

Chapter 1

代數結構

1.1 簡介

定義 1.1 (二元運算). 一個函數 $\mathcal{R} : A \times B \rightarrow C$, 對於所有 $a \in A, b \in B$, 存在唯一的 $c \in C$, 使得 $\mathcal{R}(a, b) = c$, 我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A \times B$ 到 C 的二元運算 (*Binary Operation*), 此時記為 $a\mathcal{R}b = c$ 。

註. 若 $A = B = C = S$, 我們稱 \mathcal{R} 是定義在 S 上的二元運算。

範例 1.2. 下列為二元運算：

1. 整數加法 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
2. 實數乘法 $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
3. 實係數矩陣乘法 $\cdot: \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n \times p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$
4. 充要條件 $\Leftrightarrow: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \{\top, \perp\}$
5. $\mathcal{O}(n^2)$ 的 LCS 演算法 $\text{LCS}: \{0, 1\}^m \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$

定義 1.3 (n 元運算). 一個函數 $\mathcal{R}: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$, 對於所有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 存在唯一的 $b \in B$, 使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$, 我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 B 的 n 元運算 (*n -ary Operation*)。

定義 1.4 (代數結構與代數系統). 一代數結構 (*Algebraic Structure*) $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

1. 有一非空集合 S
2. $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的二元運算
3. 一系列的公理 \mathcal{A}

若 $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 為代數系統 (*Algebraic System*)。

範例 1.5. 下列為代數結構：

1. 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
2. 複係數矩陣乘法 $(\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}), \cdot)$
3. 正整數與最大公因數 $(\mathbb{Z}^+, \text{gcd})$ ，其中最大公因數為二元運算 $\text{gcd} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$
4. 函數合成 $(\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$

1.2 二元運算的性質

1.2.1 基本性質

定義 1.6 (封閉律). 一個代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}b \in S$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 滿足封閉律 (*Closure*)。

範例 1.7. 說明下列代數結構是否滿足封閉律。

1. $(\mathbb{R}, +)$
2. $(\mathbb{N}, /)$
3. $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \cdot)$
4. $(\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}), \cdot)$
5. $(\mathbb{Q}_c, +)$
6. $(\mathbb{R}^2, \spadesuit)$ ，定義 $\spadesuit : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，規則為：對所有 $a \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ，使得 $a\spadesuit(x, y) = (x + a, y - a)$

證明

3. 我們取任意 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ ，計算

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2\sqrt{2}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{2}) \\ &= (a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \end{aligned}$$

發現 $a_1b_1 + 2a_2b_2 \in \mathbb{Z}$ 且 $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$ ，因此 $(a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ，因此 \cdot 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 中滿足封閉律。

5. 令 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}_c$ ，我們發現 $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \notin \mathbb{Q}_c$ ，因此 $(\mathbb{Q}_c, +)$ 不具封閉律。

□

定義 1.8 (結合律). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b, c \in S$ ，使得 $(a\mathcal{R}b)\mathcal{R}c = a\mathcal{R}(b\mathcal{R}c)$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 具有**結合律** (*Associativity, Associative property*)。

定義 1.9 (交換律). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}b = b\mathcal{R}a$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 具有**交換律** (*Commutativity, Commutative property*)。

範例 1.10. 說明下列代數結構是否有交換律。

$$1. (\mathbb{N}, \mathcal{R}), \forall a, b \in \mathbb{N}, a\mathcal{R}b = a^b$$

證明

1. 計算 $3\mathcal{R}2 = 3^2 = 9$ 、 $2\mathcal{R}3 = 2^3 = 8$ ，因為 $9 \neq 8$ ，因此 $3\mathcal{R}2 \neq 2\mathcal{R}3$ ， \mathcal{R} 不具交換律。

□

定義 1.11 (吸收律). 一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得

$$a\mathcal{R}_1(a\mathcal{R}_2b) = a$$

$$a\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1b) = a$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 在 S 上滿足**吸收律** (*Absorption law*)。

