باسمه تعالی

تمرین سری اول بهینه‌سازی محدب ۲

میعاد مهرنیا

پاییز ۱۴۰۳

۱ تبدیل مساله به LP

.۱

$$minimize \quad \|Ax-b\|_1$$

ماتریس A را به فرم $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ بازنویسی می‌کنیم که در آن a_i بیانگر سطر iام ماتریس A است.

$$Ax-b=\begin{bmatrix} a_1x-b_1 \\ \vdots \\ a_mx-b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\|Ax-b\|_1=|a_1x-b_1|+|a_2x-b_2|+\cdots+|a_mx-b_m|$$

تعریف می‌کنیم $s_i\triangleq|a_ix-b_i|$. بنابر تعریف قدرمطلق داریم

$$\begin{cases} s_i\geq a_ix-b_i \\ s_i\geq -a_ix+b_i \end{cases}$$

بنابراین مسئله را می‌توان به صورت زیر و به فرم (LP) Linear Programming نوشت

$$minimize \quad \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$S.T \quad \begin{cases} s_i\geq a_ix-b_i \\ s_i\geq -a_ix+b_i \end{cases} \quad \forall i\in\{1,2,\dots,m\}$$

.۲

$$minimize \quad \|Ax-b\|_1+\|x\|_\infty$$

بخش $\|Ax-b\|_1$ مشابه قسمت قبل به فرم خطی تبدیل می‌شود. برای بخش $\|x\|_\infty$ داریم

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|\,x_2|,\dots,|x_n|\}$$

$$S_{max}\triangleq\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$$

برای S_{max} داریم

$$S_{max}\geq|x_i| \qquad \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$$

$$\begin{cases} S_{max}\geq x_i \\ S_{\max}\geq -x_i \end{cases}$$

بنابراین مسئله به فرم خطی زیر تبدیل می‌شود

$$minimize \quad \sum_{i=1}^{m} S_i+S_{\max}$$

$$S.T \quad \begin{cases} S_i \geq a_i x - b_i \\ S_i \geq -a_i x + b_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$$

$$\begin{cases} S_{max} \geq x_i \\ S_{\max} \geq -x_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

.۳

$$minimize \quad \|x\|_1$$

$$S.T \quad \|Ax-b\|_\infty \leq 1$$

داریم $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ و تعریف می‌کنیم $s_i \triangleq |x_i|$. بنابر خاصیت قدرمطلق داریم

$$\begin{cases} s_i \geq x_i \\ s_i \geq -x_i \end{cases}$$

همچنین برای قید $\|Ax-b\|_\infty \leq 1$ داریم

$$\|Ax-b\|_\infty = \max\{|a_1x-b_1|, |a_2x-b_2|, \dots, |a_mx-b_m|\}$$

تعریف می‌کنیم $S_{max} \triangleq \max\{|a_1x-b_1|, |a_2x-b_2|, \dots, |a_mx-b_m|\}$ که باید در شرط زیر صدق کند

$$\begin{cases} S_{max} \geq a_i x - b_i \\ S_{max} \geq -a_i x + b_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$$

حال برای آنکه $\|Ax-b\|_\infty \leq 1$ باید داشته باشیم $S_{max} \geq 1$. بنابراین مسئله به فرم خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$minimize \quad \sum_{i=1}^{n} s_i$$

$$S.T \quad \begin{cases} s_i \geq x_i \\ s_i \geq -x_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

$$\begin{cases} 1 \geq a_i x - b_i \\ 1 \geq -a_i x + b_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$$

۲ تولید آلیاژ

فرض کنید قرار است از هر نوع آلیاژ به مقدار x_i و $1 \leq i \leq 5$ خریداری کنیم.تابع هزینه و قید ها به فرم زیر خواهد بود.

