Fundamental Abstract Algebra
基礎抽象代數

許胖

板燒高中

January 16, 2015

大綱

定義 (二元運算)

一個函數 $\mathcal{R}: A \times B \to C$，對於所有 $a \in A$、$b \in B$，存在**唯一**的 $c \in C$，使得 $\mathcal{R}(a, b) = c$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A \times B$ 到 C 的**二元運算** **(Binary Operation)**，此時記為 $a\mathcal{R}b = c$。

二元運算

定義 (二元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A \times B \to C$，對於所有 $a \in A$、$b \in B$，存在**唯一**的 $c \in C$，使得 $\mathcal{R}(a, b) = c$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A \times B$ 到 C 的**二元運算 (Binary Operation)**，此時記為 $a\mathcal{R}b = c$。

註

若 $A = B = C = S$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是定義在 S 上的二元運算。

範例

範例

下列爲二元運算：

範例

範例

下列爲二元運算：

1. 整數加法 $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

範例

範例

下列爲二元運算：

1. 整數加法 $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
2. 實數乘法 $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

範例

下列爲二元運算：

1. 整數加法 $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
2. 實數乘法 $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
3. 實係數矩陣乘法 $\cdot : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$

範例

下列爲二元運算：

1. 整數加法 $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
2. 實數乘法 $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
3. 實係數矩陣乘法 $\cdot : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$
4. 充要條件 $\Leftrightarrow : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \{\top, \bot\}$

範例

下列爲二元運算：

1. 整數加法 $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
2. 實數乘法 $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
3. 實係數矩陣乘法 $\cdot : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$
4. 充要條件 $\Leftrightarrow : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \{\top, \bot\}$
5. $\mathcal{O}(n^2)$ 的 LCS 演算法 $\mathrm{LCS} : \{0,1\}^m \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^k$

n 元運算與代數系統

定義 (n元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$，對於所有 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，存在**唯一**的 $b \in B$，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n-ary Operation)**。

n 元運算與代數系統

定義 (n元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$，對於所有 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，存在**唯一**的 $b \in B$，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n-ary Operation)**。

定義 (代數結構與代數系統)

一代數結構 (Algebraic Structure) $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

若 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 為**代數系統 (Algebraic System)**。

n 元運算與代數系統

定義 (n元運算)

一個函數 $\mathcal{R}: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$，對於所有 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，存在**唯一**的 $b \in B$，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n-ary Operation)**。

定義 (代數結構與代數系統)

一代數結構 (Algebraic Structure) $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

1. 有一非空集合 S

若 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ 爲定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 爲**代數系統 (Algebraic System)**。

n 元運算與代數系統

定義 (n元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$，對於所有 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，存在**唯一**的 $b \in B$，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n-ary Operation)**。

定義 (代數結構與代數系統)

一**代數結構 (Algebraic Structure)** $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

1. 有一非空集合 S
2. $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ 爲定義在 S 上的二元運算

若 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ 爲定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 爲**代數系統 (Algebraic System)**。

n 元運算與代數系統

定義 (n元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$，對於所有 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，存在**唯一**的 $b \in B$，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$，我們稱 $\mathcal{R}$ 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n-ary Operation)**。

定義 (代數結構與代數系統)

一**代數結構 (Algebraic Structure)** $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

1. 有一非空集合 S
2. $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ 爲定義在 S 上的二元運算
3. 一系列的公理 $\mathcal{A}$

若 $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ 爲定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ 爲**代數系統 (Algebraic System)**。

範例

下列爲代數結構：

範例

範例

下列爲代數結構：

1. 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

範例

範例

下列爲代數結構：

1. 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$
2. 複係數矩陣乘法 $(\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C}),\cdot)$

範例

範例

下列爲代數結構：

1. 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
2. 複係數矩陣乘法 $(\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C}), \cdot)$
3. 正整數與最大公因數 $(\mathbb{Z}^+, \mathrm{gcd})$，其中最大公因數爲二元運算 $\mathrm{gcd} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

