Chapter 1

群

1.1 定義與性質

定義 1.1 (群)**.** 一個代數結構 $(G, \cdot_G)$ 被稱為群 ***(Group)***，滿足以下條件：

(G1) 有封閉律，對於所有 $a, b \in G$，$a \cdot_G b \in G$
(G2) 有結合律，對於所有 $a, b, c \in G$，$(a \cdot_G b) \cdot_G c = a \cdot_G (b \cdot_G c)$
(G3) 有單位元素 $e \in G$，使得所有 $a \in G$，$e \cdot_G a = a \cdot_G e = a$
(G4) 對於每個元素 $a \in G$ 都有反元素 $b \in G$，使得 $a \cdot_G b = b \cdot_G a = e$

此時 $\cdot_G$ 稱為**群乘法**。

性質 1.2 (群的性質)**.** 若 $(G, \cdot_G)$ 為一個群，則有以下性質：

1. 單位元素唯一。
2. 對於所有 $a \in G$，其反元素唯一。

證明

1. 根據定理 **??** 得證。
2. 根據定理 **??** 得證。

□

定義 1.3 (符號簡化)**.** 若一個群 G 的二元運算為群乘法 $\cdot_G$，則我們可對符號簡化：

1. 對於所有 $a, b \in G$，$a \cdot_G b \Leftrightarrow ab$。
2. 對於所有 $a \in G$，其反元素記為 a^{-1}。

3. 定義群連乘 a^k，$k \in \mathbb{Z}$：

(a) $k = 0$ 時，$a^k = a^0 = e$

(b) $k > 0$ 時，$a^k = a \cdot_G a^{k-1} = aa^{k-1}$

(c) $k < 0$ 時，$a^k = a^{-1} \cdot_G a^{k+1} = a^{-1}a^{k+1}$

性質 1.4. 若 $(G, \cdot_G)$ 爲一個群，對於所有 $a, b \in G$，則有以下性質：

1. $(a^{-1})^{-1} = a$

2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

註. $(a^{-1})^{-1}$ 應理解爲「a^{-1} 的反元素」。

證明

1. 我們知道 a^{-1} 是 a 的反元素，且 $(a^{-1})^{-1}$ 也是 a^{-1} 的反元素，根據群的定義 **??**，我們知道

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$
$$\left(a^{-1}\right)^{-1}a^{-1} = a^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1} = e$$

因此

$$\begin{aligned}
a &= ea && \text{群的定義 ??} \\
&= (\left(a^{-1}\right)^{-1}a^{-1})a && \left(a^{-1}\right)^{-1}a^{-1} = e \\
&= \left(a^{-1}\right)^{-1}(a^{-1}a) && \text{群的定義 ??} \\
&= \left(a^{-1}\right)^{-1}e && a^{-1}a = e \\
&= \left(a^{-1}\right)^{-1} && \text{群的定義 ??}
\end{aligned}$$

2. 做爲習題。

□

性質 1.5 (群的消去律). 若 $(G, \cdot_G)$ 爲一個群，則 G 滿足消去律。即對於所有 $a, b, c \in G$，若

1. $ab = ac$，則 $b = c$

2. $ba = ca$，則 $b = c$

證明 根據定理 **??** 得證。 □

定理 1.6. 若 $(G, \cdot_G)$ 爲一個群，則對於任意 $a, b \in G$，x, y 是未知數，$ax = b$ 和 $ya = b$ 存在唯一解。

證明 由定理 **??** 可知唯一解爲 $x = a^{-1}b$ 且 $y = ba^{-1}$。 □

1.2 子群