1) REDOVI

Suma geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a_1}{1-q}, \qquad |q| < 1$$

NUK (nužan uvjet konvergencije): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dirichletov red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}, \quad \begin{cases} r > 1\ konvergira \\ r \leq 1\ divergira \end{cases}$$

Poredbeni kriterij: $a_n \leq b_n$

1) ako red b_n konvergira, tad konvergira i red a_n

2) ako red a_n divergira, tad divergira i red b_n

Poredbeni kriterij, granični oblik: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\,, \quad L \neq 0$

oba divergiraju ili oba konvergiraju

Integralni kriterij: $\int_N^{\infty} f(t)dt$

neka je $a_n = f(n)$ pri čemu je funkcija f pozitivna, neprekinuta i padajuća na intervalu $\langle N, +\infty\rangle$ i ako integral reda konvergira onda i red a_n konvergira, vrijedi obrat

D'Alembertov kriterij: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

ako je $q < 1$ onda red konvergira

ako je $q > 1$ onda red divergira

ako je $q = 1$ onda nema odluke i mora se koristiti <u>drugi kriterij</u>

Cauchyjev kriterij: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

ako je $q < 1$ onda red konvergira

ako je $q > 1$ onda red divergira

ako je $q = 1$ onda nema odluke i mora se koristiti <u>drugi kriterij</u>

Apsolutna konvergencija: apsolutno konvergentan red je konvergentan, obrat ne vrijedi.

Leibnizov kriterij: ako za red s alterniranim članovima $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ vrijede sljedeći uvjeti:

1) niz a_n je padajući

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tada je on konvergentan.

Umnožak redova: Množenjem reda $\sum a_n$ i reda $\sum b_n$ je red $\sum c_n$ kojem su elementi:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

2) REDOVI POTENCIJA, TAYLOROV RED

Područje konvergencije reda potencija:

1. NAČIN: Odredimo polumjer konvergencije R i za $|x-a|<R$ red konvergira.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

2. NAČIN (Sigurniji): Računajući konvergenciju samo pozitivnih članova reda pomoću D'Alembertovim ili Cauchyevim kriterijem, dobivamo izraz (u kojem se nalazi apsolutna vrijednost u kojoj je X) koji mora biti manji od 1 da konvergira i riješimo nejednažbu. Za kraj rješenja koja smo dobili uvrstimo u početni red i ispitamo konvergenciju (služimo se bilo kojim kriterijem) na rubnim točkama intervala $x \epsilon \langle x_1, x_2\rangle$ (ako red u nekoj od točki, x_1 ili x_2, konvergira onda idu zatvoreni intervali odnosno uglate zagrade).

Maclaurinov red je isto kao i Taylorov red ali oko točke nula!

Sinus hiperbolički odnosno sinus dobijemo integralom i/ili derivacijom kosinusa hiperboličkog odnosno kosinusa.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$sh\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$ch\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$arctg\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots$$

$$\boldsymbol{Binomni\ red}: \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad |x|<1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)*\ldots*(\alpha-n+1)}{n!}$$

3) VEKTORI

Vektor je dužina koja ima svoj smjer, orijentaciju i duljinu!

Svojstva	Skalarni umnožak $\vec{a} * \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert * \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$	Vektorski umnožak $\vec{a}\, x\, \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert * \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
Dobijemo	konstantu tj. skalarnu veličinu odnosno duljinu dijagonale paralelograma	$\vec{a}\, x\, \vec{b}$ vektor koji je okomit na vektor $\vec{a}$ i $\vec{b}$
Računanje $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$ $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$	$\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Homogenost	$\lambda(\vec{a} * \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\lambda\vec{b})$	$(\lambda\vec{a})x\, \vec{b} = \lambda(\vec{a}\, x\, \vec{b})$
Komutativnost	$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$	/
Antikomutativnost	/	$\vec{a}\, x\, \vec{b} = -\vec{b}\, x\, \vec{a}$
Distributivnost	$(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}$	$(\vec{a} + \vec{b})\, x\, \vec{c} = \vec{a}\, x\, \vec{c} + \vec{b}\, x\, \vec{c}$

Mješoviti umnožak: $$(\vec{a}\, x\, \vec{b}) * \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dvostruki umnožak: $$(\vec{a}\, x\, \vec{b})\, x\, \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c}) * \vec{b} - (\vec{b} * \vec{c}) * \vec{a}$$

Projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$: $$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$$

