Karakteristične greške u prve dvije školske zadaće

Priredili: Zvonimir Sviben, Rozarija Jakšić, Maja Resman i Kristijan-Kiki Tabak

Odabrao: Mervan Pašić

Pogreška 1.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ispravak 1.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \neq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Pogreška 2.

$$e^{\frac{1}{n}} = e^{-n}$$

Ispravak 2.

$$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e} \neq \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

Pogreška 3.

$$\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2n} + e^{-2n}}{4}$$

Ispravak 3.

$$\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2n} + 2 + e^{-2n}}{4}$$

Pogreška 4.

$$\sqrt[n]{n^3+4^n} = \sqrt[n]{n^3} + 4$$

Ispravak 4.

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{n^3+4^n} \le \sqrt[n]{4^n+4^n} = 4\sqrt[n]{2}$$

Pogreška 5.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(q^2)^n = \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q}, \quad |q|<1$$

Ispravak 5.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(q^2)^n = \frac{1}{1-q^2}, \quad |q|<1$$

Pogreška 6. Ako za redove $\sum a_n$ i $\sum b_n$ s pozitivnim članovima vri i $a_n \le b_n$ za sve n osim konačno mnogo i red $\sum b_n$ divergira, onda i $\sum a_n$ divergira.
Ispravak 6. Knjižica 1, str. 12, teorem 4. Obrati u tvrdnjama (1) i (2) tog teorema (kao što je ovaj gore) ne vrijede!

Pogreška 7. $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\right) \Longrightarrow$ red $\sum a_n$ konvergira.
Ispravak 7. To nije istina i red koji to opovrgava jest harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$. Uvjet $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ je nužan za konvergenciju reda, no ne i dovoljan.

Pogreška 8. Ako vrijedi $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, onda redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ oba konvergiraju ili oba divergiraju, jer je $\infty \neq 0$.
Ispravak 8. U "graničnom obliku" poredbenog kriterija uvjet jest taj da limes $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ postoji i da je realan broj (ne ∞!) različit od 0. Navodim primjer koji ilustrira zašto limes L mora biti konačan. Ako stavimo $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = \frac{1}{n^2}$, onda je $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, no nije istina da redovi $\sum \frac{1}{n}$ i $\sum \frac{1}{n^2}$ oba konvergiraju ili oba divergiraju. Isti primjer, uz zamjenu uloga a_n i b_n, pokazuje i zašto limes mora biti $\neq 0$.

Pogreška 9.

$$\frac{1}{\sqrt{n^3ch^3(n)}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Ispravak 9. To nije istina jer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3ch^3(n)}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 0.$$

Medjutim, iz $\frac{1}{\sqrt{n^3ch^3(n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, i to čak za svaki n zbog $ch(x) \geq 1$, red $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3ch^3(n)}}$ konvergira jer konvergira red $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Pogreška 10. "...red divergira po Leibnitzovom kriteriju ..."
Ispravak 10. Leibnitzov kriterij daje dovoljan uvjet za konvergenciju reda. Drugim riječima, ako red $\sum(-1)^{n+1}a_n$ zadovoljava uvjete $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ te (1) i (2) iz teorema 14, knjižica 1, onda red konvergira. To ne znači da svaki red koji konvergira mora zadovoljavati sve navedene uvjete. Leibnitzov kriterij samo kaže da oni redovi koji ovo zadovoljavaju, konvergiraju.

Pogreška 11. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sin(\frac{1}{n}) > \sin(\frac{1}{n+1})$", bez obrazloženja zašto vrijedi implikacija.
Ispravak 11. Ovakva implikacija NE VRIJEDI OPĆENITO, nego zato što je funkcija kojom djelujemo RASTUĆA U NEKOJ OKOLINI 0 (ovdje: $\sin(x)$ rastuća na $(0, \pi/2)$), a za dovoljno velik n (u ovom primjeru čak za svaki n) $\frac{1}{n}$ leži u toj okolini. Ovo je POTREBNO KOMENTIRATI prilikom rješavanja zadataka!

Pogreška 12. "...budući harmonijski red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira ..."
Ispravak 12. Red $\sum \frac{1}{n}$ zovemo harmonijski red i jedino njega tako zovemo. Nadalje, harmonijski red ne konvergira. Ovdje je greška u nazivlju, ali kao posljedicu može imati rečenice tipa "harmonijski red konvergira" i slično.

Pogreška 13. 'Površina paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$
Ispravak 13. Površina je $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$.

Pogreška 14. Norma vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$
Ispravak 14. Neka je α kut izmedju vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Tada je $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin \alpha$.

Pogreška 15. Zadana su dva okomita vektora $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ i treba naći vektor $\vec{c} \in \mathcal{V}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ okomit i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$. Vektor $\vec{c}$ odredjujemo iz jednadžbe $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$.
Ispravak 15. Jednadžba $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ ne garantira okomitost vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$, nego samo okomitost vektora $\vec{c}$ i $\vec{b}$ što je samo pola uvjeta koji se traži. Vektor $\vec{c}$ mora biti kolinearan s $\vec{a} \times \vec{b}$, stoga možemo, na primjer, uzeti da $\vec{c}$ bude baš jednak produktu $\vec{a} \times \vec{b}$.

Pogreška 16. Zadana su dva okomita vektora $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ i treba naći vektor $\vec{c} \in \mathcal{V}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ okomit i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$. Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ moraju biti komplanarni i $\vec{c}$ odredjujemo iz jednadžbe $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.
Ispravak 16. Tri medjusobno okomita ne-nul vektora u $\mathcal{V}^3$ nikada nisu komplanarni. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ različiti od nul-vektora i okomiti te ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni, onda se $\vec{c}$ nalazi u ravnini odredjenoj s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, stoga ne može biti okomit i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$. Ono što je ispravno zahtijevati jest da vektor $\vec{c}$ bude kolinearan s vektorom $\vec{a} \times \vec{b}$. Budući su u zadatku zadani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili različiti od $\vec{0}$ i okomiti, njihov vektorski produkt je takoer različit od $\vec{0}$ pa se, na primjer, moglo uzeti da je $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ili općenito $\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pogreška 17. $P_{\vec{a},\vec{b}} = \vec{a} \times \vec{b}$, gdje je $P_{\vec{a},\vec{b}}$ površina pravokutnika odreenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Ispravak 17. Površina pravokutnika je realan broj, tj. skalar, dok je vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ponovo vektor, a ta dva matematička objekta nikako ne mogu biti jednaki, budući nisu ni usporedivi. Ono što zaista vrijedi je formula

$$P_{\vec{a},\vec{b}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right).$$

Pogreška 18. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su okomiti ako i samo ako vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
Ispravak 18. Ponovo, vektorski produkt vektora je vektor, stoga nema smisla govoriti da je vektor jednak realnom broju 0. Na dalje, nije istina da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti ako i samo ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Za svaki vektor vrijedi $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, ali nije svaki vektor okomit sam na sebe. Ispravan uvjet okomitosti je sljedeći

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Dakle, za ispitivanje okomitosti dvaju vektora dobro je koristiti skalarni produkt, ne vektorski.

Pogreška 19. $|\vec{a}-\vec{b}| = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$.
Ispravak 19. $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$.
Prema tome,

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2},$$

i slično

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2}.$$