsto f(x_0+th_1, y_0+th_2)$ ZA $t=0$.

$$\frac{f(x_0+th_1, y_0+th_2) - f(x_0,y_0)}{t} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot h + \frac{o(th)}{t}$$

IZ ČEGA PRELASKOM NA LIMES KADA $t\to 0$ SLIJEDI TVRDNJA

c) $\nabla f(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}\vec{i} + \frac{x}{1+x^2y^2}\vec{j} \qquad \nabla f\left(\tfrac{1}{2},2\right) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}\cdot 4}\vec{i} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}\cdot 4}\vec{j} = \vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$

$$\nabla f\left(\tfrac{1}{2},2\right)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{4-1}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

8° $\quad z + xy + e^z = 3 \qquad F(x,y,z) = z + xy + e^z - 3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y}{1+e^z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{1+e^z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{+y \cdot e^z \frac{\partial z}{\partial x}}{(1+e^z)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(1+e^z) - y e^z \frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{+x e^z \frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}$$

U TOČKI $(2,1,0)$ IMAMO

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = -\frac{2}{2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,1) = \frac{-\frac{1}{2}}{2^2} = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,1) = -\frac{2+1}{2^2} = -\frac{3}{4} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,1) = \frac{-2 \cdot 1 \cdot 1}{2^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

TRAŽENI DRUGI TAYLOROV POLINOM JE

$$T_2(x,y) = 0 + \frac{1}{2}(x-2) - (y-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}(x-2)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}(x-2)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{16}(x-2)^2 - \frac{3}{4}(x-2)(y-1) - \frac{1}{4}(y-1)^2 + \frac{1}{2}(x-2) - (y-1)$$

ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2
20.06.2008.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(3x + 6y^2)dx + (6xy + 4\frac{y^3}{x})dy = 0.$$

2. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + \frac{y}{x} = x^8.$$

3. [**4 boda**] Naći krivulju koja nije pravac, a za koju tangenta u bilo kojoj točki čini s koordinatnim osima trokut površine 4.

4. [**3 boda**] Naći opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = (y')^2 - 3xy' + 3x^2.$$

5. [**3 boda**] Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$2(y')^2 = (y-1)y''.$$

6. [**4 boda**] Naći ono rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = \frac{1}{(\sin x)^3}$$

koje zadovoljava uvjete

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

7. [**3 boda**] Odrediti područje konvergencije i ispitati ponašanje na rubovima područja konvergencije za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n^2+2008}}.$$

8. [**3 boda**]
a) Napisati definiciju vektorskog umnoška vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
b) Izračunati vektorski umnožak vektora

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

c) Odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(1,2,3)$ i paralelna je s vektorima iz b) dijela zadatka.

9. [**3 boda**]
a) Napisati vektor u smjeru kojega funkcija $u = f(x,y,z)$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ najbrže raste.
b) Odrediti tangencijalnu ravninu na plohu

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$$

u točki $T(1,1,2)$.

10. [**3 boda**] Naći i ispitati lokalne ekstreme funkcije $z = z(x,y)$ zadane implicitno s

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 5 = 0.$$

11. [**3 boda**]
a) Definirati determinantu Wronskog za funkcije y_1 i y_2.
b) Koristeći determinantu Wronskog pokazati da su funkcije

$$y_1 = e^{2x} \quad \text{i} \quad y_2 = e^{3x}$$

linearno nezavisne.
c) Napisati diferencijalnu jednadžbu čije je opće rješenje

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},$$

gdje su C_1 i C_2 realne konstante.

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.

Rješenja završnog ispita iz Matematike 2
20.06.2008.

1. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$

2. $y = \frac{x^9}{10} + \frac{C}{x}$

3. $y = \pm\frac{2}{x}$

4. Singularno rješenje je $y = \frac{3}{4}x^2$
   Opće rješenje je $y = (2x + C)^2 - 3x(2x + C) + 3x^2$

5. $(x + E)(y - 1) = C_2$

6. $y(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

7. Početni red konvergira za $x \in [4, 6 >$.

8. a) Vidi literaturu.
   b) $-4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$
   c)$-4x + 5y + 3z - 15 = 0$

9. a) $\bigtriangledown u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$.
   b) $2x + 2y + z - 6 = 0$

10. $T_1(1, 2, 0)$ je lokalni minimum a $T_2(1, 2, 2)$ je lokalni maksimum.

11. a) $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$
    b) $W = e^{5x} \neq 0$. pa su e^{2x} i e^{3x} linearno nezavisne.
    c) $y'' - 5y' + 6y = 0$.

2. međuispit iz Matematike 2

15. V. 2009.

1. (**3 boda**)

   (a) (**1 bod**) Iskažite definiciju parcijalne derivacije $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ funkcije f po varijabli x_i u točki $T_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

   (b) (**2 boda**) Dokažite diferencijabilnost funkcije $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$ u točki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. (**2 boda**) Koristeći prvi diferencijal, izračunajte približnu vrijednost izraza

$$A = \frac{2}{0.97^2 + 2\ln 1.02}.$$

3. (**2 boda**) Izvedite formulu za $\nabla f(r)$, gdje je $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ te izračunajte $\nabla(\ln r)$.

4. (**2 boda**) Neka je ploha $\mathcal{S}$ zadana jednadžbom $z = \varphi(x,y)$ i neka je $\vec{n}$ vektor normale na plohu $\mathcal{S}$ u točki A. Dokažite da je tangenta krivulje $\vec{r}(t)$ koja leži u plohi $\mathcal{S}$ i prolazi točkom $A \in \mathcal{S}$ okomita na normalu $\vec{n}$.

5. (**3 boda**) Funkcija $z = z(x,y)$ je implicitno zadana jednadžbom $x^2 + y^2 + ze^{yz} = 5$. Izračunajte $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ u točki $T(2,1,0)$.

6. (**3 boda**)

   (a) (**1 bod**) Iskažite Taylorovu formulu za funkciju dvije varijable u točki $T_0(x_0, y_0)$.

   (b) (**2 boda**) Rabeći Taylorovu formulu napišite polinom

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 3y + 12$$

   po potencijama od $(x+2)$ i $(y-1)$.

7. (**3 boda**) Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y,z) = 6x^2 + 11y^2 + z^2 + 16xy + 2xz + 2yz - 6x - 8y.$$

8. (**2 boda**) Koristeći metodu Lagrangeovih multiplikatora odredite ekstremnu vrijednost funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ na skupu točaka određenih uvjetom $x + 2y = 8$.

Rješenja 2. međuispita iz Matematike 2

15. V. 2009.

1. (**3 boda**)

   (a) (**1 bod**) Iskažite definiciju parcijalne derivacije $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ funkcije f po varijabli x_i u točki $T_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.
   Rj. Neka je
   $$\varphi_i(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots x_n^0)$$
   Tada je
   $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 := \varphi_i'(x_i^0) = \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{\varphi_i(x_i) - \varphi_i(x_i^0)}{x_i - x_i^0}$$

   (b) (**2 boda**) Dokažite diferencijabilnost funkcije $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ u točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   Rj. Neka je $\vec{h} = (\Delta x, \Delta y) = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$. Promjena funkcije Δz iznosi
   $$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [(x + \Delta x)^2 + 2(y + \Delta y)^2 - 1] - [x^2 + 2y^2 - 1] =$$
   $$= 2x\Delta x + 4y\Delta y + [(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2]$$
   Izraz u uglatoj zagradi je beskonačno mala veličina višeg reda od $||\vec{h}||$ jer je
   $$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2}{||\vec{h}||} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq$$
   $$\leq \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$
   Ostaje
   $$\Delta z = (2x\vec{i} + 4y\vec{j}) \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$
   a to je definicija diferencijabilnosti.
   Gornji limes smo mogli dobiti i prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

2. (**2 boda**) Koristeći prvi diferencijal, izračunajte približnu vrijednost izraza
   $$A = \frac{2}{0.97^2 + 2\ln 1.02}.$$
   Rj. Neka je $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + 2\ln y}$. Tada je $f(x, y) \approx f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot ((x - 1)\vec{i} + (y - 1)\vec{j})$ pa je A približno jednak
   $$2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (0.97 - 1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (1.02 - 1) = 2 + \left(\frac{-4x}{(x^2 + 2\ln y)^2}\right)_0 (-0.03) +$$
   $$+ \left(\frac{-\frac{4}{y}}{(x^2 + 2\ln y)^2}\right)_0 (0.02) = 2 + (-4)(-0.03) + (-4)(0.02) = 2.04$$
   ("Točna" vrijednost je 2.03976.)

3. (**2 boda**) Izvedite formulu za $\nabla f(r)$, gdje je $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ te izračunajte $\nabla(\ln r)$.
Rj.

$$\nabla f(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(r)}{\partial x_i}\vec{e_i} = \sum_{i=i}^{n} f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\vec{e_i} = f'(r)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\vec{e_i}}{r} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla(\ln r) = \frac{1}{r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

4. (**2 boda**) Neka je ploha $\mathcal{S}$ zadana jednadžbom $z = \varphi(x, y)$ i neka je $\vec{n}$ vektor normale na plohu $\mathcal{S}$ u točki A. Dokažite da je tangenta krivulje $\vec{r}(t)$ koja leži u plohi $\mathcal{S}$ i prolazi točkom $A \in \mathcal{S}$ okomita na normalu $\vec{n}$.
Rj. Neka je krivulja zadana parametarski:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad (\vec{r}(t_0) = \vec{r_A})$$

i neka je funkcija $F(t)$ definirana izrazom $F(t) = z(t) - \varphi(x(t), y(t))$. Tada je (derivacije računamo u točki A odnosno t_0)

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 1\cdot\frac{dz}{dt}$$

To nam daje

$$\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = 0$$

Kako je $\vec{n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$, a $\vec{r}\,' = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$, dobivamo $\vec{n}\cdot\vec{r}\,' = 0$ odnosno $\vec{n} \perp \vec{r}\,'$.

