Rješenja 1. predmeđuispita iz Mat2 . lakša verzija

1. (2 boda)

a) Provjerimo najprije apsolutnu konvergenciju:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n^3}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$$

Konvergenciju ovog reda možemo provjeriti preko D'Alembertovog kriterija:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

Red konvergira apsolutno pa konvergira i obično.

b) Ovaj red možemo usporediti sa sljedećim redom:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(e+1)^n}$$

(fun fact: neizmjerno male veličine)

Ovaj red, s kojim smo usporedili početni red, je geometrijski red, što znači da on konvergira. Također

$$\ln(1+(e+1)^{-n}) \leq \frac{1}{(e+1)^n}$$

Iz tih dviju činjenica proizlazi da početni red konvergira.
(fun fact: suma zadanog reda je 1.02, a reda s kojim smo ga usporedili je 1.36).

2. (2 boda)

a) 1. knjižica, str. 13. – Integralni kriterij

b) Funkcija $f(n) = \frac{\ln n}{n^2}$ je padajuća na intervalu $[2,\infty\rangle$. Integral

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx = \cdots = \frac{1}{2}(1+\ln 2)$$

konvergira, pa konvergira i zadani red.

3. (2 boda)

Prema nužnom kriteriju ovaj red ne konvergira ($\lim_{n\to\infty} a_n$ nije 0).

4. (2 boda)

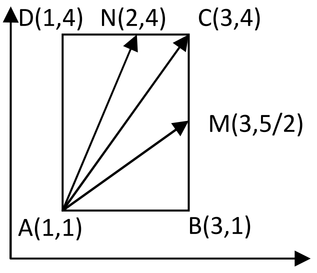
Primijeni se D'Alembertov kriterij i dobije se $|x+1| < 1$, iz čega proizlazi da je polumjer konvergencije $R = 1$.
I naravno, ispitate kovergenciju na rubovima pa je područje konvergencije $\langle -2,0\rangle$.

5. (2 boda)

$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{4}(x-x^2)}=\frac{4}{-(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})}=\frac{4}{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{16}{1-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=16\cdot\frac{1}{1-\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

$$f(x)=16\sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}4^{n+2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

6. (2 boda)



$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AN}$$

$$2\vec{\imath}+\frac{3}{2}\vec{\jmath}=\alpha(2\vec{\imath}+3\vec{\jmath})+\beta(\vec{\imath}+3\vec{\jmath})$$

$$2\alpha+\beta=2$$
$$3\alpha+3\beta=\frac{3}{2}$$

$$\alpha=\frac{3}{2},\qquad \beta=-1$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}$$

7. (2 boda)

a)

$$\left|\begin{vmatrix}5 & 2 & -3\\ t & 0 & 2\\ -6 & 3 & -3\end{vmatrix}\right|=|-3t-54|=9$$

$$t_1=-15,\;\; t_2=-21$$

b)

$$v=\frac{\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$

$$\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|\begin{vmatrix}5 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 2\\ -6 & 3 & -3\end{vmatrix}\right|=60$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left\|\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 5 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\right\| = \left|4\vec{\imath}-16j-4\vec{k}\right| = \sqrt{288}$$

$$v = \frac{60}{\sqrt{288}}$$

8. (3 boda)

Najprije nađete presjecište ravnine i pravca: $t=-1 \rightarrow A(-2,-2,0)$

Zatim nađete presjecište ravnine i novog pravca q koji prolazi točkom koja se nalazi na pravcu p, a to je točka (očitate iz jednadžbe) $T(1,0,-1)$, a čiji je vektor smjera zapravo normala ravnine, pa je jednadžba tog pravca:

$$q \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

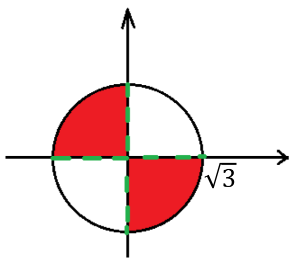
Presjecište ravnine i tog pravca je: $t=-\frac{13}{14} \rightarrow T'\left(-\frac{6}{7},-\frac{39}{14},-\frac{1}{14}\right)$.

Pa je ortogonalna projekcija pravca p, pravac koji prolazi točkama A i T':

$$\frac{x+2}{\frac{8}{7}} = \frac{y+2}{-\frac{11}{14}} = \frac{z}{-\frac{1}{14}}$$

9. (3 boda)

a)



Koordinatne osi x, y nisu uključene.

b) Ovo je zapravo jednadžba „normalnog“ stošca oko y osi, pomaknutog za 3 udesno.

$$(y-3)^2 = x^2 + z^2$$