

Zadaci za vježbu za 1. međuispit iz Matematike 2

(pripremio V. Čosić)

Zadatak 1. [1 bod]

Iskažite i dokažite nuždan uvjet konvergencije reda.

Zadatak 2. [3 boda]

Odredite sumu sljedećeg reda:

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots$$

Zadatak 3. [3 boda]

U kvadrat stranice a upisan je krug, u krug je opet upisan kvadrat, pa u kvadrat ponovno krug itd. Odredite zbroj opsega i površina svih kvadrata i krugova.

Zadatak 4. [4 boda]

- (a) Iskažite Cauchyjev kriterij.
- (b) Iskažite D'Alembertov kriterij.
- (c) Iskažite poredbeni kriterij (limes varijanta).
- (d) Iskažite integralni kriterij.

Zadatak 5. [1 bod]

Odredite konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cosh(n) + 1}{\cosh(n)} \right)^{e^n}$$

Zadatak 6. [4 boda]

Odredite konvergenciju redova:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{3^n}$$

Ispitajte apsolutnu konvergenciju redova:

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt[3]{n}}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{2n^2}{n^3 - 3n + 4} \right)$$

Konvergiraju li redovi u zadacima (c) i (d) uvjetno?

Zadatak 7. [2 boda]

Odredite područje konvergencije i ispitajte ponašanje na rubu područja reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Zadatak 8. [2 boda]

Odredite područje konvergencije i ispitajte ponašanje na rubu područja reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{5^n \ln n}$$

Zadatak 9. [2 boda]

Razvijte u Taylorov red funkciju $f = \frac{1}{x}$ u točki $x_0 = 3$ te odredite područje konvergencije dobivenog reda.

Zadatak 10. [2 boda]

Razvijte u Maclaurinov red funkciju $f = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ te odredite područje konvergencije dobivenog reda.

Zadatak 11. [3 boda]

- (a) Koliko iznosi $\ln \frac{3}{2}$?
- (b) Koliko iznosi $\sqrt[3]{2}$?
- (c) Koliko iznosi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh^n(0.5)}{n}$?

Zadatak 12. [3 boda]

Dani su vektori $\vec{a} = (0, \lambda, 3\lambda)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$ i $\vec{c} = (-1, -1, 3)$.

- (a) Odredite λ tako da volumen paralelepipeda razapetog vektorima \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} bude jednak 6 kubnih jedinica ako je osnovica paralelogram razapet vektorima \vec{a} i \vec{b} . Potom odredite visinu paralelepipeda i kut koji visina zatvara s vektorom \vec{c} .
- (b) Za izračunati λ odredi površinu paralelograma razapetog vektorima \vec{a} i \vec{c} .

Zadatak 13. [3 boda]

Dani su vektori $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ i $\vec{b} = -\vec{p} + 4\vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

- (a) Odredite skalarnu i vektorsku projekciju vektora \vec{a} na vektor \vec{b} .
- (b) Nađi vektor \vec{c} okomit na vektore \vec{a} i \vec{b} i duljine 5.

Zadatak 14. [1 bod]

Zadane su točke $A(2, 3, 2)$, $B(0, 1, 1)$, $C(4, 2, 0)$ i $D(x_D, y_D, z_D)$, gdje je točka D polovište stranice \overline{BC} trokuta $\triangle ABC$. Prikažite vektor \overrightarrow{AD} kao linearnu kombinaciju vektora \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} .

Zadatak 15. [6 bodova]

- (a) Napišite definiciju linearne nezavisnosti vektora.
- (b) Izvedite formulu za skalarni umnožak dvaju vektora sa $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ kanonskom bazom prostora V^3 .
- (c) Napišite definiciju vektorskog umnoška dvaju vektora i izvedite formulu za njegovo računanje u prostoru V^3 sa $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ kanonskom bazom.
- (d) Koja je geometrijska interpretacija mješovitog umnoška?
- (e) Ako vektori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ čine ortogonalnu bazu u V^3 , prikažite bilo koji vektor \vec{a} tog prostora.
- (f) Ako vektori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ čine ortonormiranu bazu u V^3 , prikažite bilo koji vektor \vec{a} tog prostora.

Zadatak 16. [4 boda]

Zadani su pravac $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{1}$ i ravnina $\pi \dots x + 2y - z + 2 = 0$.

- (a) Odredite sjecište pravca p i ravnine π .
- (b) Očitajte točku iz jednadžbe pravca p i nađite njenu ortogonalnu projekciju na ravninu π . Usput nađite ortogonalnu projekciju pravca p na ravninu π (nazovite ga m i zapišite u parametarskom obliku).
- (c) Odredite pravac q simetričan pravcu p obzirom na ravninu π .
- (d) Odredite jednadžbu ravnine π_1 okomite na pravce p i q .

Zadatak 17. [4 boda]

- (a) Izvedite udaljenost točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$ od ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$.
- (b) Napišite izraz za kanonsku jednadžbu pravca.
- (c) Napišite izraz za kut između pravca i ravnine.
- (d) Napišite izraz za kut između dviju ravnina.

Zadatak 18. [1 bod]

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi pravcem $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ i paralelna je s osi Oy .

Zadatak 19. [1 bod]

Odredite i skicirajte područje definicije funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x + 5}} + \ln(9 - x - y)$$