

# ANALITIČKA GEOMETRIJA – formule

## Vektori

Skalarni produkt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Vektorski produkt:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  je okomit na vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , orijentiran tako da  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$  bude desna baza.

Mješoviti produkt:  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

U ortonormiranoj bazi (desnoj):      Za  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  i  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

## Analitička geometrija ravnine i prostora

Udaljenost dvije točke:  $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$

u ravnini:  $T = (x, y)$ ,  $\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,  $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

u prostoru:  $T = (x, y, z)$ ,  $\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Pravac određen točkom  $T_0$  i vektorom smjera  $\vec{s}$ :  $r = r_0 + \lambda \cdot \vec{s}$ .

u ravnini,  $\vec{s} = (p, q)$ :  $x = x_0 + \lambda p$ ,  $y = y_0 + \lambda q$ .

u prostoru,  $\vec{s} = (p, q, r)$ :  $x = x_0 + \lambda p$ ,  $y = y_0 + \lambda q$ ,  $z = z_0 + \lambda r$ .

kanonski oblik:  $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$ .

Jednadžba pravca (u ravnini) i ravnine (u prostoru):

opći oblik	$Ax + By + C = 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$
vektor normale	$\vec{n} = (A, B)$	$\vec{n} = (A, B, C)$
udaljenost točke od	$\frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$\frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
segmentni oblik	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
normalni oblik	$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$	$\vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 = \delta$
udaljenost točke od	$ x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p $	$ \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0 - \delta $

Pravac u ravnini – eksplicitni oblik  $y = kx + l$ ,  $k = \operatorname{tg} \varphi$

pravac određen točkom i koeficijentom smjera:  $y - y_0 = k(x - x_0)$

### Pravac određen dvjema točkama:

u ravnini:  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

u prostoru:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

### Jednadžba ravnine ...

... koja prolazi točkom  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  i okomita je na  $\vec{n} = (A, B, C)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

... koja prolazi točkom  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  i razapeta je vektorima  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  i  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

... koja prolazi kroz tri točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$  i  $T_3 = (x_3, y_3, z_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

### Pravac u prostoru kao presjek dvije ravnine

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

### Udaljenost

točke  $T_0$  od pravca koji prolazi točkom  $T_1$  s vektorom smjera  $\vec{s}$ :  $\frac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$

dva pravca određena točkama  $T_1, T_2$  i vektorima smjera  $\vec{s}_1$  i  $\vec{s}_2$ :  $\frac{|((\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$

### Kut

između dva pravca s vektorima smjerova  $a = (a_1, a_2, a_3)$  i  $b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

između dva pravca u eksplicitnom obliku:  $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$

između pravca (koef. smjera  $\vec{s} = (p, q, r)$ ) i ravnine (vektor normale  $\vec{n} = (A, B, C)$ ):

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{|pA + qB + rC|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

između dvije ravnine s vektorima normale  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  i  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$