تابع هزینه $= 15x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 9x_4 + 80x_5$

$\frac{10}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 + \frac{30}{100}x_3 + \frac{10}{100}x_4 + \frac{70}{100}x_5 = \frac{60}{100}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ قید خلوص تیتانیوم

$0.8x_1 + 0.15x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4 = 0.3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ قید خلوص آهن

$0.1x_1 + 0.35x_2 + 0.6x_3 + 0.3x_5 = 0.1(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ قید خلوص منگنز

بنابراین مسئله به فرم زیر درمی‌آید

$$
\begin{aligned}
&minimize \quad 15x_1+40x_2+35x_3+9x_4+80x_5\\
&S.T \quad 0.1x_1+0.5x_2+0.3x_3+0.1x_4+0.7x_5=0.6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&0.8x_1+0.15x_2+0.1x_3+0.4x_4=0.3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&0.1x_1+0.35x_2+0.6x_3+0.3x_5=0.1(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\\
&x_1,x_2,x_3\geq 0
\end{aligned}
$$

۳ فروشنده

برای هر کالا دو متغیر y_i و x_i تعریف می‌کنیم که به ترتیب مشخص کننده وجود یا عدم وجود کالا در لیست خرید فروشنده و تعداد خریداری شده از آن کالا هستند و در آن $y_i \in \{0,1\}$ است و x_i تنها مقادیر صحیح نامنفی را می‌پذیرد.

تابع سود فروشنده به صورت زیر است

$$\sum_{i=1}^{N} y_i\big(x_i v_i-(x_i p_i+c_i)\big)$$

قیدها نیز به فرم زیر هستند (فرض کنید M یک عدد بزرگ باشد)

$$y_i \leq x_i \leq y_i M$$

$$y_i \in \{0,1\}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{N} y_i(x_i p_i+c_i)\leq B \quad \text{ناشی محدودیت بودجه}$$

بنابراین مسئله به فرم زیر است

$$
\begin{aligned}
&maximize \quad \sum_{i=1}^{N} y_i\big(x_i v_i-(x_i p_i+c_i)\big)\\
&S.T \quad \sum\nolimits_{i=1}^{N} y_i(x_i p_i+c_i)\leq B\\
&y_i \leq x_i \leq y_i M\\
&y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

۴ قیود

متغیر y_i را معرفی می‌کنیم که مشخص کننده آن است که آیا شرط iام برآورده شده یا خیر و در آن $y_i \in \{0,1\}$

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{شرط برآورده نشود} \\ 1 & \text{شرط برآورده شود} \end{cases}$$

مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود

$$minimize \quad \sum_{i=1}^{m} (1-y_i)c_i$$

$$S.T \quad y_i f_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$y_i \in \{0,1\}$$

۵ لجستیک (۱)

فرض کنید بیشترین بار کامیون iام p_i و بار jام (بار مرحله jام) آخرین بار بارگیری شده در کامیون iام باشد.

برای آنکه در مرحله jام بار jام در کامیون iام قرار بگیرد باید در آن مرحله بار حاضر در کامیون iام که برابر $p_i - w_i$ است(دقت کنید بار jام آخرین بار کامیون iام بود) کوچکتر از بار مرحله jام سایر کامیون‌ها ($p_\alpha[j]$) باشد. از طرفی بار مرحله jام هر کامیون نیز برابر یا کوچکتر از بیشینه بار آن است. به عبارتی $p_\alpha[j] \leq p_\alpha$. بنابراین

$$p_i - w_j \leq p_\alpha \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i - w_j \leq p_1 \\ \vdots \\ p_i - w_j \leq p_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k(p_i - w_j) \leq \sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha$$

$$\Rightarrow \; p_i - w_j \leq \frac{1}{k} \sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha \qquad (I)$$

از طرفی می‌دانیم $\sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha = \sum_{l=1}^{n} w_l$ پس $\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{n} w_l$. برای مقدار بهینه که از الگوریتم بهینه بدست آمده نیز از قبل می‌دانیم $\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{n} w_l \leq p^*$ بنابراین

$$\frac{1}{k} \sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha \leq p^*$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} \quad p_i - w_j \leq p^*$$

$$\Rightarrow \quad p_i \leq p^* + w_j \qquad (II)$$

کاملا واضح است که بیشینه بار بهینه (p^*) از وزن هر باری بزرگتر است به عبارتی $w_j \leq p^*$ بنابراین با جایگذاری در (II) خواهیم داشت

$$p_i \leq 2p^*$$

۶ لجستیک (۲)