註. 吸收律是定義在一對二元運算上，因此不能單獨定義一個運算子具有吸收律。

定義 1.12 (分配律). 一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$ ，使得

$$a\mathcal{R}_1(b\mathcal{R}_2c) = (a\mathcal{R}_1b)\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1c)$$

$$(b\mathcal{R}_2c)\mathcal{R}_1a = (b\mathcal{R}_1a)\mathcal{R}_2(c\mathcal{R}_1a)$$

，則稱二元運算 \mathcal{R}_1 在 S 上對 \mathcal{R}_2 具有**分配律** (*Distributivity, Distributive property*)。

註. 儘管 \mathcal{R}_1 對 \mathcal{R}_2 有分配律，但 \mathcal{R}_2 未必對 \mathcal{R}_1 有分配律。

1.2.2 單位元素

定義 1.13 (單位元素). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若

- 存在 $e_l \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $e_l \mathcal{R} a = a$ ，則 e_l 為左單位元素 (*Left identity*)
- 存在 $e_r \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $a \mathcal{R} e_r = a$ ，則 e_r 為右單位元素 (*Right identity*)
- 存在 $e \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $e \mathcal{R} a = a \mathcal{R} e = a$ ，則 e 為單位元素 (*Identity*)

定理 1.14 (單位元素存在性). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若存在左單位元素 e_l 、右單位元素 e_r ，則 $e_l = e_r$ ，即單位元素存在。

證明 根據定義 1.13，我們知道對於所有元素 $a \in S$ ， $e_l \mathcal{R} a = a$ 且 $a \mathcal{R} e_r = a$ ，我們嘗試去計算 $e_l \mathcal{R} e_r$ ，因為 e_l 是左單位元素，因此

$$e_l \mathcal{R} e_r = e_r$$

又因為 e_r 是右單位元素，因此

$$e_l \mathcal{R} e_r = e_l$$

我們得到

$$e_l = e_l \mathcal{R} e_r = e_r$$

根據定義 1.13，我們知道有一個單位元素即是 $e = e_l = e_r$ (因為左單位元素和右單位元素是同一個)。□

定理 1.15 (單位元素唯一性). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若存在單位元素，則單位元素唯一。

證明 不失一般性假設有兩個單位元素 e_1 和 e_2 ，我們同樣下去計算 $e_1 \mathcal{R} e_2$ ，因為 e_1 是單位元素，所以

$$e_1 \mathcal{R} e_2 = e_2$$

同時， e_2 也是單位元素，因此

$$e_1 \mathcal{R} e_2 = e_1$$

我們得到

$$e_1 = e_1 \mathcal{R} e_2 = e_2$$

□

1.2.3 反元素

定義 1.16 (反元素). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 $e \in S$ ，若對 $a \in S$ ，

- 存在 $b_l \in S$ ， $b_l \mathcal{R} a = e$ ，則 b_l 稱為 a 的左反元素 (*Left inverse*)
- 存在 $b_r \in S$ ， $a \mathcal{R} b_r = e$ ，則 b_r 稱為 a 的右反元素 (*Right inverse*)
- 存在 $b \in S$ ， $b \mathcal{R} a = a \mathcal{R} b = e$ ，則 b 稱為 a 的反元素 (*Inverse*)， a 又稱可逆元素 (*Invertible element*)

若對所有 $a \in S$ 都有反元素，則稱 \mathcal{R} 在 S 上有反元素 (*Inverse property*)。

性質 1.17. 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，則 e 的反元素為 e 。

證明 根據定義 1.13，我們知道 $e \mathcal{R} e = e$ ，同時也符合反元素的定義。 \square

定理 1.18 (反元素存在性). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且 \mathcal{R} 具有結合律，若 $a \in S$ 存在左反元素 b_l ，右反元素 b_r ，則 $b_l = b_r$ ，即反元素存在。

證明 做為習題。 \square

定理 1.19 (反元素唯一性). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且 \mathcal{R} 具有結合律，若 $a \in S$ 存在反元素，則反元素唯一。

證明 做為習題。 \square

定理 1.20. 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

1. a) 有左單位元素 e_l
b) 對所有 $a \in S$ ，存在左反元素
2. a) e_l 是單位元素
b*) 對所有 $a \in S$ ，存在反元素