5. (**3 boda**) Funkcija $z = z(x, y)$ je implicitno zadana jednadžbom $x^2 + y^2 + ze^{yz} = 5$. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ u točki $T(2, 1, 0)$.
Rj. Neka je $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + ze^{yz} - 5$ i $T_0(2, 1, 0)$. Tada vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + z^2e^{yz}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (zy + 1)e^{yz}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 1 \neq 0$$

Zadnji izraz nam kaže da je funkcija $z = z(x, y)$ dobro definirana.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2x}{(zy + 1)e^{yz}}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = -4$$

Sada $\frac{\partial z}{\partial x}$ deriviramo po x, ali ne smijemo zaboraviti da je sada i z funkcija od x.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2e^{yz}(1 + yz) - 2x[ye^{yz} + ye^{yz} + y^2ze^{yz}]\frac{\partial z}{\partial x}}{[e^{yz}(1 + yz)]^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = -\frac{2 - 4\cdot 2\cdot(-4)}{1} = -34$$

6. (**3 boda**)

   (a) (**1 bod**) Iskažite Taylorovu formulu za funkciju dvije varijable u točki $T_0(x_0, y_0)$.
   Rj.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x-x_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 (x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 (y-y_0)^2\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 (x-x_0)^n + \ldots + \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_0 (y-y_0)^n\right]$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left[\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right)_c (x-x_0)^{n+1} + \ldots + \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)_c (y-y_0)^{n+1}\right]$$

   gdje $\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)_c$ označava parcijalnu derivaciju u nekoj točki T_c koja leži na spojnici točaka $T_0(x_0, y_0)$ i $T(x, y)$.

   (b) (**2 boda**) Rabeći Taylorovu formulu napišite polinom

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 3y + 12$$

   po potencijama od $(x+2)$ i $(y-1)$.
   Rj. Parcijalne derivacije računamo u točki $T(-2, 1)$.

$$f(-2,1) = 6, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 4, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 5$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 2, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 = 2, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = 6$$

   Sve više parcijalne derivacije su 0. Taylorova formula daje

$$f(x,y) = (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2 + 4(x+2) + 5(y-1)^2 + 6$$

   Uočite da raspisivanjem ovog izraza dobivamo početni polinom.

7. (**3 boda**) Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y,z) = 6x^2 + 11y^2 + z^2 + 16xy + 2xz + 2yz - 6x - 8y.$$

   Rj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x + 16y + 2z - 6 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 16x + 22y + 2z - 8 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 0$$

   Rješenje ovog sustava je točka $T_0(2, -1, -1)$. S obzirom da Hessoeva matrica

$$H_f = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 2 \\ 16 & 22 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   ima pozitivne glavne minore (12,8,8), u točki T_0 funkcija f poprima lokalni minimum za $x = 2$ $y = -1$ i $z = -1$ koji iznosi $f(2, -1, -1) = -2$.

8. (**2 boda**) Koristeći metodu Lagrangeovih multiplikatora odredite ekstremnu vrijednost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ na skupu točaka određenih uvjetom $x + 2y = 8$.
Rj. $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + \lambda(x + 2y - 8)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2 + \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2 + 2\lambda = 0 \\ &x + 2y = 8 \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $x = 1 - \frac{\lambda}{2}$ i $y = 1 - \lambda$. Uvrštavanjem tih x i y u treću jednažbu dobivamo $\lambda = -2$, a to daje $x = 2$ i $y = 3$. Dakle, jedino u točki $(2, 3)$ možemo imati ekstremnu vrijednost. S obzirom da je

$$d^2L = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 > 0$$

u točki $(2, 3)$ imamo lokalni minimum koji iznosi $f(2, 3) = 3$.

ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2
07.07.2009.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. (2 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy' \cos(\frac{y}{x}) = y \cos(\frac{y}{x}) - x.$$

2. (2 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(3y^2 - 12x)dx + 6xydy = 0.$$

3. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy' + 3y - x^4y^2 = 0.$$

4. (3 boda) Odredite familiju svih krivulja koje imaju sljedeće svojstvo: u svakoj točki krivulje koeficijent smjera tangente jednak je trećem korijenu iz koeficijenta smjera spojnice te točke s ishodištem. Napišite jednadžbu one krivulje te familije koja prolazi točkom $T(1, 0)$.

5. (**3 boda**) Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(x - 3)y'' + y' = 0$$

koje zadovoljava uvjete $y(4) = 2$ i $y'(4) = 1$.

6. (**3 boda**) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

7. (**4 boda**) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 3y' - 4y = (10x + 2)e^x.$$

OKRENI!

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

8. **(2 boda) (a)** (1 bod) Iskažite integralni kriterij konvergencije reda realnih brojeva.
b) (1 bod) Dokažite da je za svaki $\alpha \in (0,1)$ red $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergentan.

9. **(4 boda) (a)** (1 bod) Definirajte skalarni produkt dvaju vektora.
(b) (1 bod) Ako su dva vektora zadana u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, izvedite formulu za skalarni umnožak tih dvaju vektora.
(c) (2 boda) Zadani su pravci $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ i $q \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi tim pravcima.

10. **(3 boda)** Odredite Taylorov polinom drugog stupnja funkcije

$$z = \ln(4 - x^2 - 2y^2)$$

u točki $T(1,1)$.

11. **(3 boda)** Nađite i ispitajte vezane ekstreme funkcije $z = xy$ ako su nezavisne varijable x, y vezane uvjetom $2x + 3y = 12$.

12. (**3 boda**) **(a)** (1 bod) Napišite formulu za Eulerov multiplikator $\mu = \mu(x)$ koji ovisi samo o varijabli x.
(b) (2 boda) Dokažite formulu pod a).

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.

Rješenja završnog ispita iz Matematike 2

7.7.2009.

1. [2 boda] $xy'\cos(\frac{y}{x}) = y\cos(\frac{y}{x}) - x$ homogena jednadžba

$y'\cos(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}\cos(\frac{y}{x}) \ - 1$

supstitucija $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = x\frac{dz}{dx} + z,\ (xz' + z)\cos z = z\cos z - 1,$

$xz'\cos z = -1$, separiramo varijable: $\cos z dz = -\frac{dx}{x}$, $\ln|x| = -\sin z + C \Rightarrow$

opće rj. $\sin(\frac{y}{x}) + \ln|x| = C$

2. [2 boda] $6xyy' = 12x - 3y^2,\ y(1) = 1$

$(3y^2 - 12x)dx + 6xydy = 0,\ P = 3y^2 - 12x, Q = 6xy$, egzaktna jedn.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y$

opće rj. $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = \int_0^x (3y^2 - 12x)dx + \int_0^y 0dy = 3y^2x - 6x^2 \Rightarrow$ opće rj. $6x^2 - 3y^2x = C$

3. [3 boda] $y'x + 3y - x^4y^2 = 0,\ y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow y' + \frac{3}{x}y = x^3y^2$

Bernoullijeva jedn.$\Rightarrow$ $\frac{1}{y^2}y' + \frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y} = x^3$, supst. $z = -\frac{1}{y},\ z' = \frac{1}{y^2}y' \Rightarrow$

$z' - \frac{3}{x}z = = x^3$ lin. dif. jedn. 1. reda $\Rightarrow z' - \frac{3}{x}z = 0, \frac{dz}{z} = 3\frac{dx}{x}$,

$z = Cx^3,\ z(x) = C(x)x^3$

$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 - \frac{3}{x}C(x)x^3 = x^3, C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + C \Rightarrow$ opće rj.

$y = -\frac{1}{(x+C)x^3}$

4. [3 boda] nagib tang.: $y'(x)$, nagib radijvektora: $\frac{y}{x}$

$y' = \sqrt[3]{\frac{y}{x}},\ \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{3}}dy = \int x^{-\frac{1}{3}}dx \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = C$

uvjet: $T(1,0), C = 1 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = 1$

5. [3 boda] supst. $y' = p, y'' = p' \Rightarrow (x-3)p' + p = 0 \Rightarrow$

$\frac{dx}{x-3} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|x-3| = -\ln p + \ln C_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{x-3}, y' = \frac{C_1}{x-3}, dy = \frac{C_1 dx}{x-3} \Rightarrow$

opće rj. $y = C_1 \ln|x-3| + C_2$

uz uvjete: $y = \ln|x-3| + 2$

6. [3 boda] $r^2 + 4 = 0,\ r_{1,2} = \pm 2i,\ y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \sin 2x \Rightarrow$

$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \Rightarrow$

$C_1'(x) = -\tan 2x C_2'(x),\ -2C_1(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \frac{1}{\sin 2x} \Rightarrow ...C_2'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{2}x + C_1$

$C_2(x) = \frac{1}{2}\int \cot 2x dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = [supst.: t = \sin 2x] = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C_2 \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C_2$

$y(x) = (-\frac{1}{2}x + C_1)\cos 2x + (\frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C_2)\sin 2x$

7. [4 boda] $r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = -4, r_2 = 1 \Rightarrow y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$

desna str.: $Q(x) = (10x + 2)e^x \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \cos\beta x = 1, \sin\beta x = 0 \Rightarrow$

$stQ = 1$

$y_p = x(D_1 x + D_2)e^x \Rightarrow y_p' = (D_1 x^2 + (2D_1 + D_2)x + D_2)e^x,\ y_p'' = (D_1 x^2 + (4D_1 + D_2)x + 2D_1 + D_2)e^x$ nakon uvrštavanja u početnu jedn. imamo: $D_1 = 1, D_2 = 0 \Rightarrow y_p = x^2 e^x,\ y = x^2 e^x + C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$

8. [2 boda] a) Neka je $a_n = f(n)$ pri čemu je f pozitivna, neprekinuta i padajuća funkcija na $\langle N, +\infty\rangle$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_N^{\infty} f(t)dt$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

b) $\alpha \in \langle 0, 1\rangle, \sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergentan red

Za $\alpha > 0$ je $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pozitivna, neprekinuta i padajuća fja. na $[1, +\infty\rangle$

$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} t^{-\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}(\lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} - 1)$. Ovaj limes ne postoji za $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, pa je red divergentan.