範例

範例

下列爲代數結構：

1. 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
2. 複係數矩陣乘法 $(\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C}), \cdot)$
3. 正整數與最大公因數 $(\mathbb{Z}^+, \mathrm{gcd})$，其中最大公因數爲二元運算 $\mathrm{gcd} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$
4. 函數合成 $(\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$

基本性質 (1)

定義 (封閉律)

一個代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若對於所有 $a, b \in S$，使得 $a\mathcal{R}b \in S$，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 對 S 滿足**封閉律 (Closure)**。

基本性質 (1)

定義 (封閉律)

一個代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若對於所有 $a, b \in S$，使得 $a\mathcal{R}b \in S$，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 對 S 滿足**封閉律 (Closure)**。

定義 (結合律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$，使得 $(a\mathcal{R}b)\mathcal{R}c = a\mathcal{R}(b\mathcal{R}c)$，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 對 S 具有**結合律 (Associativity, Associative property)**。

基本性質 (1)

定義 (封閉律)

一個代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若對於所有 $a, b \in S$，使得 $a\mathcal{R}b \in S$，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 對 S 滿足**封閉律 (Closure)**。

定義 (結合律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$，使得 $(a\mathcal{R}b)\mathcal{R}c = a\mathcal{R}(b\mathcal{R}c)$，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 對 S 具有**結合律 (Associativity, Associative property)**。

定義 (交換律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若對於所有 $a, b \in S$，使得 $a\mathcal{R}b = b\mathcal{R}a$，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 對 S 具有**交換律 (Commutativity, Commutative property)**。

基本性質 (2)

定義 (吸收律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b \in S$，使得

$$a\mathcal{R}_1(a\mathcal{R}_2 b) = a$$
$$a\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1 b) = a$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 在 S 上滿足**吸收律 (Absorption law)**。

基本性質 (2)

定義 (吸收律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b \in S$，使得

$$a\mathcal{R}_1(a\mathcal{R}_2 b) = a$$
$$a\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1 b) = a$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 在 S 上滿足**吸收律 (Absorption law)**。

註

吸收律是定義在**一對**二元運算上，因此不能單獨定義一個運算子具有吸收律。

基本性質 (3)

定義 (分配律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$，使得

$$a\mathcal{R}_1(b\mathcal{R}_2 c) = (a\mathcal{R}_1 b)\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1 c)$$
$$(b\mathcal{R}_2 c)\mathcal{R}_1 a = (b\mathcal{R}_1 a)\mathcal{R}_2(c\mathcal{R}_1 a)$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1$ 在 S 上對 $\mathcal{R}_2$ 具有**分配律 (Distributivity, Distributive property)**。

基本性質 (3)

定義 (分配律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$，使得

$$a\mathcal{R}_1(b\mathcal{R}_2 c) = (a\mathcal{R}_1 b)\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1 c)$$
$$(b\mathcal{R}_2 c)\mathcal{R}_1 a = (b\mathcal{R}_1 a)\mathcal{R}_2(c\mathcal{R}_1 a)$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1$ 在 S 上對 $\mathcal{R}_2$ 具有**分配律 (Distributivity, Distributive property)**。

註

儘管 $\mathcal{R}_1$ 對 $\mathcal{R}_2$ 有分配律，但 $\mathcal{R}_2$ **未必**對 $\mathcal{R}_1$ 有分配律。

單位元素 (1)

定義 (單位元素)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若

- 存在 $e_l \in S$，對所有 $a \in S$，$e_l \mathcal{R} a = a$，則 e_l 爲**左單位元素 (Left identity)**
- 存在 $e_r \in S$，對所有 $a \in S$，$a \mathcal{R} e_r = a$，則 e_r 爲**右單位元素 (Right identity)**
- 存在 $e \in S$，對所有 $a \in S$，$e \mathcal{R} a = a \mathcal{R} e = a$，則 e 爲**單位元素 (Identity)**

單位元素 (2)

定理 (單位元素存在性)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若存在左單位元素 e_l、右單位元素 e_r，則 $e_l = e_r$，即單位元素存在。

單位元素 (2)

定理 (單位元素存在性)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若存在左單位元素 e_l、右單位元素 e_r，則 $e_l = e_r$，即單位元素存在。

定理 (單位元素唯一性)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若存在單位元素，則單位元素唯一。