證明 我們要證明第 1 項和第 2 項等價，因此我們有兩部分要證明：第一、證明第 1 項可以推到第 2 項；第二、證明第 2 項可以推到第 1 項。

1. 我們先證第 2 項推到第 1 項 (\Leftarrow)：

- (a) 根據定義 1.13，我們有單位元素 e_l ，換句話說 e_l 也是左單位元素。
- (b) 同樣地，根據定義 1.16，我們馬上就可以得到對於所有 $a \in S$ ，存在左反元素。

2. 再證第 1 項可以推到第 2 項 (\Rightarrow)：

(a) 根據定義 1.13，我們證明 e_l 是單位元素，只要證明對所有 $a \in S$ ，都符合 $a\mathcal{R}e_l = a$ 即可。根據定義 1.16，假設 b_l 是 a 的左反元素，我們有

$$b_l\mathcal{R}a = e_l$$

假設 d_l 是 b_l 的左反元素，我們也可得到：

$$d_l\mathcal{R}b_l = e_l$$

接著我們計算 $a\mathcal{R}e_l$ ：

$$\begin{aligned}
a\mathcal{R}e_l &= e_l\mathcal{R}(a\mathcal{R}e_l) && e_l \text{ 是 } (a\mathcal{R}e_l) \text{ 的左單位元素} \\
&= (d_l\mathcal{R}b_l)\mathcal{R}(a\mathcal{R}e_l) && \text{因為 } d_l\mathcal{R}b_l = e_l \\
&= d_l\mathcal{R}(b_l\mathcal{R}(a\mathcal{R}e_l)) && \text{結合律} \\
&= d_l\mathcal{R}((b_l\mathcal{R}a)\mathcal{R}e_l) && \text{結合律} \\
&= d_l\mathcal{R}(e_l\mathcal{R}e_l) && \text{因為 } b_l\mathcal{R}a = e_l \\
&= d_l\mathcal{R}e_l && e_l \text{ 是 } e_l \text{ 的左單位元素} \\
&= d_l\mathcal{R}(b_l\mathcal{R}a) && \text{因為 } b_l\mathcal{R}a = e_l \\
&= (d_l\mathcal{R}b_l)\mathcal{R}a && \text{結合律} \\
&= e_l\mathcal{R}a && \text{因為 } d_l\mathcal{R}b_l = e_l \\
&= a && e_l \text{ 是 } a \text{ 的左單位元素}
\end{aligned}$$

得出對所有 $a \in S$ ，使得 $e_l\mathcal{R}a = a\mathcal{R}e_l = e_l$ ，因此 e_l 是單位元素。

(b) 做為習題。

□

註. 若是只有右單位元素 e_r ，以及對所有 $a \in S$ 有右反元素 b_r 的時候，也會有類似的性質。

1.2.4 零元素與零因子

定義 1.21 (零元素). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若

- 存在 $z_l \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $z_l\mathcal{R}a = z_l$ ，則 z_l 為左零元素 (*Left zero element*)
- 存在 $z_r \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $a\mathcal{R}z_r = z_r$ ，則 z_r 為右零元素 (*Right zero element*)

- 存在 $z \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $zRa = aRz = z$ ，則 z 為零元素 (Zero element)

註. 零元素又稱吸收元素 (Absorbing element)。

定理 1.22 (零元素存在性). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 具有結合律，若存在左零元素 z_l ，右零元素 z_r ，則 $z_l = z_r$ ，即零元素存在。

證明 做為習題。 □

定理 1.23 (零元素唯一性). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 具有結合律，若存在零元素，則零元素唯一。

證明 做為習題。 □

定理 1.24. 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 有單位元素 e 、零元素 z ，若 $|S| \geq 2$ ，則 $e \neq z$ 。

證明 我們用反證法證明，假設 $e = z$ ，則對於所有 $a \in S$ ，我們發現

$$\begin{array}{ll}
 a = aRe & e \text{ 是單位元素} \\
 = aRz & e = z \\
 = z & z \text{ 是零元素} \\
 = e & e = z
 \end{array}$$

