Redovi brojeva

Ljubo Marangunić

27.02.2012.

Ponoviti nizove iz MAT1

Oznake reda: $\sum a_n, \sum_n a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

↑ Najprirodnije za koristiti

Oznaka niza: (a_n) → zagrade predstavljaju niz
(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4,…, a_n, … → ,… predstavlja beskonačnost

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
.
.
$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$(S_3) = S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

↑ Niz parcijalnih suma

DEFINICIJA 1:

Red je uređeni par dvaju nizova (a_n) i (S_n). Članove niza (a_n) nazivamo i članovima reda, a niz (S_n) nazivamo nizom parcijalnih suma.

Red zapisujemo simbolom $\sum a_n$ ili $\sum_n a_n$ ili $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEFINICIJA 2:

Kažemo da red $\sum a_n$ konvergira prema S ako je ispunjeno:

$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$ → Važno!

To zapisujemo $\sum a_n$ = S .

Ukoliko niz parcijalnih suma (S_n) divergira kažemo da $\sum a_n$ divergira.

Dakle, u slučaju konvergentnog reda vrijedi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ZADATAK 1 Nađi sumu reda (ako postoji):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Niz parcijalnih suma:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

↑ Opći član

Ponoviti parcijalne razlomke

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$A = 1$ $B = -1$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

ZADATAK 2 Nađi sumu reda (ako postoji):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Opći član

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \dots = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

Niz parcijalnih suma

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

Dokaz matematičkom indukcijom:

Baza n = 1

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Pretpostavka

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

Skok (mora vrijediti i za n+1)

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3})$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{1}{4} - 0 + 0 = \frac{1}{4}$$

<u>ZADATAK 3</u> Odredi konvergenciju:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

Pridruženi niz parcijalnih suma:

$(S_n) \equiv 1, 0, 1, 0, \dots \; , 1, 0, \dots$ → Divergira

Zadani red divergira.

<u>ZADATAK 4</u> Konvergencija geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (q)^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

u ovisnosti o $q \in \mathbb{R}$

Pridruženi niz parcijalnih suma:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + q$$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} \; / \cdot q$$

$$qS_n = q + q^2 + \dots + q^n$$

$$qS_n = S_n - 1 + q^n$$

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{-1}{q-1} + \frac{1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ za $|q| < 1$ konvergira i iznosi $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

$$S = \frac{1}{1-q}$$

Dakle,

Geometrijski red

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - konvergira za $|q| < 1$, i tada je $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

- divergira za $|q| \geq 1$

<u>ZADATAK 5 A)</u>

$\sum_{n_0=0}^{\infty} a \cdot q^n$ $\quad n_0 =$ zadani broj

$|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a \cdot q^n + a \cdot q^{n+1} + \ \dots = a \cdot q^n (1 + q + q^2 + \ \dots + q^n + \ \dots)$$

↑(u zagradi) $\frac{1}{1-q}$

$S = a \cdot q^n \cdot \frac{1}{1-q} \qquad a \cdot q^n = a_1 \qquad S = \frac{a_1}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

Suma konvergentnog geometrijskog reda jednaka je njegovom članu podijeljenog s 1-q.

<u>ZADATAK 5 B)</u>

$\sum_{n=4}^{\infty} 2 \cdot (\frac{1}{4})^n = 2 \cdot (\frac{1}{4})^4 + 2 \cdot (\frac{1}{4})^5 + \ \dots \qquad q = \frac{1}{4}$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2(\frac{1}{4})^4}{1-4} = \frac{1}{96}$$

<u>STAVAK 1 A</u> (Nuždan uvjet konvergencije):

Da bi red $\sum a_n$ konvergirao, nužno je da bude:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ako opći član ne ide prema 0, divergira.

DOKAZ

$$S_n = S_{n-1} + a_n \qquad a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

↑ U slučaju konvergiranja

Ovo je zapravo kriterij divergencije, a ne konvergencije.

Naime, iz poznate tautologije:

$$A => B <=> \bar{B} => \bar{A}$$

$$\sum a_n \ Konvergira => \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 => \sum a_n \ Divergira$$

STAVAK 1 B (U praktičnim zadacima):

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ onda je red $\sum a_n$ divergentan.

Ispitati konvergenciju sljedećih redova:

ZADATAK 6

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{13}{22} + \frac{15}{25} + \ \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0 \rightarrow \text{Divergira}$$

ZADATAK 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(e-1)^{2n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{((e-1)^2)^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(e-1)^2}\right)^n$$

$$q = \frac{2}{(e-1)^2} = \frac{2}{\sim 2.95} \rightarrow <1$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{(e-1)^2}}{1-\frac{2}{(e-1)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(e-1)^2-2} = \frac{1}{(e^2-2e-1)}$$

ZADATAK 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{n^2+3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3^n}{\cdot 3^{-n}}}{n^2+\frac{3^n}{\cdot 3^{-n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{n^2}{3^n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3^{-n} + \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} + \lim_{n\to\infty} 1} = \frac{0+1}{0+1}$$

$$= 1 \neq 0 \rightarrow \text{Divergira} \qquad \frac{n^2}{3^n} \rightarrow 3^n \text{ brže raste od } n^2 \rightarrow 0$$

PRIMJEDBA 1

Kod zbrajanja članova reda asocijativnost primjenjujemo samo kako je zadana, tj. drukčijim postavljanjem zagrada konvergencija reda može se promjeniti, npr.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ \dots + 1 - 1 + \ \dots$

$(S_n) = 1,0,1,0,1, \dots$ → Divergira

Nedozvoljenim postavljanjem zagrada dobivamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = (1-1) + (1-1) + \ \dots = 0 + 0 + \ \dots = 0$$

↓Konvergira ↑

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ \dots = 1$$

- Ako ima grešaka (matematičkih ili gramatičkih, kako koga smeta :D) ili nešto nedostaje (moguće da nije sve zapisano) ili imate neku ideju, javite mi na PM ili direktno mailom na Telefunken@fer2.net