pripremio V. Ćosić

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \rightarrow r_1 = -3, r_2 = -2$$

Rješenja su realna i različita pa je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \rightarrow r_{1,2} = 2$$

Rješenja su realna i ista pa je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

3. $y'' - y' - y = 0$

$$r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Rješenja su realna i različita pa je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

4. $y'' - 3y' + 3y = 0$

$$r^2 - 3r + 3 = 0 \rightarrow r_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, r_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad r = \alpha \pm \beta i$$

Rješenja su konjugirano kompleksna pa je

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) = C_1 e^{\frac{3x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{\frac{3x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

5. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

$$r_1 = 1 \rightarrow 1 - 6 + 11 - 6 = 0 ☺$$

Jedno rješenje je 1 pa podijelimo polinom sa $r - r_1$ (a polinome znate dijeliti):

$$(r^3 - 6r^2 + 11r - 6):(r-1) = r^2 - 5r + 6$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow r_2 = 2, r_3 = 3$$

Sva rješenja su različita pa je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

6. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$r_1 = 1 \rightarrow 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0 \text{ ☺}$$

Jedno rješenje je 1 pa podijelimo polinom sa $r - r_1$:

$$(r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1):(r-1) = r^3 - r^2 + r - 1$$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0$$

$$(r-1)(r^2+1) = 0 \rightarrow r_2 = 1, r_{3,4} = \pm i = \alpha \pm \beta i$$

Dva rješenja su ista pa je taj dio rješenja $C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$, a dva su konjugirano kompleksna pa je taj dio rješenja $C_3 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, odnosno

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x} + C_3 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

7. $y'' + 5y' + 6y = \sin x$

Obzirom da sada s desne strane imamo funkciju smetnje, najprije riješimo homogenu jednadžbu, zatim nađemo partikularno rješenje, i konačno rješenje je zbroj ta dva.

1) homogeno:

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \rightarrow r_1 = -3, r_2 = -2$$

Rješenja su realna i različita pa je

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

2) partikularno:

Funkcija smetnje je oblika $A\sin(\omega_0 x)$ pa je partikularno rješenje oblika $K_1 \sin(\omega_0 x) + K_2 \cos(\omega_0 x)$. Obzirom da je funkcija smetnje $\sin x$, vidimo da je $\omega_0 = 1$ pa je partikularno rješenje oblika

$$y_p = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$

To ubacimo u početnu jednadžbu i dobijemo:

$$(K_1 \sin x + K_2 \cos x)'' + 5(K_1 \sin x + K_2 \cos x)' + 6(K_1 \sin x + K_2 \cos x) = \sin x$$

$$-K_1 \sin x - K_2 \cos x + 5K_1 \cos x - 5K_2 \sin x + 6K_1 \sin x + 6K_2 \cos x = \sin x$$

$$\sin x\,(-K_1 - 5K_2 + 6K_1) + \cos x\,(-K_2 + 5K_1 + 6K_2) = \sin x$$

$$5K_1 - 5K_2 = 1$$

$$5K_1 + 5K_2 = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{10}, \quad K_2 = -\frac{1}{10}$$

Pa je partikularno rješenje

$$y_p = \frac{\sin x}{10} - \frac{\cos x}{10}$$

Konačno rješenje je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{\sin x}{10} - \frac{\cos x}{10}$$

8. $y'' - y = e^x$

Opet s desne strane imamo funkciju smetnje, najprije riješimo homogenu jednadžbu, zatim nađemo partikularno rješenje, i konačno rješenje je zbroj ta dva.

1) homogeno:

$$r^2 - 1 = 0 \rightarrow r_1 = -1, r_2 = 1$$

Rješenja su realna i različita pa je

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$$

2) partikularno:

Funkcija smetnje je oblika $Ae^{\varphi x}$ pa je partikularno rješenje oblika $Ke^{\varphi x}$. Obzirom da je funkcija smetnje e^x, vidimo da je $\varphi = 1$ i obzirom da se φ poklapa sa r_2, partikularno rješenje oblika

$$y_p = Kxe^{\varphi x} = Kxe^x$$

To ubacimo u početnu jednadžbu i dobijemo:

$$(Kxe^x)'' - Kxe^x = e^x$$

$$Ke^x + Ke^x + Kxe^x - Kxe^x = e^x$$

$$2Ke^x = e^x$$

$$2K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Pa je partikularno rješenje

$$y_p = Kxe^x = \frac{xe^x}{2}$$

Konačno rješenje je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{xe^x}{2}$$

9. $y'' + y = 5$

S desne strane imamo funkciju smetnje, najprije riješimo homogenu jednadžbu, zatim nađemo partikularno rješenje, i konačno rješenje je zbroj ta dva.