Jedinični vektor (smjer/duljina): $$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$$

Kut između vektora: $$\cos\varphi = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert} \quad \text{ili} \quad \sin\varphi = \frac{\vec{a}\, x\, \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert}$$

Duljina vektora: $$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Izrazi koji vrijede kod vektora: $$\lvert\vec{a}\rvert^2 = \vec{a} * \vec{a} \qquad \lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$$

4) PRAVAC I RAVNINA

Jednadžba ravnine:

1) $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \qquad T(x_1,y_1,z_1) \quad \vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$

2) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, ako su zadane 3 točke

Udaljenost točke od ravnine: $T_1(x_1,y_1,z_1) \quad \pi \ldots Ax+By+Cz+D=0$

$$d(T_1,\pi)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Kut između ravnina: $\pi_1 \ldots A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad \pi_2 \ldots A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$cos\,\varphi=\frac{|\vec{n_1}*\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|*|\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Jednadžba pravca: pravac je određen točkom $T_1(x_1,y_1,z_1)$ i vektorom smjera $\vec{c}\ldots l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}=0,$

ili sa 2 točke $T_1(x_1,y_1,z_1)$ i $T_2(x_2,y_2,z_2)$

1) parametarska jednadžba pravca:

$$\begin{cases} x=x_1+\lambda l \\ y=y_1+\lambda m \\ z=z_1+\lambda n \end{cases}$$

2) kanonska jednadžba pravca:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

3) kroz 2 točke:

$$\begin{cases} x=x_1+\lambda(x_2-x_1) \\ y=y_1+\lambda(y_2-y_1) \\ z=z_1+\lambda(z_2-z_1) \end{cases}$$

Udaljenost dvaju pravaca: kada imamo zadana 2 pravca

$$d=\frac{|\overrightarrow{T_1T_2}*(\vec{c_1}\,x\,\vec{c_2})|}{|\vec{c_1}\,x\,\vec{c_2}|}$$

Kut između pravca i ravnine: kada imamo zadanu ravninu i pravac

$$\sin\Psi=\cos(90^o-\Psi)=\frac{|\vec{c}*\vec{n}|}{|\vec{c}|*|\vec{n}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

5) FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

Valjkaste (cilindrične) plohe	Valjkaste plohe s jednadžbom baze $F(x,y)=0$ u XOY ravnini i izvodnicama (pravcima kroz bazu) paralelnim s osi OZ imaju jednadžbu $F(x,y)=0$. Karakteristično je da u njihovoj jednadžbi nema varijable z.
Kružni valjak	$x^2+y^2=r^2$
Eliptički valjak	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Stožaste plohe	kroz krivulju $\mathcal{C}$ s vrhom V(0, 0, 0). T(x, y, z) leži na izvodnici iz vrha V, a točka $T_0(x_0,y_0,c)$ je na krivulji. G(x, y) = 0 i z = c, c ϵ **R.** Vrijedi: $\frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0}=\frac{z-0}{c-0}$, pa je $x_0=c\frac{x}{z}$, $y_0=c\frac{y}{z}$ Jednadžba glasi: $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$
Kružni stožac	$z^2=a^2(x^2+y^2)$
Eliptički stožac	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$
Rotacijske plohe	rotiramo oko osi OX graf neprekinute funkcije $y=f(x)\to F(y^2+z^2,x)=0$ rotiramo oko osi $OZ\to F(x^2+y^2,z)=0$ rotiramo oko osi $OY\to F(z^2+x^2,y)=0$
Sfera	$x^2+y^2+z^2=r^2$
Rotacijski paraboloid	$z=x^2+y^2$
Eliptično – rotacijske plohe	eliptično rotiraju graf $y=f(x)$ oko OX, jednadžba plohe je $F\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},x\right)=0$ rotiramo oko $OZ\to F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},z\right)=0$ rotiramo oko $OY\to F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2},y\right)=0$
Trostrani elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Jednoplošni eliptički hiperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, poseban slučaj je kad je $a=b$ onda je to jednoplošni rotacijski hiperboloid
Dvoplošni eliptički hiperboloid	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, poseban slučaj je kad je $a=b$ onda je to dvoplošni rotacijski hiperboloid
Eliptički paraboloid	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
Hiperbolički paraboloid (sedlasta ploha)	$z=x^2-y^2$, općenitije $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

