DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA

- $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)$

$y = f(x, c_1, c_2 \dots c_n) \iff \Phi(x, y, c_1 \dots c_n) \Rightarrow$ opći integral D.J.

$\Downarrow$

opće rješenje D.J.

FAMILIJA KRIVULJA

- pronalazak dif. jednadžbe, derivirati n-puta i eliminirati $c_1 \dots c_n$

CAUCHYJEV PROBLEM

$y = y(x) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$

$y' = f(x,y) \rightarrow$ D.J. KOJA ODGOVARA $y = y(x)$

$y(x_0) = y_0 \rightarrow$ početni uvjet

$y' = 2x$

$y(1) = 2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \,/ dx$

$y = 2\frac{x^2}{2} + C_1$

$y = x^2 + C_1 \Rightarrow y = x^2 + 1$

$C_1 = 2 - 1 = 1$

D.J. SA SEPARIRANIM VARIJABLAMA

$f(y)dy = g(x)dx \xrightarrow[\text{integriranje}]{\text{neposredno}} \int f(y)dy = \int g(x)dx + C$

$y' = \frac{x}{y}$

$y'y = x$

$ydy = xdx \Rightarrow$ oblik J.S.V.

D.J. KOJE SE SVODE NA J.S.V.

$y' = f(ax + by + c) \Rightarrow ax + by + c = z \Rightarrow z$ je nova ZAVISNA varijabla

HOMOGENE D.J.

* ispitaj je li homogena

$M(tx, ty) \dots$

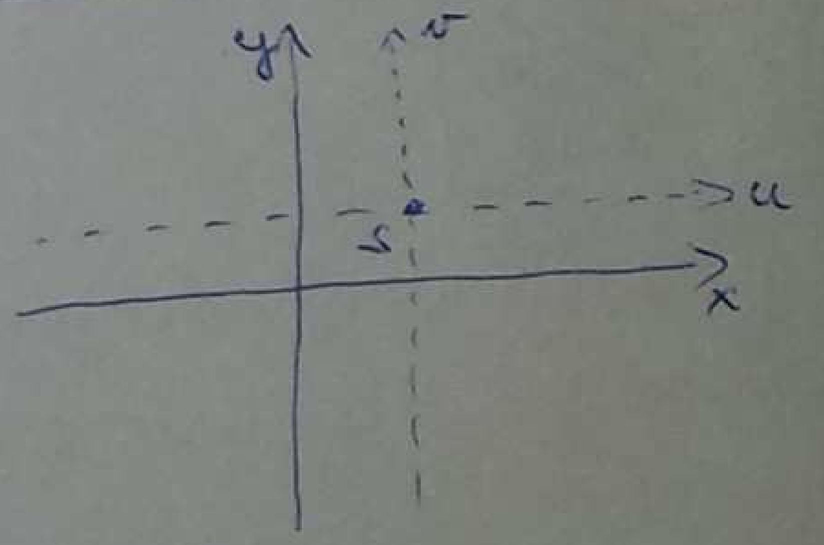
Homogena je ako se može svesti na: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \frac{y}{x} = z \Rightarrow$ nova ZAVISNA varijabla

D.J. KOJE SE SVODE NA HOMOGENU

$p_1 \dots a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$p_2 \dots a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \Rightarrow$ opći oblik



1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p_1 \# p_2$

↳ ALGORITAM:

SUPSTITUCIJA:

$a_1x + b_1y = z \,/ \frac{d}{dx}$

$\vdots$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

p_1 i p_2 se sijeku u $S(x_0, y_0)$

$\boxed{\begin{matrix} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{matrix}}$

u = nezavisna

v = zavisna

$y' = \boxed{\frac{dy}{dx}} = \frac{d(v + y_0)}{d(u + x_0)} = \boxed{\frac{dv}{du}}$

$y' = \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \begin{matrix} :u \\ :u \end{matrix} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{v}{u}}\right) = f\left(\frac{v}{u}\right)$

homogena

TRAJEKTORIJE

IZOGONALNE $\Rightarrow \varphi \neq \frac{\pi}{2}$

1.) ODREDI D.J. $F(x,y,y')=0$

2.) $tg\alpha = \frac{y_1' - y_2'}{1 - y_1' y_2'}$

3.) $y_1' = \varphi(y_2')$

$F(x,y\ y_1')=0 \Rightarrow F(x,y\ \varphi(y_2'))=0$

4.) Riješimo D.J. familije trajektorija i tako dobijemo traženu familiju krivulja $\Phi_2(x,y,C)=0$

LINEARNE D.J.