反元素 (1)

定義 (反元素)

一個封閉的代數結構 $(S,\mathcal{R})$ 存在單位元素 $e\in S$，若對 $a\in S$，

- 存在 $b_l\in S$，$b_l\mathcal{R}a=e$，則 b_l 稱爲 a 的**左反元素 (Left inverse)**
- 存在 $b_r\in S$，$a\mathcal{R}b_r=e$，則 b_r 稱爲 a 的**右反元素 (Right inverse)**
- 存在 $b\in S$，$b\mathcal{R}a=a\mathcal{R}b=e$，則 b 稱爲 a 的**反元素 (Inverse)**，a 又稱**可逆元素 (Invertible element)**

若對所有 $a\in S$ 都有反元素，則稱 $\mathcal{R}$ 在 S 上**有反元素 (Inverse property)**。

反元素 (2)

性質

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，則 e 的反元素為 e。

反元素 (2)

性質

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，則 e 的反元素為 e。

定理 (反元素存在性*)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，且 $\mathcal{R}$ 具有結合律，若 $a \in S$ 存在左反元素 b_l，右反元素 b_r，則 $b_l = b_r$，即反元素存在。

反元素 (2)

性質

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，則 e 的反元素爲 e。

定理 (反元素存在性*)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，且 $\mathcal{R}$ 具有結合律，若 $a \in S$ 存在左反元素 b_l，右反元素 b_r，則 $b_l = b_r$，即反元素存在。

定理 (反元素唯一性*)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，且 $\mathcal{R}$ 具有結合律，若 $a \in S$ 存在反元素，則反元素唯一。

反元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

反元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

1. 1. 有左單位元素 e_l
   2. 對所有 $a \in S$，存在左反元素

反元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

1.
   1. 有左單位元素 e_l
   2. 對所有 $a \in S$，存在左反元素
2.
   1. e_l 是單位元素
   2. (*)對所有 $a \in S$，存在反元素

零元素 (1)

定義 (零元素)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若

- 存在 $z_l \in S$，對所有 $a \in S$，$z_l \mathcal{R} a = z_l$，則 z_l 爲左零元素 **(Left zero element)**
- 存在 $z_r \in S$，對所有 $a \in S$，$a \mathcal{R} z_r = z_r$，則 z_r 爲右零元素 **(Right zero element)**
- 存在 $z \in S$，對所有 $a \in S$，$z \mathcal{R} a = a \mathcal{R} z = z$，則 z 爲零元素 **(Zero element)**

零元素 (1)

定義 (零元素)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若

- 存在 $z_l \in S$，對所有 $a \in S$，$z_l \mathcal{R} a = z_l$，則 z_l 爲左零元素 **(Left zero element)**
- 存在 $z_r \in S$，對所有 $a \in S$，$a \mathcal{R} z_r = z_r$，則 z_r 爲右零元素 **(Right zero element)**
- 存在 $z \in S$，對所有 $a \in S$，$z \mathcal{R} a = a \mathcal{R} z = z$，則 z 爲零元素 **(Zero element)**

註

零元素又稱吸收元素 **(Absorbing element)**。

零元素 (2)

定理 (零元素存在性*)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 具有結合律，若存在左零元素 z_l，右零元素 z_r，則 $z_l = z_r$，即零元素存在。

零元素 (2)

定理 (零元素存在性*)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 具有結合律，若存在左零元素 z_l，右零元素 z_r，則 $z_l = z_r$，即零元素存在。

定理 (零元素唯一性*)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 具有結合律，若存在零元素，則零元素唯一。

零元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 有單位元素 e、零元素 z，若 $|S| \geq 2$，則 $e \neq z$。

零元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 有單位元素 e、零元素 z，若 $|S| \geq 2$，則 $e \neq z$。

性質

(*) 一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，若 $\mathcal{R}$ 在 S 上有零元素 z 且 $z \neq e$，則 z 沒有反元素。

零因子

定義 (零因子)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中存在零元素 z，若 $a, b \in S$ 且 $a, b \neq z$，使得 $a\mathcal{R}b = z$，則 a, b 稱爲零因子 **(Zero divisor)**。