Funkcija	Domena
olinomi, sin, cos, arctg, arcctg, sh, ch, th, arsh, e^x, $\sqrt[n]{x}$ n=neparni broj, itd	**R**
tg x	$D_f=R\backslash\{x_0\},\quad x_0=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\epsilon Z$
ctg x	$D_f=R\backslash\{x_0\},\quad x_0=k\pi,\quad k\epsilon Z$
arcsin x, arccos x	$D_f=[-1,1]$
cth x	$D_f=R\backslash\{0\}$
arch x	$D_f=\langle 1,+\infty >\rangle$
arctg x	$D_f=\langle -1,1\rangle$

(6 − 7) DIFERENCIJALNI RAČUN, FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

Limes funkcija: u nekim zadacima treba varijable pretvoriti u polarne koordinate ($x = r cos\varphi, y = r sin\,\varphi$) i kada dobijemo limes ovisan o nekoj varijabli tad limesa nema, a ako dobijemo konačan broj, onda je taj broj limes

Parcijalne derivacije: $z = f(x, y)$ $\quad T(x_0, y_0)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = f_x'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Jednadžba tangencijalne ravnine i normale na plohu:

1) eksplicitno zadana funkcija $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\pi \ldots z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 * (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 * (y - y_0)$$

$$\vec{n} \ldots \frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{-1}$$

2) implicitno zadana funkcija $f(x, y, z) = 0$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\pi \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 * (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 * (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 * (z - z_0) = 0$$

$$\vec{n} \ldots \frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}$$

Gradijent:

$$\nabla f = grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Prvi diferencijal: $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Približna vrijednost: $T(x_0, y_0) \rightarrow$ to je proizvoljna točka

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 * (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 * (y - y_0)$$

Schwarzov teorem:

$$f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0)$$

$$z_{xx}'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad z_{xy}'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad z_{xyy}''' = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

Derivacija složene funkcije: $z = f(x, y) \qquad x = \varphi(t) \qquad y = \Psi(t)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = f_x'(x_0, y_0) * \varphi'(t_0) + f_y'(x_0, y_0) * \Psi'(t_0) \qquad ili$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} * \frac{dy}{dt}$$

Parcijalne derivacije složene funkcije: $z = f(x, y) \qquad x = \varphi(t, r) \qquad y = \Psi(t, r)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial r}$$

Jednadžba tangente na krivulju: $T_0(x_0, y_0, z_0) \in C \qquad t = t_0$

$$t \ldots \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

Deriviranje integrala ovisnog o parametru:

$$I(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx \Big/ \frac{d}{d\alpha}$$

$$I'(\alpha) = f[\psi(\alpha), \alpha] * \psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha), \alpha] * \varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

Poseban slučaj kada granice integracije nisu ovisne o parametru:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \Big/ \frac{d}{d\alpha}$$

$$I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

8) PRIMJENE DIFFERENCIJALNOG RAČUNA

Usmjerena derivacija: zadana je funkcija $z = f(x,y)$, točka $T(x_0, y_0)$ i smjer $\vec{h} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$

$$usmjerena\ derivacija = \nabla f(x_0, y_0) * \vec{h}$$

$$\nabla f(x_0, y_0) * \vec{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_T * \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_T * \beta$$

Nabliranje (svojstva):

$$\nabla(\mathrm{fg}) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2}$$

Implicitno zadane funkcije i njihove derivacije:

1) ako funkcija ovisi o jednoj varijabli: $y = y(x) \qquad f(x,y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

2) ako funkcija ovisi o više varijabli (u ovom slučaju o dvije): $z = z(x,y) \qquad f(x,y,z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Diferencijali funkcije $f(x,y)$:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3$$

Taylorov polinom: za zadanu funkciju $f(x,y)$ računamo derivacije oko točke $T(x_0, y_0)$ dok ne dođe derivacija do nule (ili do zadanog stupnja koji piše u zadatku) i onda zapisujemo polinom u obliku

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} d^n(T_0)$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + [f_x'(x - x_0) + f_y'(y - y_0)] + \frac{1}{2}[f_{xx}''(x - x_0)^2(y - y_0) + 2f_{xy}''(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}''(y - y_0)^2] + \cdots$$

