

Fundamental Abstract Algebra

基礎抽象代數

許胖

板燒高中

January 16, 2015

1 簡介

2 二元運算的性質

- 基本性質
- 單位元素
- 反元素
- 零元素與零因子
- 符號簡化
- 其他性質

二元運算

定義 (二元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A \times B \rightarrow C$ ，對於所有 $a \in A$ 、 $b \in B$ ，存在唯一的 $c \in C$ ，使得 $\mathcal{R}(a, b) = c$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A \times B$ 到 C 的二元運算 (Binary Operation)，此時記為 $a\mathcal{R}b = c$ 。

二元運算

定義 (二元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A \times B \rightarrow C$ ，對於所有 $a \in A$ 、 $b \in B$ ，存在唯一的 $c \in C$ ，使得 $\mathcal{R}(a, b) = c$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A \times B$ 到 C 的**二元運算 (Binary Operation)**，此時記為 $a\mathcal{R}b = c$ 。

註

若 $A = B = C = S$ ，我們稱 \mathcal{R} 是定義在 S 上的二元運算。

範例

範例

下列爲二元運算：

範例

範例

下列爲二元運算：

- 1 整數加法 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

範例

範例

下列爲二元運算：

- 1 整數加法 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- 2 實數乘法 $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

範例

範例

下列為二元運算：

- ① 整數加法 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ② 實數乘法 $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- ③ 實係數矩陣乘法 $\cdot: \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n \times p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$

範例

範例

下列為二元運算：

- 1 整數加法 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- 2 實數乘法 $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- 3 實係數矩陣乘法 $\cdot: \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n \times p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$
- 4 充要條件 $\Leftrightarrow: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \{\top, \perp\}$

範例

範例

下列為二元運算：

- ① 整數加法 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ② 實數乘法 $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- ③ 實係數矩陣乘法 $\cdot: \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n \times p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$
- ④ 充要條件 $\Leftrightarrow: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \{\top, \perp\}$
- ⑤ $\mathcal{O}(n^2)$ 的 LCS 演算法 $\text{LCS}: \{0, 1\}^m \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$

n 元運算與代數系統

定義 (n元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ，對於所有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，存在**唯一**的 $b \in B$ ，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n-ary Operation)**。

n 元運算與代數系統

定義 (n 元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ，對於所有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，存在**唯一**的 $b \in B$ ，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 B 的 **n 元運算 (n -ary Operation)**。

定義 (代數結構與代數系統)

一代數結構 (**Algebraic Structure**) $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

若 $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 為**代數系統 (Algebraic System)**。

n 元運算與代數系統

定義 (n 元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ，對於所有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，存在**唯一**的 $b \in B$ ，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 B 的 n 元運算 (**n -ary Operation**)。

定義 (代數結構與代數系統)

一代數結構 (**Algebraic Structure**) $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

- ① 有一非空集合 S

若 $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 為代數系統 (**Algebraic System**)。

n 元運算與代數系統

定義 (n 元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ，對於所有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，存在**唯一**的 $b \in B$ ，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 B 的 n 元運算 (**n -ary Operation**)。

定義 (代數結構與代數系統)

一代數結構 (**Algebraic Structure**) $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

- ① 有一非空集合 S
- ② $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的二元運算

若 $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 為代數系統 (**Algebraic System**)。

n 元運算與代數系統

定義 (n 元運算)

一個函數 $\mathcal{R} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ，對於所有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，存在**唯一**的 $b \in B$ ，使得 $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$ ，我們稱 \mathcal{R} 是一個從 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 B 的 n 元運算 (**n -ary Operation**)。

定義 (代數結構與代數系統)

一代數結構 (**Algebraic Structure**) $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 滿足以下條件

- ① 有一非空集合 S
- ② $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的二元運算
- ③ 一系列的公理 A

若 $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ 為定義在 S 上的 n 元運算，則稱 $(S, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ 為代數系統 (**Algebraic System**)。

範例

範例

下列為代數結構：

範例

範例

下列為代數結構：

- 1 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

範例

範例

下列為代數結構：

- ① 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- ② 複係數矩陣乘法 $(M_{n \times n}(\mathbb{C}), \cdot)$