9. [4 boda] a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

b) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

c) $\overrightarrow{n_\pi} = 7\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 8\overrightarrow{k}$, $\pi....7x - 2y - 8z + 5 = 0$

10. [3 boda] $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4-x^2-2y^2} \cdot (-2x)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4-x^2-2y^2} \cdot (-4y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-8+4y^2-2x^2}{(4-x^2-2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-16+4x^2-8y^2}{(4-x^2-2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-8xy}{(4-x^2-2y^2)^2} \Rightarrow (\frac{\partial z}{\partial x})_T = -2$, $(\frac{\partial z}{\partial y})_T = -4$, $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_T = -6$, $(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})_T = -20$, $(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})_T = -8$

$f(x, y) = -2(x-1) - 4(y-1) - 3(x-1)^2 - 8(x-1)(y-1) - 10(y-1)^2 + ...$

11. [3 boda] $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 12)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \Rightarrow y = 2$, $\frac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda = 0 \Rightarrow x = 3$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow T(3, 2), \lambda = -1$ stac. točka

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 \Rightarrow (d^2 L)_T = -\frac{4}{3}(dx)^2 < 0$ i uvjet: $2dx + 3dy = 0 \Rightarrow$ $T(3, 2, 6)$ maximum

12. [3 boda] a) $\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)dx$

b) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \Rightarrow \mu(x)P(x, y)dx + \mu(x)Q(x, y)dy = 0$ egzaktna jedn. $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \mu' Q + \mu Q'_x = \mu P'_y \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} \Rightarrow \ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)dx$

Drugi međuispit iz Matematike 2

12. svibnja 2010.

1. (3 boda) a) Prostorna krivulja $\mathcal{C}$ zadana je s pomoću vektorske funkcije
$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$
Neka je $T \in \mathcal{C}$ točka kojoj odgovara vrijednost $t = t_0$. Odredite jednadžbu tangente na $\mathcal{C}$ u točki T.

b) Krivulja $\mathcal{C}$ zadana je vektorskom funkcijom $r(t) = t\vec{i} + e^{2t}\vec{j} - \frac{1}{2}e^{t}\vec{k}$. Odredite trenutak t_0 i pripadnu točku na krivulji u kojoj je tangenta na krivulju okomita na pravac
$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1/2} = \frac{z}{2}.$$

c) Koristeći pravilo za derivaciju složene funkcije više varijabli izračunajte $\frac{du}{dt}$ u trenutku t_0 krivulje $\mathcal{C}$ (zadane u b) dijelu zadatka) za funkciju
$$u = f(x, y, z) = e^{x}y + z\sqrt{y}.$$

◇

2. (2 boda) Nađite dz i d^2z za funkciju $z = f(x, y)$ zadanu implicitno jednadžbom
$$z = e^{x+y+z-1}.$$

◇

3. (3 boda) a) Definirajte neprekinutost funkcije dvije varijable u nekoj točki.

b) Odredite sve realne brojeve α i β tako da je sljedeća funkcija f neprekinuta u točki $(0, 0)$:
$$f(x,y) = \begin{cases} (\alpha+1)\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0), \\ \beta - 3, & \text{ako je } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

◇

4. (3 boda) Iskažite i dokažite Sylvesterov teorem (za kvadratne forme dvije varijable).

◇

5. (2 boda) Nađite točke na plohi $z = z(x, y)$ danoj sa
$$(x+1)^3 + z + y^2z^3 = 2$$
u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s xOy ravninom.

◇

6. (2 boda) Kocka K smještena je tako da joj je središte u ishodištu, a bridovi usporedni s koordinatnim osima. Duljina brida 2. Odredite ekstremne vrijednosti funkcije
$$f(x, y, z) = x + y - 3z - 3$$
definirane na $K \subseteq \mathbb{R}^3$ i točke u kojima se poprimaju ti ekstremi.

◇

7. (2 boda) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 2$.

◇

8. (3 boda) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 8y^2$ na elipsi $x^2 + 2y^2 = 1$.

Vrijeme pisanja je **90min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 2

12. svibnja 2010.

1. (3 boda) a) Prostorna krivulja $\mathcal{C}$ zadana je s pomoću vektorske funkcije

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Neka je $T \in \mathcal{C}$ točka kojoj odgovara vrijednost $t = t_0$. Odredite jednadžbu tangente na $\mathcal{C}$ u točki T.

b) Krivulja $\mathcal{C}$ zadana je vektorskom funkcijom $r(t) = t\vec{i} + e^{2t}\vec{j} - \frac{1}{2}e^t\vec{k}$. Odredite trenutak t_0 i pripadnu točku na krivulji u kojoj je tangenta na krivulju okomita na pravac

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1/2} = \frac{z}{2}.$$

c) Koristeći pravilo za derivaciju složene funkcije više varijabli izračunajte $\frac{du}{dt}$ u trenutku t_0 krivulje $\mathcal{C}$ (zadane u b) dijelu zadatka) za funkciju

$$u = f(x, y, z) = e^x y + z\sqrt{y}.$$

Rješenje: Opća tražena tangenta je oblika

$$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}.$$

Smjer tangente $\dot{r}(t) = \vec{i} + 2e^{2t}\vec{j} - \frac{1}{2}e^t\vec{k}$, a smjer pravca je $-2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$, pa se za uvjet okomitosti dobije kvadratna jednadžba $e^2t - e^t - 2 = 0$, iz čega izlazi $t_0 = \ln 2$, odnosno $T(\ln 2, 4, -1)$.

Za funkciju u vrijedi da je $\frac{du}{dt} = e^x\dot{x}y + e^x\dot{y} + \sqrt{y}\dot{z} + \frac{z}{2\sqrt{y}}\dot{y}$, pa uvrštavanjem dobivamo $2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) + \frac{-1}{2 \cdot 2} \cdot 8 = 20$.

◇

2. (2 boda) Nađite dz i d^2z za funkciju $z = f(x, y)$ zadanu implicitno jednadžbom

$$z = e^{x+y+z-1}.$$

Rješenje: Kako je $z = e^{x+y+z-1}$, to je $dz = e^{x+y+z-1}(dx + dy + dz)$, odnsno $dz = z(dx + dy + dz)$, pa je $dz = \frac{z}{1-z}(dx + dy)$. Iz toga, deriviranjem, slijedi $d^2z = d(dz) = \frac{z}{(1-z)^3}(dx + dy)^2$.

◇

3. (3 boda) a) Definirajte neprekinutost funkcije dvije varijable u nekoj točki.

b) Odredite sve realne brojeve α i β tako da je sljedeća funkcija f neprekinuta u točki $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} (\alpha + 1)\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0), \\ \beta - 3, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Rješenje: Za a) dio vidi knjižicu 6.-7., str. 5.

Prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ dobivamo da je $f(x, y) = (\alpha + 1)|r|\cos(2\phi)$, pa u limesu $(x, y) \to (0, 0)$ dobivamo $f(x, y) \to 0$, neovisno o vrijednosti α, pa α može biti bilo koji realan broj. Kako $f(x, y) \to \beta - 3$ (pri silasku u ishodište), to mora biti $\beta - 3 = 0$, pa je $\beta = 3$.

◇

4. (3 boda) Iskažite i dokažite Sylvesterov teorem (za kvadratne forme dvije varijable).

Rješenje: Vidi knjižicu 8, str. 21.

5. (2 boda) Nađite točke na plohi $z = z(x, y)$ danoj sa

$$(x + 1)^3 + z + y^2 z^3 = 2$$

u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s xOy ravninom.

Rješenje: Definiramo $F(x, y, z) = (x + 1)^3 + z + y^2 z^3$. Kako gradijent $\nabla F(x, y, z) = 3(x + 1)^2 \overrightarrow{i} + 2yz^3 \overrightarrow{j} + (1 + 3y^2 z^2) \overrightarrow{k}$ mora biti kolinearan vektoru $\overrightarrow{k}$, to mora biti $3(x + 1)^2 = 0$ i $(2yz^3) = 0$. To se postiže ako je $x = -1$, te ako je $y = 0$ ili ako je $z = 0$. Ne može biti $x = -1$ i $z = 0$ istovremeno, pa zaključujemo da je jedina točka $T(-1, 0, 2)$.

◇

6. (2 boda) Kocka K smještena je tako da joj je središte u ishodištu, a bridovi usporedni s koordinatnim osima. Duljina brida 2. Odredite ekstremne vrijednosti funkcije

$$f(x, y, z) = x + y - 3z - 3$$

definirane na $K \subseteq \mathbb{R}^3$ i točke u kojima se poprimaju ti ekstremi.

Rješenje: Kako se radi o linearnoj funkciji, provjerom svih vrhova $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ dobivamo da se maksimum postiže u $(1, 1, -1)$, iznosa 2, a minimum u $(-1, -1, 1)$, iznosa -8.

◇

7. (2 boda) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 2$.