Definitivnost kvadratne forme: iz zadane funkcije $z = f(x,y)$, izračunamo prvi diferencijal i odredimo varijable odnosno sve točke, zatim odredimo drugi diferencijal i uvrstimo točku i dobijemo vrijednosti $f_{xx}'', f_{xy}''\ i\ f_{yy}''$ (radi jednostavnosti odsad koristimo $a, d\ i\ b$) i uvrstimo vrijednosti u izraz

$$d^2 z = a * (dx)^2 + d * (dxdy) + b * (dy)^2$$

1) ako je $a > 0,\ ac - b^2 > 0$ kvadratna forma je <u>pozitivno definitna</u>

2) ako je $a < 0,\ ac - b^2 > 0$ kvadratna forma je <u>negativno definitna</u>

3) ako je $ac - b^2 < 0$ kvadratna forma je <u>indefinitna</u>

9) EKSTREMI FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI

Lokalni ekstremi:

1) $z = f(x,y)$ $d^2z = a*(dx)^2 + d*(dxdy) + b*(dy)^2$

$M = \begin{bmatrix} a & d \\ d & b \end{bmatrix}$ ako je $det(M) > 0$ i ako je $a > 0$ onda je zadana točka LOKALNI MINIMUM funkcije

ako je $det(M) > 0$ i ako je $a < 0$ onda je zadana točka LOKALNI MAKSIMUM funkcije

ako je $det(M) < 0$ onda je zadana točka stacionarna točka, nije ekstrem

2) $u = f(x,y,z)$ $d^2u = a*(dx)^2 + b*(dy)^2 + c*(dz)^2 + d*(dxdy) + e*(dxdz) + f*(dydz)$

$V = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ ako je $det(M) > 0, a > 0$ i $det(V) > 0$ onda je točka LOK. MINIMUM funkcije

ako je $det(M) > 0, a < 0$ i $det(V) < 0$ onda je točka LOK. MIKSIMUM funkcije

ako je $det(M) < 0$ onda je zadana točka STACIONARNA TOČKA

Pravac regresije ili pravac najmanjih kvadrata: $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$

$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min$ koliko ima zadanih točaka, toliko ima suma

Uvjetni ekstremi, Langrangeova funkcija: $z = f(x,y)$ uvjet: $\varphi(x,y) = 0$

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$ dalje računamo normalno ekstreme

(10 – 11) POJAM DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Jednadžbe sa separiranim varijablama:

$f(y)dy = g(x)dx$, rješava se integriranjem obiju strana, svaki za sebe

Homogene jednadžbe:

$z = \frac{y}{x}$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad y' = z'x + z$, na kraju vratimo i ako je moguće izrazimo y

Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda (varijacijom konstanti): $y' + p(x)y = q(x)$

1) $y' + p(x)y = 0$ dobijemo homogeno rješenje $y_h = Cf(x)$

2) $C = C(x)$ →vratimo to u početnu jednadžbu, $C(x)$ se <u>MORA</u> pokratiti i integriranjem $C'(x)$ dobijemo $C(x)$ i vratimo u homogeno rješenje, te dobijemo ukupno rješenje $y = C(x)f(x)$

Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda (pogađanjem): $y' + p(x)y = q(x)$

1) $y' + p(x)y = 0$ dobijemo homogeno rješenje $\boldsymbol{y_h}$

2) pokušamo pogoditi konstantu ili funkciju, za koju bi jednadžba bila zadovoljena i to nam spada pod partikularno rješenje $\boldsymbol{y_p}$

3) $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$ → UKUPNO RJEŠENJE

Bernoulijeva jednadžba: $y' + p(x)y = q(x)y^n$

uvodimo zamjenu $z = y^{1-n}$ pa rješavamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

Egzaktna diferencijalna jednadžba: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

1) ako je $P'_y = Q'_x$

Prva metoda: odaberemo proizvoljnu točku $T_0(x_0, y_0)$ iz domene funkcije, nađemo funkciju $u(x,y)$ i izjednačimo je sa nulom

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \qquad \text{ili} \qquad u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

Druga metoda: nađemo funkciju $u(x,y)$ na 2 načina, rezultate spojimo i izjednačimo s nulom, ali tako da izbacimo one članove koji se višestruko ponavljaju

$$\left.\begin{matrix} u(x,y) = \int P(x,y)dx \\ u(x,y) = \int Q(x,y)dy \end{matrix}\right\} + \qquad u(x,y) = 0$$