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$$

① $y' + f(x)y = 0 \Rightarrow$ dobijemo $y = C(x) \cdot$ „nešto" $\cdot x$

② umjesto y uvrstimo ovo i izjednačimo s desnom stranom

③ Na kraju zamijenimo $C(x)$ i y !!

BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}} \Rightarrow \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$$

$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z \Rightarrow$ nova ZAVISNA varijabla

$\vdots$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x) \cdot z = g(x)$$

$\vdots$

Pr. $2xyy' - y^2 + x = 0$

$$y' - \frac{y^2}{2xy} + \frac{x}{2xy} = 0$$

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2} \cdot y^{-1}$$

$$y' - \frac{1}{2x} \cdot y = -\frac{1}{2} \cdot y^{-1}$$

$\hookrightarrow f(x) = -\frac{1}{2x}$

$g(x) = -\frac{1}{2}$

$\alpha = -1$!!

ORTOGONALNE TRAJEKTORIJE

D.J. familije krivulja dobijemo deriviranjem i eliminacijom konstanti. D.J. ortog. trajektorija dobijemo zamjenom $y' \to -\frac{1}{y'}$

Pr. $4x^2 + y^2 = k^2 \,/\frac{d}{dx}$

$8x + 2yy' = 0$

$4x = \frac{y}{y'}$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x} \Rightarrow y = C \cdot \sqrt[4]{x}$

* HINT:

ORTOGONALNE $= y' \to -\frac{1}{y'}$

IZOGONALNE $= y' \to \frac{y' - tg\alpha}{1 + y' tg\alpha}$

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA (NASTAVAK)

EGZAKTNA

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad ; \quad \text{UVJET: } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy \quad \text{ili} \quad \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

* za x_0 i y_0 obično biramo proizvoljne brojeve, kako pogoduje jednadžbi (najčešće $x_0 = 0$, $y_0 = 0$)

EULEROV MULTIPLIKATOR

$\Rightarrow \mu(x,y) \Rightarrow$ f-ja koja prevodi jednadžbu u egzaktnu

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] dx \Rightarrow \text{f-ja samo od } x$$

$$\boxed{\mu_y' P - \mu_x' Q = \mu(Q_x' - P_y')}$$

$$\ln \mu(y) = -\int \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] dy \Rightarrow \text{f-ja samo od } y$$

PARAMETRIZACIJA

TIP	PAR	ALGORITAM
$y = f(x, y')$	$y' = p$; $p = p(x)$	$\frac{d}{dx} \Rightarrow p(x,c)$
$x = f(y, y')$	$y' = p$; $p = p(y)$	$\frac{d}{dy} \Rightarrow p(y,c)$
$x = f(y')$	$y' = p$; $p = p(y)$	$y = \int p f'(p)\,dp + C$
$y = f(y')$	$y' = p$; $p = p(y)$	$x = \int \frac{1}{p} f'(p)\,dp + C$

CLAIRAUTOVA JEDNADŽBA

$y = xy' + f(y') \Rightarrow$ opći oblik, specijalni slučaj od (1.)

SUPST.: $y' = p$, $p = p(x)$; $/\frac{d}{dx}$

$y = xp + f(p) \;/\frac{d}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + f'(p)\right) = 0$$

$\rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow$ opće rješenje (1.)

$\rightarrow (x + f'(p)) = 0 \Rightarrow$ singularno rješenje (2.)

