KONVERGENCIJA REDOVA

1. Nužan uvjet konvergencije

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Dokaz:

$a_n = S_n - S_{n-1}$, Ako je red konvergentan onda je i (S_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = \underline{\underline{0}}, \text{ Q.E.D.}$$

2. Poredbeni kriterij

Postoji prirodni broj N takav da vrijedi:

$$\boxed{a_n \leq b_n \quad n > N}$$

1) Ako $\sum b_n$ konvergira, tada i $\sum a_n$ konvergira

2) Ako $\sum a_n$ divergira, tada i $\sum b_n$ divergira.

Dokaz:

Pretpostavimo: $a_n \leq b_n$, $\forall n$

1) Ako je $\sum b_n$ konvergentan onda je i omeđen, onda: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq M$, za pozitivan M. Za niz parcijalnih suma a_n vrijedi

$S_n = a_1 + \dots a_n \leq b_1 + \dots b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq M$, Q.E.D.

2) Analogno (1), Ako red $\sum a_n$ divergira, onda mu niz parcijalnih suma nije ograničen, pa tim nije ograničen ni niz parcijalnih suma $\sum b_n$.

3 Poredbeni kriterij, granični oblik

Neka su a_n i b_n nizovi s pozitivnim članovima takvi da postoji: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L}$, $L \neq 0$,

tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju

Dokaz:

Zbog konvergencije, za dovoljno velike n vrijedi:

$$\boxed{\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L}$$

Zato $a_n \leq (2L) \cdot b_n$, za dovoljno velike n.
Stoga iz konvergencije reda b_n slijedi konvergencija reda $\sum a_n$. Također iz divergencije $\sum a_n$ slijedi divergencija $\sum b_n$.

Q.E.D

Analogno za $\frac{L}{2} \cdot b_n \leq a_n$

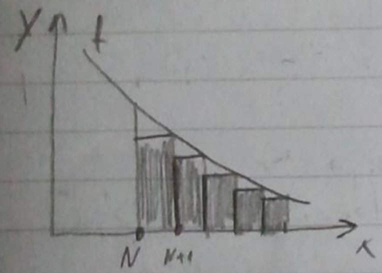
4 Integralni kriterij

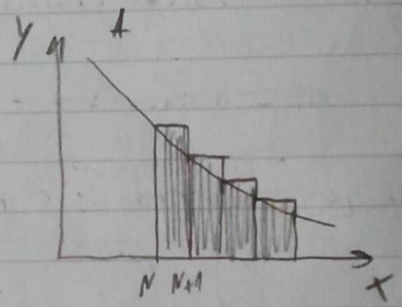
Neka je $a_n = f(n)$

f = pozitivna, neprekinuta, padajuća na $\langle N, \infty \rangle$ funkc.

tada: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ ili oba konver. ili divergi.

Dokaz:





$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$, $n > N$ vrijedi:

$S_n = S_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots a_n =$

$= S_N + f(N+1) + f(N+2) + \dots + f(n) =$

$= S_N +$ zbroj ploština pravokutnika

$\leq S_N + \int_N^{\infty} f(t)\,dt$

Ako nepravi integral konvergira, tada je niz S_n omeđen odozgo, pa je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.

Pretpostavka:

Red je konvergentan i suma $= S$.

$\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ = ploština ispod krivulje

$\leq$ ploštini iznad krivulje =

$= a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$

$= S - S_{N-1} < \infty$

5. D'Alembertov kriterij

$\sum a_n$ je red s pozitivnim članovima.

1) Ako postoji $q<1$, takav da za gotove sve $n \in N$ vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ tada red konvergira

2) Ako za gotove sve $n \in N$ vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, red konvergira

Dokaz:

1) k = indeks od kojeg vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \forall n \geq k$

Imamo: $a_n \leq q a_{n-1} \leq q^2 a_{n-2} \leq \dots q^{n-k} a_k$, tj $\boxed{a_n \leq \frac{a_k}{q^k} \cdot q^n}$

kako je $q<1$, geo red $\sum q^n$ konvergira, zato i $\sum a_n$ konvergira, jer je omeđen odozgo s $\frac{a_k}{q^k} \sum q^n$,

Q.E.D

2) Ako $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ za gotovo sve n, odnosno $a_{n+1} \geq a_n$, onda počevši od nekog člana a_n monotono rastući, stoga nije ispunjen nužan uvijet konvergencije. Red diverg.