2) ako je $P'_y \neq Q'_x$, onda tražimo Eurelov multiplikator μ s kojim ćemo pomnožiti početnu jednadžbu i dobijemo egzaktnu

ako funkcija $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ ovisi samo o x onda računamo po formuli $\quad ln\,\mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)dx$

ako funkcija $\frac{P'_y - Q'_x}{P}$ ovisi samo o y onda računamo po formuli $\quad ln\,\mu(y) = -\int \frac{1}{P}(P'_y - Q'_x)dy$

ako saznamo kojeg je oblika multiplikator i da ovisi o $\underline{\boldsymbol{x}}$ i $\underline{\boldsymbol{y}}$ onda računamo po formuli $\quad \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$

Funkcija koja ovisi o x, y i y': koristimo zamjenje $y' = p$ i $p = p(x)$

ako je s lijeve strane jednakosti x a s desne y i y' dobije se $dy = p\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp\right)$

ako je s lijeve strane jednakosti y a s desne x i y' onda deriviramo po x-u i dalje ide lako

Langrangeova jednadžba: $y = f(y')x + g(y')$

koristimo zamjenje $y' = p$ i $p = p(x)$

Clairautova jednadžba: $y = y'x + g(y')$

koristimo zamjenje $y' = p$ i $p = p(x)$

(12−13) DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE VIŠEG REDA

Jednostavna jednadžba:

ako je s lijeve strane n-ta derivacija od y, a s desne strane $f(x)$ onda se treba samo integrirati n puta

Jednadžba tipa $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$: zamjena $y^{(k)} = p, p = p(x)$, gdje je $y^{(k)}$ najmanja derivacija

Jednadžba tipa $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$: kada su derivacije od y u umnožku s drugima

koristimo zamjene $y' = p, y'' = pp', y''' = (p'^2 + pp'')p' \ldots$, gdje je $p = p(y)$

Homogena jednadžba tipa $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$: kada je x u umnošku sa y

koristimo zamjene $y = e^{\int z(x)dx}, y' = zy, y'' = z'y + z^2y \ldots$

Linearna diferencijalna jednadnadžba drugog reda: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

jedno rješenje je y_1 (ili ga znamo, ili ga treba pogoditi), a drugo nađemo preko formule

$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$, s tim da y_1 i y_2 moraju biti linearno nezavisni

ukupno rješenje je $y = C_1y_1 + C_2y_2$

LDJDR s konstantnim koeficijentima: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$

riješimo jednadžbu $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0$ ako su rješenja:

1) realna i različita, onda je opće rješenje jednako $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \cdots$

2) realna i ista, onda je opće rješenje jednako $y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_2x} + C_3x^2e^{r_3x} + \cdots$

3) konjugirano kompleksna, tj. $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, onda je opće rješenje jednako

$$y = C_1e^{\alpha x}cos\beta x + C_2e^{\alpha x}sin\beta x$$

LDJDR s konstantnim koeficijentima (postoji funkcija smetnje):

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = funkcija\ smetnje$$

1. NAČIN: odredimo homogeno rješenje y_h iz jednadžbe $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0$

pa pogađamo partikularno rješenje y_p i ukupno rješenje je $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$

Funkcija smetnje	Partikuralno rješenje y_h
A (konstanta)	K
$Ae^{\varphi x}, \varphi \neq r_i\ (i = 1,2, \ldots, n)$	$Ke^{\varphi x}$
$Ae^{\varphi x}, \varphi = r_i$	$Kx^ke^{\varphi x}$, k – koliko puta je φ jednak r_i
Polinom Ax^m	$K_0 + K_1x + K_2x^2 + \cdots + K_mx^m$
$e^{\varphi x}x^m$	$e^{\varphi x}x^k(K_0 + K_1x + \cdots + K_mx^m)$, k – koliko puta je φ jednak r_i
$Acos(\omega_0x)$ ili $Asin(\omega_0x)$	$K_1cos(\omega_0x) + K_2sin(\omega_0x)$
$Acos(\omega_0x + \theta)$	$Kcos(\omega_0x + \theta)$

2. NAČIN: odredimo homogeno rješenje iz jednadžbe $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$

preko sustava varijacija (uvijek se nađe rješenje, što kod pogađanja nije takav slučaj)

$$C_1'(x)y_1(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = funkcija\ smetnje$$

Wronskijeva nezavisnost:

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

po Wronskiju, ako je $\det(W) \neq 0$ tada su funkcije $y_1, \dots, y_n$ LINEARNO NEZAVISNE

Linearna nezavisnost: uz svaku funkciju dodamo koeficijent i ako nakon računanja ispadnu da su svi koeficijenti 0 onda su funkcije $y_1, \dots, y_n$ linearno nezavisne, odnosno

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 0$$

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$