MI 2014.

1. (5 bodova)

a) Iskažite i dokažite Cauchyjev kriterij za konvergenciju redova realnih brojeva s pozitivnim članovima.

b) Ispitajte konvergenciju redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+1)^3}.$$

Što možete reći o konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+1)^p}$ za svaki $p > 3$? Obrazložite sve tvrdnje.

2. (5 bodova)

a) Razvijte u Taylorov red oko $c = 0$ funkciju

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

te odredite područje konvergencije dobivenog reda.

b) Koju od sljedećih dviju suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n 5^n$$

možemo izračunati koristeći razvoj pod a). Obrazložite sve tvrdnje, te izračunajte sumu.

ZI 2014.

4. (5 bodova) Nađite sve krivulje koje imaju svojstvo da je površina trapeza određenog pozitivnim dijelovima koordinatnih osi, tangentom na tu krivulju u točki $T_0(x_0, y_0), x_0, y_0 > 0$ i pravcem $x = x_0$, jednaka kvadratu ordinate dirališta.

5. (5 bodova)

(a) Zadana je diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Da bi postojao Eulerov multiplikator $\mu = \varphi(xy)$ pokažite da mora biti

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{Q_x{}' - P_y{}'}{xP - yQ},$$

pri čemu je desna strana funkcija od $t = xy$.

(b) Koristeći tvrdnju pod (a) odredite Eulerov multiplikator oblika $\mu = \varphi(xy)$ tako da jednadžba

$$(3x + \frac{y^2}{x})dx + (\frac{x^2}{y} + 3y)dy = 0$$

bude egzaktna, te riješite zadanu jednadžbu.

6. (5 bodova) Nađite opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y = xy'^2 - 2y'^3$.

7. (5 bodova) Riješite Cauchyjev problem $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$.

8. (5 bodova)

(a) Definirajte determinantu Wronskoga za funkcije $y_1, ..., y_n \in C^{(n-1)}[a, b]$.

(b) Ako su $y_1, ..., y_n$ rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n -tog reda, iskažite povezanost linearne nezavisnosti tog skupa funkcija i pripadne determinante Wronskoga.

(c) Nađite opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + 2y'' + 3y' + 6y = 0,$$

te pokažite da su dobivena rješenja y_1, y_2, y_3 linearno nezavisna.

MI 2013.

1. a) (2 boda) Odredite konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right).$$

b) (2 boda) Iskažite i dokažite teorem koji ste koristili u rješavanju zadatka pod a).

c) (1 boda) Navedite kontraprimjer koji pokazuje da je teorem korišten u b) dijelu zadatka implikacija, a nije ekvivalencija.

2. (4 boda) Razvijte u Taylorov red oko $c = 1$ funkciju

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2 - 2x + 26}$$

i odredite područje konvergencije tog reda.

ZI 2013.

3. (5 bodova) Odredite sve krivulje u ravnini za koje je odsječak tangente na x-osi u svakoj točki jednak odsječku normale na y-osi.

4. (4 boda) Riješite difrencijalnu jednadžbu

$$(4xy - 3)dx + (x^2 + 1)dy = 0.$$

5. (6 bodova) Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2y' + y = -\frac{1}{x^2}e^x$$

koje zadovoljava početne uvjete $y(1) = -e$ i $y'(1) = 0$.

6. a) (2 boda) Koristeći definiciju linearne nezavisnosti pokažite da su funkcije

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x, \\ y_2(x) &= (2x+3)e^x \text{ i} \\ y_3(x) &= (3x^2+x)e^x \end{aligned}$$

linearno nezavisne.

b) (3 boda) Iskažite i dokažite teorem u kojemu je dovoljni uvjet linearne nezavisnosti funkcija $y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}([a,b])$ izražen pomou determinante Wronskog $W(y_1, \dots, y_n)$.

7. a) (3 boda) Nađite područje konvergencije te ispitajte ponašanje u rubovima područja konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{(3n-2)2^n}.$$

b) (2 boda) Izračunajte sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}.$$

10. a) (3 boda) Nađite opće i singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = xy' + \frac{2}{\sqrt{y'}}.$$

b) (2 boda) Odredite ono rješenje gornje jednadžbe koje dira ovojnicu familije općeg rješenja u točki s apscisom $x_0 = 1$.

MI 2012.

1. a) (3 boda) U ovisnosti o parametru p ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

b) (2 boda) Koristeći se Taylorovim redom oko 0 funkcije

$$f(x) = \ln(1+x),$$

izračunajte sumu alternirajućeg reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

kada je $p = 1$.

2. a) (4 boda) Razvijte u MacLaurinov red potencija funkciju

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^2.$$

Uputa: Kod rješavanja koristite poznate razvoje u red nekih elementarnih funkcija.

b) (1 bod) Odredite područje konvergencije reda za danu funkciju f.

ZI 2012.

1. a) Dokažite (pomoću definicije reda) da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$$

b) Koristeći rezultat iz a) dijela odredite sumu reda potencija

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

c) Na osnovu b) dijela odredite sumu reda brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{(2n-1)3^n}.$$

4. a) Dokažite da vrijedi sljedeći nužni uvjet za egzaktnost diferencijalne jednadžbe:

"Ako je diferencijalna jednadžba

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

egzaktna, onda funkcije P i Q zadovoljavaju jednakost

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}."$$

b) Koristeći rezultate iz a) dijela pokažite da sljedeća diferencijalna jednadžba nije egzaktna,

$$xy^2(xy' + y) = 1.$$

c) Riješite diferencijalnu jednadžbu pod b).

7. Nađite krivulju koja prolazi točkom $(2, 2)$ za koju je površina trokuta određenog osi Oy, radij-vektorom dirališta tangente i tangentom konstantne veličine A.

8. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(y')^2 - y' \sin y \cos y - xy' + x \sin y \cos y = 0.$$

Uputa: Faktorizirajte jednadžbu!

9. a) Pokažite da vrijedi svojstvo aditivnosti linearne diferencijalne jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

tj. ako su y_1 i y_2 dva rješenja promatrane jednadžbe, onda je i funkcija $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ također rješenje te jednadžbe.

b) Ako je poznato da su funkcije

$$y_1(x) = e^x + x + 1 \quad y_2(x) = e^{-x} + x - 2$$

dva rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda nađite rješenje te jednadžbe čiji graf siječe os ordinata u točki $T(0, 1)$ pod kutem $\alpha = 30°$.

10. a) Koristeći se determinantom Wronskog pokažite da su rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = 0$$

linearno nezavisna.

b) Metodom varijacije konstante za linearno nezavisne funkcije dobivene u dijelu pod a) odredite opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$