範例

下列為代數結構：

- ① 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- ② 複係數矩陣乘法 $(M_{n \times n}(\mathbb{C}), \cdot)$
- ③ 正整數與最大公因數 (\mathbb{Z}^+, \gcd) ，其中最大公因數為二元運算
 $\gcd : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$

範例

範例

下列為代數結構：

- ① 有理數與加法、乘法 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- ② 複係數矩陣乘法 $(M_{n \times n}(\mathbb{C}), \cdot)$
- ③ 正整數與最大公因數 (\mathbb{Z}^+, \gcd) ，其中最大公因數為二元運算
 $\gcd : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$
- ④ 函數合成 $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$

基本性質 (1)

定義 (封閉律)

一個代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}b \in S$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 滿足封閉律 (**Closure**)。

基本性質 (1)

定義 (封閉律)

一個代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}b \in S$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 滿足封閉律 (**Closure**)。

定義 (結合律)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b, c \in S$ ，使得 $(a\mathcal{R}b)\mathcal{R}c = a\mathcal{R}(b\mathcal{R}c)$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 具有結合律 (**Associativity, Associative property**)。

基本性質 (1)

定義 (封閉律)

一個代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}b \in S$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 滿足封閉律 (**Closure**)。

定義 (結合律)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b, c \in S$ ，使得 $(a\mathcal{R}b)\mathcal{R}c = a\mathcal{R}(b\mathcal{R}c)$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 具有結合律 (**Associativity, Associative property**)。

定義 (交換律)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}b = b\mathcal{R}a$ ，則稱二元運算 \mathcal{R} 對 S 具有交換律 (**Commutativity, Commutative property**)。

基本性質 (2)

定義 (吸收律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得

$$a\mathcal{R}_1(a\mathcal{R}_2b) = a$$

$$a\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1b) = a$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 在 S 上滿足吸收律 (**Absorption law**)。

基本性質 (2)

定義 (吸收律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b \in S$ ，使得

$$a\mathcal{R}_1(a\mathcal{R}_2b) = a$$

$$a\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1b) = a$$

，則稱二元運算 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 在 S 上滿足吸收律 (**Absorption law**)。

註

吸收律是定義在一對二元運算上，因此不能單獨定義一個運算子具有吸收律。

基本性質 (3)

定義 (分配律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$ ，使得

$$a\mathcal{R}_1(b\mathcal{R}_2c) = (a\mathcal{R}_1b)\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1c)$$

$$(b\mathcal{R}_2c)\mathcal{R}_1a = (b\mathcal{R}_1a)\mathcal{R}_2(c\mathcal{R}_1a)$$

，則稱二元運算 \mathcal{R}_1 在 S 上對 \mathcal{R}_2 具有**分配律 (Distributivity, Distributive property)**。

基本性質 (3)

定義 (分配律)

一個封閉的代數結構 $(S, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ 中，若對於所有 $a, b, c \in S$ ，使得

$$a\mathcal{R}_1(b\mathcal{R}_2c) = (a\mathcal{R}_1b)\mathcal{R}_2(a\mathcal{R}_1c)$$

$$(b\mathcal{R}_2c)\mathcal{R}_1a = (b\mathcal{R}_1a)\mathcal{R}_2(c\mathcal{R}_1a)$$

，則稱二元運算 \mathcal{R}_1 在 S 上對 \mathcal{R}_2 具有**分配律 (Distributivity, Distributive property)**。

註

儘管 \mathcal{R}_1 對 \mathcal{R}_2 有分配律，但 \mathcal{R}_2 未必對 \mathcal{R}_1 有分配律。

單位元素 (1)

定義 (單位元素)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若

- 存在 $e_l \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $e_l \mathcal{R} a = a$ ，則 e_l 為左單位元素 (Left identity)
- 存在 $e_r \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $a \mathcal{R} e_r = a$ ，則 e_r 為右單位元素 (Right identity)
- 存在 $e \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $e \mathcal{R} a = a \mathcal{R} e = a$ ，則 e 為單位元素 (Identity)

單位元素 (2)

定理 (單位元素存在性)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若存在左單位元素 e_l 、右單位元素 e_r ，則 $e_l = e_r$ ，即單位元素存在。

單位元素 (2)