Rješenje: Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$, to nužne uvjete za ekstreme zadovoljavaju točke oblika $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1)$, za svaki cijeli broj k. Druge derivacije su $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, pa dobivamo minimume u točkama $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, a u ostalim točkama imamo indefinitne forme.

◇

8. (3 boda) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 8y^2$ na elipsi $x^2 + 2y^2 = 1$.

Rješenje: Lagrangeova funkcija $L(x, y) = x^4 + y^4 + (\lambda - 4)(x^2 + 2y^2)$. Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} x(4x^2 + 2(\lambda - 4)) &= 0 \\ y(4y^2 + 4(\lambda - 4)) &= 0 \\ x^2 + 2y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dobivaju se slučaj $x = 0$, slučaj $y = 0$ i slučaj $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

U prvom slučaju su kritične točke $(0, \pm\sqrt{1/2})$, uz $\lambda = 7/2$. Dobivamo $d^2 L = -dx^2 + 4dy^2$, pa uvrštavajući iz uvjeta činjenicu da je $dx = 0$ dobivamo $d^2 L = -dx^2$, pa su to maksimumi.

U drugom slučaju su kritične točke $(\pm 1, 0)$, uz $\lambda = 2$. Dobivamo $d^2 L = 8dx^2 - 8dy^2$, pa uvrštavajući iz uvjeta činjenicu da je $dx = 0$ dobivamo $d^2 L = -8dy^2$, pa su to maksimumi.

U trećem slučaju je $\lambda = \frac{18}{5}$, a $x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ i $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. U tom je slučaju $d^2 L = \frac{8}{5}(dx^2 + 2dy^2)$, pa se radi o minimumima.

Ovaj zadatak može se rješavati prelaskom na polarne (tj. eliptičke koordinate $x = \cos\phi$ i $y = \frac{1}{2}\sin\phi$). Moguće je bilo i direktnim uvrštavanjem $x^2 = 1 - 2y^2$, ali uz oprez da se ekstremi traže i u rubovima domene.

Završni ispit iz Matematike 2

30. lipnja 2010.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. (4 boda) Tangenta u svakoj točki krivulje siječe os Ox u točki čija je apscisa jednaka ordinati točke u kojoj pripadna normala siječe os Oy. Odredite sve takve krivulje.

$\diamond$

2. (3 boda)
   a) Definirajte determinantu Wronskog za po volji odabrane funkcije y_1, y_2 i y_3.
   b) Ispitajte linearnu (ne)zavisnost funkcija e^x, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$.
   c) Napišite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima najnižeg reda kojoj su partikularna rješenja

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \operatorname{sh}(x), \quad y_3 = \operatorname{ch}(x).$$

$\diamond$

3. (4 boda) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'y'' = \frac{1}{y^2} - \frac{(y')^3}{y}.$$

$\diamond$

4. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x.$$

$\diamond$

5. (3 boda)
   a) Definirajte pojam egzaktne diferencijalne jednadžbe.
   b) Koristeći Eulerov multiplikator nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0.$$

$\diamond$

6. (3 boda) Riješite Cauchyjevu zadaću

$$y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}(\sin x + x\cos x)$$
$$y(0) = 1.$$

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.
Pitanja iz cijelog gradiva nalaze se na drugoj strani.

Pitanja iz cijelog gradiva

7. (1 boda) Definirajte pojam konvergencije reda brojeva.

$\diamond$

8. (2 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt[n]{n}.$$

$\diamond$

9. (2 boda) Koristeći razvoj u red elementarne funkcije $\frac{1}{1+x}$ razvijte u MacLaurinov red funkciju

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2.$$

$\diamond$

10. (3 boda) Odredite točku koja je simetrična točki $T(2, -2, 3)$ s obzirom na tangencijalnu ravninu na plohu $z = 2x^2 + 3y^2 + 5xy$ u točki plohe $S(1, -1, z)$.

$\diamond$

11. (2 boda) Nađite dz i d^2z u točki $T(2, 0, 1)$ funkcije z zadane implicitno jednadžbom

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - z + 4 = 0.$$

$\diamond$

12. (2 boda) Nađite opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$e^{y'} = xy' - y.$$

$\diamond$

13. (3 boda) Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

koje zadovoljava uvjete

$$y(-1) = -1$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 1.$$

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.
Pitanja iz trećeg ciklusa gradiva nalaze se na drugoj strani.

Rješenja završnog ispita iz Matematike 2

održanog 30. lipnja 2010.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. (4 boda) Tangenta u svakoj točki krivulje siječe os Ox u točki čija je apscisa jednaka ordinati točke u kojoj pripadna normala siječe os Oy. Odredite sve takve krivulje.

Rješenje: Tražimo $x_T = y_N$, gdje je x_T zadan kao sjecište tangente i osi Ox, pa vrijedi $-y = y'(x_T - x)$, te je y_N zadan $x\frac{1}{y'} = y_N - y$. Izjednačavajući dobivamo jednadžbu $(y-x)y' = -(x+y)$ koja je homogena, pa po supstituciji $y = zx$ dobivamo $z'\frac{1-z}{z^2+1} = \frac{1}{x}$, pa je rješenje $C = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(y^2+x^2)$.

◇

2. (3 boda) a) Definirajte determinantu Wronskog za po volji odabrane funkcije y_1, y_2 i y_3.
b) Ispitajte linearnu (ne)zavisnost funkcija e^x, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$.
c) Napišite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima najnižeg reda kojoj su partikularna rješenja

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \operatorname{sh}(x), \quad y_3 = \operatorname{ch}(x).$$

Rješenje: Determinanta Woronskog dana je izrazom $W(y_1, y_2, y_3) = \det\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$.

Kako je $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, to je dani skup funkcija linearno zavisan.

Opće rješenje koje pokriva sva ova partikularna rješenja je $y = C_1e^x + C_2e^x$, čemu je karakteristični polinom $(\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2 - 1$, pa je tražena jednadžba $y'' - y = 0$.

◇

3. (4 boda) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'y'' = \frac{1}{y^2} - \frac{(y')^3}{y}.$$

Rješenje: Uvrštavajući $y' = p(y)$ dobivamo jednadžbu $p^2p' = \frac{1}{y^2} - \frac{p^3}{y}$, gdje dijeljenjem s p^2 prepoznajemo Bernoullijev oblik. Stoga, supstitucijom $p^3 = z$ dobivamo $z' + \frac{3}{y}z = \frac{3}{y^2}$. Rješavajući tu linearnu jednadžbu dobivamo homogeno rješenje $z_h = \frac{C}{y^3}$, te varijacijom konstante dobivamo $z = \frac{3}{2}\frac{1}{y} + \frac{C_0}{y^3}$. Kako je $z = p^3 = (y')^3$, to dobivamo $y' = \sqrt[3]{\frac{3y^2+2C_0}{2y^3}}$, odnosno $(2x+C_1)^3 = (\frac{3}{2}y^2 + C_2)^2$.

◇

4. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x.$$

Rješenje: Karakterstični polinom ove jednadžbe je $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, koji ima dvostruku nultočku u $\lambda = 1$. Stoga je homogeno rješenje oblika $y = C_1e^x + C_2xe^x$. Metodom varijacije konstanti dobivamo sustav
$$\begin{aligned} C_1'e^x + C_2'xe^x &= 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^x + C_2xe^x &= \frac{1}{x}e^x. \end{aligned}$$
Očito je $C_2' = \frac{1}{x}$, pa je $C_2(x) = \ln x + C_2$, te iz prve jednadžbe sliejdi $C_1' = 1$, pa je $C_1(x) = -x + C_1$. Opće rješenje je tada $y = C_1e^x + (\ln x + C_2)xe^x$.

◇

5. (3 boda) a) Definirajte pojam egzaktne diferencijalne jednadžbe.
b) Koristeći Eulerov multiplikator nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0.$$

Rješenje: Jednadžba $F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0$ kažemo da je egzaktna ako postoji funkcija $\Phi(x,y)$ takva da je $d\Phi(x,y) = F(x,y)dx + G(x,y)dy$.

Tražena jednadžba nije egzaktna, a razlika $\partial_y F - \partial_x G = 3x^2y^2 - 1$. Ako pretpostavimoa da je $\mu = \mu(x)$, dobivamo jednadžbu $\partial_X \ln \mu = \frac{1}{x}$, pa zaključujemo da je $\mu(x) = x$. Integrirajući dobivenu egzaktnu jednadžbu $(4x^3y^3 - 2yx)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$. dobivamo opće rješenje $x^4y^3 - x^2y = C$.

$\diamond$

6. (3 boda) Riješite Cauchyjevu zadaću

$$y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}(\sin x + x\cos x)$$
$$y(0) = 1.$$

Rješenje: Rješenje homogenog dijela jednadžbe $\frac{y'}{y} = x$ daje $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Varijacijom konstante dobivamo jednadžbu $C'e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}(\sin x + x\cos x)$, odnosno $C(x) = x\sin x + C_0$. Stoga je općenito $y = (C_0 + x\sin x)e^{\frac{x^2}{2}}$, a uz uvrštene početne uvjete je

$$y(x) = (1 + x\sin x)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Pitanja iz cijelog gradiva

7. (1 boda) Definirajte pojam konvergencije reda brojeva.

Rješenje: Za red brojeva kažemo da konvergira ako konvegira niz njegovih parcijalnih suma.

$\diamond$

8. (2 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt[n]{n}.$$

Rješenje: Za $n \geq 3$ je $\ln n > 1$, pa je $\ln \sqrt[n]{n} = \frac{1}{n}\ln n > \frac{1}{n}$, što po usporednom kriteriju (usporedba s harmonijskim redom) znači da red divergira.