1) homogeno:

$$r^2 + 1 = 0 \rightarrow r_1 = -i, r_2 = i$$

Rješenja su konjugirano kompleksna pa je

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

2) partikularno:

Funkcija smetnje je konstanta pa je i partikularno rješenje konstanta K.

$$y_p = K$$

To ubacimo u početnu jednadžbu i dobijemo:

$$(K)'' + K = 5$$

$$K = 5$$

Pa je partikularno rješenje

$$y_p = 5$$

Konačno rješenje je

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 5$$

10. $y'' - 4y = x^2 + 3$

S desne strane imamo funkciju smetnje, najprije riješimo homogenu jednadžbu, zatim nađemo partikularno rješenje, i konačno rješenje je zbroj ta dva.

1) homogeno:

$$r^2 - 4 = 0 \rightarrow r_1 = -2, r_2 = 2$$

Rješenja su realna i različita pa je

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$$

2) partikularno:

Funkcija smetnje je polinom drugog stupnja pa je i partikularno rješenje polinom drugog stupnja:

$$y_p = K_0 + K_1 x + K_2 x^2$$

To ubacimo u početnu jednadžbu i dobijemo:

$$(K_0 + K_1 x + K_2 x^2)'' - 4(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) = x^2 + 3$$

$$2K_2 - 4K_0 - 4K_1 x - 4K_2 x^2 = x^2 + 3$$

$$2K_2 - 4K_0 = 3$$

$$-4K_1 = 0 \rightarrow K_1 = 0$$

$$-4K_2 = 1 \rightarrow K_2 = -\frac{1}{4}$$

Ubacimo K_2 u prvu jed. pa dobijemo $K_0 = -\frac{7}{8}$

Pa je partikularno rješenje

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}$$

Konačno rješenje je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}$$

11. $y'' + 2y' + y = x^2 e^x$

S desne strane imamo funkciju smetnje, najprije riješimo homogenu jednadžbu, zatim nađemo partikularno rješenje, i konačno rješenje je zbroj ta dva.

1) homogeno:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -1$$

Rješenja su realna i ista pa je

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

2) partikularno:

Funkcija smetnje je oblika $e^{\varphi x} x^m = e^x x^2$ pa je partikularno rješenje oblika:

$$y_p = e^{\varphi x}(K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \cdots + K_m x^m) = e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2)$$

To ubacimo u početnu jednadžbu i dobijemo:

$$\left(e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2)\right)'' + 2\left(e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2)\right)' + e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) = x^2 e^x$$

$$\left(e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2)\right)' = e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) + e^x(K_1 x + 2K_2 x)$$

$$\left(e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2)\right)'' = e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) + e^x(K_1 x + 2K_2 x) + e^x(K_1 x + 2K_2 x) + 2K_2 e^x$$

$$e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) + e^x(K_1 x + 2K_2 x) + e^x(K_1 x + 2K_2 x) + 2K_2 e^x + 2[e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) + e^x(K_1 x + 2K_2 x)] + e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2) = x^2 e^x$$

$$e^x(K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_1 x + 2K_2 x + K_1 x + 2K_2 x + 2K_2 + 2K_0 + 2K_1 x + 2K_2 x^2 + 2K_1 x + 4K_2 x + K_0 + K_1 x + K_2 x^2) = x^2 e^x$$

$$4K_0 + 2K_2 = 0 \rightarrow 4K_0 = -\frac{1}{2} \rightarrow K_0 = -\frac{1}{8}$$

$$8K_1 + 8K_2 = 0 \rightarrow 8K_1 = -2 \rightarrow K_1 = -\frac{1}{4}$$

$$4K_2 = 1 \rightarrow K_2 = \frac{1}{4}$$

Pa je partikularno rješenje

$$y_p = e^x\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2\right)$$

Konačno rješenje je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^x \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 \right)$$