Rješenja međuispita iz Matematike 2

održanoga 29. travnja 2013.

1. a) (2 boda) Odredite konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right).$$

b) (2 boda) Iskažite i dokažite teorem koji ste koristili u rješavanju zadatka pod a).

c) (1 boda) Navedite kontraprimjer koji pokazuje da je teorem korišten u b) dijelu zadatka implikacija, a nije ekvivalencija.

Rješenje: U a) dijelu zadatka po racionalizaciji dobiva se izraz za opći član oblika $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$ koji konvergira u $1/2$ pa red ne zadovoljava nužni uvjet konvergencije. Rješenje b) dijela je nuždan uvjet konvergencije reda koji je opisan na 7. stranici 1. knjižice. Tipični protuprimjer tražen u c) dijelu zadatka je harmonijski red, gdje $\frac{1}{n}\to 0$, ali $\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

◇

2. (4 boda) Razvijte u Taylorov red oko $c=1$ funkciju

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2-2x+26}$$

i odredite područje konvergencije tog reda.

Rješenje: Svođenjem na geometrijski red dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{25^{n+1}}(x-1)^{2n+3}.$$

Područje konvergencije dobivamo iz $|x-1|<5$, pa je $x\in\langle -4,6\rangle$. U rubovima imamo alternirajuće redove, ali koji ne zadovoljavaju uvjet monotonotsi iz Leibnizovog kriterija.

◇

3. (4 boda) U trokutu $\triangle ABC$ točka D dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $1:2$. Točka E leži na dužini $\overline{CD}$ tako da vrijedi

$$\overrightarrow{CE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}.$$

Točka F je sjecište pravaca AE i BC. Izrazite vektor $\overrightarrow{AF}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Rješenje: Označimo $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}$. Kako je F na pravcima AE i BC, to imamo konstante α i β takve da je $\alpha\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{CF}=\beta\overrightarrow{CB}$. Uvrštavajući poznate uvjete dobivamo

$$(\frac{2}{5}\alpha+\beta-1)\overrightarrow{c}+(\frac{\alpha}{5}-\beta)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0},$$

iz čega slijedi $\beta=\frac{1}{3}$ i $\alpha=\frac{5}{3}$. Kako je vektor $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{c}+\frac{1}{5}\overrightarrow{b}$, to je

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

◇

4. (5 bodova) Točka $C(2,0,1)$ je vrh jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ površine $4\sqrt{3}$ čija osnovica $\overline{AB}$ leži na pravcu

$$p\ldots\frac{x+2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}.$$

Odredite koordinate točaka A i B.

Rješenje: Prvo odredimo vektor normale ravnine u kojoj se nalaze i pravac i točka; to dobivamo iz vektora smjera pravca $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ i vektora koji spaja točku C i točku $(-2,0,-3)$ na pravcu, vektor $4(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$. Dobivamo vektor normlae $\overrightarrow{n}=-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, te pomoću njega vektor untar ravnine okomit na smjer pravca, $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$. Parametarskim računom dobivamo da $2\overrightarrow{v}$ upravo spaja točku C i pravac p, pa je visina na stranicu c po iznosu jednaka $2|\overrightarrow{v}|=2\sqrt{2}$. Iz toga i podatka o površini dobivamo da je duljina stranice c jednaka $2\sqrt{6}$, što je upravo duplo dulje od vektora smjera pravca na kojem se ta stranica nalazi. Nožište visine iz vrha C je točka $N_C(0,2,1)$, pa iz svega poznatoga dobivamo točke $A(1,3,3)$ i $B(-1,1,-1)$.

◇

5. a) (2 boda) Skicirajte i odredite tip plohe zadane izrazom

$$z = 9x^2 + 4y^2 + 2.$$

b) (1 bod) Odredite nivo-krivulju plohe $z = z(x,y)$ koja prolazi točkom $P(2,0)$.

c) (2 boda) Nađite one točke na plohi z u kojima je tangencijalna ravnina na plohu okomita na vektor $6\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje: U a) zadatku radi se o eleptičkom paraboloidu kojemu je tjeme u točki $(0,0,2)$. U $b)$ dijelu zadatka dobivamo $z(2,0) = 38$, pa uvrštavanjem i dijeljenjem s 36 dobivamo jendnadžbu elipse

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

U c) dijelu zadatka promatramo funkciju $F(x,y,z) = 9x^2 + 4y^2 + 2 - z$. Tada je $\nabla F(x,y,z) = (18x, 8y, -1)$. Tangencijalna ravnina će biti okomita na traženi vektor ako je taj vektor kolinearan s $(18x, 8y, -1)$. Iz toga dobivamo da je $x = -1/3$ i $y = -1/2$, te dobivamo traženu točku $(-1/3, -1/2, 4)$.

◇

6. (3 boda) Transformirajte na nove nezavisne varijable u i v izraz

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y},$$

ako je $u = xy$ i $v = e^{x+2y}$.

Rješenje: Prvo računamo $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = v$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = 2v$. Dalje, direktnim uvrštavanjem dobivamo $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\frac{\partial z}{\partial u} + (x+2y)v\frac{\partial z}{\partial v} = 2u\frac{\partial z}{\partial u} + v\ln v\frac{\partial z}{\partial v}$.

◇

7. a) (2 boda) Definirajte derivaciju vektorske funkcije $\vec{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ i izvedite koordinatni zapis po kojemu se ona računa.

b) (2 boda) Zadana je jednadžba gibanja

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 5t)\vec{i} + (2t+1)\vec{j} + 3t^2\vec{k}.$$

Za koje vrijednosti od t su vektor brzine i vektor akceleracije okomiti?

Rješenje: Definicija tražena u a) dijelu zadatka je

$$\vec{r}\,'(t) := \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(\vec{r}(t+\delta) - \vec{r}(t)).$$

Koordinatno je, za $\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}$, taj izraz upravo $\vec{r}\,'(t) = r_x'(t)\vec{i} + r_y'(t)\vec{j} + r_z'(t)\vec{k}$, direktnim računom.

U b) dijelu zadatka je $\vec{r}\,'(t) = (2t-5)\vec{i} + 2\vec{j} + 6t\vec{k}$ i $\vec{r}\,''(t) = 2\vec{i} + 6\vec{k}$, pa skalarnim produktom dobivamo $40t - 10 = 0$, odnosno $t = \frac{1}{4}$.