$\diamond$

9. (2 boda) Koristeći razvoj u red elementarne funkcije $\frac{1}{1+x}$ razvijte u MacLaurinov red funkciju

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2.$$

Rješenje: Kako je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)}$, to je $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}$, odnosno $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$. Ukupni razvoj u red je onda $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1}$.

$\diamond$

10. (3 boda) Odredite točku koja je simetrična točki $T(2,-2,3)$ s obzirom na tangencijalnu ravninu na plohu $z = 2x^2 + 3y^2 + 5xy$ u točki plohe $S(1,-1,z)$.

Rješenje: Promatramo gradijent funkcije $F(x,y,z) = z - 2x^2 - 3y^2 - 5xy$ koji iznosi $\nabla f = (-4x - 5y, -6y - 5x, 1)$, odnosno u traženoj točki $\nabla F(2,-2,3) = (1,1,1)$. Koristeći traženu točku $(1,-1,0)$ dobivamo da je tangencijalna ravnina $x + y + z = 0$. Zanima nas za koji je t točka $(2+t, -2+t, 3+t)$ element tangencijalne ravnine. Dobivamo $t = -1$. Tako dobivamo i simetričnu toǩu u $t = -2$, koja onda ima koordinate $(0,-4,1)$.

$\diamond$

11. (2 boda) Nađite dz i d^2z u točki $T(2,0,1)$ funkcije z zadane implicitno jednadžbom

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - z + 4 = 0.$$

Rješenje: Prvim deriviranjem dobivamo $(2z - 4x - 1)dz + 2ydy + (2x - 4z)dx = 0$, odnosno $dz(2,0,1) = 0$. Drugim deriviranjem dobivamo $2dx^2 + 2xd^2x + 2dy^2 + 2yd^2y + 2dz^2 + 2d^2z - 4dxdz - 4xd^z - 4dzdx - 4zd^2x - d^2z = 0$, odnosno (uz $dz(2,0,1) = 0$) dobivamo $d^2z = \frac{2}{7}(dx^2 + dy^2)$.

$\diamond$

12. (2 boda) Nađite opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$e^{y'} = xy' - y.$$

Rješenje: Supstitucijom $p = y'$ i deriviranjem dobivamo jednadžbu $e^p p' = xp'$, te dobivamo opće rješenje $p' = 0$, odnosno $y = C_1 x + C_2$. Uvrštavajući u polaznu jednadžbu dobivamo $y = C_1 x + e^{C_1}$. Za singularno rješenje dobivamo izraz $e^p = x$, odnosno $y' = \ln x$, pa je $y(x) = x(\ln x - 1) + C$, pri čemu iz polazne jednadžbe slijedi da je $C = 0$.

◇

13. (3 boda) Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

koje zadovoljava uvjete

$$\begin{aligned} y(-1) &= -1 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje: Karakteristični polinom tražene jednadžbe je $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$, koji se faktorizira u oblik $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)$, odnosno $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Opće rješenje je tada oblika $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$. Uvrštavajući početne uvjete dobivamo $C_1 = -C_3$, te $C_2 = 0$. Također dobivamo $C_1 = \frac{e}{e^2 - 1}$, pa je $y(x) = \frac{2e}{e^2-1}\,\mathrm{sh}(x)$.

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.

Pitanja iz trećeg ciklusa nalaze se na drugoj strani.

Drugi međuispit iz Matematike 2

5. svibnja 2011.

1. (2 boda) Neka je dana funkcija
$$F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 2z),$$
te neka je $x = u + v$, $y = u - v$ i $z = 2uv$. Izračunajte
$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}.$$

◇

2. (3 boda)
   a) Pomoću limesa definirajte pojam usmjerene derivacije funkcije $f(\overrightarrow{x})$ u smjeru zadanog vektora $\overrightarrow{s}$.
   b) Koristeći danu definiciju napiište i izvedite formulu za računanje usmjerene derivacije funkcije $f(\overrightarrow{x})$ s pomoću njenog gradijenta.

◇

3. (2 boda) Polinom dviju varijabli
$$f(x, y) = x^2y + 3y^2 - 2xy - 2x^2 + 6x - 11y + 9$$
prikažite razvijen po potencijama od $(x - 1)$ i $(y - 2)$.

◇

4. (3 boda)
   a) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf eksplicitno zadane funkcije
$$z = f(x, y)$$
   u točki grafa (x_0, y_0, z_0).
   b) Napišite formulu za parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za funkciju z implicitno zadano jednadžbom
$$\Phi(x, y, z) = 0.$$
   c) Koristeći formule iz a) i b) dijela zadatka, izvedite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\Phi(x, y, z) = 0$ u točki plohe (x_0, y_0, z_0).

◇

5. (2 boda) Zadana je linearna funkcija $f(x, y) = 3 - x - 2y$ na peterokutu $ABCDE$ čiji su vrhovi
$$A(2, 0), \quad B(4, 2), \quad C(3, 3),$$
$$D(2, 5), \quad E(0, 1).$$
Odredite sve točke gdje dana funkcija postiže minimum ili maksimum.

◇

6. (4 boda) Funkcija $z(x, y)$ zadana je implicitno jednadžbom
$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$
Odredite koordinate i karakter lokalnih ekstrema te funkcije.

◇

7. (4 boda) Krivulja $\mathcal{C}$ je presjek plohe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ravninom $y - 2z + 4 = 0$. Odredite na krivulji $\mathcal{C}$ točku koja je najbliža ishodištu i točku koja je najudaljenija od ishodišta.
Napomena: Formulirajte problem kao vezani ekstrem u varijablama x i y.

Vrijeme pisanja je **90min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 2

održanog 5. svibnja 2011.

1. (2 boda) Neka je dana funkcija

$$F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 2z),$$

te neka je $x = u + v$, $y = u - v$ i $z = 2uv$. Izračunajte

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 2z}(2x\frac{\partial x}{\partial u} + 2y\frac{\partial y}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial u}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2z}(2x + 2y + 4v)\\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 2z}(2x\frac{\partial x}{\partial v} + 2y\frac{\partial y}{\partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial v}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2z}(2x - 2y + 4u)\\
\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 2z}(2x + 2y + 4v - 2x - 2y - 4u) = \frac{4}{x^2 + y^2 + 2z}(v - u + u - v).
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje je 0.

◇

2. (3 boda) a) Pomoću limesa definirajte pojam usmjerene derivacije funkcije $f(\vec{x})$ u smjeru zadanog vektora $\vec{s}$.
   b) Koristeći danu definiciju napiište i izvedite formulu za računanje usmjerene derivacije funkcije $f(\vec{x})$ s pomoću njenog gradijenta.

Rješenje: Usmjerena derivacija funkcije f u smjeru vektora $\vec{s}$ iz točke $\vec{x}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{s}) - f(\vec{x})}{t}.$$

Definiramo funkciju $F(t) = f(\vec{x} + t\vec{s})$, te neka je u bazi e_i vektor $\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i$. Kako je, po definiciji $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{x}) = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}\frac{de_1}{dt}(\vec{x})s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial e_n}\frac{de_n}{dt}(\vec{x})s_n = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{s}$.

◇

3. (2 boda) Polinom dviju varijabli

$$f(x, y) = x^2y + 3y^2 - 2xy - 2x^2 + 6x - 11y + 9$$

prikažite razvijen po potencijama od $(x - 1)$ i $(y - 2)$.

Rješenje:

Derivacije polinoma $f(x, y)$ u $T = (1, 2)$ su:

$$\begin{aligned}
&\partial_x f|_T = 2xy - 2y - 4x + 6|_T = 2 \quad \partial_{xx} f|_T = 2y - 4|_T = 0 \quad \partial_{xxy} f|_T = 2|_T = 2\\
&\partial_y f|_T = x^2 + 6y - 2x - 11|_T = 0 \qquad \partial_{yy} f|_T = 6|_T = 6
\end{aligned}$$

Sve ostale derivacije su 0, pa je ukupni polinom $f(x, y) = 1 + 2(x-1) + 3(y-2)^2 + (x-1)^2(y-2)$.

◇

4. (3 boda) a) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf eksplicitno zadane funkcije

$$z = f(x, y)$$

   u točki grafa (x_0, y_0, z_0).
   b) Napišite formulu za parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za funkciju z implicitno zadano jednadžbom

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

   c) Koristeći formule iz a) i b) dijela zadatka, izvedite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\Phi(x, y, z) = 0$ u točki plohe (x_0, y_0, z_0).

Rješenje: Tangencijalna ravnina na funkciju $f(x,y)$ dana je s:

$$\pi \ldots z - z_0 = \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Parcijalne derivacije od z su $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z)}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z)}$.
Uvrštavanjem parcijalnih derivacija i množenjems $\Phi'_z(x_0,y_0,z_0)$ dobivamo

$$\partial_x \Phi(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \partial_y \Phi(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \partial_z \Phi(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

◇

5. (2 boda) Zadana je linearna funkcija $f(x,y) = 3 - x - 2y$ na peterokutu $ABCDE$ čiji su vrhovi

$$\begin{array}{lll} A(2,0), & B(4,2), & C(3,3), \\ D(2,5), & E(0,1). & \end{array}$$

Odredite sve točke gdje dana funkcija postiže minimum ili maksimum.

Rješenje: Kako je $f(x,y)$ afina funkcija, to je dovoljno provjeriti samo vrijednosti u vrhovima A, B, D i E (C nije u konveksnoj ljuski). U točki D funkcija postiže minimum, -9, a u točkama A i E maksimum, 1, pa su točke maksimuma cijeli segment $\overline{A}E$.

◇

6. (4 boda) Funkcija $z(x,y)$ zadana je implicitno jednadžbom

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

Odredite koordinate i karakter lokalnih ekstrema te funkcije.