(1.) $y = C \cdot x + f(C)$

(2.) $x + f'(p) = 0$

$x = -f'(p) = 0$

$y = -p f'(p) + f(p)$ → singularno rješenje

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -f'(p) \\ y &= -p f'(p) + f(p) \end{aligned}}$$

SINGULARNO RJEŠENJE

(1) $F(x,y,y') = 0$

(2) $\frac{\partial}{\partial y'} F(x,y,y') = 0$

ili

(1) $F(x,y,p) = 0$

(2.) $\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = 0$

→ AKO ZADOVOLJAVA OVE UVJETE, TADA POSTOJI SINGULARNO RJEŠENJE U $T(x_0,y_0)$. **NUŽNA PROVJERA!**

ANVELOPA (OVOJNICA)

(1) $\Phi(x,y,c)$

(2) $\frac{\partial F}{\partial c}(x,y,c)$

} eliminiraj c (deriviramo vrati nazad u početnu funkciju) !

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE VIŠEG REDA

INTEGRIRANJE SNIŽAVANJEM REDA JEDNADŽBE

a) $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$

$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x) / \cdot dx$

$dy^{(n-1)} = f(x)dx / \int$

$\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

itd.

Z. TIPA: $\underbrace{y''' = 2x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1}$

uzastopno integriranje i računanje konstanti

Rj. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

---

b) $\boxed{F(x, y^{(k)}, \dots y^{(n)}) = 0}$ *HINT: u ovakvim zadacima se NE POJAVLJUJE y

SUPST. $\boxed{z = y^{(k)}}$

Pr. $y'' + (y')^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ uoči $\Rightarrow$ nema y

$\boxed{y' = z}$

$\vdots$

$\operatorname{arctg}(z) = C_1 - x$

$z = \operatorname{tg}(-x + C_1)$

$\to y = \int z\,dz$

Rj: $y = \ln|\cos(-x + C_1)| + C_2$

---

c) $\boxed{F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0} \Rightarrow$ *NEMA x

$\boxed{y' = p}$

$y'' = p \cdot p'$; $y''' = p[1 \cdot p' + p' \cdot p']$

Pr. $yy'' + (y')^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{nema } x}$

$y \cdot p \cdot p' + p^2 = 0$

$p(yp' + p) = 0$

$p = 0$

$\vdots$

$\boxed{y = C_1} \Rightarrow$ singularno Rj.

$yp' + p = 0$

$y\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow$

$p \cdot y = C_1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y} \dots y = \pm\sqrt{C_1 x + C_1}$

---

d) HOMOGENA u $y, y', y'' \dots y^{(n)}$

$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0} \Rightarrow F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^{\alpha} \cdot F(x, y, \dots, y^{(n)})$

$\alpha \Rightarrow$ stupanj homogenosti

$\boxed{\text{SUPST.}}$ $y = e^{\int z\,dx} \Rightarrow z$ (nova zavisna varijabla)

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= z \cdot y \\ y'' &= y(z' + z^2) \end{aligned}}$$

koristi gotovu formulu

D. J. S POTPUNIM DIFERENCIJALOM

$$F(x, y \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

$y'' + xy' + y = 0$ → jer: $\frac{d}{dx}(xy) = \underbrace{x'}_{=1}y + xy' = \underline{y + xy'}$

$\frac{d}{dx}(y' + xy) = 0 / \cdot dx / \int$

$\frac{d}{dx}(y') = (y')' = y''$

$\int d(y' + xy) = C_1$

$\frac{d}{dx}(y' + xy) = \dots$!!

$y' + xy = C_1 \quad \dots \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C_1 \cdot \int e^{\frac{x^2}{2}}dx + C_2\right]$

LINEARNE JEDNADŽBE VIŠEG REDA (L. D. J.)

