



بهینه‌سازی محدب ۲ (۱-۲۵۰۸۸)

تمرین سری اول

ترم پاییز ۱۴۰۳-۰۴

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر حامد شاه‌منصوری

تمارینی که با علامت (*) مشخص شده‌اند امتیازی هستند.

۱ تبدیل مساله به LP

مسائل زیر را به صورت مساله LP بنویسید.

۱.

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1$$

۲.

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_\infty$$

۳.

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{x}\|_1$$

$$\text{subject to} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_\infty \leq 1$$

۲ تولید آلیاژ!

یک تولیدکننده آلیاژ قصد دارد آلیاژی از تیتانیوم را تولید کند که محتوای آن ۶۰٪ تیتانیوم، ۳۰٪ آهن و ۱۰٪ منگنز است. برای این منظور ۵ نوع آلیاژ در بازار وجود دارد که قیمت و محتویات آن‌ها به شرح زیر است:

آلیاژ	۱	۲	۳	۴	۵
درصد تیتانیوم	۱۰	۵۰	۳۰	۱۰	۷۰
درصد آهن	۸۰	۱۵	۱۰	۹۰	۰
درصد منگنز	۱۰	۳۵	۶۰	۰	۳۰
قیمت (دلار بر کیلوگرم)	۱۵	۴۰	۳۵	۹	۸۰

آلیاژ مورد نظر قرار است از مخلوط نسبت درستی از آلیاژهای موجود در بازار تهیه شود. تولیدکننده قصد دارد که کمترین هزینه را جهت تولید مقدار ثابتی از آلیاژ مورد نظر پردازد.

۱. این مساله را بصورت یک مساله LP بنویسید.

۲. (*) با استفاده از کتابخانه **cvxpy** در پایتون این مساله را حل کنید.

۳ فروشنده!

فروشنده‌ای را در نظر بگیرید که قصد تامین N کالای مختلف برای فروش دارد. او برای خرید کالای i باید هزینه ثابت c_i را علاوه بر p_i که هزینه هر قلم کالا است پردازد. برای مثال هزینه خرید دو واحد از کالا i برابر با $2p_i + c_i$ است. می‌دانیم فروشنده هر واحد کالای i را به قیمت v_i به فروش می‌رساند. مساله بهینه‌سازی ای بنویسید که تعیین کند از هر کالا چه تعداد باید خریداری شود تا سود فروشنده بیشینه شود. بودجه اولیه فروشنده B است.

۴ قيود!

تعداد m قيد به صورت $f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0, \dots, f_n(x) \leq 0$ داریم. می‌دانیم برآورده نشدن قيد i هزینه $c_i > 0$ خواهد داشت. مساله بهینه‌سازی ای بنویسید که هزینه کل را کمینه کند.

۵ لجستیک! (۱)

یک شرکت در نظر دارد که n قطعه کالا با نامهای $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ را با $k > 1$ کامیون باربری حرکت دهد. برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ می‌دانیم وزن کالای f_i برابر با w_i است. فرض کنید هر کامیون می‌تواند مقدار نامتناهی بار حمل کند. هدف این است که حداکثر مقدار باری که هر کامیون حمل می‌کند را کمینه کنیم. فرض کنید مقدار بهینه برای این کار p^* باشد. الگوریتم حریصانه زیر را در نظر بگیرید:

فرض کنید کالاها را به ترتیب تصادفی چیده‌ایم. در مرحله i -ام کالای i -ام را در نظر می‌گیریم و آن را درون کامیونی می‌گذاریم که کمترین مقدار وزن روی آن باشد. مستقل از ترتیب اولیه کالاها ثابت کنید بعد از اجرای کامل این الگوریتم، وزن روی کامیونی که بیشترین بار را حمل می‌کند حداکثر $2p^*$ است.

۶ لجستیک! (۲)

سوال قبل را در حالت $k = 2$ در نظر بگیرید و ثابت کنید با همان الگوریتم حریصانه پرسش قبل، بعد از اجرای کامل الگوریتم وزن روی کامیونی که بیشترین بار را حمل می‌کند حداکثر $\frac{3}{2}p^*$ است.

۷ تورلیدر!

یک تورلیدر می‌خواهد گروه خود را به بازدید از n شهر ببرد، به گونه‌ای که هر شهر را دقیقاً یک بار ببیند و در نهایت نیز به مبدا بازگردند. فرض کنید مبدا شهر شماره ۰ باشد. اگر هزینه سفر از شهر i به شهر j برابر با c_{ij} باشد، مساله بهینه‌سازی ای بنویسید که مسیری که کمترین هزینه را دارد را برای تورلیدر مشخص کند. نوع این مساله بهینه‌سازی را مشخص کنید.