Apsolutno konvergentan red

Za red $\sum a_n$ kažemo da je apsolutno konvergentan ako red $\sum |a_n|$ konvergira. Obrat ne vrijedi.

Dokaz:

Prema Cauchyjevom svojstvu:

$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+k}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$, Q.E.D

Suma zdesna je ostatak reda s poz. članovima $\sum |a_n|$ koji je po pretpostavci konvergentan. Zato taj ostatak teži u nulu za beskonačnost. Znači niz je Cauchyjev, pa konvergira.

red $\sum a_n$ konvergira

7. D'Alembertov kriterij, granični oblik

Neka je $\sum a_n$, red s pozitivnim članovima, ako postoji

$\boxed{q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}$, onda za:
- $q<1$ red konvergira
- $q>1$ red divergira
- $q=1$ nema odluke

Dokaz:

Kako je $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi

$q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon$ čim je $n>n_0$, zbog $q<1$, možemo odabrati takav ε da bude $q+\varepsilon<1$. Time je ispunjen uvjet D'Alembertovog kriterija (5)

Ako je $q>1$, onda odaberemo $q-\varepsilon>1$, pa je ispunjen uvjet za divergentnost D'Alembertovog krit. (5)

$q=1 \Rightarrow$ nema odluke

8. Leibnizov kriterij (dovoljan uvjet konvergencije)

Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ vrijedi
1) niz a_n je padajući
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

tada red konvergira.

Dokaz: Promotrimo:

$S_{2n} = (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\dots+(a_{2k-1}-a_{2k}) =$
$= S_{2n-2}+(a_{2k-1}-a_{2k}) \geq S_{2n-2}$, Dakle S_{2n} raste

$S_{2n} = a_1-(a_2-a_3)-\dots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n} < a_1 \Rightarrow$ omeđen odozgo

stoga postoji limes $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S}$ Za neparne sume vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S+0 = S$$

niz parcijalnih suma ima jedinstven limes i zato

KONGRGIRA. Q.E.D

9 Cauchyjev kriterij

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima.

Ako postoji $g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ tada vrijedi za

$g<1$, red konvergira

$g>1$, red divergira

$g=1$, nema odluke

Dokaz:

Neka je n_0 indeks takav da $\sqrt[n]{a_n} \leq g$, odnosno $a_n \leq g^n$, za sve $n \geq n_0$, budući da je $g<1$, geo. red $g^n + g^{n+1} + ..$ konvergira. Prema poredbenom kriteriju(2) konvergira i red $a_n + a_{n+1} + ..$ pa konvergira i red $\sum a_n$.

Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall n \in N$, onda $a_n \geq 1$, pa niz a_n ne teži u 0. Dakle nije ispunjen nužan uvjet konvergencije(1)

Prijelaz na kriterij s limesom se vrši isto kao i kod D'Alemberta.

Q.E.D

FORMULE

Udaljenost točke od ravnine

$T(x_1, y_1, z_1)$ $\quad \Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(T_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Kut između dvije ravnine

$$\cos\alpha = \left|\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}\right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Okomite su: $n_1 \cdot n_2 = 0$

Paralelne su: (iste?) $n_1 = \lambda n_2$

Pramen ravnine

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Dijeleći s μ:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Čime su opisane sve ravnine osim Π_2.

Udaljenost točke od pravca

$$d = \frac{|(r_1 - r_0) \times c|}{|c|}$$

Udaljenost dva pravca

$$d = \frac{|\overrightarrow{T_1T_2} \cdot (c_1 \times c_2)|}{|c_1 \times c_2|}$$

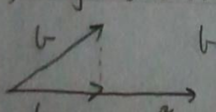
Kut između pravca i ravnine

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|c \cdot n|}{|c||n|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

paralelni su: $c \cdot n = 0$

okomiti su: $c = \lambda n$

Projekcija vektora na vektor



$$b_a = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

Skalarni umnožak

$$a \cdot b = |a||b| \cos\sphericalangle(a, b)$$

$$a \cdot a = |a|^2$$

Vektorsk. umnožak

$$(a \times b) = |a||b| \sin(\ldots$$

$$= |a \times b| =$$

= pov. PARALEL...

Aproksimacije nekih funkcija:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$