1.) **L. D. J. 2. REDA**

$^{*}\; y'' + p(x)y' + g(x)y = 0 \Rightarrow$ homogena L. D. J. s ne konstantnim koeficijentima

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\int\left[\frac{1}{y_1^2(x)} \cdot e^{-\int p(x)dx}\right]dx$$

Pr. $xy'' + 2y' + xy = 0 / : x \Rightarrow$ dijeli se s „x" da se postigne oblik (*)

$y'' + \frac{2}{x} \cdot y' + y = 0$

$p(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = 1 \quad \Rightarrow$ Rj. $\Rightarrow \boxed{y = C_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{-\cos x}{x}}$

***HINT:**

L. D. J. s NE konst. koeficijentima sadrži nekakav x u jednadžbi,

L. D. J. s konst. koef NE sadrži x !!

b) S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

OPĆI: $\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0} \Longleftrightarrow \boxed{r^2 + a_1 \cdot r + a_0 = 0}$ $\left[y'' \downarrow r^2,\ y' \downarrow r,\ y \downarrow 1\right]$!!

a) $\boxed{r_1 \neq r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}}$

$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}$

O.R. $\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$

b) $\boxed{r_1 = r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}}$

$r_1 = r_2 = r = -\frac{a_1}{2}$

$y_1 = e^{rx} \quad y_2 = xe^{rx}$

$\boxed{y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}}$

c) **KONJUGIRANO-KOMPLEKSNI**

$r_1 = \alpha + i\beta$

$r_2 = \alpha - i\beta$

$$y = e^{\alpha x}\left[\underbrace{(C_1 + C_2)}_{K_1}\cos(\beta x) + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{K_2}\sin(\beta x)\right]$$

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE VIŠEG REDA

WRONSKIJAN

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 & \dots & y_n \\ y_1', & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv$$

za $W(y_1 \dots y_n) \equiv 0 \Rightarrow$ linearno ZAVISNE funkcije

za $W(y_1 \dots y_n) \not\equiv 0 \Rightarrow$ linearno NEZAVISNE funkcije

Pr. $y_1 = e^{rx}$

$y_2 = xe^{rx}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ e^{rx} & xe^{rx} + e^{rx} \end{vmatrix} \equiv e^{2rx} \not\equiv 0$$

$\hookrightarrow$ nezavisne

L.D.J. N-TOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA (HOMOGENA)

$$\boxed{L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0}$$

$$\boxed{y^{(n)} \downarrow r^n, \dots, y' \downarrow r, y \downarrow 1}$$

$$\boxed{P(r) \equiv r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0}$$

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n}$$

* $y_1 \dots y_n$ čine fundamentalni sustav rješenja jednadžbe

ALGORITAM:

1.) Nađemo nultočke karakterističnog polinoma

$$P(r) \equiv (r - r_1)^{n_1} \dots (r - r_k)^{n_k}$$

2.) Svakom realnom korijenu r_i višestrukosti n_i odgovara n_i nezavisnih rješenja

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, \dots, x^{r_i - 1} \cdot e^{r_i x}$$

3.) Svakom paru konjugirano kompleksnih nultočaka ~~odgovara~~ $r_i = \alpha + i\beta$, $r_{i+1} = \alpha - i\beta$ višestrukosti n_i odgovara $2n_i$ nezavisnih rješenja

- $e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x}(\cos \beta x), x^{n_i - 1} \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
- $e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{n_i - 1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$

4.) O.R. L.D.J. jest linearna kombinacija svih rješenja gore navedenih oblika

Primjer: Odredi opće rješenje:

$y^{IV} - y = 0$; $y^{(n)} \downarrow r^{(n)} \dots$

$r^4 - 1 = 0$

$(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$

$(r - 1)(r + 1)(r^2 + 1) = 0$

$$\boxed{r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = i, r_4 = -i}$$

$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x, y_3 = e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x)$

$y_4 = e^{0 \cdot x} \cdot \sin(1 \cdot x)$

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x}$$

$$\boxed{\text{NEHOMOGENE L.D.J. S KONST. KOEF.}}$$

$y_H \Rightarrow$ rješenje homogene jednadžbe

$$\boxed{y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$$

$y_p \Rightarrow$ partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$\boxed{y = y_H + y_p}$$

Za jednadžbu 2 reda:

* Prvo odredimo y_H u obliku $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$, zatim to deriviramo itd.

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ &C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{aligned}}$$

Za jednadžbe 3 reda:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = 0 \\ &C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3' y_3' = 0 \\ &C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' = f(x) \end{aligned}\right\} \underline{C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)}$$

integriramo konstante i dobijemo y_P, ubacimo u jednadžbu $y = y_H + y_P$