Rješenje: Derivirajući implicitni izraz dobivamo

$$dz = \frac{-4}{2z - 8x - 1}((x-2z)dx + ydy),$$

iz čega dobivamo stacionarne točke $T_1 = (2,0,1)$ i $T_2 = (-\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7})$.
Drugi diferencijal od z je

$$d^2 z = \frac{-4}{2z - 8x - 1}(dx^2 + dy^2),$$

pa definitnost ovisi o izboru točaka. Točka T_1 daje pozitivno definitnu formu, pa je minimum, a točka T_2 negativno, pa je maksimum. ◇

7. (4 boda) Krivulja $\mathcal{C}$ je presjek plohe $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ravninom $y - 2z + 4 = 0$. Odredite na krivulji $\mathcal{C}$ točku koja je najbliža ishodištu i točku koja je najudaljenija od ishodišta.
Napomena: Formulirajte problem kao vezani ekstrem u varijablama x i y.

Rješenje: Tražimo ekstreme funkcije $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (to je isto što i taženje minimalnog i maksimalnog kvadrata duljine, jer je udaljenost pozitivna, a korijen (kvadrat) monoton i bijektivan na pozitivnim brojevima). Iz vrijednosti z dobivamo $F(x,y,z) = 2z^2$, pa vidimo da je dovoljno tražiti ekstreme od z. Kako je $z = \frac{1}{2}(y+4)$, to je $x^2 = -\frac{3}{4}y^2 + 2y + 4$. Kako x^2 mora biti pozitivan, to $\frac{3}{4}y^2 - 2y - 4 \leq 0$, odnosno $y \in [\frac{-4}{3}, 4]$. Kako je z monotona funkcija od f, to su ekstremi u rubovima intervala, pa su oni $(0, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}$ (minimum, $d^- = \frac{4\sqrt{2}}{3}$) i $(0,4,4)$ (maksimum $d^+ = 4\sqrt{2}$).
Moguće je ovaj zadatak riješiti i traženjem vezanih ekstrema funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 + (\frac{1}{2}y+2)^2$ uz uvijet $(\frac{1}{2}y+2)^2 = x^2 + y^2$.

Završni ispit iz Matematike 2

15. lipnja 2011.

Zadaci iz 3. ciklusa

1. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{x-y+2}{x+y}.$$

◇

2. (4 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$3xy^2y' + y^3 = x^2.$$

◇

3. (3 boda) Nađite krivulju koja prolazi ishodištem, a ima svojstvo da u svakoj točki krivulje pripadna normala prolazi točkom $T(1,2)$.

◇

4. (3 boda) Neka su y_1, y_2, y_3 funkcije klase C^2 na $[a,b]$. Dokažite da ako determinanta Wronskoga $W(y_1, y_2, y_3)$ nije identički jednaka nuli, tada su funkcije y_1, y_2, y_3 linearno nezavisne.

◇

5. (4 boda) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x.$$

◇

6. (3 boda) Nađite prikladnu supstituciju, te njenom primjenom riješite Cauchyev problem

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y} + 2\ln y = x \\ \qquad y(0) = 1. \end{cases}$$

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.
Pitanja iz cjelokupnog gradiva nalaze se na drugoj strani.

Zadaci iz cjelokupnog gradiva

7. (3 boda) Dokažite da je područje konvergencije Maclaurinovog reda od e^x cijeli skup realnih brojeva. Izvedite Taylorov red za funkciju $\operatorname{ch} x$ oko 0 koristeći se gore navedenim redom potencija.

$\diamond$

8. (2 boda) Baza $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ leži na pravcu

$$p_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

a vrh trokuta C je na pravcu

$$p_2 \equiv \frac{x-8}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+8}{3}.$$

Ako je $A(1, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, 4)$ nađite koordinate vrha C.

$\diamond$

9. (2 boda) Koristeći aproksimaciju prirasta funkcije njenim totalnim diferencijalom izračunajte približnu vrijednost izraza

$$\log_{10}(10.1) \cdot \log_{10}(100.1).$$

Napomena: Uzmite da je $\log_{10} e = 0.4343$.

$\diamond$

10. (3 boda) Nađite i ispitajte uvjetne ekstreme funckije

$$z = \ln(x+y)$$

ako varijable x i y zadovoljavaju uvjet

$$x^2 + y^2 + xy - 3 = 0.$$

$\diamond$

11. (2 boda) Odredite parametar λ tako da jednadžba

$$\left(\frac{\sin \lambda x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$$

bude egzaktna, te nađite opće rješenje dobivene jednadžbe.

$\diamond$

12. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y^{IV} - y'' = e^x \sin x.$$

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.
Pitanja iz 3. ciklusa nalaze se na drugoj strani.

Završni ispit iz Matematike 2

15. lipnja 2011.

Zadaci iz 3. ciklusa

1. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{x-y+2}{x+y}.$$

Rješenje: Jednadžba se može svesti na homogenu, ali najjednostavnije je tretirati je kao egzaktnu

$$(x+y)dy + (y-x-2)dx = 0.$$

Rješenje je tada

$$C = \frac{1}{2}(y^2-x^2) + xy - 2x.$$

◇

2. (4 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$3xy^2y' + y^3 = x^2.$$

Rješenje: Napravimo supstituciju $z = y^3$, $z' = 3y^2y'$, pa dobivamo jednadžbu

$$xz' + z = x^2,$$

koja je linearna prvog reda. Homogeno rješenje je $z_h = \frac{1}{x}$ pa varijacijom konstante dobivamo

$$z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}.$$

Slijedi da je

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}}.$$

◇

3. (3 boda) Nađite krivulju koja prolazi ishodištem, a ima svojstvo da u svakoj točki krivulje pripadna normala prolazi točkom $T(1,2)$.

Rješenje: Iz jendadžbe tangente dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{-1}{y'} = \frac{2-y}{1-x}.$$

Dobivamo egzaktnu jednadžbu

$$(1-x)dx + (y-2)dy = 0,$$

čije je opće rješenje

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = R^2.$$

Radijus te kružnice dobivamo iz činjenice da prolazi ishodištem, pa je $R^2 = 5$. Zadatak je moguće riješiti geometrijskim zorom.

◇

4. (3 boda) Neka su y_1, y_2, y_3 funkcije klase C^2 na $[a,b]$. Dokažite da ako determinanta Wronskoga $W(y_1,y_2,y_3)$ nije identički jednaka nuli, tada su funkcije y_1, y_2, y_3 linearno nezavisne.

Rješenje: Neka je Wronskijan $W(y_1, y_2, y_3)(x_0) \neq 0$ za neki $x_0 \in [a, b]$. Tada sustav $\alpha_1 y_1^{(k)} + \alpha_2 y_2^{(k)} + \alpha_3 y_3^{(k)} = 0$, za $k = 0, 1, 2$ ima determinantu sustava $\neq 0$, pa ima jedinstveno rješenje, $\alpha_i = 0$. Specijalno, to znači da $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ ima jedinstveno rješenje $\alpha_i = 0$, pa su te funkcije linearno nezavisne.

◇

5. (4 boda) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x} e^x.$$

Rješenje: Korijeni karatkeristične jednadžbe su $r_{1,2} = 1$, pa je homogeno rješenje dano oblikom $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Metodom varijacije konstenti dobivamo sustav

$$\begin{aligned} C_1' + x C_2' &= 0 \\ C_1' + C_2' + x C_2' &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

čija su rješenja

$$C_1' = -1 \quad C_2' = \frac{1}{x}.$$

Ukpno rješenje je tada

$$y = e^x(-x + A + Bx) + e^x \ln x.$$

◇

6. (3 boda) Nađite prikladnu supstituciju, te njenom primjenom riješite Cauchyev problem

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y} + 2 \ln y = x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Uvodimo supstituciju $z = \ln y$, te dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda:

$$z' + 2z = 0.$$

Homogeno rješenje te jednadžbe $y_h = Ce^{-2x}$. Metodom varijacije konstatne dobivamo $C(x) = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C_0$. Uvrštavanjem dobivamo rješenje

$$\ln y = \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Zadaci iz cjelokupnog gradiva

7. (3 boda) Dokažite da je područje konvergencije Maclaurinovog reda od e^x cijeli skup realnih brojeva. Izvedite Taylorov red za funkciju $\operatorname{ch} x$ oko 0 koristeći se gore navedenim redom potencija.

Rješenje: D'Alambertovim kriterijem dobivamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \to 0$, za svaki fiksni $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \sum \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum \frac{2x^{2n}}{(2n)!} = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

◇

8. (2 boda) Baza $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ leži na pravcu

$$p_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

a vrh trokuta C je na pravcu

$$p_2 \equiv \frac{x-8}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+8}{3}.$$

Ako je $A(1, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, 4)$ nađite koordinate vrha C.

Rješenje: Točke su $A(1,0,2)$ i $B(3,2,4)$. Polovište dužine $\overline{AB}$ je $S(2,1,3)$. Točka C mora ležati u ravnini okomitoj na pravac kroz A i B koji prolazi točkom S. Ta ravnina je

$$\pi \ldots 1(x-2) + 1(y-1) + 1(z-3) = 0.$$

Računamo sjecište $\pi \cap p_2$ i dobivamo točku $C(10,-2,-2)$.

◇

9. (2 boda) Koristeći aproksimaciju prirasta funkcije njenim totalnim diferencijalom izračunajte približnu vrijednost izraza

$$\log_{10}(10.1) \cdot \log_{10}(100.1).$$

Napomena: Uzmite da je $\log_{10} e = 0.4343$.