定理 (單位元素存在性)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若存在左單位元素 e_l 、右單位元素 e_r ，則 $e_l = e_r$ ，即單位元素存在。

定理 (單位元素唯一性)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若存在單位元素，則單位元素唯一。

反元素 (1)

定義 (反元素)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 $e \in S$ ，若對 $a \in S$ ，

- 存在 $b_l \in S$ ， $b_l \mathcal{R} a = e$ ，則 b_l 稱為 a 的左反元素 (Left inverse)
- 存在 $b_r \in S$ ， $a \mathcal{R} b_r = e$ ，則 b_r 稱為 a 的右反元素 (Right inverse)
- 存在 $b \in S$ ， $b \mathcal{R} a = a \mathcal{R} b = e$ ，則 b 稱為 a 的反元素 (Inverse)， a 又稱可逆元素 (Invertible element)

若對所有 $a \in S$ 都有反元素，則稱 \mathcal{R} 在 S 上有反元素 (Inverse property)。

反元素 (2)

性質

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，則 e 的反元素為 e 。

反元素 (2)

性質

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，則 e 的反元素為 e 。

定理 (反元素存在性*)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且 \mathcal{R} 具有結合律，若 $a \in S$ 存在左反元素 b_l ，右反元素 b_r ，則 $b_l = b_r$ ，即反元素存在。

反元素 (2)

性質

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，則 e 的反元素為 e 。

定理 (反元素存在性*)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且 \mathcal{R} 具有結合律，若 $a \in S$ 存在左反元素 b_l ，右反元素 b_r ，則 $b_l = b_r$ ，即反元素存在。

定理 (反元素唯一性*)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且 \mathcal{R} 具有結合律，若 $a \in S$ 存在反元素，則反元素唯一。

反元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

反元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

- ① 有左單位元素 e_l
- ② 對所有 $a \in S$ ，存在左反元素

反元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

- ①
 - ① 有左單位元素 e_l
 - ② 對所有 $a \in S$ ，存在左反元素
- ②
 - ① e_l 是單位元素
 - ② $(*)$ 對所有 $a \in S$ ，存在反元素

零元素 (1)

定義 (零元素)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若

- 存在 $z_l \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $z_l \mathcal{R} a = z_l$ ，則 z_l 為左零元素 (Left zero element)
- 存在 $z_r \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $a \mathcal{R} z_r = z_r$ ，則 z_r 為右零元素 (Right zero element)
- 存在 $z \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $z \mathcal{R} a = a \mathcal{R} z = z$ ，則 z 為零元素 (Zero element)

零元素 (1)

定義 (零元素)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若

- 存在 $z_l \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $z_l \mathcal{R} a = z_l$ ，則 z_l 為左零元素 (Left zero element)
- 存在 $z_r \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $a \mathcal{R} z_r = z_r$ ，則 z_r 為右零元素 (Right zero element)
- 存在 $z \in S$ ，對所有 $a \in S$ ， $z \mathcal{R} a = a \mathcal{R} z = z$ ，則 z 為零元素 (Zero element)

註

零元素又稱吸收元素 (Absorbing element)。

零元素 (2)

定理 (零元素存在性*)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 具有結合律，若存在左零元素 z_l ，右零元素 z_r ，則 $z_l = z_r$ ，即零元素存在。

零元素 (2)

定理 (零元素存在性*)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 具有結合律，若存在左零元素 z_l ，右零元素 z_r ，則 $z_l = z_r$ ，即零元素存在。

定理 (零元素唯一性*)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 具有結合律，若存在零元素，則零元素唯一。

零元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 有單位元素 e 、零元素 z ，若 $|S| \geq 2$ ，則 $e \neq z$ 。

零元素 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 有單位元素 e 、零元素 z ，若 $|S| \geq 2$ ，則 $e \neq z$ 。

性質

(*) 一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若 \mathcal{R} 在 S 上有零元素 z 且 $z \neq e$ ，則 z 沒有反元素。

零因子

定義 (零因子)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中存在零元素 z ，若 $a, b \in S$ 且 $a, b \neq z$ ，使得 $a\mathcal{R}b = z$ ，則 a, b 稱為**零因子 (Zero divisor)**。

