1. Razvijte u red potencija funkciju

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}.$$

Koristeći dobiveni rezultat, aproksimirajući rezultat s prva dva člana dobivenog reda, izračunajte približno vrijednost

$$\sqrt[3]{9}.$$

Rješenje. Napišimo zadanu funkciju na sljedeći način:

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} x^n.$$

Sada je:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{1+8} = (1+8)^{\frac{1}{3}} = \left[8\left(1+\frac{1}{8}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

Obzirom da aproksimiramo za prva dva člana, koristimo $n = 0$ i $n = 1$:

$$\sqrt[3]{9} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\left(\frac{1}{8}\right)^n \simeq 2\left[\binom{\frac{1}{3}}{0}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^0 + \binom{\frac{1}{3}}{1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^1\right] = \frac{25}{12} \simeq 2.08.$$

2. Koristeći sumu geometrijskog reda razvijte u Maclaurinov red racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{8+2x}{4-x^2}.$$

Rješenje. Napišimo zadanu funkciju na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{8+2x}{4-x^2} = \frac{2(4+x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{2(2+2+x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{4+2(2+x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{4}{4-x^2} + \frac{2}{2-x} =$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Ovo su sada dva geometrijska reda pa slijedi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{x}{2}\right)^{n}\right].$$

Naravno, zadatak se mogao riješiti i na način da se gornji izraz rastavi na parcijalne razlomke. Rješenje je isto, samo zapisano na drugačiji način.

3. Odredite radijus konvergencije te ispitajte konvergenciju na rubovima područja konvergencije sljedećeg reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}(x-3)^n}{(n+1)^{\frac{3}{4}}}.$$

Rješenje. Iskoristimo Cauchyjev kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^{\frac{n}{2}}(x-3)^n}{(n+1)^{\frac{3}{4}}}\right|} = \sqrt{3}|x-3| < 1 \Rightarrow |x-3| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x-3 < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 3+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sada ispitajmo ponašanje u rubovima područja konvergencije.

(a) $x = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow$ Ovaj red prema Leibnizu konvergira, ali divergira apsolutno $\rightarrow$ konvergira uvjetno.

(b) $x = 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow$ Ovaj red može se usporediti s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ koji divergira.

Konačno je područje konvergencije $x \in \left[3-\frac{\sqrt{3}}{3}, 3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$.

4. Nađite područje konvergencije te ispitajte ponašanje na rubu područja za red potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{3n^3+n}} \left(x^2-1\right)^n.$$

Rješenje. Iskoristimo Cauchyjev kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{\sqrt{3n^3+n}} \left(x^2-1\right)^n\right|} = \left|x^2-1\right| < 1 \Rightarrow -1 < x^2-1 < 1.$$

$$0 < x^2 < 2 \Rightarrow x \in \left\langle -\sqrt{2}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{2}\right\rangle$$

Sada ispitajmo ponašanje u rubovima područja konvergencije.

(a) $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{\sqrt{3n^3+n}} \Rightarrow$ Red ne zadovoljava nuždan uvjet konvergencije te stoga divergira.

(b) $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{3n^3+n}} \Rightarrow$ Red ne zadovoljava nuždan uvjet konvergencije te stoga divergira.

Konačno je područje konvergencije $x \in \left\langle -\sqrt{2}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{2}\right\rangle$.

5. Odredite polumjer i područje konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Rješenje. Iz D'Alembertovog kriterija slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)\ln(n+2)}}{(-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}} \right| = |x-2| < 1 \Rightarrow R = 1.$$

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3.$$

Sada ispitajmo ponašanje u rubovima područja konvergencije.

(a) $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)\ln(n+1)} \Rightarrow$ Upotrebom integralnog kriterija zaključuje se da red divergira.

(b) $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} \Rightarrow$ Ovaj red prema Leibnizu konvergira, ali divergira apsolutno $\rightarrow$ konvergira uvjetno.

Konačno je područje konvergencije $x \in \langle 1, 3]$.

6. Izračunajte razvoj funkcije $f(x) = \operatorname{ch}(3x)$ u red potencija i odredite područje konvergencije.

Rješenje.

$$f(x) = \operatorname{ch}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Izračunajte razvoj funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ u red potencija i odredite područje konvergencije.

Rješenje. Napišimo zadanu funkciju na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1-[-(x-1)]}.$$

Ovo je geometrijski red pa slijedi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad |x-1| < 1 \Rightarrow x \in \langle 0, 2\rangle.$$

8. Odredite radijus konvergencije te ispitajte konvergenciju na rubovima područja konvergencije sljedećeg reda potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{5^n \sqrt{n}}.$$

Rješenje. Prema Cauchyjevom kriteriju slijedi:

$$\frac{|x-2|}{5} < 1 \Rightarrow |x-2| < 5 \Rightarrow R = 5.$$

$$-5 < x - 2 < 5 \Rightarrow -3 < x < 7.$$

Sada ispitajmo ponašanje u rubovima područja konvergencije.

(a) $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ Ovaj red divergira.

(b) $x = 7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ Ovaj red prema Leibnizu konvergira, ali divergira apsolutno $\rightarrow$ konvergira uvjetno.

Konačno je područje konvergencije $x \in \langle -3, 7]$.