RXBBM16

METODE ZA RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

RXBBM16

10. KNJIŽICA

HOMOGENE JEDNADŽBE

- svedemo na supstituciju $z = \frac{y}{x}$, pa je $y' = z'x + z$
- pa imamo $x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$ i rješavamo separacijom varijabli

JEDNADŽBE KOJE SE SVODE NA HOMOGENE

- jednadžbe oblika $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, rješimo sustav $\begin{matrix} a_1x + a_2y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{matrix}$
- ako sustav ima rješenje onda je $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, $y = \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$ pa supstitucijom $z = \frac{v}{u}$, $\frac{dv}{du} = z'u + z$, separacijom dolazimo do rješenja
- ako sustav nema rješenje, onda imamo supstituciju $z = a_1x + b_1y$ koju deriviramo po x, ubacimo u poč. jedn. i rješimo separacijom

ORTOGONALNE TRAJEKTORIJE

- deriviramo jednadžbu po x da se rješimo konstante i izrazimo y', i tad zamjenimo $y' = -\frac{1}{y'}$ te rješimo diferencijalnu jednadžbu

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA

- jednadžbe oblika $y' + p(x)y = q(x)$
- rješimo pripadnu homogenu jedn. $y' + p(x)y = 0$, te iz funkcije $f(x, y, C(x))$ dobijemo $C(x)$ i $C'(x)$ i uvrstimo u $f(x, y, C(x))$ i iz nje dobijemo rješenje

RXBBM16

BERNOULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

- jedn. oblika $y' + p(x)y = g(x)y^n$
- radimo supstituciju $z = y^{1-n}$, te svodimo jedn. na linearnu...

---

11. KNJIŽICA

EGZAKTNE JEDNADŽBE

- oblika $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
- jednadžba s potpunim diferencijalom je ako postoji f-ja "u" kojoj je

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

- uvijet za potpuni diferencijal je $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

EULEROV MULTIPLIKATOR

- ako f-ja $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ nije egzaktna, moramo ju pomnožiti s nepoznatom f-jom $\mu(x,y)$
- računamo pomoću formula $\ln\mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P_y' - Q_x')dx$

$$\ln\mu(y) = -\int \frac{1}{P}(P_y' - Q_x')dy$$

- ako imamo već zadan oblik multiplikatora tada računamo

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial[\mu(t)\cdot P]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(t)\cdot Q]}{\partial x}$$

$$\mu'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\cdot P + \mu(t)\cdot\frac{dP}{dy} = \mu'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\cdot Q + \mu(t)\cdot\frac{dQ}{dx}$$

iz toga dobijemo E. M. $\mu(t)$

TRAŽENJE RJEŠENJA U PARAMETARSKOM OBLIKU

1) jednadžba oblika $y = f(x, y')$

- napravimo supstituciju $y' = p$ pa imamo $dy = p\,dx$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = p\,dx$$

- kad uvrstimo $y' = p$, tad deriviramo dobivenu jednadžbu po x, sredimo ju i odredimo opće i singularno rješenje

2) jednadžba oblika $f(y, y') = 0$

- svedemo na oblik $y = f(y')$, napravimo supstituciju $y' = p$, $dy = p\,dx$ pa imamo $dx = \frac{1}{p}dy$, gdje je $dy = y\,dp$, tj. f-ju y deriviramo po p, pa dobijemo $dx = \frac{1}{p}f'(p)\,dp$ pa imamo $x = \int \frac{1}{p}f'(p)\,dp$

3) jednadžba oblika $x = f(y, y')$

- svedemo na oblik $x = f(y, y')$, napravimo supstituciju $y' = p$, pa imamo

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \quad \text{, pa iz } dy = p\,dx$$

$$dy = p\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp\right)$$

4) jednadžba oblika $f(x, y') = 0$

- svedemo na oblik $x = f(y')$, napravimo supstituciju $y' = p$, pa je

$$dy = p\,dx = p f'(p)\,dp$$

pa je $y = \int p f'(p)\,dp + C$

LAGRANGEOVA FUNKCIJA

$y = \varphi(y')x + \psi(y')$ → oblik jednadžbe

– uvedemo supstituciju $y' = p$ i deriviramo po x, $p = p(x)$

i dobijemo f-ju oblika $\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi(p)}{p - \varphi(p)}$