我們求出所有的 $a = e = z$ 都是相同的元素，因此 $|S| = 1$ ，與 $|S| \geq 2$ 矛盾。 □

性質 1.25. 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若 \mathcal{R} 在 S 上有零元素 z 且 $z \neq e$ ，則 z 沒有反元素。

證明 做為習題。 □

定義 1.26 (零因子). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中存在零元素 z ，若 $a, b \in S$ 且 $a, b \neq z$ ，使得 $aRb = z$ ，則 a, b 稱為零因子 (Zero divisor)。

定理 1.27 (零因子性質). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 滿足以下條件：

- 有結合律
- 存在單位元素 e
- 存在零元素 z

若 $a, b \in S$ 是零因子，則 a, b 沒有反元素。

證明 因為 a, b 是零因子，所以 $aRb = z$ 且 $a, b \neq z$ 。先假設 a 有反元素 $c \in S$ ，也就是 $aRc = cRa = e$ ，我們知道

$$\begin{aligned}
 z &= cRz & z \text{ 是零元素, 因此 } cRz &= z \\
 &= cR(aRb) & aRb &= z \\
 &= (cRa)Rb & \text{結合律} \\
 &= eRb & c \text{ 是 } a \text{ 的反元素, 因此 } cRa &= e \\
 &= b & e \text{ 是單位元素}
 \end{aligned}$$

我們求出 $z = b$ ，與原來的前提 ($a, b \neq z$) 矛盾。同理， b 也沒有反元素。 \square

定義 1.28 (消去律). 一個封閉的代數結構 (S, R) 中，對所有 $a, b, c \in S$ ，若

- $aRb = aRc$ 可得到 $b = c$ ，則 R 在 S 上有左消去律 (*Left cancellation law*)。
- $bRa = cRa$ 可得到 $b = c$ ，則 R 在 S 上有右消去律 (*Right cancellation law*)。
- R 滿足左消去律和右消去律，則 R 在 S 上有消去律 (*Cancellation law*)。

定理 1.29 (消去律性質). 一個封閉的代數結構 (S, R) 滿足以下條件：

- 有結合律
- 有單位元素 e
- 對所有 $a \in S$ 都有反元素

則 R 在 S 上有消去律。

證明 根據定義 1.28，我們要驗證 R 有左消去律和右消去律。

左消去律 對於所有 $a, b, c \in S$ ，驗證 $aRb = aRc$ 是否能推導出 $b = c$ 。假設 a 有反元素 $d \in S$ ，使得 $dRa = aRd = e$ ，則

$$\begin{aligned}
 aRb = aRc &\Rightarrow dR(aRb) = dR(aRc) & \text{等式兩邊同時與 } d \text{ 做運算} \\
 &\Rightarrow (dRa)Rb = (dRa)Rc & \text{結合律} \\
 &\Rightarrow eRb = eRc & d \text{ 是 } a \text{ 的反元素} \\
 &\Rightarrow b = c & e \text{ 是單位元素}
 \end{aligned}$$

右消去律 做為習題。

□

定理 1.30. 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

1. (a) e 是單位元素
(b) 對所有 $a \in S$ ，存在反元素
2. 對於任意 $a, b \in S$ ， x, y 是未知數，方程式 $a\mathcal{R}x = b$ 和 $y\mathcal{R}a = b$ 存在唯一解。

證明

1. (\Rightarrow) 方向：已知有單位元素 e 和反元素，我們要證存在性和唯一性。

(a) 先證存在性，我們只要找出一組解酒可以證明存在性。假設 $c \in S$ 是 a 的反元素，我們可以找出當 $x = c\mathcal{R}b$ 時，

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}x &= a\mathcal{R}(c\mathcal{R}b) & x &= c\mathcal{R}b \\ &= (a\mathcal{R}c)\mathcal{R}b & & \text{結合律} \\ &= e\mathcal{R}b & c & \text{是 } a \text{ 的反元素} \\ &= b & e & \text{是單位元素} \end{aligned}$$