零因子

定義 (零因子)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中存在零元素 z ，若 $a, b \in S$ 且 $a, b \neq z$ ，使得 $a\mathcal{R}b = z$ ，則 a, b 稱為**零因子 (Zero divisor)**。

定理 (零因子性質)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 滿足以下條件：

- 有結合律
- 存在單位元素 e
- 存在零元素 z

若 $a, b \in S$ 是零因子，則 a, b 沒有反元素。

消去律 (1)

定義 (消去律)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，對所有 $a, b, c \in S$ ，若

- $a\mathcal{R}b = a\mathcal{R}c$ 可得到 $b = c$ ，則 \mathcal{R} 在 S 上有左消去律 (**Left cancellation law**)。
- $b\mathcal{R}a = c\mathcal{R}a$ 可得到 $b = c$ ，則 \mathcal{R} 在 S 上有右消去律 (**Right cancellation law**)。
- \mathcal{R} 滿足左消去律和右消去律，則 \mathcal{R} 在 S 上有消去律 (**Cancellation law**)。

消去律 (2)

定理 (消去律性質)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 滿足以下條件：

- 有結合律
- 有單位元素 e
- 對所有 $a \in S$ 都有反元素

則 \mathcal{R} 在 S 上有消去律。

消去律 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

消去律 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

- ① e 是單位元素
- ② 對所有 $a \in S$ ，存在反元素

消去律 (3)

定理

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 若滿足結合律，則以下兩個敘述是等價的：

- ① ① e 是單位元素
- ② 對所有 $a \in S$ ，存在反元素
- ② 對於任意 $a, b \in S$ ， x, y 是未知數，方程式 $a\mathcal{R}x = b$ 和 $y\mathcal{R}a = b$ 存在唯一解。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 e 為加法單位元素 (**Additive identity**)，此時 e 記為 0_S 。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 e 為加法單位元素 (**Additive identity**)，此時 e 記為 0_S 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 e 為乘法單位元素 (**Multiplicative identity**)， e 記為 1_S 。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 e 為**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記為 0_S 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 e 為**乘法單位元素 (Multiplicative identity)**， e 記為 1_S 。

註

- ① $+_S$ 不是真的代表實數或複數的加法運算，而是代表他在 S 上有類似我們常見的加法性質，因此用這個符號容易聯想； \cdot_S 亦然。

符號簡化 (1)

定義 (單位元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 e 為**加法單位元素 (Additive identity)**，此時 e 記為 0_S 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 e 為**乘法單位元素 (Multiplicative identity)**， e 記為 1_S 。

註

- ① $+_S$ 不是真的代表實數或複數的加法運算，而是代表他在 S 上有類似我們常見的加法性質，因此用這個符號容易聯想； \cdot_S 亦然。
- ② 使用 0 和 1 做為記號只是方便我們去聯想他的性質，事實上並不是實數的「 0 」和「 1 」，只是單純的符號。

符號簡化 (2)

定義 (反元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$ ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 b 為**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記為 $-a$ 。

符號簡化 (2)

定義 (反元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$ ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 b 為**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記為 $-a$ 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 b 為**乘法反元素 (Multiplicative inverse)**，此時 b 記為 a^{-1} 。

符號簡化 (2)

定義 (反元素記號)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 存在單位元素 e ，且所有 $a \in S$ 均有反元素 $b \in S$ ，若

- \mathcal{R} 為加法 $+_S$ ，則 b 為**加法反元素 (Additive inverse)**，此時 b 記為 $-a$ 。
- \mathcal{R} 為乘法 \cdot_S ，則 b 為**乘法反元素 (Multiplicative inverse)**，此時 b 記為 a^{-1} 。

註

同樣地， $-a$ 和 a^{-1} 只是單純的符號，不要和減法與倒數搞混。

冪等律

定義 (冪等元素與冪等律)

一個封閉的代數結構 (S, \mathcal{R}) 中，若有 $a \in S$ ，使得 $a\mathcal{R}a = a$ ，則 a 稱為冪等元素 (**Idempotent element**)。若所有 $a \in S$ 都是冪等元素，則稱二元運算 \mathcal{R} 在 S 上滿足冪等律 (**Idempotent**)。