پیشتر در سوال قبل داشتیم $\begin{cases} p_i - w_j \leq p_1 \\ \vdots \\ p_i - w_j \leq p_k \end{cases}$ که میتوانیم آن را با نامساوی‌های زیر جایگزین کنیم

$$\begin{cases} p_i - w_j \leq p_1 \\ \vdots \\ p_i - w_j \leq p_i - w_j \\ \vdots \\ p_i - w_j \leq p_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k(p_i - w_j) \leq \sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha - w_j$$

$$\Rightarrow \quad p_i \leq \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha + \left(1 - \frac{1}{k}\right) w_j$$

در سوال قبل بدست آوردیم $\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha \leq p^*$. از طرفی داشتیم $w_j \leq p^*$ و بنابراین $\left(1-\frac{1}{k}\right) w_j \leq \left(1-\frac{1}{k}\right) p^*$ پس

$$p_i \leq p^* + \left(1 - \frac{1}{k}\right) p^*$$

که اگر قرار دهیم $k = 2$ خواهیم داشت

$$p_i \leq \frac{3}{2} p^*$$

۷ تور لیدر

متغیرهای مسئله را x_{ij} در نظر می‌گیریم که مشخص کننده آن است که آیا از مسیر شهر i به j استفاده می‌کنیم یا خیر و در آن $x_{ij} \in \{0, 1\}$. تابع هزینه برابر است با

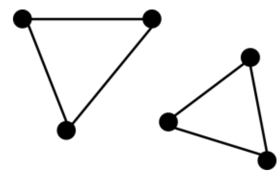
$$\sum_{<i>} \sum_{<j>} x_{ij} c_{ij}$$

با توجه به اینکه گفته شده هر شهر دقیقا یکبار بازدید شود و علاوه بر آ به مبدا نیز بازگردند بنابراین لازم است از مسیرهای ورودی به هر شهر و مسیرهای خارج شده از آن هر کدام دقیقا از یکی استفاده شود. بنابراین قید ها برابرند با

$$\sum_{<j>} x_{ij} = 1$$ از هر شهر تنها یکی از مسیرهای خروجی‌اش استفاده شود

$$\sum_{<i>} x_{ij} = 1$$ از هر شهر تنها یکی از مسیرهای ورودی‌اش استفاده شود

با تنها استفاده از این قیود به مشکل برخواهیم خورد؛ مثلا در مثال زیر مسیرها شرایط قیود ذکر شده را دارند ولی ترکیب نشان داده شده عملا غیرممکن است.



بنابراین لازم است قید دیگری معرفی کنیم. متغیرهای دیگری به صورت u_i و $i = 1, \dots, n$ معرفی می‌کنیم که نشان دهنده ترتیب بازدید از هر شهری هستند. مثلا از آنجایی که همیشه از شهر اول شروع به حرکت می‌کنیم بنابراین $u_1 = 1$ و اگر مثلا بعد از شهر اول از شهر سوم بازدید کنیم خواهیم داشت $u_3 = 1$. نامساوی $u_i < u_j$ نشان دهنده آن است که شهر iام پیش از شهر jام بازدید شده است. شرط زیر را به قیود مسئله اضافه می‌کنیم که به شرط miller-Tucker-Zemlin معروف است

$$u_j + (n-1)\left(1 - x_{ij}\right) \geq u_i + 1 \qquad \forall i, j \in \{2, 3, \dots, n\}$$

بنابراین مسئله به فرم زیر در می‌آید

$$minimize \quad \sum_{<i>} \sum_{j \neq i, <j>} x_{ij} c_{ij}$$

$$S.T \quad \sum_{<j>, j \neq i} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{<i>, i \neq j} x_{ij} = 1$$

$$u_j + (n-1)\left(1 - x_{ij}\right) \geq u_i + 1 \qquad \forall i, j \in \{2, 3, \dots, n\}$$

$$2 \leq u_i \leq n \qquad 2 \leq i \leq n$$