零因子

定義 (零因子)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中存在零元素 z，若 $a, b \in S$ 且 $a, b \neq z$，使得 $a\mathcal{R}b = z$，則 a, b 稱為零因子 **(Zero divisor)**。

定理 (零因子性質)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 滿足以下條件：

- 有結合律
- 存在單位元素 e
- 存在零元素 z

若 $a, b \in S$ 是零因子，則 a, b 沒有反元素。

消去律 (1)

定義 (消去律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，對所有 $a, b, c \in S$，若

- $a\mathcal{R}b = a\mathcal{R}c$ 可得到 $b = c$，則 $\mathcal{R}$ 在 S 上有**左消去律 (Left cancellation law)**。
- $b\mathcal{R}a = c\mathcal{R}a$ 可得到 $b = c$，則 $\mathcal{R}$ 在 S 上有**右消去律 (Right cancellation law)**。
- $\mathcal{R}$ 滿足左消去律和右消去律，則 $\mathcal{R}$ 在 S 上有**消去律 (Cancellation law)**。

消去律 (2)

定理 (消去律性質)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 滿足以下條件：

- 有結合律
- 有單位元素 e
- 對所有 $a \in S$ 都有反元素

則 $\mathcal{R}$ 在 S 上有消去律。

消去律 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

消去律 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

1.
   1. e 是單位元素
   2. 對所有 $a \in S$，存在反元素

消去律 (3)

定理

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

1.
   1. e 是單位元素
   2. 對所有 $a \in S$，存在反元素
2. 對於任意 $a, b \in S$，x, y 是未知數，方程式 $a\mathcal{R}x = b$ 和 $y\mathcal{R}a = b$ 存在唯一解。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 e 爲**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記爲 0_S。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 e 爲**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記爲 0_S。
- $\mathcal{R}$ 爲乘法 $\cdot_S$，則 e 爲**乘法單位元素 (Multiplicative identity)**，e 記爲 1_S。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 e 爲**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記爲 0_S。
- $\mathcal{R}$ 爲乘法 $\cdot_S$，則 e 爲**乘法單位元素 (Multiplicative identity)**，e 記爲 1_S。

註

1. $+_S$ 不是眞的代表實數或複數的加法運算，而是代表他在 S 上有類似我們常見的加法性質，因此用這個符號容易聯想；$\cdot_S$ 亦然。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 e 爲**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記爲 0_S。
- $\mathcal{R}$ 爲乘法 $\cdot_S$，則 e 爲**乘法單位元素 (Multiplicative identity)**，e 記爲 1_S。

註

1. $+_S$ 不是眞的代表實數或複數的加法運算，而是代表他在 S 上有類似我們常見的加法性質，因此用這個符號容易聯想；$\cdot_S$ 亦然。
2. 使用 0 和 1 做爲記號只是方便我們去聯想他的性質，事實上並不是實數的「0」和「1」，只是單純的**符號**。

符號簡化 (2)

定義 (反元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 b 爲**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記爲 $-a$。

符號簡化 (2)

定義 (反元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 b 爲**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記爲 $-a$。
- $\mathcal{R}$ 爲乘法 $\cdot_S$，則 b 爲**乘法反元素 (Multiplicative inverse)**，此時 b 記爲 a^{-1}。

符號簡化 (2)

定義 (反元素記號)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 存在單位元素 e，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$，若

- $\mathcal{R}$ 爲加法 $+_S$，則 b 爲**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記爲 $-a$。
- $\mathcal{R}$ 爲乘法 $\cdot_S$，則 b 爲**乘法反元素 (Multiplicative inverse)**，此時 b 記爲 a^{-1}。

註

同樣地，$-a$ 和 a^{-1} 只是單純的符號，不要和減法與倒數搞混。

冪等律

定義 (冪等元素與冪等律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R})$ 中，若有 $a \in S$，使得 $a\mathcal{R}a = a$，則 a 稱爲冪等元素 **(Idempotent element)**。若所有 $a \in S$ 都是冪等元素，則稱二元運算 $\mathcal{R}$ 在 S 上滿足冪等律 **(Idempotent)**。