što je linearna jednadžba koju možemo lako riješiti

CLAIRAUTOVA FUNKCIJA

– jdba oblika $y = y'x + \psi(y')$

– uvodimo $y' = p$ i deriviramo po y i probamo svesti na oblik

$p'(x + \psi'(p)) = 0$ gdje je opće rješenje $p' = 0$ pa je $p = c$

a singularno dobimo iz $x = -\psi'(p)$ gdje je $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$

---

12. KNJIŽICA

INTEGRIRANJE SNIŽAVANJEM REDA JEDNADŽBE

1) jednadžba oblika $y^{(n)} = f(x)$

– ovakvu jednadžbu rješavamo uzastopnim integriranjem

npr. $y''' = 2x \quad y'' = x^2 + C_1 \quad y' = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

2) jednadžba oblika $f(x, y^n) = 0$

– ako se jednadžba da razriješiti po y' onda se postupak svodi na 1)

– ako se ne da razriješiti po y' onda stavljamo supstituciju

da jednadžba bude zadovoljena: $y^{(n)} = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ pa se iz

relacije $y' = y''dx$ integriranjem dolazi do rješenja

3) jednadžba oblika $f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

– uvodimo supstituciju $y^{(k)} = z$, $z = z(x)$, dobijemo z i integriramo

4) jednadžba oblika $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

– smanjujemo red supstitucijom $p = y'$, $p = p(y)$, $y'' = pp'$, $y''' = p(p'^2 + pp'')$

5.) homogene jednadžbe oblika $y, y', \dots y^{(n)}$

– ako je $f(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^{\alpha} f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

– smanjujemo red supstitucijom $y = e^{\int z(x)dx}$, pa imamo

$y' = z e^{\int z(x)dx} = zy$, $y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y$, $y''' = (z'' + 3zz' + z^3)y \dots$

6.) jednadžbe s potpunim diferencijalom

– ako je $f(x, y, \dots y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \varnothing(x, y, \dots y^{(n-1)})$, onda možemo integrirati $\varnothing(x, y, \dots y^{(n-1)}) = C$ i tako smo snizili red jdbe za 1

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA DRUGOG REDA

– ako je y_1 bilo koje rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe

HLDJ → $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onda je

$$\boxed{y(x) = y_1(x)\left(C_2 \int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int p(x)dx} dx + C_1\right)} \Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$

gdje su y_1 i y_2 bilo koja 2 linearno nezavisna rješenja jednadžbe

– y_1 i y_2 čine bazu rješenja HLDJ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ako vrijedi

1) y_1 i y_2 su rješenja ove jednadžbe
2) te su f-je linearno nezavisne

$y = y_1 C_1 + y_2 C_2$ → opće rješenje

$$y_2 = y_1(x) \int \left(\frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int p(x)dx}\right) dx$$

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA S KONST. KOEF.

oblik → $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$\underbrace{r^2 + a_1 r + a_0}_{\text{karakteristični polinom}} = 0$ → karakteristična jednadžba

- ako su r_1 i r_2 rješenja jednadžbe, tad imamo 3 mogućnosti:
    1) r_1 i r_2 su realni i različiti
    2) r_1 i r_2 su realni i jednaki
    3) r_1 i r_2 su konjugirano kompleksni

1) realna i različita rješenja

- u tom slučaju su $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ linearno nezavisna rješenja jdbe
- opće rješenje ima oblik $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2) dvostruko realno rješenje

- vrijedi $r_1 = -\frac{a_1}{2}$ i opće rješenje glasi $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$

3) konjugirano kompleksna rješenja

- opće rješenje glasi $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ gdje su
  $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$

OPĆE RJEŠENJE LDJ DRUGOG REDA S KONST. KOEF.

- jednadžba $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, tj. $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ ima za bazu rješenja:
    1) za r_1 i r_2 realna i različita baza je:
    $\boxed{y_1 = e^{r_1 x} \qquad y_2 = e^{r_2 x}}$
    2) za r_1 i r_2 realni i jednaki baza je:
    $\boxed{y_1 = e^{r_1 x} \qquad y_2 = x e^{r_1 x}}$
    3) za r_1 i r_2 konjugirano kompleksne baza je:
    $\boxed{y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \qquad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x}$