Rješenje: $z = \log x \log y$, pa je $dz = \frac{\log y}{x \ln 10} dx + \frac{\log x}{y \ln 10} dy = \log e(\frac{\log y}{x} dx + \frac{\log x}{y} dy)$. Uvrštavajući $x = 10$, $y = 100$, $\Delta x = 0.1$ i $\Delta y = 0.1$, dobivamo da je traženi izraz otprilike 2.0091.

◇

10. (3 boda) Nađite i ispitajte uvjetne ekstreme funckije

$$z = \ln(x+y)$$

ako varijable x i y zadovoljavaju uvjet

$$x^2 + y^2 + xy - 3 = 0.$$

Rješenje: Lagrangeova funkcija je $L(x,y;\lambda) = \ln(x+y) + \lambda(x^2+y^2+xy-3)$, pa su derivacije $L'_x = \frac{1}{x+y} + \lambda(2x+y) = 0$, $L'_y = \frac{1}{x+y} + \lambda(2y+x) = 0$ i $L'_\lambda = x^2+y^2+xy-3 = 0$. Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $\lambda(x-y) = 0$, pa je $x = y$ $(\lambda \neq 0)$. Stacionarna točka je tada $S(1,1,\ln 2)$.

Kako je $d^2L = \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + 2\lambda\right)(dx)^2 + 2\left(\frac{-1}{(x+y)^2} + \lambda\right) dxdy + \left(\frac{-1}{(x+y)^2} + 2\lambda\right)(dy)^2$, to je $d^2L(S) = \frac{-1}{12}(7(dx)^2 + 10dxdy + 7(dy)^2)$. Iz uvjeta nalazimo vezu $dx = -dy$ u točki S, pa je $d^2L = \frac{-4}{12}(dx)^2 < 0$. U S imamo uvjetni maksimum.

◇

11. (2 boda) Odredite parametar λ tako da jednadžba

$$\left(\frac{\sin \lambda x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$$

bude egzaktna, te nađite opće rješenje dobivene jednadžbe.

Rješenje: Iz uvjeta za egzaktnost dobivamo $\sin \lambda x = 2 \sin x \cos x$, pa je $\lambda = 2$. Tada je opće rješenje te jednadžbe

$$C = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y}.$$

◇

12. (3 boda) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y^{IV} - y'' = e^x \sin x.$$

Rješenje: Korijeni karakteristične jendnadžbe su $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$, $r_4 = -1$. Homogeno rješenje je tada oblika $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$. Partikularno rješenje uzmemo oblika $y_p = e^x(a \cos x + b \sin x)$, te uvrštavanjem dobivamo $y_p = \frac{-1}{10} e^x(\cos x + 2 \sin x)$.

Završni ispit iz Matematike 2

11. lipnja 2012.

Zadaci iz cjelokupnog gradiva

1. a) Dokažite (pomoću definicije reda) da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in \langle -1, 1\rangle$$

   b) Koristeći rezultat iz a) dijela odredite sumu reda potencija

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

   c) Na osnovu b) dijela odredite sumu reda brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{(2n-1)3^n}.$$

$\diamond$

2. U jednakostraničnom trokutu $\triangle ABC$ označimo s $\overrightarrow{x}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ te s $\overrightarrow{y}$ vektor $\overrightarrow{AC}$. Neka točka D dijeli stranicu CB u omjeru $1:2$ (tj. $d(C,D) = \frac{1}{2}d(D,B)$). Neka je točka E polovište dužine $\overline{AD}$.
   a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AE}$ pomoću $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$.
   b) Neka je točka F takva da je $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{x}$ za $\alpha \neq 0$. Zapišite vektor $\overrightarrow{EF}$ pomoću $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$.
   c) Odredite α tako da $\overrightarrow{EF}$ bude okomit na $\overrightarrow{AE}$.

$\diamond$

3. Zadana je kružnica

$$x^2 + y^2 = 1.$$

   a) Odredite točke ekstrema i ekstremalne vrijednosti linearne funkcije

$$l(x,y) = x - \sqrt{3}y + 7$$

   na zadanoj kružnici.
   b) Odredite točke ekstrema i ekstremalne vrijednosti kvadratne funkcije

$$k(x,y) = x^2 + 2y^2$$

   na zadanoj kružnici.

$\diamond$

4. a) Dokažite da vrijedi sljedeći nužni uvjet za egzaktnost diferencijalne jednadžbe:

   "Ako je diferencijalna jednadžba

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

   egzaktna, onda funkcije P i Q zadovoljavaju jednakost

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}."$$

   b) Koristeći rezultate iz a) dijela pokažite da sljedeća diferencijalna jednadžba nije egzaktna,

$$xy^2(xy' + y) = 1.$$

   c) Riješite diferencijalnu jednadžbu pod b).

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika. Svaki zadatak nosi 5 bodova.
Pitanja iz 2. ciklusa nalaze se na drugoj strani.

Zadaci iz 2. ciklusa

5. a) Napišite Taylorov polinom trećeg stupnja i odgovarajuću Taylorovu formulu za funkciju

$$f(x,y)$$

u okolišu točke (x_0, y_0).

b) Rabeći Taylorovu formulu napišite polinom

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$$

razvijen po potencijama od $(x-1)$ i $(y-2)$.

◇

6. a) Iskažite nužne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema funkcije $z = f(x,y)$ u točki (x_0, y_0). Napišite jednadžbu tangencijalne plohe z u toj točki (x_0, y_0).

b) Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

◇

7. Nađite krivulju koja prolazi točkom $(2,2)$ za koju je površina trokuta određenog osi Oy, radij-vektorom dirališta tangente i tangentom konstantne veličine A.

◇

8. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(y')^2 - y' \sin y \cos y - xy' + x \sin y \cos y = 0.$$

Uputa: Faktorizirajte jednadžbu!

◇

9. a) Pokažite da vrijedi svojstvo aditivnosti linearne diferencijalne jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

tj. ako su y_1 i y_2 dva rješenja promatrane jednadžbe, onda je i funkcija $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ također rješenje te jednadžbe.

b) Ako je poznato da su funkcije

$$y_1(x) = e^x + x + 1 \quad y_2(x) = e^{-x} + x - 2$$

dva rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda nađite rješenje te jednadžbe čiji graf siječe os ordinata u točki $T(0,1)$ pod kutem $\alpha = 30°$.

◇

10. a) Koristeći se determinantom Wronskog pokažite da su rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = 0$$

linearno nezavisna.

b) Metodom varijacije konstante za linearno nezavisne funkcije dobivene u dijelu pod a) odredite opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika. Svaki zadatak nosi 5 bodova.
Pitanja iz cjelokupnog gradiva nalaze se na drugoj strani.

Završni ispit iz Matematike 2

11. lipnja 2012.

Zadaci iz cjelokupnog gradiva

1. a) Dokažite (pomoću definicije reda) da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in \langle -1, 1\rangle$$

b) Koristeći rezultat iz a) dijela odredite sumu reda potencija

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

c) Na osnovu b) dijela odredite sumu reda brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{(2n-1)3^n}.$$

Rješenje: Pod a), definiramo $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Tada vrijedi $\lim_n S_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Također, vrijedi da je $xS_n = S_n + x^{n+1} - 1$. Iz toga dobivamo da je $S_n(1-x) = 1 - x^{n+1}$. Kada je $|x| < 1$, to dobivamo u graničnom slučaju kada $n \to \infty$ da je $\lim_n S_n = \frac{1}{1-x}$.

Pod b), uočimo da je

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots = \int_0^x \xi - \xi^2 + \xi^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\xi^{2n} + \cdots \, d\xi.$$

Desna strana ove jednakosti je, koristeći rezultat iz a) dijela

$$\int_0^x \frac{d\xi}{1-(-\xi^2)} = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Pod c), rezultat dobivamo uvrštavajući $x = \sqrt{3}/3$, pa je suma jednaka $\operatorname{arctg}\sqrt{3}/3 = \frac{\pi}{6}$.

◇

2. U jednakostraničnom trokutu $\triangle ABC$ označimo s $\overrightarrow{x}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ te s $\overrightarrow{y}$ vektor $\overrightarrow{AC}$. Neka točka D dijeli stranicu CB u omjeru $1:2$ (tj. $d(C,D) = \frac{1}{2}d(D,B)$). Neka je točka E polovište dužine $\overline{AD}$.

a) Izrazite vektor $\overrightarrow{AE}$ pomoću $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$.

b) Neka je točka F takva da je $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{x}$ za $\alpha \neq 0$. Zapišite vektor $\overrightarrow{EF}$ pomoću $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$.

c) Odredite α tako da $\overrightarrow{EF}$ bude okomit na $\overrightarrow{AE}$.

Rješenje: Vektor $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Računamo $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x})$. Stoga je $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{x} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{x} + \frac{1}{3}\overrightarrow{y}$.

U b) dijelu, vrijedi $\alpha\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$, pa je $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{x} + \frac{1}{3}\overrightarrow{y} - \alpha\overrightarrow{x} = (\frac{1}{6} - \alpha)\overrightarrow{x} + \frac{1}{3}\overrightarrow{y}$.

Za c) dio trebamo da je $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$, a taj je skalarni produkt jednak

$$\left((\alpha - \frac{1}{6})\overrightarrow{x} - \frac{1}{3}\overrightarrow{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{x} + \frac{1}{3}\overrightarrow{y}\right).$$

Znamo da je $|\overrightarrow{x}| = |\overrightarrow{y}| = a \neq 0$, te da vrijedi $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \frac{1}{2}a^2$ te da su $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} = a^2$. Cijela je jednakost onda

$$0 = \frac{1}{6}(\alpha - \frac{1}{6})a^2 - \frac{1}{18}\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}(\alpha - \frac{1}{6})\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{9}a^2.$$

Kada podijelimo sve s a^2 i posložimo, dobivamo $0 = (\alpha - \frac{1}{6})\frac{1}{3} - \frac{5}{36}$. Dobivamo da je

$$\alpha = \frac{7}{12}.$$

3. Zadana je kružnica
$$x^2 + y^2 = 1.$$

a) Odredite točke ekstrema i ekstremalne vrijednosti linearne funkcije
$$l(x, y) = x - \sqrt{3}y + 7$$
na zadanoj kružnici.

b) Odredite točke ekstrema i ekstremalne vrijednosti kvadratne funkcije
$$k(x, y) = x^2 + 2y^2$$
na zadanoj kružnici.