(b) 再證唯一性，假設 x 有兩個解 d 和 d' ，亦即 $a\mathcal{R}d = b = a\mathcal{R}d'$ ，則

$$\begin{aligned} d &= e\mathcal{R}d & e & \text{是單位元素} \\ &= (c\mathcal{R}a)\mathcal{R}d & c\mathcal{R}a &= e \\ &= c\mathcal{R}(a\mathcal{R}d) & & \text{結合律} \\ &= c\mathcal{R}(a\mathcal{R}d') & a\mathcal{R}d &= b = a\mathcal{R}d' \\ &= (c\mathcal{R}a)\mathcal{R}d' & & \text{結合律} \\ &= e\mathcal{R}d' & c\mathcal{R}a &= e \\ &= d' & e & \text{是單位元素} \end{aligned}$$

(c) 同理，也可證明 y 存在唯一解 $b\mathcal{R}c$ 。

2. (\Leftarrow) 方向：做為習題。

□

1.2.5 符號簡化

定義 1.31 (單位元素記號). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 e 為**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記為 0_S 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 e 為**乘法單位元素 (Multiplicative identity)**， e 記為 1_S 。

註. 1. $+_S$ 不是真的代表實數或複數的加法運算，而是代表他在 S 上有類似我們常見的加法性質，因此用這個符號容易聯想； \cdot_S 亦然。
 2. 使用 0 和 1 做為記號只是方便我們去聯想他的性質，事實上並不是實數的「0」和「1」，只是單純的符號。

定義 1.32 (反元素記號). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$ ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 b 為**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記為 $-a$ 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 b 為**乘法反元素 (Multiplicative inverse)**，此時 b 記為 a^{-1} 。

註. 同樣地， $-a$ 和 a^{-1} 只是單純的符號，不要和減法與倒數搞混。

定義 1.33 (連加記號). 若一個封閉的代數結構 $(S, +_S)$ 的二元運算為加法 $+_S$ ，且滿足以下條件：

- 有單位元素 0_S
- 對所有 $a \in S$ 有反元素 $-a$

，則定義連加記號 ka ， $k \in \mathbb{Z}$ ：

1. $k = 0$ 時， $0a = 0_S$
2. $k > 0$ 時， $ka = a +_S (k-1)a$
3. $k < 0$ 時，

1.2.6 其他性質

定義 1.34 (連乘). 在一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，對所有 $a \in S$ 定義 a^k ， $k \in \mathbb{Z}^+$ ：

1. 若 $k = 1$ ，則 $a^k = a^1 = a$
2. 若 $k > 1$ ，則 $a^k = a \mathcal{R} a^{k-1}$

定義 1.35 (冪等元素與冪等律). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若有 $a \in S$ ，使得 $a \mathcal{R} a = a$ ，則 a 稱為**冪等元素 (Idempotent element)**。若所有 $a \in S$ 都是冪等元素，則稱二元運算 \mathcal{R} 在 S 上滿足**冪等律 (Idempotent)**。

定義 1.36 (冪零律). 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a \in S$ ，使得 $a \mathcal{R} a = a$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 滿足**冪零律 (Idempotent)**。

1.3 同態與同構

習題

1. 定義一個在 \mathbb{Z} 上二元運算 \diamond ，對所有 $x, y \in \mathbb{Z}$ ，使得 $x \diamond y = 3x + y - 4$ 。問 $((7 \diamond 5) \diamond 3) - 7 \diamond (5 \diamond 3)$ ？
2. 證明定理 1.18。
3. 證明定理 1.19。
4. 證明定理 1.20 第 2b 項。
5. 證明定理 1.22。
6. 證明定理 1.23。
7. 證明性質 1.25。
8. 證明定理 1.29 右消去律部分。
9. 證明定理 1.30 (\Leftarrow) 部分。
10. 一封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 有交換律，試證明：
 - (a) 若 \mathcal{R} 有左單位元素 e_l ，則單位元素存在
 - (b) 對所有 $a \in S$ 都有左反元素 b_l ，則反元素存在
11. 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 滿足以下條件：
 - 有結合律
 - 有左單位元素 e_l
 - 對所有 $a \in S$ 都有左反元素則 \mathcal{R} 在 S 上有左消去律。