Međuispit iz Matematike 2

27. travnja 2015.

1. [**5 bodova**]

   (a) (2b) Neka je V volumen paralelepipeda razapetog s 3 nekomplanarna vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$. Pokažite da je $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

   (b) (1b) Dokažite: Ako je $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = 0$, onda su vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ linearno zavisni.

   (c) (2b) Neka su $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ i $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$. Izračunajte volumen paralelepipeda razapetog s $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

2. [**5 bodova**]

   (a) (2b) Dokažite da je jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T(x_0, y_0, z_0)$ a paralelna je s vektorima $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ i $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ dana s

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

   (b) (3b) Odredite jednadžbu ravnine obzirom na koju su točke $A(1, 2, 7)$ i $B(3, -1, 0)$ zrcalno simetrične.

3. [**5 bodova**] Zadana je vektorska funkcija $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, gdje su $x(t), y(t)$ i $z(t)$ diferencijabilne funkcije u točki $t = t_0$. Dokažite da vrijedi

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}.$$

   Potom izračunajte $\mathbf{r}'(t_0)$ i $\|\mathbf{r}'(t_0)\|$ za $x(t) = \cos t$, $y(t) = t^2 \sin t$ i $z(t) = -\cos^2 t$ u $t_0 = \pi/2$.

4. [**4 boda**] Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

   (a) (2b) Pokažite da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

   (b) (1b) Je li f neprekidna u točki $(0, 0)$? Obrazložite.

   (c) (1b) Je li f diferencijabilna u točki $(0, 0)$? Obrazložite.

Okrenite!

5. [5 bodova]

(a) (2b) Neka je $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ te $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ realna funkcija više realnih varijabli. Pretpostavimo da je $P_0 \in \mathcal{D}_f$ i $\nabla f(P_0) \neq 0$. Dokažite da tada f najbrže raste u smjeru vektora $\nabla f(P_0)$.

(b) (3b) Nađite jedinični vektor u smjeru kojeg funkcija $f(x,y) = x^3y^3 - xy$ najbrže raste u točki $P(1,-1)$ te odredite vrijednost usmjerene derivacije od f u smjeru tog vektora.

6. [5 bodova]

(a) (2b) Neka je funkcija $z = z(x,y)$ zadana implicitno jednadžbom $F(x,y,z(x,y)) = 0$. Izvedite da je vektor normale tangencijalne ravnine na tu plohu u točki T_0 oblika

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial x}(T_0)\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(T_0)\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(T_0)\mathbf{k}.$$

(b) (3b) Dokažite da za sve tangencijalne ravnine plohe $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$ vrijedi da je suma kvadrata njihovih odsječaka na koordinatnim osima jednaka 1.

7. [6 bodova] Pronađite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = xy(2x + 4y + 1)$.

8. [5 bodova]

(a) (1b) Neka je $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i neka je s $\varphi(x,y,z) = 0$ zadana ploha. Dokažite da za Lagrangeovu funkciju $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$ vrijedi

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0.$$

(b) (4b) Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = \ln(x+y)$ uz uvjet $x^2+2y^2 = 4$.

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire, pribor za pisanje i službene formule. Svaki zadatak rješavajte na zasebnom listu papira te ih prilikom predaje poredajte uzlazno po redu.