Rješenje: Gradijent linearne funkcije $\nabla l(x, y) = (1, -\sqrt{3})$, što je konstantan vektor. Dakle, ekstremi su duž pravca $\lambda(1, -\sqrt{3})$. Kako je polazni skup jedinična kružnica, to mora biti $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Uvrštavajući dobivamo da za $\lambda = \frac{1}{2}$ točka $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ maksimum, a za $\lambda = -\frac{1}{2}$ točka $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ minimum.

Za b) dio zadatka definiramo Lagrangeovu funkciju
$$L(x, y; \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$
Parcijalnim deriviranjem dobivamo jednadžbe $x + \lambda x = 0$, $2y + \lambda y = 0$ i $x^2 + y^2 = 1$. Stacionarne točke su, dakle, $(\pm 1, 0)$ i $(0, \pm 1)$. Kako je kružnica kompaktna i kvadratna funkcija glatka, to se u točkama $(\pm 1, 0)$ postižu minimumi, a u $(0, \pm 1)$ maksimumi.

⋄

4. a) Dokažite da vrijedi sljedeći nužni uvjet za egzaktnost diferencijalne jednadžbe:

"Ako je diferencijalna jednadžba
$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$
egzaktna, onda funkcije P i Q zadovoljavaju jednakost
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}."$$

b) Koristeći rezultate iz a) dijela pokažite da sljedeća diferencijalna jednadžba nije egzaktna,
$$xy^2(xy' + y) = 1.$$

c) Riješite diferencijalnu jednadžbu pod b).

Rješenje: Ako je $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ egzaktna, tada postoji funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ takva da je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$. No, po Schwartzovom teoremu mora biti
$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y).$$

U b) i c) dijelu zadatka pretvaramo jednadžbu u formu iz a) dijela, pa dobivamo
$$(xy^3 - 1)dx + x^2y^2dy = 0.$$
Tada je $P(x, y) = xy^3 - 1$ i $Q(x, y) = x^2y^2$. Uvjet egzaktnosti ne zadovoljavaju jer je $\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = 3xy^2$, a $\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = 2xy^2$. Tražimo Eulerov multiplikator kao funkciju od x i dobivamo $\mu(x) = x$. Sada dobivamo egzaktnu jednadžbu
$$(x^2y^3 - x)dx + x^3y^2dy = 0.$$
Integral te jednadžbe je
$$2x^3y^3 - 3x^2 = C.$$

Zadaci iz 2. ciklusa

5. a) Napišite Taylorov polinom trećeg stupnja i odgovarajuću Taylorovu formulu za funkciju

$$f(x,y)$$

u okolišu točke (x_0, y_0).

b) Rabeći Taylorovu formulu napišite polinom

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$$

razvijen po potencijama od $(x-1)$ i $(y-2)$.

Rješenje: Parcijalne derivacije su:

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy & & \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + 3y & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -6y^2 + 3x & \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 6x & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 3 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = -12y \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) = 6 & \frac{\partial^3}{\partial x^2 y} f(x,y) = \frac{\partial^3}{\partial x y^2} f(x,y) = 0 & \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y) = -12 \end{array}$$

Ostatak $R_3(x,y)$ sadrži samo derivacije četvrtog reda koje su sve jednake nula jer je $f(x,y)$ polinom trećeg stupnja. Općenito će Taylorov polinom oko (x_0, y_0) polinoma $f(x,y)$ izgledati (to je stroga jednakost jer se radi o istoj funkciji)

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(\Delta x)(\Delta y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(\Delta y)^2\right) + \\ &+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(\Delta x)^2(\Delta y) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(\Delta x)(\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(\Delta y)^3\right). \end{aligned}$$

Uvrštavajući točku $(1, 2)$ dobivamo izraz

$$f(x,y) = -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 + (x-1)^3 - 2(y-2)^3.$$

⋄

6. a) Iskažite nužne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema funkcije $z = f(x,y)$ u točki (x_0, y_0). Napišite jednadžbu tangencijalne plohe z u toj točki (x_0, y_0).

b) Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

Rješenje: Ako je (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f, tada vrijedi $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Tangencijalna ravnina je tada $z = f(x_0, y_0)$.

Iz nužnog uvjeta ekstrema dobivamo jednadžbe $e^{x-y}(x^2 - 2y^2) + 2xe^{x-y} = 0$ i $-e^{x-y}(x^2 - 2y^2) - 4ye^{x-y} = 0$. Dijeleći sa e^{x-y} dobivamo linearnu vezu $x = 2y$ i pomoću toga kvadratnu jednadžbu

$$2y + 4y - 2y^2 = 0.$$

Iz toga dobivamo $y = 0$ (pa je $x = 0$) i $y = -2$ (pa je $x = -4$). Za prvu od tih točaka dobivamo da je $d^2 f(0,0)$ indefinitna kvadratna forma, a $d^2 f(-4, -2)$ negativno defintna, što povlači da je $(0,0)$ sedlasta točka, a $(-2, -4)$ lokalni maksimum.

7. Nađite krivulju koja prolazi točkom $(2, 2)$ za koju je površina trokuta određenog osi Oy, radij-vektorom dirališta tangente i tangentom konstantne veličine A.

Rješenje: Tangenta je dana izrazom $T(x) = y_0 + y_0'(x - x_0)$, pa je $T(0) = y_0 - y_0'x_0$. Kako je $T(0)$ upravo duljina stranice za koju je pripadna visina traženog trokuta jednaka x, to je

$$A = \frac{1}{2}(y - y'x)x.$$

Iz toga dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{-2A}{x^2}.$$

Rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h = Cx,$$

pa varijacijom konstante dobivamo $C(x) = \frac{A}{x^2} + C_1$. Krajnji je rezultat, uvrštavajući točku

$$y = \frac{A}{x} + \frac{4 - A}{4}x.$$

◇

8. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(y')^2 - y' \sin y \cos y - xy' + x \sin y \cos y = 0.$$

Uputa: Faktorizirajte jednadžbu!

Rješenje: Dana jednadžba se faktorizira u izraz

$$(y' - x)(y' - \sin y \cos y) = 0.$$

Rješavajući pojedino jednadžbe iz faktorizacije dobivamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ x &= C_2 - \ln|\operatorname{ctg} 4y|, \end{aligned}$$

pa je opće rješenje

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 + C_1\right)(x + \ln|\operatorname{ctg}(4y)| + C_2) = 0.$$

◇

9. a) Pokažite da vrijedi svojstvo aditivnosti linearne diferencijalne jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

tj. ako su y_1 i y_2 dva rješenja promatrane jednadžbe, onda je i funkcija $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ također rješenje te jednadžbe.

b) Ako je poznato da su funkcije

$$y_1(x) = e^x + x + 1 \quad y_2(x) = e^{-x} + x - 2$$

dva rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda nađite rješenje te jednadžbe čiji graf siječe os ordinata u točki $T(0, 1)$ pod kutem $\alpha = 30°$.

Rješenje: Ako su y_1 i y_2 rješenja jednadžbe $y_i'' + p(x)y_i' + q(x)y_i = 0$, tada je za $y_3 = y_1 + y_2$,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) &= y_1'' + y_2'' + p(x)y_1' + p(x)y_2' + q(x)y_1 + q(x)y_2 \\ &= y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 + y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

pa je i y_3 rješenje te jednadžbe.

U b) dijelu zadatka tražimo rješenje $y_3 = \alpha y_2 + \beta y_2$ za koju vrijedi $y_3(0) = 1$ i $y_3'(0) = \operatorname{tg}(60°)$ (kut između osi ordinata i grafa je $30°$, no nas zanima smjer tangente, a taj je dan spram osi apscisa). Sada uvrštavamo $y_3(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = 2\alpha - \beta = 1$ i $y_3'(0) = 2\alpha = \sqrt{3}$, pa je $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\beta = \sqrt{3} - 1$. Rješenje je

$$y_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(e^x + x + 1) + (\sqrt{3} - 1)(e^{-x} + x - 2).$$

$\diamond$

10. a) Koristeći se determinantom Wronskog pokažite da su rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = 0$$

linearno nezavisna.

b) Metodom varijacije konstante za linearno nezavisne funkcije dobivene u dijelu pod a) odredite opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Rješenje: Iz karakteristične jednadžbe

$$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

dobivamo da je opće rješenje funkcija $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Tada je determinanta Wronskog

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0.$$

Tako vidimo da skup $\{1, \cos x, \sin x\}$ čini bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

U b) dijelu zadatka imamo sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 0 &= C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x \\ 0 &= -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x \\ \frac{1}{\cos^2 x} &= -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x. \end{aligned}$$

Iz tog sustava dobivamo

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= \frac{-1}{\cos x} \\ C_3'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos^2 x} \\ C_1'(x) &= 1 + \frac{\sin^x}{\cos^x}. \end{aligned}$$

Integrirajući te izraze dobivamo opće rješenje

$$y(x) = (\operatorname{tg} x + C_1) + (\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C_2)\cos x + (C_3 - \frac{1}{\cos x})\sin x.$$